

# Ηλεκτρομαγνητισμός

## Διάλεξη 16

A. Δροσόπουλος

09-12-2022

1 Μαγνητοστατικά πεδία

2 Νόμος Ampere

1 Μαγνητοστατικά πεδία

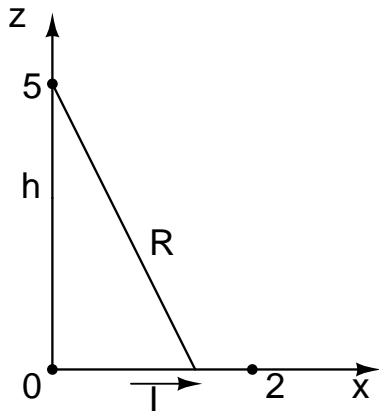
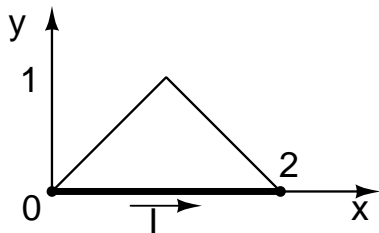
2 Νόμος Ampere

# Μονάδα μαγνητικού πεδίου $H$

Η μονάδα του μαγνητικού πεδίου  $H$  είναι  $A/m$

# Παράδειγμα 1

Ο αγώγιμος τριγωνικός βρόχος στο σχήμα μεταφέρει ρεύμα 10 A. Βρείτε το  $\mathbf{H}$  στο  $(0, 0, 5)$  που οφείλεται στην πλευρά που βρίσκεται στον άξονα  $x$ .



# Παράδειγμα 1 (συνέχεια 1)

Από νόμο Biot-Savart

$$\mathbf{H} = \int_L \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

$$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} \quad \mathbf{R} = h \hat{\mathbf{z}} - x \hat{\mathbf{x}} \quad d\mathbf{l} \times \mathbf{R} = dx \hat{\mathbf{x}} \times (h \hat{\mathbf{z}} - x \hat{\mathbf{x}}) = -h dx \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{-h dx \hat{\mathbf{y}}}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{Ih \hat{\mathbf{y}}}{4\pi} \int_0^L \frac{dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

Με την αντικατάσταση  $x = h \tan \theta$  έχουμε

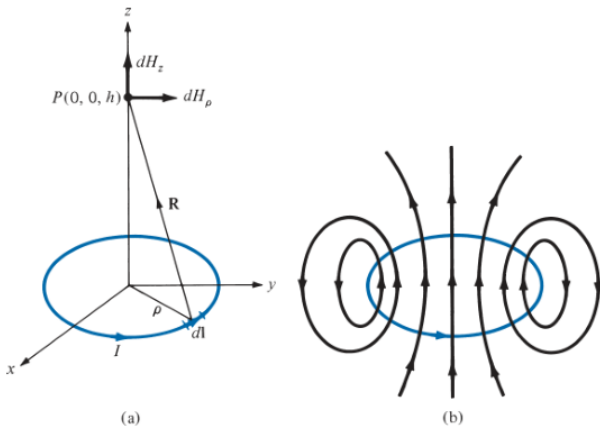
$$\int_0^L \frac{dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \dots = \frac{\sin \theta}{h^2} \Big|_0^{\theta_L} = \frac{\sin \theta_L}{h^2} = \frac{\sin(\tan^{-1}(L/h))}{h^2}$$

$$\mathbf{H} = -\frac{I}{4\pi h} \sin(\tan^{-1}(L/h)) \hat{\mathbf{y}} = -59.1 \hat{\mathbf{y}} \text{ mA/m}$$

όπου  $h = 5$ ,  $L = 2$ ,  $I = 10$ .

## Παράδειγμα 2

Ο κυκλικός βρόχος  $x^2 + y^2 = 9, z = 0$ , στο σχήμα (a) διαρρέεται από συνεχές ρεύμα 10 A στην κατεύθυνση  $\hat{\phi}$ . Προσδιορίστε το  $\mathbf{H}$  στα σημεία  $(0, 0, 4)$  και  $(0, 0, -4)$ .



