

Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 18

A. Δροσόπουλος

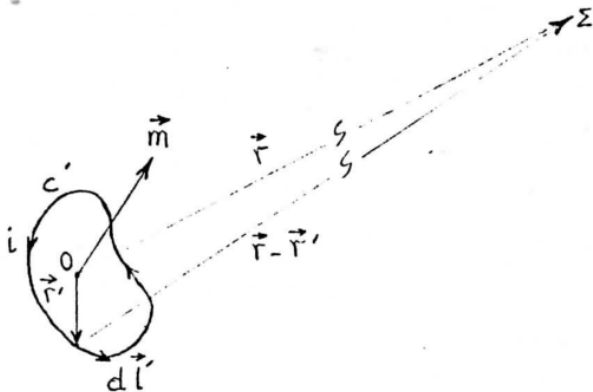
16-12-2022

1 Μαγνητικές δυνάμεις και υλικά

1 Μαγνητικές δυνάμεις και υλικά

Μαγνητικό δίπολο

Ένα μαγνητικό δίπολο είναι ένας ραβδόμορφος μαγνήτης ή ένας μικρός ρευματοφόρος βρόχος. Η δεύτερη περίπτωση μάλιστα είναι ένα καλό παράδειγμα εύρεσης πεδίου \mathbf{B} από το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} .



Μαγνητικό δίπολο (συνέχεια 1)

Το διανυσματικό δυναμικό στο Σ (σχήμα) είναι

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Έχουμε

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

Χρησιμοποιούμε το διωνυμικό θεώρημα ([binomial theorem](#))

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 \dots$$

με $x \rightarrow -x$ και $n \rightarrow -1/2$ για να αναπτύξουμε σε σειρά τη σχέση

$$(1 - x)^{-1/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{(-x)^2}{2!} + \dots = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

Μαγνητικό δίπολο (συνέχεια 2)

Οπότε και λαμβάνοντας υπόψη ότι μακριά από το βρόχο $r \gg r'$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} - \frac{r'^2}{2r^2} + \dots \right) \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint_{C'} d\mathbf{l}' \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{S'} d\mathbf{S}' \times \nabla' \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε θεώρημα Stokes και τόνος στο ανάδελτα σημαίνει παραγωγή του \mathbf{r}' . Η S' είναι η επιφάνεια που περατώνεται στον βρόχο C' . Με τον ορισμό της μαγνητικής διπολικής ροπής \mathbf{m} καταλήγουμε:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \int_{S'} d\mathbf{S}' \times \mathbf{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$



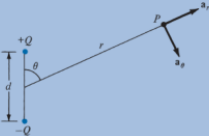
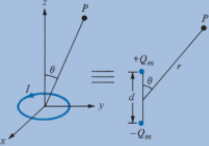
Για το \mathbf{B} έχουμε

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right)$$

Με $\mathbf{m} = m \hat{\mathbf{z}}$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

Μαγνητικό δίπολο (συνέχεια 3)

Electric	Magnetic
$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ $\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  <p data-bbox="436 505 598 523">Monopole (point charge)</p>	<p data-bbox="779 256 869 274">Does not exist</p>  <p data-bbox="783 505 931 523">Monopole (point charge)</p>
$V = \frac{Q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ $\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$  <p data-bbox="436 933 605 951">Dipole (two-point charge)</p>	$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 m \sin \theta \mathbf{a}_\phi}{4\pi r^2}$ $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$  <p data-bbox="734 933 1002 951">Dipole (small current loop or bar magnet)</p>

Μαγνητικές ιδιότητες υλικών οφείλονται

- 1 Περιφορά ηλεκτρονίων γύρω από τον πυρήνα σε άτομα.
- 2 Spin ηλεκτρονίων.
- 3 Spin πυρήνα.

Τα παραπάνω μοντελοποιούνται σαν στοιχειώδη μαγνητικά δίπολα με μαγνητική ροπή ενός ισοδύναμου ρευματοφόρου βρόχου. Κατ' επέκταση κάθε άτομο ή μόριο θα έχει μια συνισταμένη μαγνητική ροπή από όλες αυτές τις αιτίες.

