

Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 21

A. Δροσόπουλος

18-01-2023

- 1 ΗΜ κύματα και διάνυσμα Poynting
- 2 Μαγνητικά κυκλώματα
- 3 Ενέργεια μαγνητοστατικού πεδίου
- 4 Δυνάμεις σε μαγνητικά υλικά
- 5 Μετασχηματιστές

1 ΗΜ κύματα και διάνυσμα Poynting

2 Μαγνητικά κυκλώματα

3 Ενέργεια μαγνητοστατικού πεδίου

4 Δυνάμεις σε μαγνητικά υλικά

5 Μετασχηματιστές

Μετάδοση σε διηλεκτρικά με διαρροή

Διηλεκτρικό με διαρροή είναι το μέσον όπου ένα ΗΜ κύμα χάνει ενέργεια καθώς μεταδίδεται. Οι αρμονικές εξισώσεις Maxwell είναι

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}\end{aligned}$$

Έχουμε

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu(\nabla \times \mathbf{H})$$

Από τη ταυτότητα

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} &= -j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E} \Rightarrow \\ \nabla^2\mathbf{E} - \gamma^2\mathbf{E} &= 0\end{aligned}$$

όπου $\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$ η σταθερά μετάδοσης του μέσου (μονάδα γ , m^{-1}).

Μετάδοση (συνέχεια 1)

Για $\gamma = \alpha + j\beta$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]} \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]}$$

Για $\mathbf{E} = E_x(z) \hat{\mathbf{x}}$ και μετάδοση στον $+\hat{\mathbf{z}}$ καταλήγουμε

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 \right] E_x(z) = 0$$

με λύση

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-\gamma z} + E_0^- e^{\gamma z} = E_0^+ e^{-\gamma z}$$

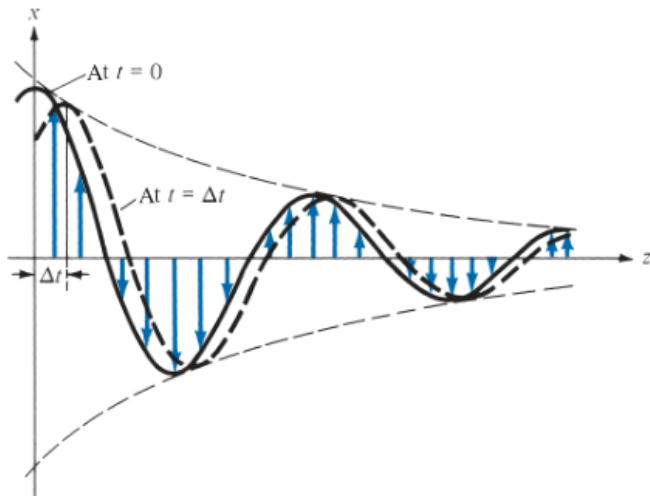
εφόσον $E_0^- = 0$. (Δίδεται μετάδοση στον $+\hat{\mathbf{z}}$). Οπότε

$$\mathbf{E} = E_0^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}}$$

Παρόμοια σχέση ισχύει και για το \mathbf{H} . Το σημαντικό σημείο είναι η χαρακτηριστική εμπέδηση του μέσου

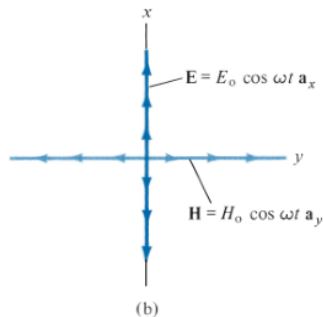
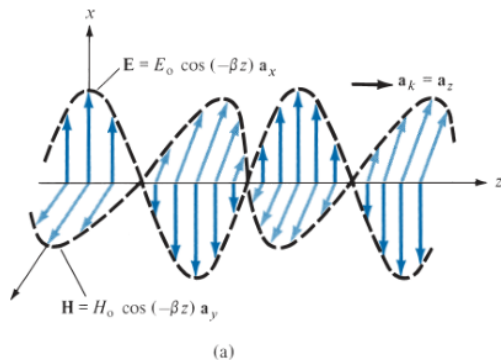
$$\eta = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

Μετάδοση (συνέχεια 2)



Μετάδοση στο κενό

$$\eta = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi = 377 \Omega$$



HM κύματα σε αγωγούς

Καλός αγωγός $\sigma \gg \omega\epsilon$ οπότε

$$\sigma \approx \infty, \quad \epsilon = \epsilon_0, \quad \mu = \mu_0\mu_r$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\sigma}, \quad u = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}/45^\circ$$

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}} \quad \mathbf{H} = \frac{E_0}{\sqrt{\omega\mu/\sigma}} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - 45^\circ) \hat{\mathbf{y}}$$

Skin depth, penetration depth (επιδερμίδα) το διάστημα $\delta = 1/\alpha$ όπου $E_0 e^{-\alpha\delta} = E_0/e$. Για τους αγωγούς (EM spectrum)

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$$

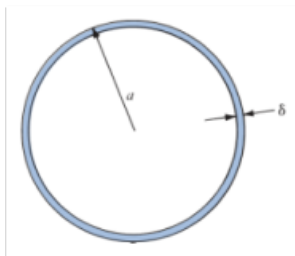
που σημαίνει σε υψηλές συχνότητες τα φορτία του ρεύματος συγκεντρώνονται στην επιφάνεια (επιδερμικό φαινόμενο) και αυξάνεται η ηλεκτρική αντίσταση.

ΗΜ κύματα σε αγωγούς (συνέχεια 1)

TABLE 10.2 Skin Depth in Copper*

Frequency (Hz)	10	60	100	500	10^4	10^8	10^{10}
Skin depth (mm)	20.8	8.6	6.6	2.99	0.66	6.6×10^{-3}	6.6×10^{-4}

*For copper, $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m, $\mu = \mu_0$, $\delta = 66.1/\sqrt{f}$ (in mm).



ΗΜ κύματα σε αγωγούς (συνέχεια 2)

Από

$$R_{dc} = \frac{\ell}{\sigma S}$$

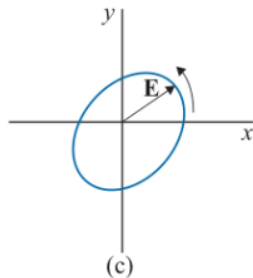
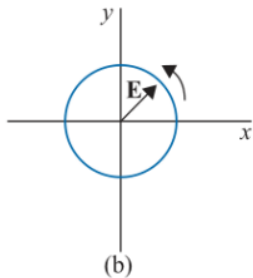
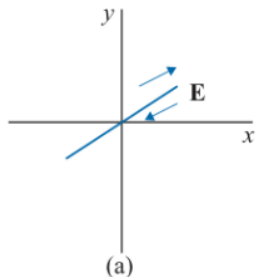
σε

$$R_{ac} = \frac{1}{\sigma \delta} \frac{\ell}{w} \quad \text{όπου} \quad S \approx \delta w$$

Κύριος όγκος ρεύματος μη γραμμικά κατανεμημένος σε 5δ , πρακτικά ίσος με ομοιόμορφη κατανομή σε πάχος δ .

Πόλωση ΗΜ κυμάτων

Η τροχιά της μύτης του \mathbf{E} σε κάποιο σημείο του χώρου σε επίπεδο κάθετο στην κατεύθυνση μετάδοσης σαν συνάρτηση του χρόνου.



Π.χ. AM Vpol, FM Cpol

Ισχύς και δiάνυσμα Poynting

Μεταφορά ενέργειας με ΗΜ κύματα

Από νόμο Ampere

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \sigma E^2 + \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

Από την ταυτότητα $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ για $\mathbf{A} = \mathbf{H}$ και $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ έχουμε

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) = \sigma E^2 + \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

Από νόμο Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{H} \cdot \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{2} \mu \frac{\partial H^2}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) = \sigma E^2 + \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial H^2}{\partial t} \Rightarrow$$

Ισχύς και δiάνυσμα Poynting (συνέχεια 1)

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\sigma E^2 - \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial E^2}{\partial t} - \frac{1}{2}\mu \frac{\partial H^2}{\partial t} \Rightarrow$$
$$\int_v \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv = -\frac{\partial}{\partial t} \int_v \left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 \right) dv - \int_v \sigma E^2 dv$$

και με το θεώρημα απόκλισης έχουμε το θεώρημα Poynting

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_v \left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 \right) dv - \int_v \sigma E^2 dv$$

όπου η ολική καθαρή ισχύς που εξέρχεται από έναν χώρο v ισούται με τον ρυθμό μείωσης της ενέργειας αποθηκευμένης στο ΗΜ πεδίο σε αυτόν τον χώρο μείον τις ωμικές απώλειες πάλι σε αυτόν τον χώρο.

Το δiάνυσμα Poynting $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ σε W/m^2 είναι η στιγμιαία πυκνότητα ισχύος του ΗΜ πεδίου σε κάποιο σημείο του χώρου και η κατεύθυνσή του είναι η κατεύθυνση μετάδοσης του ΗΜ κύματος.

