

Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 10

A. Δροσόπουλος

11-11-2022

1 Ασκήσεις

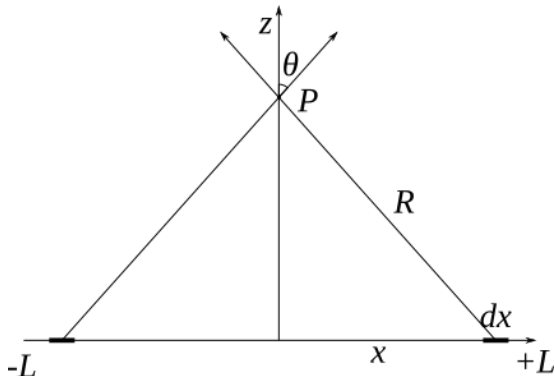
2 Ηλεκτρικό πεδίο σε υλικά

1 Ασκήσεις

2 Ηλεκτρικό πεδίο σε υλικά

Άσκηση

Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση z από τη μέση ευθυγράμμου τμήματος μήκους $2L$ με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου λ .



Άσκηση συν

Βολεύει να πάρουμε συμμετρικά κομμάτια στοιχειώδους φορτίου στα $\pm x$ έτσι ώστε να μηδενιστεί η οριζόντια συνιστώσα. Οπότε

$$d\mathbf{E} = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\lambda dx}{R^2} \right) \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$$

$$\cos \theta = z/R \quad R = \sqrt{z^2 + x^2}$$

και για την z συνιστώσα:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{2\lambda z}{(z^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x}{z^2 \sqrt{z^2 + x^2}} \right]_0^L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2\lambda L}{z\sqrt{z^2 + L^2}} \right]$$

και $\mathbf{E} = E_z \hat{\mathbf{z}}$ όπου χρησιμοποίησαμε τον μετασχηματισμό $x = z \tan \theta$ για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος.

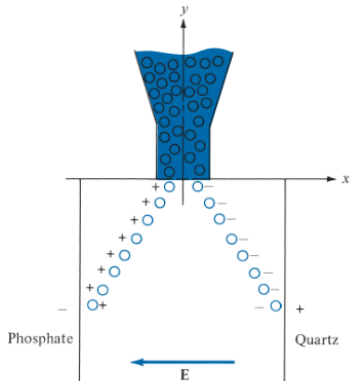
Μακριά από το τμήμα ($z \gg L$) αυτό γίνεται

$$E_z \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2}$$

όπου $Q = 2\lambda L$ το φορτίο. Μοιάζει με σημειακό.

Άσκηση

Οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην πρακτική εφαρμογή διαχωρισμού στερεών. Π.χ. σε ορυκτό που έχει πρώτα διασπαστεί σε κόκκους χαλαζία και φωσφορούχο πέτρωμα ο διαχωρισμός γίνεται με εφαρμογή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου όπως στο σχήμα. Να βρεθεί ο διαχωρισμός όταν οι κόκκοι/σωματίδια πέσουν διάστημα 80 cm. Θεωρούμε ότι όλα τα σωματίδια έχουν την ίδια μάζα m και φορτίο Q . Δίδονται $E = 500$ kV/m και $Q/m = 9$ $\mu\text{C}/\text{kg}$ για θετικά και αρνητικά φορτισμένα σωματίδια.



Άσκηση 2

Αγνοώντας τις δυνάμεις Coulomb μεταξύ σωματιδίων βλέπουμε ότι το πεδίο E δρα οριζόντια και η βαρύτητα κάθετα. Επομένως τα σωματίδια κινούνται και ισχύει

$$QE = m \frac{d^2x}{dt^2} \hat{x} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Q}{m} E \Rightarrow x = \frac{Q}{2m} Et^2 + c_1 t + c_2$$

$$-mg = m \frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -g \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_3 t + c_4$$

όπου c_1, c_2, c_3, c_4 σταθερές ολοκλήρωσης. Θεωρώντας αρχική θέση και ταχύτητα μηδέν, μηδενίζονται αυτές οι σταθερές. Οπότε η τροχιά είναι:

$$x = \frac{Q}{2m} Et^2 \quad \text{και} \quad y = -\frac{1}{2}gt^2$$

Για $y = -80 \text{ cm} = -0.8 \text{ m}$ και $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

$$t^2 = \frac{0.8 \times 2}{9.8} = 0.1633 \text{ s}^2$$

$$x = \frac{1}{2} \times 9 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^5 \times 0.1633 = 0.3673 \text{ m}$$

και η μεταξύ τους απόσταση είναι $2x = 73.47 \text{ cm}$.