Απουσία εξωτερικού πεδίου, για πολλά υλικά, όλες αυτές οι ροπές είτε είναι μηδέν είτε με τυχαίο προσανατολισμό δίνουν συνισταμένη μηδέν. Υπάρχουν όμως και υλικά όπου αυτές οι ροπές εμφανίζουν αυτόματο προσανατολισμό με μη μηδενική συνισταμένη. Αυτά αποτελούν τους μόνιμους μαγνήτες.

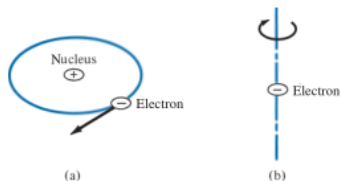


FIGURE 8.10 (a) Electron orbiting around the nucleus. (b) Electron spin.

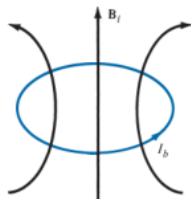


FIGURE 8.11 Circular current loop equivalent to electronic motion of Figure 8.10.

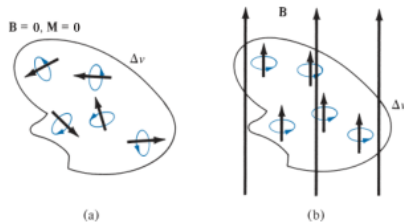


FIGURE 8.12 Magnetic dipole moment in a volume Δv : (a) before B is applied, (b) after B is applied.

Μαγνήτιση (συνέχεια 1)

Η ισοδύναμη μαγνητική ροπή ενός στοιχειώδους ατομικού ρευματοφόρου βρόχου είναι

$$\mathbf{m} = I_b S \hat{\mathbf{a}}_n$$

όπου S το εμβαδόν του βρόχου και I_b το δεσμευμένο στο άτομο ρεύμα.

Ονομάζουμε μαγνήτιση \mathbf{M} σε A/m τη συνισταμένη μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου. Για N άτομα σε όγκο Δv με κάθε άτομο να έχει μαγνητική ροπή \mathbf{m}_k

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k}{\Delta v}$$

Εάν $\mathbf{M} \neq 0$ λέμε ότι το υλικό είναι μαγνητισμένο. Βγαίνει ότι

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$$

η δεσμευμένη πυκνότητα ρεύματος σε A/m² ανά μονάδα όγκου. Οπότε

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$\text{και επειδή } \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

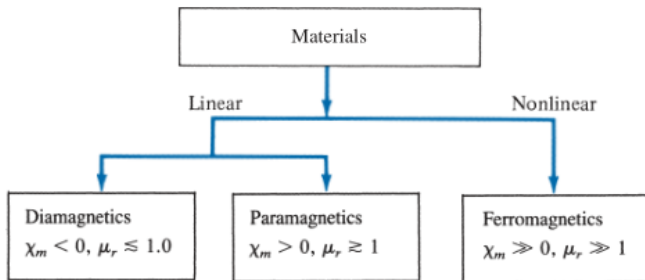
για γραμμικά υλικά με χ_m τη μαγνητική επιδεκτικότητα σε H/m. Στη γενική περίπτωση μ είναι ταυιστής 2ας τάξης.

Είδη μαγνητικών υλικών

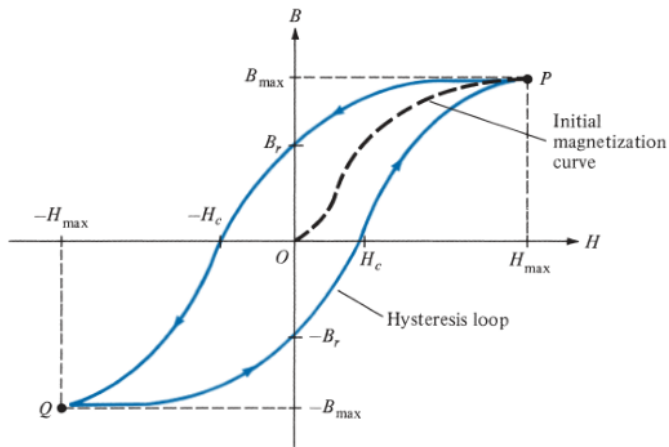
Χρησιμοποιούμε την χ_m ή μ_r για να κατηγοριοποιήσουμε υλικά ως προς τις μαγνητικές τους ιδιότητες.