Ισχύς και δiάνυσμα Poynting (συνέχεια 2)

Δiάνυσμα Poynting $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$

Μέσο δiάνυσμα Poynting

$$\mathbf{P}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) dt$$

Με φάσορες, το μέσο δiάνυσμα Poynting είναι

$$\mathbf{P}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \Re\{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \}$$

Η ολική μέση ισχύς που διέρχεται από μια επιφάνεια S είναι

$$P_m = \int_S \mathbf{P}_m \cdot d\mathbf{S}$$

Άσκηση 2

Σε μη μαγνητικό μέσο έχουμε $\mathbf{E} = 4 \sin(2\pi \times 10^7 t - 0.8x) \hat{\mathbf{z}}$ V/m. Να βρεθούν:

- 1 ϵ_r, η .
- 2 Η μέση ισχύς που μεταφέρεται από το κύμα.
- 3 Η ολική ισχύς που διαπερνά 100 cm^2 της επιφάνειας $2x + y = 5$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\alpha = 0$. Αυτό σημαίνει μηδενικές απώλειες άρα και $\sigma = 0$. Έχουμε

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r} \Rightarrow \epsilon_r = \left(\frac{\beta c}{\omega}\right)^2 = 14.59$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}} = 98.7 \Omega$$

Για τη μέση ισχύ έχουμε

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{E_0^2}{\eta} \sin^2(\omega t - \beta x) \hat{\mathbf{x}}$$

Άσκηση 2 (συνέχεια 1)

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{P} dt = \frac{E_0^2}{\eta} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t - \beta x) dt \hat{\mathbf{x}} = \frac{E_0^2}{2\eta} \hat{\mathbf{x}} = 81 \hat{\mathbf{x}} \text{ mW/m}^2$$

Αν έχουμε μια επιφάνεια $f(x, y, z) = 0$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια είναι

$$\hat{\mathbf{a}}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

οπότε, για την επιφάνεια $f(x, y, z) = 2x + y - 5$ έχουμε

$$\hat{\mathbf{a}}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{2\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{5}}$$

Άρα η ολική ισχύς που διαπερνά 100 cm^2 αυτής της επιφάνειας είναι:

$$P_m = \int_S \mathbf{P}_m \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{P}_m \cdot S\hat{\mathbf{a}}_n = (81 \times 10^{-3} \hat{\mathbf{x}})(100 \times 10^{-4}) \left(\frac{2\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{5}} \right) = 7.24 \times 10^{-4} \text{ W}$$

1 ΗΜ κύματα και διάνυσμα Poynting

2 Μαγνητικά κυκλώματα

3 Ενέργεια μαγνητοστατικού πεδίου

4 Δυνάμεις σε μαγνητικά υλικά

5 Μετασχηματιστές

Μαγνητικά κυκλώματα

Μέθοδος επίλυσης προβλημάτων με μαγνητικά πεδία που βασίζεται στη θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Συσκευές όπως τοροειδή, μετασχηματιστές, μηχανές, γεννήτριες και ρελέ μπορούν να θεωρηθούν σαν μαγνητικά κυκλώματα ([magnetic circuits](#)). Ορίζουμε μεγέθη

Μαγνητεγερτική δύναμη σε αμπεροστροφές, $A \cdot t$:

$$ME\Delta = NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

Μαγνητική αντίσταση σε αμπεροστροφές ανά Wb, A/Wb ή H^{-1} :

$$R_m = \frac{\ell}{\mu S}$$

Τύπος Hopkinson (Hopkinson's or Rowland's law) αντίστοιχος νόμου Ohm

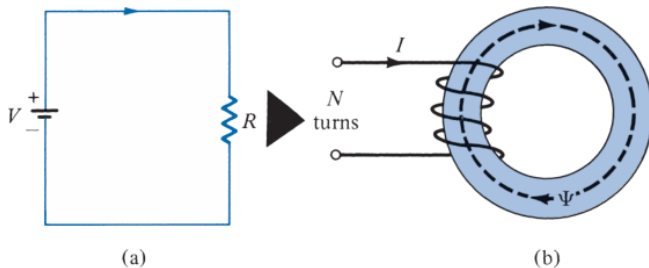
$$\Phi = \frac{ME\Delta}{R_m}$$

Μαγνητικά κυκλώματα (συνέχεια 1)

Electric	Magnetic
Conductivity σ	Permeability μ
Field intensity E	Field intensity H
Current $I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$	Magnetic flux $\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
Current density $\mathbf{J} = \frac{I}{S} = \sigma \mathbf{E}$	Flux density $\mathbf{B} = \frac{\Psi}{S} = \mu \mathbf{H}$
Electromotive force (emf) V	Magnetomotive force (mmf) \mathcal{F}
Resistance R	Reluctance \mathcal{R}
Conductance $G = \frac{1}{R}$	Permeance $\mathcal{P} = \frac{1}{\mathcal{R}}$
Ohm's law $R = \frac{V}{I} = \frac{\ell}{\sigma S}$ or $V = E\ell = IR$	Ohm's law $\mathcal{R} = \frac{\mathcal{F}}{\Psi} = \frac{\ell}{\mu S}$ or $\mathcal{F} = H\ell = \Psi \mathcal{R} = NI$
Kirchhoff's laws: $\sum I = 0$	Kirchhoff's laws: $\sum \Psi = 0$
$\sum V - \sum RI = 0$	$\sum \mathcal{F} - \sum \mathcal{R} \Psi = 0$

Σχήμα: Αναλογία μεταξύ ηλεκτρικών και μαγνητικών κυκλωμάτων

Μαγνητικά κυκλώματα (συνέχεια 2)



Σχήμα: Αναλογία μεταξύ ηλεκτρικών και μαγνητικών κυκλωμάτων

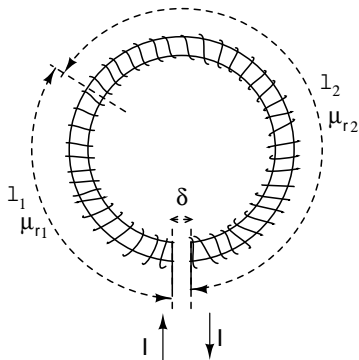
Μαγνητικά κυκλώματα - Περιορισμοί

- Ηλεκτρικά ρεύματα αντιπροσωπεύουν ροή ηλεκτρικών φορτίων και μεταφέρουν ενέργεια/ισχύ μέρος της οποίας καταναλώνεται σε ωμικές αντιστάσεις. Τα μαγνητικά πεδία δεν αντιπροσωπεύουν κάποια ροή και δεν καταναλώνεται ισχύ σε μαγνητικές αντιστάσεις.
- Η ηλεκτρική αγωγιμότητα δεν εξαρτάται από το ρεύμα ενώ η μαγνητική διαπερατότητα εξαρτάται από το μαγνητικό πεδίο.
- Το ηλεκτρικό ρεύμα περιορίζεται στο ηλεκτρικό κύκλωμα με ελάχιστη διαρροή. Δεν συμβαίνει το ίδιο και με τη μαγνητική ροή και συχνά υπάρχει μεγάλη διαρροή (σκέδαση) που πρέπει να ληφθεί υπόψη και δύσκολα εκτιμάται.
- Και πιο σημαντικά, τα μαγνητικά κυκλώματα είναι μη γραμμικά και η μαγνητική αντίσταση εξαρτάται από το πεδίο (κορεσμός) και την ιστορία μαγνήτισης (υστέρηση). Η εναπομένουσα μαγνήτιση μάλιστα μπορεί να δημιουργεί μαγνητική ροή χωρίς ΜΕΔ.

Παρόλους τους περιορισμούς είναι μια χρήσιμη τεχνική για προσεγγιστική ανάλυση πρακτικών συσκευών.

Άσκηση 1

Στο δαχτυλίδι του σχήματος το πηνίο έχει 200 σπείρες, το τμήμα 1 έχει μέσο μήκος $\ell_1 = 30 \text{ cm}$ και $\mu_{r1} = 1000$, το τμήμα 2 έχει μέσο μήκος $\ell_2 = 70 \text{ cm}$ και $\mu_{r2} = 3000$ και το διάκενο έχει μήκος $\delta = 0.2 \text{ cm}$. Η διατομή του πηνίου είναι 15 cm^2 . Να υπολογιστεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο αν η μαγνητική ροή είναι $\Phi = 200 \times 10^{-4} \text{ Wb}$.



Άσκηση 1 (συνέχεια 1)

Η κάθε επί μέρους μαγνητική αντίσταση είναι:

$$R_{m1} = \frac{\ell_1}{\mu S} = \frac{\ell_1}{\mu_{r1}\mu_0 S} = \frac{0.3}{1000 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 15 \cdot 10^{-4}} = 1.591 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m2} = \frac{\ell_2}{\mu_{r2}\mu_0 S} = \frac{0.7}{3000 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 15 \cdot 10^{-4}} = 1.238 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m\delta} = \frac{\delta}{\mu_0 S} = \frac{0.002}{4\pi 10^{-7} \cdot 15 \cdot 10^{-4}} = 1.061 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

Η ολική μαγνητική αντίσταση είναι:

$$R_{m,\text{o}\lambda} = R_{m1} + R_{m2} + R_{m\delta} = 1.344 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

Από τον τύπο Hopkinson, έχουμε:

$$\Phi = \frac{IN}{R_{m,\text{o}\lambda}} \Rightarrow I = \frac{\Phi \cdot R_{m,\text{o}\lambda}}{N} = \frac{200 \cdot 10^{-4} \cdot 1.344 \times 10^6}{200} = 134.4 \text{ A}$$

Άσκηση 2

Πηνίο με 2000 σπείρες έχει μήκος 45 cm και διαρρέεται από ρεύμα έντασης 1.2 A. Να υπολογιστούν:

- Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του.
- Η μαγνητική ροή στο εσωτερικό του αν η διάμετρός του είναι $d = 120$ mm.