## Παράδειγμα 2 (συνέχεια 1)

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

όπου  $d\mathbf{l} = \rho d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$ ,  $\mathbf{R} = (0, 0, h) - (x, y, 0) = -\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + h \hat{\mathbf{z}}$  και

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & \rho d\phi & 0 \\ -\rho & 0 & h \end{vmatrix} = \rho h d\phi \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho^2 d\phi \hat{\mathbf{z}}$$

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi(\rho^2 + h^2)^{3/2}} (\rho h d\phi \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho^2 d\phi \hat{\mathbf{z}}) = dH_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + dH_z \hat{\mathbf{z}}$$

Εδώ, λόγω συμμετρίας τα απέναντι στοιχειώδη ρεύματα θα δώσουν αντίθετες συνιστώσες  $dH_\rho$  οπότε  $H_\rho = 0$ . Εναλλακτικά, γράφοντας  $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}$  και ολοκληρώνοντας για  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  δίνει πάλι μηδέν. Οπότε:

$$\mathbf{H} = \int dH_z \hat{\mathbf{z}} = \int_0^{2\pi} \frac{I \rho^2 d\phi \hat{\mathbf{z}}}{4\pi(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{I \rho^2 2\pi \hat{\mathbf{z}}}{4\pi(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{I \rho^2 \hat{\mathbf{z}}}{2(\rho^2 + h^2)^{3/2}}$$



## Παράδειγμα 2 (συνέχεια 2)

Αντικατάσταση  $I = 10 \text{ A}$ ,  $\rho = 3$ ,  $h = 4$  δίνει

$$\mathbf{H}(0, 0, 4) = \frac{10 \cdot 3^2 \hat{\mathbf{z}}}{2(9 + 16)^{3/2}} = 0.36 \hat{\mathbf{z}} \text{ A/m}$$

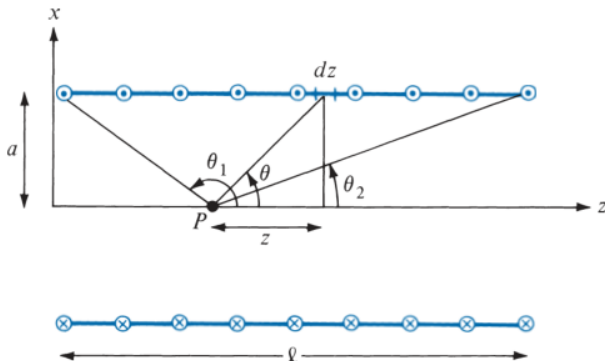
Ομοίως και για  $h = -4$

$$\mathbf{H}(0, 0, -4) = \mathbf{H}(0, 0, 4) = 0.36 \hat{\mathbf{z}} \text{ A/m}$$

Η ροή του μαγνητικού πεδίου φαίνεται στο σχήμα (b).

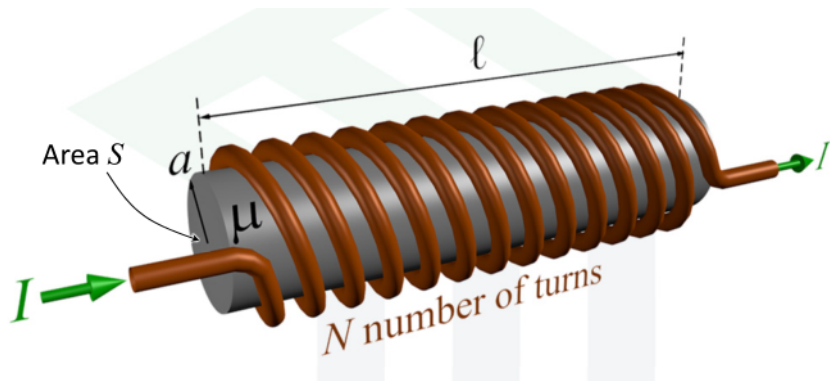
# Παράδειγμα 3

Σωληνοειδές μήκους  $\ell$  και ακτίνας  $a$  αποτελείται από  $N$  στροφές /σπείρες σύρματος που διαρρέονται από ρεύμα  $I$ . Να βρεθεί το  $\mathbf{H}$  σε σημείο  $P$  του άξονά του όπως φαίνεται στο σχήμα. Πως απλοποιείται η σχέση για  $\ell \gg a$  στο κέντρο του σωληνοειδούς;