- Μη μαγνητικά, εάν $\chi_m = 0$ ή $\mu_r = 1$.
- Διαμαγνητικά, εάν χ_m έχει μικρή αρνητική τιμή ή $\mu_r \leq 1$. Τροχιές ηλεκτρονίων και spin αλληλοεξουδετερώνονται. Ασθενή αντίδραση σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.
- Παραμαγνητικά, εάν χ_m έχει μικρή θετική τιμή ή $\mu_r \geq 1$. Υπάρχει ασθενής μαγνήτιση που εξαρτάται από τη θερμοκρασία.
- Σιδηρομαγνητικά, εάν χ_m έχει μεγάλη θετική τιμή ή $\mu_r \gg 1$. Έντονη μαγνήτιση, ισχυρή αντίδραση σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, παραμένουσα μαγνήτιση, μη γραμμικά και υπάρχει εξάρτηση από θερμοκρασία (θερμοκρασία Curie).

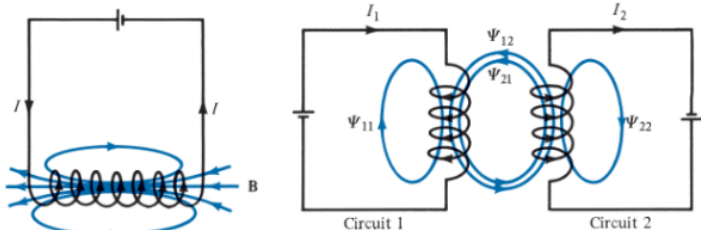
Είδη μαγνητικών υλικών (συνέχεια 1)



Είδη μαγνητικών υλικών (συνέχεια 2)



Επαγωγή



Σε ένα κύκλωμα (τονίζουμε επαγωγικά χαρακτηριστικά - πηνίο), διέρχεται ρεύμα I . Δημιουργεί μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} και αυτό με τη σειρά του προκαλεί μαγνητική ροή μέσα από τις σπείρες του πηνίου $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$. Ορίζουμε τη σύζευξη ροής $\Psi = N\Phi$. Για γραμμικά υλικά $\Psi = LI$ όπου L η αυτεπαγωγή του πηνίου. Πιο καθαρά

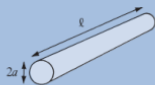
$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I}$$

σε μονάδες Henry H (ίδια μονάδα με Wb/A). Γενίκευση στην αμοιβαία επαγωγή με μετασχηματιστές.

Επαγωγή (συνέχεια 1)

1. Wire

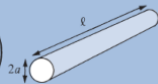
$$L = \frac{\mu_0 \ell}{8\pi}$$



2. Hollow cylinder

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left(\ln \frac{2\ell}{a} - 1 \right)$$

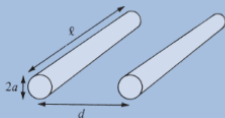
$\ell \gg a$



3. Parallel wires

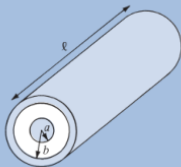
$$L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \ln \frac{d}{a}$$

$\ell \gg d, d \gg a$



4. Coaxial conductor

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$



5. Circular loop

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left(\ln \frac{4\ell}{d} - 2.45 \right)$$

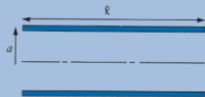
$\ell = 2\pi\rho_0, \rho_0 \gg d$



6. Solenoid

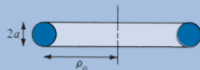
$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$$

$\ell \gg a$



7. Torus (of circular cross section)

$$L = \mu_0 N^2 [\rho_0 - \sqrt{\rho_0^2 - a^2}]$$



8. Sheet

$$L = \mu_0 2\ell \left(\ln \frac{2\ell}{b+t} + 0.5 \right)$$