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου είναι:

$$H = \frac{IN}{\ell} = \frac{1.2 \cdot 2000}{0.45} = 5.333 \times 10^3 \text{ A/m}$$

Η μαγνητική ροή στο εσωτερικό του πηνίου είναι:

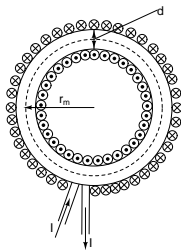
$$\Phi = B \cdot S = \mu_0 H \cdot S$$

όπου η διατομή $S = \pi d^2/4$. Οπότε:

$$\Phi = 4\pi 10^{-7} \cdot 5.333 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{\pi(0.120)^2}{4} \right) = 7.579 \times 10^{-5} \text{ Wb}$$

Άσκηση 3

Ένα κυκλικό πηνίο (τοροειδές) με 780 σπείρες έχει διάμετρο σύρματος 35 mm και η ακτίνα της μέσης περιμέτρου είναι 32 cm. Να βρεθεί η ένταση του ρεύματος που πρέπει να διαρρέει το πηνίο ώστε η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του να είναι 40000 A/m.



Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου που διαρρέεται από ρεύμα είναι:

$$H = \frac{IN}{\ell} \Rightarrow I = \frac{H \cdot \ell}{N} = \frac{H \cdot 2\pi r_m}{N} = \frac{40000 \cdot 2\pi \cdot 0.32}{780} = 103.11 \text{ A}$$

Άσκηση 4

Ένα πηνίο με 1500 σπείρες είναι τυλιγμένο σε ξύλινο δακτυλίδι με μέση περίμετρο 30 cm και διατομή 4 cm². Το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης 0.4 A. Να υπολογιστούν:

- Η μαγνητική ροή στο δακτυλίδι.
- Η μαγνητική επαγωγή στο δακτυλίδι.

Εφόσον το υλικό είναι ξύλο (μη μαγνητικό) έχουμε $\mu_r = 1$. Οπότε:

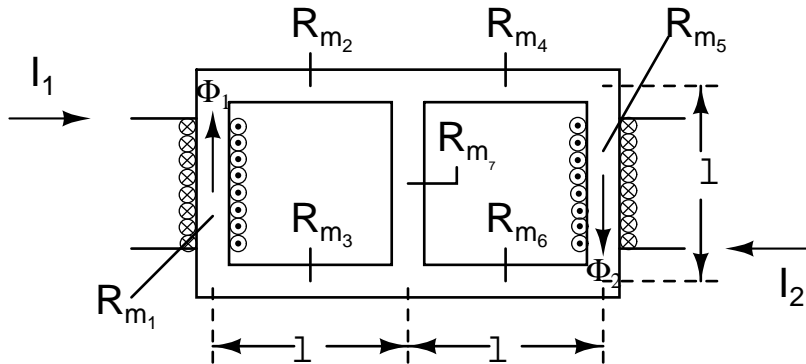
$$R_m = \frac{\ell}{\mu_r \mu_0 S} = \frac{0.30}{1 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 5.968 \times 10^8 \text{ H}^{-1}$$

$$\Phi = \frac{I \cdot N}{R_m} = \frac{0.4 \cdot 1500}{5.968 \times 10^8} = 1.005 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

$$\Phi = B \cdot S \Rightarrow B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1.005 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-4}} = 2.512 \times 10^{-3} \text{ T}$$

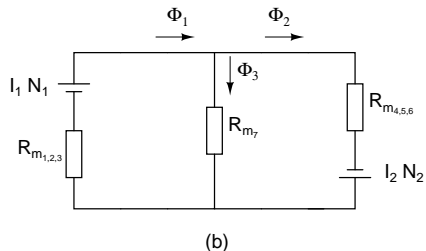
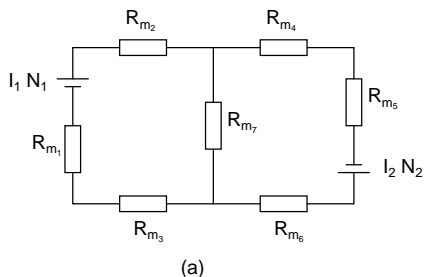
Άσκηση 4

Δίδεται το παρακάτω μαγνητικό κύκλωμα όπου $I_1 = 5 \text{ A}$, $N_1 = 100$ σπείρες, $I_2 = 10 \text{ A}$, $N_2 = 200$ σπείρες, $S = 10 \text{ cm}^2$, $\ell = 20 \text{ cm}$, $\mu = 1000 \text{ H/m}$. Να υπολογιστεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στους κλάδους του.



Άσκηση 4 (συνέχεια 1)

Φτιάχνουμε το αντίστοιχο ηλεκτρικό κύκλωμα του παραπάνω μαγνητικού αφού προσδιορίσουμε τη φορά της μαγνητικής ροής στο εσωτερικό των δύο πηνίων. Υπολογίζουμε κατόπιν τις μαγνητικές αντιστάσεις για το κάθε τμήμα του μαγνητικού υλικού, οι οποίες, εφόσον κάθε κλάδος έχει ίδιο μήκος, ίδια διατομή και αποτελείται από το ίδιο υλικό, είναι όλες ίδιες.



Έτσι έχουμε:

Άσκηση 4 (συνέχεια 2)

$$R_{m_1} = \dots = R_{m_7} = R_m = \frac{\ell}{\mu S} = \frac{0.2}{1000 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0.2 \text{ H}^{-1}$$

Το κύκλωμα (a) απλοποιείται στο (b) όπου έχουμε $R_{m_1} + R_{m_2} + R_{m_3} = R_{m_{1,2,3}}$ και $R_{m_4} + R_{m_5} + R_{m_6} = R_{m_{4,5,6}}$ (αντιστάσεις εν σειρά). Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε κανόνες Kirchhoff και να βρούμε τα κλαδικά Φ .

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \\ R_{m_{1,2,3}} \Phi_1 + R_{m_7} \Phi_3 = I_1 N_1 \\ R_{m_{4,5,6}} \Phi_2 - R_{m_7} \Phi_3 = I_2 N_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \\ 0.6\Phi_1 + 0.2\Phi_3 = 500 \\ 0.6\Phi_2 - 0.2\Phi_3 = 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Phi_1 = 1333.3 \text{ Wb} \quad \Phi_2 = 2833.3 \text{ Wb} \quad \Phi_3 = -1500 \text{ Wb}$$

Αρνητική Φ_3 σημαίνει απλώς ότι η πραγματική φορά της είναι αντίθετη από αυτή που έχουμε σημειώσει στο κύκλωμα.

Άσκηση 4 (συνέχεια 3)

```
>> A=[1 -1 -1; 0.6 0 0.2; 0 0.6 -0.2]
```

```
A =
```

```
 1.0000  -1.0000  -1.0000
 0.6000         0   0.2000
         0   0.6000  -0.2000
```

```
>> b=[0; 500; 2000]
```

```
b =
```

```
 0
 500
 2000
```

```
>> F = inv(A)*b
```

```
F =
```

```
 1333.3
 2833.3
-1500.0
```

Άσκηση 4 (συνέχεια 4)

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου σε κάθε κλάδο του κυκλώματος είναι:

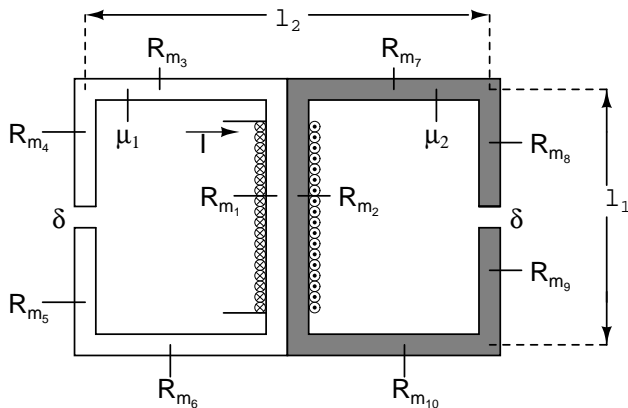
$$H_1 = \frac{B_1}{\mu} = \frac{\Phi_1}{\mu S} = \frac{1333.3}{1000 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 1333.3 \text{ A/m}$$

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu} = \frac{\Phi_2}{\mu S} = \frac{2833.3}{1000 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 2833.3 \text{ A/m}$$

$$H_3 = \frac{B_3}{\mu} = \frac{\Phi_3}{\mu S} = -\frac{1500}{1000 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -1500 \text{ A/m}$$

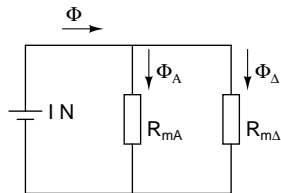
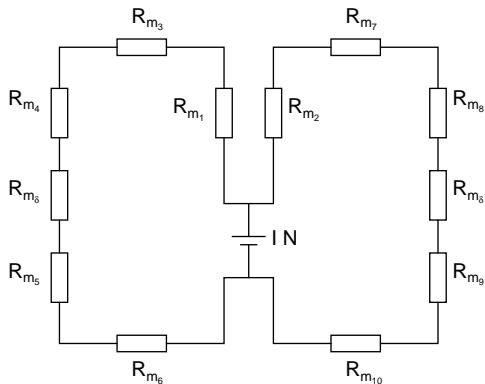
Άσκηση 5

Δίδεται το παρακάτω μαγνητικό κύκλωμα που αποτελείται από δύο διαφορετικά σιδηρομαγνητικά υλικά με $\mu_1 = 1.29 \times 10^{-3} \text{ H/m}$, $\mu_2 = 8.82 \times 10^{-4} \text{ H/m}$, $\ell_1 = 7 \text{ cm}$, $\ell_2 = 10 \text{ cm}$, $\delta = 0.1 \text{ cm}$, $S = 3 \text{ cm}^2$, $N = 100$ σπείρες και $I = 5 \text{ A}$. Να υπολογιστούν οι εντάσεις του μαγνητικού πεδίου στα δύο διάκενα του μαγνητικού κυκλώματος και να συγκριθούν.