Σχήμα: Κάτοψη του σωληνοειδούς

## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 1)



**Σχήμα:** Εικόνα του σωληνοειδούς

## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 2)

Αξιοποιούμε το προηγούμενο παράδειγμα με κάθε σπείρα έναν κυκλικό βρόχο και

$$dH_z = \frac{Id\ell a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{Ia^2 ndz}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

όπου  $n = N/\ell$  η πυκνότητα σπειρών με  $d\ell = ndz$ . Από το σχήμα (a)  $\tan \theta = a/z$  και

$$dz = -a \csc^2 \theta d\theta = -\frac{(z^2 + a^2)^{3/2}}{a^2} \sin \theta d\theta$$

$$dH_z = -\frac{nI}{2} \sin \theta d\theta \Rightarrow H_z = -\frac{nI}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{nI}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

και

$$\mathbf{H} = \frac{nI}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \hat{\mathbf{z}} = \frac{NI}{2\ell} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \hat{\mathbf{z}}$$

Στο κέντρο του σωληνοειδούς

$$\cos \theta_2 = \frac{\ell/2}{(a^2 + \ell^2/4)^{1/2}} = -\cos \theta_1$$

και

$$\mathbf{H} = \frac{In\ell}{2(a^2 + \ell^2/4)^{1/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

Για  $\ell \gg a$  ή  $\theta_2 \approx 0^\circ$  και  $\theta_1 \approx 180^\circ$ ,

$$\mathbf{H} = nI \hat{\mathbf{z}} = \frac{NI}{\ell} \hat{\mathbf{z}}$$

# Άσκηση

Σωληνοειδές μήκους  $\ell = 75 \text{ cm}$  και ακτίνας  $a = 5 \text{ cm}$  αποτελείται από  $N = 2000$  στροφές /σπείρες σύρματος που διαρρέονται από ρεύμα  $I = 50 \text{ mA}$ . Να βρεθεί το  $\mathbf{H}$  στα σημεία  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 75 \text{ cm})$ ,  $(0, 0, 50 \text{ cm})$ .

---

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\ell} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \hat{\mathbf{z}}$$

Στο  $(0, 0, 0)$ ,  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\theta_2 = \tan^{-1}(a/\ell) = 3.814^\circ$  και

$$\mathbf{H}(0, 0, 0) = 66.52 \hat{\mathbf{z}} \text{ A/m}$$

Στο  $(0, 0, 75)$ ,  $\theta_1 = 180 - \tan^{-1}(a/\ell) = 176.2^\circ$ ,  $\theta_2 = 90^\circ$  και

$$\mathbf{H}(0, 0, 75) = 66.52 \hat{\mathbf{z}} \text{ A/m}$$

Στο  $(0, 0, 50)$ ,  $\theta_1 = 180 - \tan^{-1}(a/50) = 174.3^\circ$ ,  $\theta_2 = \tan^{-1}(a/25) = 11.3^\circ$  και

$$\mathbf{H}(0, 0, 50) = 131.7 \hat{\mathbf{z}} \text{ A/m}$$

1 Μαγνητοστατικά πεδία

2 **Νόμος Ampere**

# Νόμος ρεύματος Ampere

**Νόμος ρεύματος Ampere:** Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του  $\mathbf{H}$  σε μια κλειστή καμπύλη ισούται με το ολικό ρεύμα  $I_{\text{enc}}$  που εσωκλείει η καμπύλη.

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}}$$

Είναι ανάλογος του νόμου Gauss και χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του  $\mathbf{H}$  για συμμετρικές κατανομές ρευμάτων.

