Ηλεκτρομανητισμός - Πρόοδος

Διδάσκων: Δροσόπουλος Αναστάσιος

2022-12-09

1 Θέμα (5 μον.)

- Να υπολογιστεί το δυναμικό $V(x)$ πεδίου οφειλομένου σε γραμμικό φορτίο σε ευθύγραμμο τμήμα μήκους L, με κατανομή πυκνότητας $\rho = cx^4$ $(\mathrm{C/m^3})$, όπου c σταθερά, με οριακές συνθήκες $V(x=0)=0$ και $V(x=L)=V_0$.
- Πιο είναι το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(x)$;
- Υπολογίστε τις αριθμητικές τιμές V και $\mathbf{E}$ στο σημείο $x = 1.2$ mm όταν $c = 3.4$ C/m^7, $L = 24.8$ mm, $V_0 = 20$ V και $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m.

Λύση

Από εξίσωση Poisson $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ έχουμε:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{cx^4}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -\frac{cx^5}{5\epsilon_0} + K_1 \Rightarrow V(x) = -\frac{cx^6}{30\epsilon_0} + K_1 x + K_2$$

Από $V(0) = 0$ έχουμε $K_2 = 0$. Από $V(L) = V_0$ έχουμε:

$$V_0 = -\frac{cL^6}{30\epsilon_0} + K_1 L \Rightarrow K_1 = \frac{V_0}{L} + \frac{cL^5}{30\epsilon_0}$$

Οπότε:

$$V(x) = -\frac{c}{30\epsilon_0}\, x^6 + \left(\frac{V_0}{L} + \frac{cL^5}{30\epsilon_0}\right) x$$

Για ηλεκτρικό πεδίο:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \left[\frac{c}{5\epsilon_0}\, x^5 - \left(\frac{V_0}{L} + \frac{cL^5}{30\epsilon_0}\right)\right]\hat{\mathbf{x}}$$

Οι αριθμητικές τιμές είναι:

```
x=1.2e-3; L=24.8e-3; V0=20; e0=8.854e-12; c=3.4;
V = -c*x^6/(30*e0) + (V0/L+c*L^5/(30*e0))*x
E = c*x^5/(5*e0) - (V0/L + c*L^5/(30*e0))

V = 1.1118
E = -926.53
```

$$V = 1.1118 \text{ V} \qquad \mathbf{E} = -926.53\,\hat{\mathbf{x}} \text{ V/m}$$

2 Θέμα (5 μον.)

Υπολογίστε απόκλιση και στροβιλισμό των πεδίων:

$$\mathbf{A} = x^3\hat{\mathbf{x}} + (5xy^2 + z^3)\hat{\mathbf{y}} + 4xz^2\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{10\sin\phi}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Λύση

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}x^3 + \frac{\partial}{\partial y}(5xy^2 + z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(4xz^2) = 3x^2 + 10xy + 8xz$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}} =$$

$$= (0 - 3z^2)\,\hat{\mathbf{x}} + (0 - 4z^2)\,\hat{\mathbf{y}} + (5y^2 - 0)\,\hat{\mathbf{z}} = -3z^2\,\hat{\mathbf{x}} - 4z^2\,\hat{\mathbf{y}} + 5y^2\,\hat{\mathbf{z}}$$

Για το **B** από τυπολόγιο Διάλεξη 9, διαφάνεια 4, απόκλιση και στροβιλισμός για σφαιρικές συντεταγμένες είναι:

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 B_r\Big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(B_\theta\sin\theta\Big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{10\sin\phi}{r^2}\sin\theta\Big) =$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{10\sin\phi}{r^2}\cos\theta = \frac{10\sin\phi\cos\theta}{r^3\sin\theta} = \frac{10\sin\phi}{r^3\tan\theta}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{1}{r\sin\theta}\Big[\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(B_\phi\sin\theta\Big) - \frac{\partial B_\theta}{\partial\phi}\Big]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial B_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\Big(rB_\phi\Big)\Big]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(rB_\theta\Big) - \frac{\partial B_r}{\partial\theta}\Big]\hat{\boldsymbol{\varphi}} =$$

$$= -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{10\cos\phi}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r}\frac{10\sin\phi}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\frac{10\cos\phi}{r^3\sin\theta}\,\hat{\mathbf{r}} - \frac{10\sin\phi}{r^3}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$