Άσκηση 5 (συνέχεια 1)

Το αντίστοιχο ηλεκτρικό κύκλωμα είναι:



Άσκηση 5 (συνέχεια 2)

$$R_{m_3} = R_{m_6} = \frac{\ell_2/2}{\mu_1 S} = \frac{0.1/2}{1.29 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 1.292 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m_4} = R_{m_5} = \frac{(\ell_1 - \delta)/2}{\mu_1 S} = \frac{(0.07 - 0.001)/2}{1.29 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 8.915 \times 10^4 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m\delta} = \frac{\delta}{\mu_0 S} = \frac{0.001}{4\pi 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 2.653 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m_1} = \frac{\ell_1}{\mu_1 S} = \frac{0.07}{1.29 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 1.809 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m_7} = R_{m_{10}} = \frac{\ell_2/2}{\mu_2 S} = \frac{0.1/2}{8.82 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 1.890 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m_8} = R_{m_9} = \frac{(\ell_1 - \delta)/2}{\mu_2 S} = \frac{(0.07 - 0.001)/2}{8.82 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 1.304 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m_2} = \frac{\ell_1}{\mu_2 S} = \frac{0.07}{8.82 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 2.645 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

Συνδυάζουμε εν σειρά όλες τις αντιστάσεις αριστερού και δεξιού τμήματος

$$R_{mA} = R_{m_1} + R_{m_3} + R_{m_4} + R_{m\delta} + R_{m_5} + R_{m_6} = 3.2706 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m\Delta} = R_{m_2} + R_{m_7} + R_{m_8} + R_{m\delta} + R_{m_9} + R_{m_{10}} = 3.5563 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

Άσκηση 5 (συνέχεια 3)

Κλαδικές ροές:

$$\Phi_A = \frac{I \cdot N}{R_{mA}} = 1.529 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Phi_{\Delta} = \frac{I \cdot N}{R_{m\Delta}} = 1.406 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

Μαγνητική επαγωγή στους δυο κλάδους:

$$B_A = \frac{\Phi_A}{S} = \frac{1.529 \times 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-4}} = 0.510 \text{ T}$$

$$B_{\Delta} = \frac{\Phi_{\Delta}}{S} = \frac{1.406 \times 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-4}} = 0.469 \text{ T}$$

Ένταση του μαγνητικού πεδίου στα διάκενα:

$$H_{\delta A} = \frac{B_A}{\mu_0} = 4.058 \times 10^5 \text{ A/m}$$

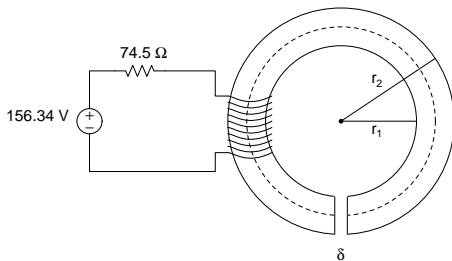
$$H_{\delta \Delta} = \frac{B_{\Delta}}{\mu_0} = 3.732 \times 10^5 \text{ A/m}$$

Όπως βλέπουμε, το αριστερό διάκενο έχει μεγαλύτερη τιμή, πράγμα που το αναμέναμε μιας και $\mu_1 > \mu_2$.

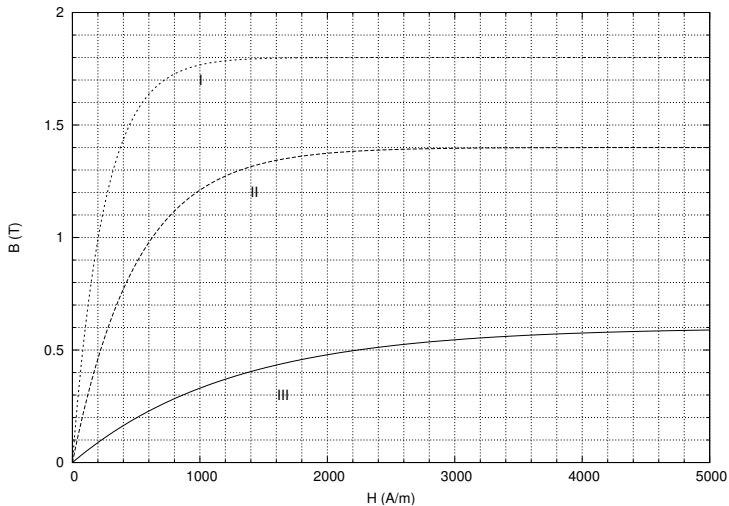
Άσκηση 6

Το ηλεκτρικό κύκλωμα αριστερά τροφοδοτεί με ρεύμα το μαγνητικό δακτύλιο δεξιά ο οποίος έχει κυκλική διατομή. Το σύρμα του πηνίου έχει ηλεκτρική αντίσταση $R_{\pi} = 42 \Omega$ και το διάκενο έχει μήκος $\delta = 8 \text{ mm}$. Να υπολογιστούν:

- Το ρεύμα I που διαρρέει το πηνίο και η μαγνητεγερτική δύναμη ΜΕΔ του πηνίου όταν ο αριθμός σπειρών είναι $N = 1000$.
- Η μαγνητική ροή που κυκλοφορεί στον πυρήνα του δακτυλίου όταν η εσωτερική και εξωτερική του ακτίνα είναι $r_1 = 22 \text{ cm}$, $r_2 = 25 \text{ cm}$ αντίστοιχα, το υλικό από το οποίο αποτελείται ο πυρήνας του δακτυλίου είναι το υλικό II και η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο διάκενο είναι 26 φορές μεγαλύτερη από ότι στον πυρήνα.



Άσκηση 6 (συνέχεια 1)



Άσκηση 6 (συνέχεια 2)

Το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι $I_{\pi} = 156.34 / (42 + 74.5) = 1.342$ A και η ΜΕΔ = 1342 A. Για την μαγνητική ροή θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο Ampere:

$$H \cdot (\ell - \delta) + 26 \cdot H \cdot \delta = I_{\pi} \cdot N \Rightarrow H = 800.45 \text{ A/m}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ℓ είναι το μήκος της μέσης μαγνητικής γραμμής μέσα από το δακτύλιο, δηλ. $\ell = 2\pi(r_1 + r_2)/2 = 1.4765$ m.

Από το διάγραμμα B-H και για το υλικό II έχουμε κατά προσέγγιση την αντιστοιχία $B = 1.25$ T. Επομένως, η μαγνητική ροή είναι

$$\Phi = B \cdot S = 1.25 \cdot 0.000707 = 0.884 \text{ mWb}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η διάμετρος της διατομής του δακτυλίου είναι $d = r_2 - r_1 = 3$ cm και η ίδια η διατομή $S = \pi d^2 / 4 = 0.000707$ m².

1 ΗΜ κύματα και διάνυσμα Poynting

2 Μαγνητικά κυκλώματα

3 Ενέργεια μαγνητοστατικού πεδίου

4 Δυνάμεις σε μαγνητικά υλικά

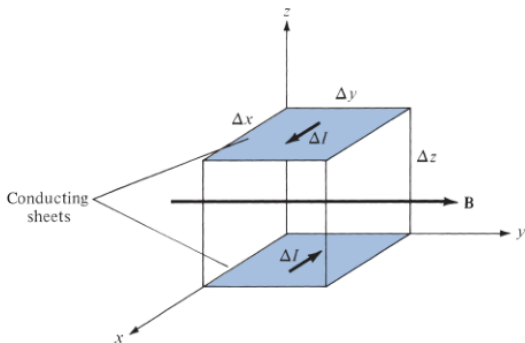
5 Μετασχηματιστές

Ενέργεια μαγνητοστατικού πεδίου

Για το ηλεκτροστατικό πεδίο είχαμε μιλήσει για δυναμική ενέργεια και πυκνότητα ενέργειας πεδίου.

$$w_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad W_E = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$$

Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν και για το μαγνητοστατικό. Θεωρούμε το στοιχειώδη όγκο του σχήματος:



Ενέργεια μαγνητοστατικού πεδίου (συνέχεια 1)

Από ηλεκτρικά κυκλώματα για επαγωγέα

$$p = iv = Li \frac{di}{dt} \Rightarrow W = \int p dt = \int Li di = \frac{1}{2} Li^2$$

Από το στοιχειώδη όγκο του επαγωγέα του σχήματος

$$\Delta L = \frac{\Delta \Phi}{\Delta I} = \frac{\mu H \Delta x \Delta z}{\Delta I}$$

όπου $\Delta I = H \Delta y$. Η στοιχειώδη μαγνητική ενέργεια είναι

$$\Delta W_m = \frac{1}{2} \Delta L (\Delta I)^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu H \Delta x \Delta z}{\Delta I} (\Delta I)^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 \Delta v$$

Άρα, η πυκνότητα ενέργειας μαγνητοστατικού πεδίου

$$w_m = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta W_m}{\Delta v} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{B^2}{2\mu}$$

και η ίδια η ενέργεια

$$W_m = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv$$

1 ΗΜ κύματα και διάνυσμα Poynting

2 Μαγνητικά κυκλώματα

3 Ενέργεια μαγνητοστατικού πεδίου

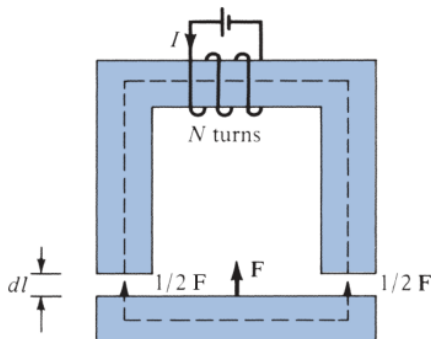
4 Δυνάμεις σε μαγνητικά υλικά

5 Μετασχηματιστές

Δυνάμεις σε μαγνητικά υλικά

Δυνάμεις από μαγνητικό πεδίο σε μαγνητικά υλικά.