Από το θεώρημα του Stokes

$$I_{\text{enc}} = \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \quad \text{και} \quad I_{\text{enc}} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

έχουμε τη διαφορική μορφή

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

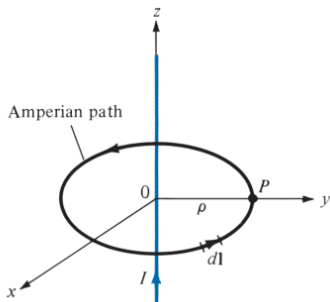
που ισχύει στην μαγνητοστατική (και είναι μια από τις εξισώσεις Maxwell).

Σημειώστε ότι εφόσον  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \neq 0$ , το μαγνητικό πεδίο ΔΕΝ είναι συντηρητικό.

Walter, [walt08.mkv](#)

# Ρευματοφόρος αγωγός απείρου μήκους

Έστω ρευματοφόρος αγωγός απείρου μήκους στον άξονα  $z$ . Ποιο είναι το  $\mathbf{H}$  στο σημείο  $P$ ;



Για διαδρομή Ampere (όρος ανάλογος με επιφάνεια Gauss) επιλέγουμε κύκλο με κέντρο τον άξονα του ρεύματος και κυλινδρικές συντεταγμένες. Επομένως

$$I = \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L H_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \rho d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} = H_\phi \rho \oint_L d\phi = H_\phi 2\pi\rho \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

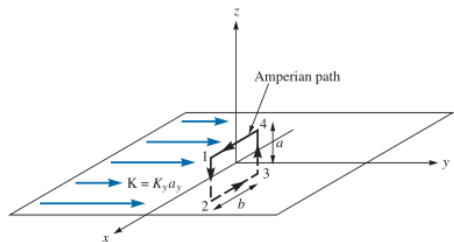
όπως είδαμε και με το νόμο Biot-Savart στην προηγούμενη διάλεξη.



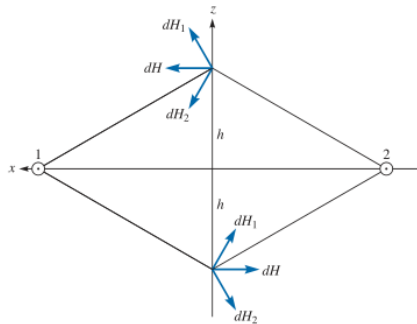
# Ρευματοφόρα επιφάνεια απείρων διαστάσεων

Έστω αγωγίμο επίπεδο  $z = 0$  με ομοιόμορφη πυκνότητα ρεύματος  $\mathbf{K} = K_y \hat{\mathbf{y}}$  A/m. Νόμος Ampere στη διαδρομή που φαίνεται στο σχ (a)

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}} = K_y b$$



(a)



(b)

# Ρευματοφόρα επιφάνεια απείρων διαστάσεων (συνέχεια 1)

Για να σχηματίσουμε μια ιδέα πως είναι το πεδίο, θεωρούμε πως όλο το επίπεδο αποτελείται από παράλληλα ρευματοφόρα νήματα. Στο σχ (b) θεωρούμε ένα ζεύγος. Με τον κανόνα δεξιού χεριού και τη συμμετρία, είναι φανερό ότι

$$\mathbf{H} = \begin{cases} H_0 \hat{\mathbf{x}} & z > 0 \\ -H_0 \hat{\mathbf{x}} & z < 0 \end{cases}$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \left( \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 \right) \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0(-a) + (-H_0)(-b) + 0(a) + H_0(b) = 2H_0b$$

Άρα

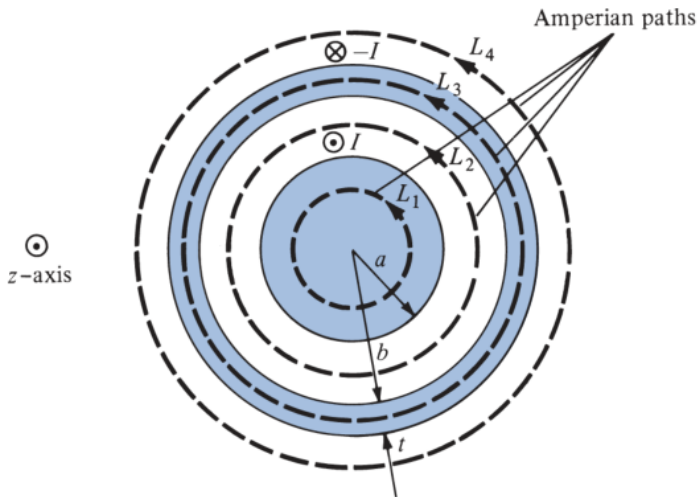
$$\mathbf{H} = \begin{cases} K_y/2 \hat{\mathbf{x}} & z > 0 \\ -K_y/2 \hat{\mathbf{x}} & z < 0 \end{cases}$$