Ηλεκτρομηχανικά συστήματα, π.χ., ηλεκτρομαγνήτες, ρελέ, περιστρεφόμενες μηχανές, μαγνητική αιώρηση (magnetic levitation). Έστω ο ηλεκτρομαγνήτης του σχήματος:



Δυνάμεις σε μαγνητικά υλικά (συνέχεια 1)

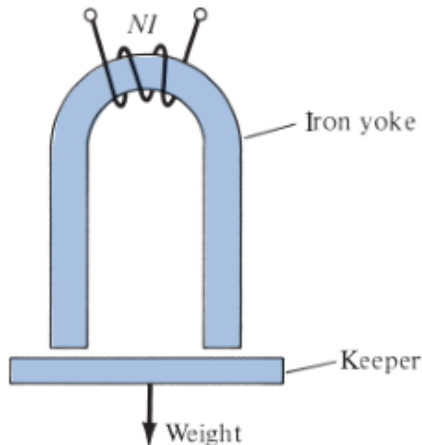
Για σταθερό μ και αμελητέα σκέδαση $B_{1n} = B_{2n}$. Η δύναμη μεταξύ των δυο τμημάτων σιδηρομαγνητικού υλικού μπορεί να βρεθεί από την μεταβολή της ολικής ενέργειας όταν η μετατόπιση είναι $d\ell$. Το έργο που απαιτείται για αυτή τη μετατόπιση είναι ίσο με την ενέργεια στο διάκενο

$$-F d\ell = dW_m = 2 \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) S d\ell \Rightarrow F = -\frac{B^2 S}{\mu_0}$$

όπου S η διατομή των γειτονικών επαφών στο διάκενο, ο παράγοντας 2 έχει να κάνει με τα δυο διάκενα και το μείον με το ότι η δύναμη προσπαθεί να μειώσει το διάκενο (ελκυστική).

Άσκηση 7

Ηλεκτρομαγνήτης U σχήματος είναι σχεδιασμένος να ανυψώνει φορτίο 400 kg. Ο πυρήνας έχει $\mu_r = 3000$, διατομή επαφής 40 cm^2 , μέσο μήκος 50 cm και τα διάκενα αέρος είναι μήκους 0.1 mm το καθένα. Θεωρώντας τη μαγνητική αντίσταση του σπλισμού αμελητέα υπολογίστε τον αριθμό σπειρών στο πηνίο για ρεύμα $I = 1 \text{ A}$.



Άσκηση 7 (συνέχεια 1)

Η δύναμη του ηλεκτρομαγνήτη αντισταθμίζει τη δύναμη της βαρύτητας:

$$F = \frac{B^2 S}{\mu_0} = mg \Rightarrow B = \sqrt{\frac{mg\mu_0}{S}} = \sqrt{\frac{400 \times 9.81 \times 4\pi \times 10^{-7}}{40 \times 10^{-4}}} = 1.11 \text{ T}$$

$$\text{ΜΕΔ} = NI = \Phi(R_m + R_\delta)$$

$$R_m = \frac{\ell}{\mu_r \mu_0 S} = 3.316 \times 10^4 \text{ H}^{-1} \quad R_\delta = \frac{2\delta}{\mu_0 S} = 3.979 \times 10^4 \text{ H}^{-1}$$

$$N = \frac{\Phi(R_m + R_\delta)}{I} = \frac{BS(R_m + R_\delta)}{I} = 323.97 \approx 324$$

Μαγνητική αιώρηση (magnetic levitation)

Μαγνητική αιώρηση ([magnetic levitation](#)). Εφαρμογή αιώρησης αντικειμένων με ηλεκτρομαγνητικά πεδία.

- Βασίζεται κυρίως στην ιδιότητα των διαμαγνητικών υλικών να απωθούνται από μαγνητικά πεδία. Υπεραγώγιμα υλικά εμφανίζουν έντονα αυτή την ιδιότητα.
- Κύρια εφαρμογή τα μαγνητικά τραίνα ([maglev](#)).

Δυο είδη maglev:

- Ηλεκτρομαγνητική αιώρηση (electromagnetic levitation - EML) που χρησιμοποιεί την ελκυστική δύναμη μεταξύ ηλεκτρομαγνήτη στο αιωρούμενο σώμα και κύκλωμα εδάφους.
- Ηλεκτροδυναμική αιώρηση (electrodynamic levitation - EDL) που χρησιμοποιεί την απωστική δύναμη μεταξύ υπεραγώγιμων μαγνητών στο σώμα και επαγωγικών ρευμάτων σε κυκλώματα εδάφους.

Μαγνητική αιώρηση (συνέχεια 1)

Οποιοδήποτε σύστημα maglev αποτελείται από τρία τμήματα:

- 1 Μαγνητικής ανάρτησης (magnetic suspension). Σταθερή ανάρτηση/αιώρηση σώματος στο δικό του μαγνητικό πεδίο.
- 2 Μηχανή προώθησης (propulsion motor). Παράγει δύναμη ώθησης για κίνηση σε προκαθορισμένη διαδρομή με σταθερή ταχύτητα.
- 3 Σύστημα ισχύος που προσφέρει αδιάλειπτη ισχύ,

Ταχύτητα: Συμβατικά τραίνα μέχρι 300 km/h. Maglev μέχρι 500 km/h.

Ελάχιστα κινούμενα τμήματα. Λειτουργία αδιάφορη καιρικών συνθηκών. Δεν χρειάζονται εναέριες γραμμές μεταφοράς.

SQUIDs superconducting quantum interface devices

Οι πιο ευαίσθητοι αισθητήρες μαγνητικής ροής μέχρι πεδία 5×10^{-18} T.

Εφαρμογές σε γεωμαγνητισμό (ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων), βιομαγνητισμό, μαγνητικά μικροσκόπια, nuclear magnetic resonance (NMR), low magnetic field magnetic resonance imaging (MRI).

Βασικές αρχές:

- 1 Κβαντισμός μαγνητικής ροής ($h/2e = 2.0678$ fWb).
- 2 **Josephson tunneling**. Φαινόμενο εμφάνισης ρεύματος χωρίς εφαρμογή τάσης σε επαφή μεταξύ δυο υπεραγώγιμων υλικών ασθενώς συζευγμένων (weak link) με λεπτό μονωτικό στρώμα (superconductor-insulator-superconductor junction)

Δυο είδη SQUIDs, DC (δυο επαφές) και RF (μια επαφή). Μεταβολές μαγνητικής ροής αντιστοιχούν σε εμφάνιση μικρής εναλλασσόμενης τάσης.

1 ΗΜ κύματα και διάνυσμα Poynting

2 Μαγνητικά κυκλώματα

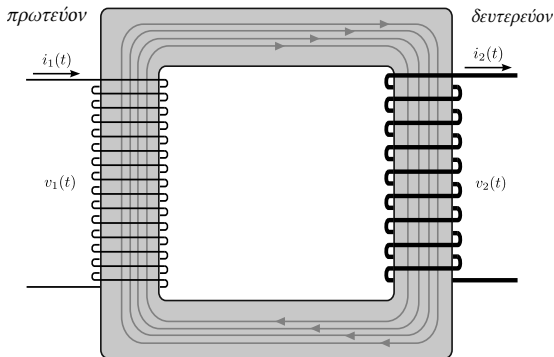
3 Ενέργεια μαγνητοστατικού πεδίου

4 Δυνάμεις σε μαγνητικά υλικά

5 Μετασχηματιστές

Μετασχηματιστές

Κυκλώματα που περιέχουν στοιχεία που αλληλεπιδρούν με μαγνητικά πεδία ονομάζονται κυκλώματα μαγνητικής σύζευξης. Ο μετασχηματιστής είναι ο δομικός λίθος για τέτοιου είδους κυκλώματα. Χρησιμοποιεί δυο πηνία που είναι μαγνητικά συζευγμένα για να μεταφέρει ενέργεια από το ένα στο άλλο. Οι μετασχηματιστές είναι βασικά στοιχεία σε κυκλώματα ισχύος όπου χρησιμοποιούνται στην αλλαγή της τιμής της τάσης ή του ρεύματος. Χρησιμοποιούνται επίσης και σε άλλα ηλεκτρικά και ηλεκτρονικά κυκλώματα για προσαρμογή εμπεδήσεων και ηλεκτρική απομόνωση μεταξύ διαφορετικών τμημάτων του κυκλώματος.



Ο νόμος της επαγωγής του Faraday λέει ότι, αν έχουμε ένα πηνίο στο οποίο υπάρχει μεταβολή της μαγνητικής ροής ϕ που διέρχεται μέσα από τις σπείρες του πηνίου, τότε στα άκρα του πηνίου εμφανίζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη:

$$E = N \frac{d\phi}{dt}$$

με πολικότητα που να αντιτίθεται στο αίτιο που προκαλεί τη μεταβολή της ϕ . Η μαγνητική ροή οφείλεται στο ρεύμα που διαρρέει το πηνίο. Π.χ. για σωληνοειδές μήκους ℓ , έχουμε

$$\phi(t) = B(t)S = \frac{\mu_0 i(t)N}{\ell} S = kNi(t)$$

Ίδια σχέση με κάποιο συντελεστή k που εξαρτάται μόνο από τα γεωμετρικά και μαγνητικά χαρακτηριστικά ισχύει για οποιοδήποτε πηνίο.

Αμοιβαία επαγωγή (συνέχεια 1)

Επομένως, αν έχουμε δυο πηνία 1 και 2 μέσα από τα οποία διέρχεται ρεύμα $i_1(t)$ και $i_2(t)$ αντίστοιχα, και τα πηνία είναι μακριά το ένα από το άλλο, οι αντίστοιχες μαγνητικές ροές θα είναι

$$\phi_1(t) = k_1 N_1 i_1(t) \qquad \phi_2(t) = k_2 N_2 i_2(t)$$

και οι αντίστοιχες ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις στα άκρα κάθε πηνίου:

$$v_{11}(t) = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} = k_1 N_1^2 \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \qquad v_{22}(t) = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = k_2 N_2^2 \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Οι δυο δείκτες 12 σημαίνουν ότι το αποτέλεσμα στο στοιχείο 1 δημιουργείται από το αίτιο στο στοιχείο 2. Επομένως, η τάσεις $v_{11}(t)$, $v_{22}(t)$ είναι οι τάσεις εξ αυτεπαγωγής στα δυο πηνία.

Αμοιβαία επαγωγή (συνέχεια 2)

Ας θεωρήσουμε τώρα δυο πηνία με αυτεπαγωγές L_1 , L_2 που βρίσκονται κοντά το ένα στο άλλο. Το πηνίο 1 έχει N_1 τυλίγματα ενώ το πηνίο 2 έχει N_2 τυλίγματα. Μέρος της μαγνητικής ροής κάθε πηνίου εμπλέκεται και διέρχεται από τις σπείρες του άλλου πηνίου. Υπάρχει αμοιβαία επαγωγή (mutual inductance). Οι αντίστοιχες μαγνητικές ροές είναι

$$\phi_{12}(t) = k_{12}N_2i_2(t) \quad \phi_{21}(t) = k_{21}N_1i_1(t)$$

Η ροή $\phi_{12}(t)$ είναι η ροή στο πηνίο 1 λόγω του ρεύματος στο πηνίο 2 και η ροή $\phi_{21}(t)$ είναι η ροή στο πηνίο 2 λόγω του ρεύματος στο πηνίο 1. Όταν οι ροές/ρεύματα μεταβάλλονται, τότε έχουμε την εμφάνιση τάσεων εξ επαγωγής

$$v_{12}(t) = N_1 \frac{d\phi_{12}}{dt} = k_{12}N_1N_2 \frac{di_2}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$v_{21}(t) = N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = k_{21}N_2N_1 \frac{di_1}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

όπου M_{12} , M_{21} είναι οι συντελεστές αμοιβαίας επαγωγής. Για γραμμικά μαγνητικά υλικά $k_{12} = k_{21} = k_M$ οπότε και $M_{12} = M_{21} = M$. Οπότε οι ολικές τάσεις σε κάθε πηνίο είναι

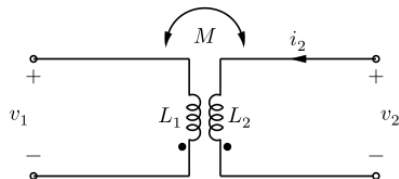
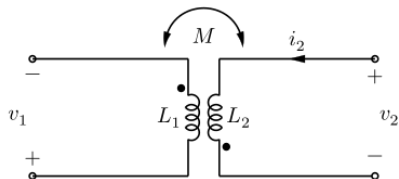
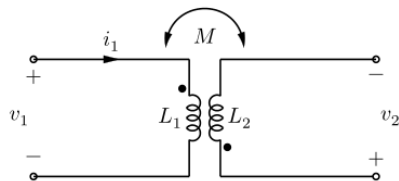
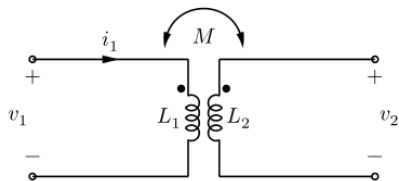
$$v_1(t) = v_{11}(t) + v_{12}(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \quad v_2(t) = v_{22}(t) + v_{21}(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}$$

Η αμοιβαία επαγωγή είναι η ιδιότητα ενός επαγωγέα να δημιουργεί επαγωγικά μια τάση στα άκρα ενός άλλου, γειτονικού επαγωγέα, ανάλογα με την μεταβολή του ρεύματος στον πρώτο. Σαν φυσικό μέγεθος, η αμοιβαία επαγωγή είναι πάντοτε θετική. Η επαγόμενη τάση όμως $M di/dt$ μπορεί να είναι είτε θετική, είτε αρνητική. Αντίθετα με την τάση εξ αυτεπαγωγής $L di/dt$, της οποίας η πολικότητα εξαρτάται από το ρεύμα που διαρρέει τον επαγωγέα και τον νόμο του Lenz, η πολικότητα της αμοιβαίας επαγωγής $M di/dt$ εξαρτάται από το τι γίνεται σε 4 ακροδέκτες συμπεριλαμβανομένου του τρόπου περιτύλιξης των δυο πηνίων.

Στο προηγούμενο σχήμα μετασχηματιστή έχουμε ένα ζεύγος πηνίων με κοινό πυρήνα (για να φαίνεται καλύτερα ο τρόπος περιέλιξης). Η ολική μαγνητική ροή που φαίνεται στο σχήμα έχει τέσσερις συνιστώσες, $\phi_{11}(t)$, $\phi_{22}(t)$, $\phi_{21}(t)$ και $\phi_{12}(t)$. Μας ενδιαφέρουν οι δυο τελευταίες που αντιπροσωπεύουν την ροή λόγω αμοιβαίας επαγωγής από το πηνίο 1 στο 2 και από το πηνίο 2 στο 1 αντίστοιχα. Ανάλογα με την φορά περιέλιξης των πηνίων και τη φορά των ρευμάτων που κυκλοφορούν σε αυτά, οι επαγόμενες τάσεις μπορεί να εμφανίζονται με θετική ή αρνητική πολικότητα.

Σύμβαση τελείας (συνέχεια 1)

Επειδή σε σχηματικό διάγραμμα δεν μπορεί να συμπεριληφθεί η φορά περιέλιξης κάθε πηνίου, ακολουθείται η σύμβαση τελείας (dot convention). Σύμφωνα με αυτήν, τοποθετείται μια τελεία στον ακροδέκτη κάθε πηνίου σε ένα ζευγάρι συζευγμένων πηνίων, που δείχνει την φορά της μαγνητικής ροής εάν το ρεύμα εισέρχεται στο πηνίο από αυτόν τον ακροδέκτη. Η τελεία χρησιμεύει στον προσδιορισμό της πολικότητας της αμοιβαίας επαγωγής.



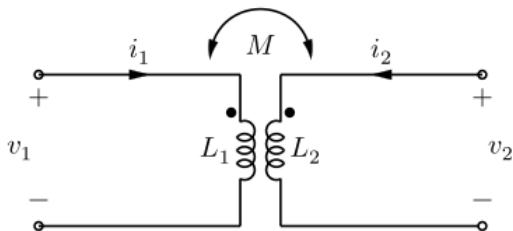
Σύμβαση τελείας (συνέχεια 2)

- Εάν το ρεύμα εισέρχεται στον ακροδέκτη τελείας ενός πηνίου, η πολικότητα της επαγόμενης τάσης είναι θετική στον ακροδέκτη τελείας του δεύτερου πηνίου.
- Εάν το ρεύμα εξέρχεται από τον ακροδέκτη τελείας ενός πηνίου, η πολικότητα της επαγόμενης τάσης είναι αρνητική στον ακροδέκτη τελείας του δεύτερου πηνίου.

Στην πράξη, όταν αναλύουμε ένα κύκλωμα, σχεδιάζουμε πρώτα τα κλαδικά ρεύματα. Στην περίπτωση αυτή είναι πιο εύχρηστος ο παρακάτω ορισμός της σύμβασης τελείας.

- Εάν τα ρεύματα που διέρχονται από τα πηνία εισέρχονται ή εξέρχονται και τα δυο από τους ακροδέκτες τελείας, το πρόσημο της εξ επαγωγής τάσης θα είναι το ίδιο με το πρόσημο της εξ αυτεπαγωγής τάσης.
- Εάν το ένα ρεύμα εισέρχεται στον ακροδέκτη τελείας του ενός πηνίου και το άλλο εξέρχεται από τον ακροδέκτη τελείας του άλλου πηνίου τότε το πρόσημο της εξ επαγωγής τάσης θα είναι αντίθετο με το πρόσημο της εξ αυτεπαγωγής τάσης.