Στη γενική περίπτωση έχουμε

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}$$

όπου  $\hat{\mathbf{n}}$  κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα από το επίπεδο στο σημείο πεδίου.

# Ομοαξονικό καλώδιο απείρου μήκους



# Ομοαξονικό καλώδιο απείρου μήκους (συνέχεια 1)

Έστω ομοαξονικό καλώδιο απείρου μήκους που αποτελείται από δυο ομοαξονικούς κυλίνδρους με κοινό άξονα τον  $z$ . Στο σχήμα φαίνεται η διατομή. Ο εσωτερικός αγωγός έχει ακτίνα  $a$  και μεταφέρει ρεύμα  $I$ . Ο εξωτερικός αγωγός έχει εσωτερική ακτίνα  $b$ , πάχος  $t$  και μεταφέρει ρεύμα επιστροφής  $-I$ . Θέλουμε να προσδιορίσουμε το πεδίο παντού στις 4 δυνατές περιοχές:  $0 \leq \rho \leq a$ ,  $a \leq \rho \leq b$ ,  $b \leq \rho \leq b + t$  και  $\rho \geq b + t$  με την προϋπόθεση ότι το ρεύμα κατανέμεται ομοιόμορφα.

Για την περιοχή  $0 \leq \rho \leq a$

$$\oint_{L_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{J} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{\mathbf{z}} \quad d\mathbf{S} = \rho d\phi d\rho \hat{\mathbf{z}}$$

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{I}{\pi a^2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho} \rho d\phi d\rho = \frac{I}{\pi a^2} \pi \rho^2 = \frac{I \rho^2}{a^2}$$

$$\oint_{L_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_\phi \int_{L_1} dl = H_\phi 2\pi \rho = \frac{I \rho^2}{a^2} \Rightarrow H_\phi = \frac{I \rho}{2\pi a^2}$$

Για την περιοχή  $a \leq \rho \leq b$

$$\oint_{L_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}} = I$$

$$H_\phi 2\pi\rho = I \Rightarrow$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

# Ομοαξονικό καλώδιο απείρου μήκους (συνέχεια 3)

Για την περιοχή  $b \leq \rho \leq b + t$

$$\oint_{L_3} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_\phi 2\pi\rho = I_{\text{enc}} = I + \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

όπου  $\mathbf{J}$  η πυκνότητα ρεύματος του εξωτερικού αγωγού κατά μήκος του  $-\hat{\mathbf{z}}$

$$\mathbf{J} = -\frac{I}{\pi[(b+t)^2 - b^2]} \hat{\mathbf{z}}$$

$$I_{\text{enc}} = I - \frac{I}{\pi[(b+t)^2 - b^2]} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=b}^{\rho} \rho d\phi d\rho = I \left[ 1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt} \right]$$

και

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \left[ 1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt} \right]$$