Ενέργεια σε κύκλωμα μαγνητικής σύζευξης



Η στιγμιαία ισχύς σε κάθε πηνίο είναι

$$p_1(t) = v_1(t)i_1(t) = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} \pm M i_1 \frac{di_2}{dt} \quad p_2(t) = v_2(t)i_2(t) = L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} \pm M i_2 \frac{di_1}{dt}$$

και η ολική ισχύς του συστήματος

$$\begin{aligned} p(t) = p_1(t) + p_2(t) &= L_1 \left[i_1 \frac{di_1}{dt} \right] \pm M \left[i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right] + L_2 \left[i_2 \frac{di_2}{dt} \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right] \end{aligned}$$

Ενέργεια (συνέχεια 1)

Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας είναι η ισχύς, οπότε η ενέργεια του συστήματος είναι

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2$$

όπου το πρόσημο + είναι για την περίπτωση όπου και τα δυο ρεύματα εισέρχονται ή εξέρχονται από τους ακροδέκτες τελεία, ενώ το πρόσημο - είναι για την περίπτωση όπου το ένα ρεύμα εισέρχεται και το άλλο εξέρχεται από τους αντίστοιχους ακροδέκτες τελεία.

Για τον υπολογισμό των ορίων μέσα στα οποία κυμαίνεται η αμοιβαία επαγωγή M παρατηρούμε ότι η ενέργεια είναι πάντοτε μεγαλύτερη ή ίση με μηδέν. Άρα,

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 - M i_1 i_2 \geq 0$$

Εάν προσθαφαιρέσουμε τον όρο $i_1 i_2 \sqrt{L_1 L_2}$ και συμπληρώσουμε το τετράγωνο, έχουμε

$$\frac{1}{2} (i_1 \sqrt{L_1} - i_2 \sqrt{L_2})^2 + i_1 i_2 (\sqrt{L_1 L_2} - M) \geq 0$$

οπότε

$$\sqrt{L_1 L_2} - M \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

Ενέργεια (συνέχεια 2)

Δηλ. η αμοιβαία επαγωγή δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από τον γεωμετρικό μέσο των αυτεπαγωγών των δυο πηνίων. Την ποιότητα της σύζευξης την ποσοτικοποιούμε με τον συντελεστή σύζευξης k όπου

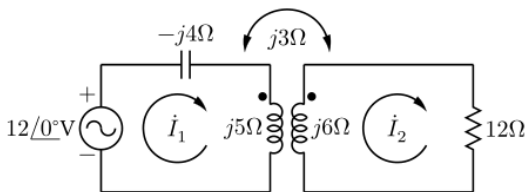
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad \text{με} \quad 0 \leq k \leq 1$$

Για $k = 1$ έχουμε 100% σύζευξη, την οποία ονομάζουμε ιδανική ή τέλεια γιατί σημαίνει ότι όλη η μαγνητική ροή από το ένα πηνίο περνάει επίσης και από το άλλο. Για $k > 0.5$ έχουμε ισχυρή σύζευξη, ενώ για $k < 0.5$ έχουμε ασθενή σύζευξη. Το k δείχνει το ποσοστό της μαγνητικής ροής από το ένα πηνίο που διέρχεται από το άλλο.

Περιμένουμε ότι η πειραματική τιμή του k εξαρτάται από το πόσο κοντά είναι τα πηνία, το τι πυρήνα έχουν, ποια είναι η οριοθέτησή τους στο χώρο (παράλληλη ή κάθετη μεταξύ τους) και τον αριθμό των τυλιγμάτων τους.

Άσκηση 8

Να βρεθούν τα ρεύματα \dot{I}_1 , \dot{I}_2



Από τη σύμβαση τελείας (\dot{I}_1 εισέρχεται, \dot{I}_2 εξέρχεται) η αμοιβαία επαγωγή είναι αρνητική. Στον αριστερό βρόγχο έχουμε

$$-12 + (-j4 + j5)\dot{I}_1 - j3\dot{I}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad j\dot{I}_1 - j3\dot{I}_2 = 12$$

Στον δεξιό βρόγχο

$$-j3\dot{I}_1 + (12 + j6)\dot{I}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_1 = \frac{(12 + j6)\dot{I}_2}{j3} = (2 - j4)\dot{I}_2$$

Άσκηση 8 (συνέχεια 1)

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση

$$(j2 + 4 - j3)\dot{I}_2 = (4 - j)\dot{I}_2 = 12 \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_2 = \frac{12}{4 - j} = 2.91 \angle 14.036^\circ \text{ A}$$

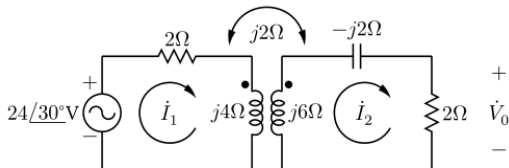
και

$$\dot{I}_1 = (2 - j4)\dot{I}_2 = 13.02 \angle -49.399^\circ \text{ A}$$

Επαλήθευση με spice

Άσκηση 9

Να βρεθεί η τάση εξόδου \dot{V}_0



Από σύμβαση τελείας (\dot{I}_1 εισέρχεται, \dot{I}_2 εξέρχεται) η αμοιβαία επαγωγή είναι αρνητική. Οι εξισώσεις για τους δυο βρόγχους είναι

$$(2 + j4)\dot{I}_1 - j2\dot{I}_2 = 24 \angle 30^\circ$$

$$-j2\dot{I}_1 + (2 + j6 - j2)\dot{I}_2 = 0$$

Άσκηση 9 (συνέχεια 1)

Λύνοντας την δεύτερη ως προς \dot{I}_1 και αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε

$$(2 - j)(2 + j4)\dot{I}_2 - j2\dot{I}_2 = 24 \angle 30^\circ \Rightarrow \dot{I}_2 = \frac{24 \angle 30^\circ}{8 + j4} = 2.683 \angle 3.435^\circ \text{ A}$$

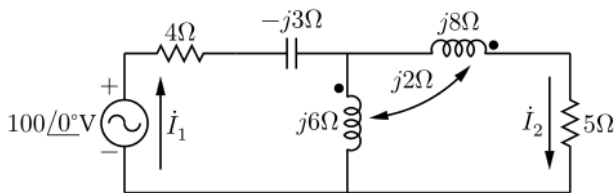
και

$$\dot{V}_o = 2\dot{I}_2 = 5.367 \angle 3.435^\circ \text{ V}$$

Επαλήθευση με spice

Άσκηση 10

Να βρεθούν τα ρεύματα \dot{I}_1 , \dot{I}_2

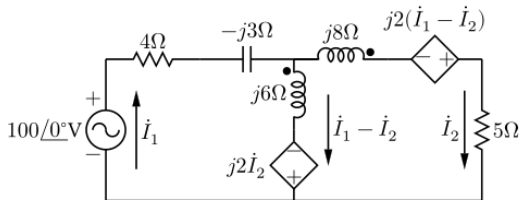


Μετατρέπουμε το αρχικό κύκλωμα στο επόμενο.

Από τον κανόνα τελείας το $\dot{I}_1 - \dot{I}_2$ εισέρχεται σε τελεία, το \dot{I}_2 εξέρχεται. Άρα η τάση εξ' επαγωγής είναι αρνητική. Στον αριστερό βρόγχο έχουμε:

$$-100 + \dot{I}_1(4 - j3) + (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)j6 - j2\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow (4 + j3)\dot{I}_1 - j8\dot{I}_2 = 100$$

Άσκηση 10 (συνέχεια 1)



Στο δεξιό βρόγχο έχουμε:

$$j8\dot{I}_2 - j2(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + 5\dot{I}_2 + j2\dot{I}_2 - j6(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) = 0 \Rightarrow -j8\dot{I}_1 + (5 + j18)\dot{I}_2 = 0$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$\dot{I}_1 = 20.3 \underline{/3.504^\circ} \text{ A} \quad \dot{I}_2 = 8.693 \underline{/19.03^\circ} \text{ A}$$

Επαλήθευση με spice

Ιδανικοί μετασχηματιστές

Ο μετασχηματιστής είναι ένα ηλεκτρικό στοιχείο που χρησιμοποιεί τη μαγνητική σύζευξη μεταξύ δυο πηνίων. Βρίσκει εφαρμογή σε πολλές ηλεκτρικές συσκευές αλλά η κύρια εφαρμογή του είναι σε συσκευές ισχύος και στο ηλεκτρικό δίκτυο όπου παίζει το ρόλο μεταφορέα ενέργειας μεταξύ πηγής και φορτίου. Η συνήθης δομή του είναι δυο πηνία, το πρωτεύον (συνδεδεμένο με την πηγή) και το δευτερεύον (συνδεδεμένο με το φορτίο). Η βασική του λειτουργία είναι να αλλάζει τάσεις και ρεύματα μεταξύ πρωτεύοντος και δευτερεύοντος έτσι ώστε η μεταφορά ενέργειας από πηγή σε φορτίο να γίνεται με τη μεγαλύτερη δυνατή απόδοση.

Θέλουμε επομένως μεγιστοποίηση της μαγνητικής σύζευξης και ελαχιστοποίηση των απωλειών. Στην ιδανική περίπτωση, στον ιδανικό μετασχηματιστή, αυτό σημαίνει τέλεια σύζευξη ($k = 1$) και μηδενικές απώλειες.