# Ομοαξονικό καλώδιο απείρου μήκους (συνέχεια 4)

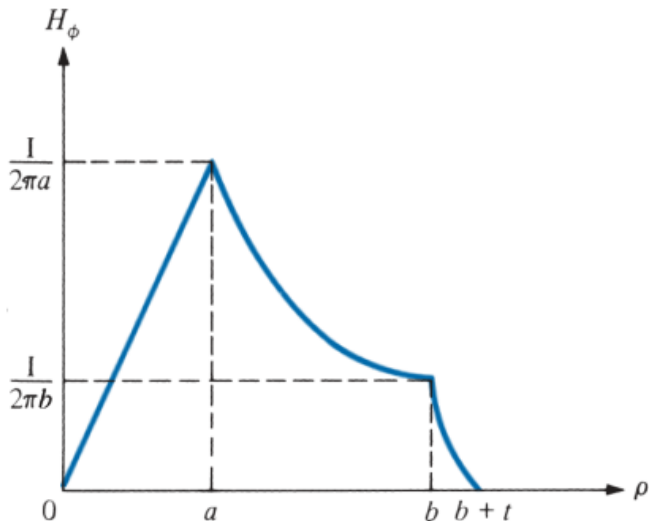
Για την περιοχή  $\rho \geq b + t$

$$\oint_{L_4} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I - I = 0 \Rightarrow H_\phi = 0$$

Συνολικά

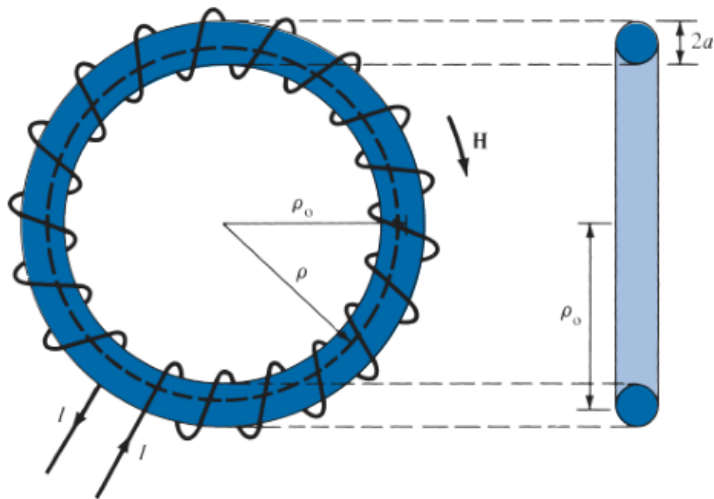
$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{I\rho}{2\pi a^2} \hat{\boldsymbol{\phi}} & 0 \leq \rho \leq a \\ \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\boldsymbol{\phi}} & a \leq \rho \leq b \\ \frac{I}{2\pi\rho} \left[ 1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} & b \leq \rho \leq b + t \\ 0 & \rho \geq b + t \end{cases}$$

# Ομοαξονικό καλώδιο απείρου μήκους (συνέχεια 5)





# Τοροειδές (toroid)



**Σχήμα:** Τοροειδές με κυκλική διατομή

# Τοροειδές (συνέχεια 1)

Για την περιοχή  $\rho_0 - a < \rho < \rho_0 + a$  έχουμε

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}} \Rightarrow H \cdot 2\pi\rho = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{2\pi\rho}$$

Για περίμετρο τοροειδούς  $\ell \approx 2\pi\rho_0$ , όπου  $\rho_0$  η μέση ακτίνα, έχουμε

$$H \approx \frac{NI}{\ell}$$

ίδια σχέση όπως για το μακρύ σωληνοειδές.

Στις άλλες περιοχές έχουμε  $H = 0$ .

Τοροειδές με κυκλική διατομή και κέντρο την αρχή των αξόνων έχει άξονα τον άξονα  $z$ ,  $N = 1000$  σπείρες,  $\rho_0 = 10$  cm,  $a = 1$  cm και μεταφέρει ρεύμα  $I = 100$  mA. Υπολογίστε το  $|\mathbf{H}|$  στα σημεία α)  $(3$  cm,  $-4$  cm,  $0)$  και β)  $(6$  cm,  $9$  cm,  $0)$ .

---

Το πρώτο σημείο βρίσκεται στην εσωτερική περιοχή του τοροειδούς και η καμπύλη Ampere εσωκλείει μηδενικό ρεύμα. Άρα  $H = 0$ .

Για το δεύτερο σημείο  $\rho = \sqrt{6^2 + 9^2} = 10.817$  cm η απόσταση από το κέντρο, άρα μέσα στο δακτύλιο του τοροειδούς και

$$H = \frac{NI}{2\pi\rho} = 147.14 \text{ A/m}$$