Επομένως, αν έχουμε δυο πηνία 1 (πρωτεύον) και 2 (δευτερεύον) μέσα από τα οποία διέρχεται ρεύμα $i_1(t)$ και $i_2(t)$ αντίστοιχα, οι αντίστοιχες μαγνητικές ροές είναι:

$$\phi_1(t) = k_1 N_1 i_1(t) \qquad \phi_2(t) = k_2 N_2 i_2(t)$$

ενώ οι αντίστοιχες μαγνητικές ροές λόγω μαγνητικής σύζευξης είναι

$$\phi_{12}(t) = k_{12} N_2 i_2(t) \qquad \phi_{21}(t) = k_{21} N_1 i_1(t)$$

Ιδανικοί μετασχηματιστές (συνέχεια 1)

Τέλεια σύζευξη σημαίνει $\phi_{21}(t) = \phi_1(t)$ και $\phi_{12}(t) = \phi_2(t)$ καθώς επίσης και $k_1 = k_2 = k_{12} = k_{21} = k_M$. Οι σχέσεις τάσεις-ρεύματος μεταξύ πρωτεύοντος και δευτερεύοντος γίνονται τότε:

$$v_1(t) = k_M N_1^2 \frac{di_1}{dt} \pm k_M N_1 N_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2(t) = \pm k_M N_1 N_2 \frac{di_1}{dt} + k_M N_2^2 \frac{di_2}{dt}$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα N_1 από την πρώτη εξίσωση και $\pm N_2$ από τη δεύτερη:

$$v_1(t) = N_1 \left(k_M N_1 \frac{di_1}{dt} \pm k_M N_2 \frac{di_2}{dt} \right)$$

$$v_2(t) = \pm N_2 \left(k_M N_1 \frac{di_1}{dt} \pm k_M N_2 \frac{di_2}{dt} \right)$$

οπότε διαιρώντας τη δεύτερη με τη πρώτη έχουμε:

$$\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \pm \frac{N_2}{N_1} = \pm n$$

όπου το (+) αναφέρεται σε μαγνητική σύζευξη που προστίθεται και το (-) σε μαγνητική σύζευξη που αφαιρείται.

Ιδανικοί μετασχηματιστές (συνέχεια 2)

Ο λόγος n είναι ο λόγος τυλιγμάτων του δευτερεύοντος ως προς το πρωτεύον. Για $n > 1$ έχουμε ανύψωση τάσης, με την τάση στο δευτερεύον να είναι μεγαλύτερη από την τάση στο πρωτεύον, ενώ για $n < 1$ έχουμε υποβιβασμό τάσης, με την τάση στο δευτερεύον να είναι μικρότερη από την τάση στο πρωτεύον. Σε εφαρμογές δικτύου οι μεταβολές αυτές μπορεί να είναι της τάξης των εκατοντάδων kV.

Μηδενική απώλεια ισχύος σημαίνει ότι η συνολική ισχύς στο πρωτεύον και δευτερεύον είναι μηδενική:

$$v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = 0$$

δηλαδή, ότι ισχύς εισέρχεται στο πρωτεύον εξέρχεται από το δευτερεύον χωρίς καμία απώλεια ή συσσώρευση ενέργειας μέσα στον ίδιο το μετασχηματιστή. Η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται στην πιο γνωστή:

$$\frac{i_2(t)}{i_1(t)} = -\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \mp \frac{1}{n}$$

ή στις

$$v_2(t) = \pm n v_1(t) \quad \text{και} \quad i_2(t) = \mp \frac{1}{n} i_1(t)$$

Ιδανικοί μετασχηματιστές (συνέχεια 3)

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν και για τους παραστατικούς μιγάδες (φάσορες) τάσης και ρεύματος:

$$\dot{V}_2 = \pm n \dot{V}_1 \quad \text{και} \quad \dot{I}_2 = \mp \frac{1}{n} \dot{I}_1$$

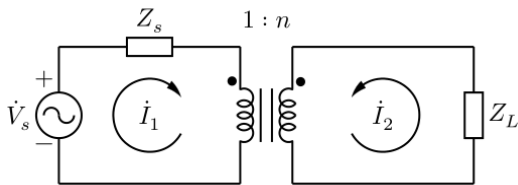
Ισχύει και εδώ ο κανόνας τελείας όπου αν τα ρεύματα \dot{I}_1 , \dot{I}_2 εισέρχονται ή εξέρχονται από τις αντίστοιχες τελείες έχουμε:

$$\dot{V}_2 = n \dot{V}_1 \quad \text{και} \quad \dot{I}_2 = -\frac{1}{n} \dot{I}_1$$

ενώ αν το ένα εισέρχεται και το άλλο εξέρχεται από την αντίστοιχη τελεία:

$$\dot{V}_2 = -n \dot{V}_1 \quad \text{και} \quad \dot{I}_2 = \frac{1}{n} \dot{I}_1$$

Ιδανικοί μετασχηματιστές (συνέχεια 4)



Στην παραπάνω τυπική διάταξη ιδανικού μετασχηματιστή τα ρεύματα εισέρχονται στις τελείες επομένως

$$\dot{V}_2 = n \dot{V}_1 \quad \text{και} \quad \dot{I}_2 = -\frac{1}{n} \dot{I}_1$$

Η εμπέδηση στην είσοδο και έξοδο του μετασχηματιστή είναι:

$$Z_i = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} \quad Z_L = -\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2} = \frac{n\dot{V}_1}{\dot{I}_1/n} = n^2 Z_i$$

Αυτό σημαίνει ότι με κατάλληλο λόγο τυλιγμάτων n μπορούμε να κάνουμε το κύκλωμα στο πρωτεύον να βλέπει αντίσταση (προσαρμογή εμπέδησης):

$$Z_i = \frac{Z_L}{n^2}$$

Άσκηση 11

Σε κύκλωμα ιδανικού μετασχηματιστή έχουμε $n = 5$, $Z_s = 2.5 + j1.5 \Omega$, $Z_L = 75 + j10 \Omega$. Να βρεθούν οι τάσεις και τα ρεύματα \dot{V}_1 , \dot{I}_1 , \dot{V}_2 , \dot{I}_2 όταν $\dot{V}_s = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$.

Έχουμε

$$Z_i = \frac{Z_L}{n^2} = \frac{75 + j10}{25} = 3 + j0.4 \Omega$$

Η πηγή βλέπει ολική εμπέδηση $Z_s + Z_i$ οπότε

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_s}{Z_s + Z_i} = \frac{220 \angle 0^\circ}{5.5 + j1.9} = \frac{220 \angle 0^\circ}{5.82 \angle 19.1^\circ} = 37.8 \angle -19.1^\circ \text{ A}$$

και

$$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_i = 37.8 \angle -19.1^\circ \cdot 3.03 \angle 7.6^\circ = 114 \angle -11.5^\circ \text{ V}$$

Άσκηση 11 (συνέχεια 1)

Εφόσον τα ρεύματα εισέρχονται στις τελείες

$$\dot{V}_2 = n \dot{V}_1 \quad \text{και} \quad \dot{I}_2 = -\frac{1}{n} \dot{I}_1$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= 5\dot{V}_1 = 570 \angle -11.5^\circ \text{ V} \\ \dot{I}_2 &= \frac{-37.8 \angle -19.1^\circ}{5} = 7.56 \angle 160.9^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Χρήσιμο link για LTspice: [ltwiki](#).

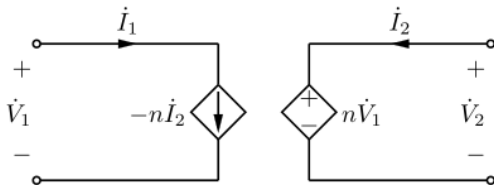
Στο spice ένας μετασχηματιστής αποδίδεται με δυο πηνία που είναι μαγνητικά συζευγμένα. Ιδανικός μετασχηματιστής σημαίνει συντελεστής σύζευξης $k = 1$. Επίσης πρέπει να επιλέξουμε εμείς τιμές αυτεπαγωγής έτσι ώστε ο λόγος τους να είναι $L_1/L_2 = (N_1/N_2)^2 = 1/n^2$ και οι τιμές αυτές πρέπει να είναι αρκετά μεγάλες έτσι ώστε $\omega L \gg R$, δηλ. το μέτρο της εμπέδησης του κάθε πηνίου να είναι πολύ μεγαλύτερο από οποιαδήποτε εν σειρά ωμική αντίσταση.

Για την προηγούμενη άσκηση $n = 5$ άρα $L_1/L_2 = 1/25$. Επιλέγοντας αυθαίρετα $L_1 = 2 \text{ kH}$ πρέπει $L_2 = 50 \text{ kH}$.

	αναλυτική λύση	LTspice ευθύ	LTspice μοντέλο
\dot{V}_1	<u>114.427/-11.463°</u>	<u>114.377/-11.422°</u>	<u>114.406/-11.463°</u>
\dot{I}_1	<u>37.808/-19.058°</u>	<u>37.798/-19.104°</u>	<u>37.800/-19.059°</u>
\dot{V}_2	<u>572.133/-11.463°</u>	<u>571.884/-11.422°</u>	<u>572.029/-11.463°</u>
\dot{I}_2	<u>7.561/160.942°</u>	<u>7.558/160.98°</u>	<u>7.560/160.941°</u>

LTspice (συνέχεια 1)

Εναλλακτικά, ένα ψάξιμο στο διαδίκτυο φανερώνει το προτεινόμενο μοντέλο ιδανικού μετασχηματιστή:



Δοκιμάζοντας αυτό το μοντέλο στο LTspice έχουμε την τελευταία στήλη τιμών.

Και ένα τελευταίο από τον Walter Lewin

Kirchhoff's rule is for the birds