Άσκηση

Πεπερασμένο φορτισμένο επίπεδο $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $z = 0$ έχει πυκνότητα φορτίου $\rho_S = xy(x^2 + y^2 + 25)^{3/2}$ nC/m. Να βρεθούν:

- το ολικό φορτίο Q
- το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} στο $(0, 0, 5)$
- τη δύναμη που υφίσταται σε σημειακό φορτίο -1 nC στο $(0, 0, 5)$

$$\begin{aligned} Q &= \int_S \rho_S dS = \int_0^1 \int_0^1 xy(x^2 + y^2 + 25)^{3/2} dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y \left[\int_0^1 (x^2 + y^2 + 25)^{3/2} d(x^2) \right] dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y \frac{2}{5} (x^2 + y^2 + 25)^{5/2} \Big|_0^1 dy = \dots = 33.15 \text{ nC} \end{aligned}$$

Άσκηση 2

$$\mathbf{E} = \int_S \frac{\rho_S dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{R}} = \int_S \frac{\rho_S dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

όπου $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (0, 0, 5) - (x, y, 0) = (-x, -y, 5)$. Οπότε

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int_0^1 \int_0^1 K \times 10^{-9} \frac{xy(x^2 + y^2 + 25)^{3/2}(-x, -y, 5)dxdy}{(x^2 + y^2 + 25)^{3/2}} = \int_0^1 \int_0^1 9xy(-x, -y, 5)dxdy = \\ &= - \left[9 \int_0^1 \int_0^1 x^2 y dx dy \right] \hat{\mathbf{x}} - \left[9 \int_0^1 \int_0^1 xy^2 dx dy \right] \hat{\mathbf{y}} + \left[45 \int_0^1 \int_0^1 xy dx dy \right] \hat{\mathbf{z}} = \\ &= (-1.5, -1.5, 11.25) \text{ V/m} \\ \mathbf{F} &= q\mathbf{E} = (1.5, 1.5, -11.25) \text{ mN} \end{aligned}$$

Άσκηση 2.14

Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σφαίρας ακτίνας R με πυκνότητα φορτίου ανάλογη με την απόσταση από το κέντρο, $\rho = kr$, όπου k σταθερά.

Από νόμο Gauss εντός της σφαίρας:

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{r=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} kr r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \\ &= \frac{k 4\pi r^4}{\epsilon_0} = \frac{\pi k}{\epsilon_0} r^4 \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

Εκτός της σφαίρας:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\pi k}{\epsilon_0} R^4 \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

1 Ασκήσεις

2 Ηλεκτρικό πεδίο σε υλικά

- Ηλεκτρικό πεδίο σε κενό ή αέρα και ηλεκτρικό πεδίο στην ύλη.
- Αγωγοί και μονωτές.
- Αγωγιμότητα, ηλεκτρικό ρεύμα και πόλωση.
- Ηλεκτρική επιδεκτικότητα (electric susceptibility), διαπερατότητα (permittivity), γραμμικότητα (linearity), ιστροπικότητα (isotropy), ομογένεια (homogeneity), διηλεκτρική αντοχή (dielectric strength) και χρόνος χαλάρωσης (relaxation time).
- Οριακές συνθήκες (boundary conditions)

Ηλεκτρικές ιδιότητες υλικών

- Επισκόπηση. Όχι σε βάθος μελέτη.
- Αγωγιμότητα σ σε S/m. Ανάλογα με την τιμή της διακρίνουμε τα υλικά σε αγωγούς, μονωτές και ημιαγωγούς.
- Οι μεταλλικοί αγωγοί έχουν $\sigma \gg 1$. Π.χ. χαλκός, αλουμίνιο.
- Οι μονωτές έχουν $\sigma \ll 1$. Π.χ. γυαλί, πλαστικό.
- Οι ημιαγωγοί έχουν ενδιάμεση τιμή. Π.χ. Πυρίτιο, γερμάνιο.
- Η αγωγιμότητα υλικών εξαρτάται από τη θερμοκρασία και τη συχνότητα.
- Η αγωγιμότητα μετάλλων αυξάνεται όσο ελαττώνεται η θερμοκρασία. Για θερμοκρασίες κοντά στο απόλυτο μηδέν μπορεί να γίνει πολύ μεγάλη - υπεραγώγιμη κατάσταση (μόλυβδος σε 4 K, $\sigma \sim 10^{20}$ S/m).

Η αγωγιμότητα εξαρτάται από τον αριθμό των διαθέσιμων ηλεκτρονίων (φορτίων) που άγουν ηλεκτρικό ρεύμα στα υλικά. Οι αγωγοί έχουν πληθώρα ελευθέρων ηλεκτρονίων ενώ στα διηλεκτρικά ο αριθμός είναι σχετικά μικρός.

Ηλεκτρικές ιδιότητες υλικών (συνέχεια 1)

TABLE B.1 Approximate Conductivity* of Some Common Materials at 20°C

Material	Conductivity (siemens/meter)
<i>Conductors</i>	
Silver	6.1×10^7
Copper (standard annealed)	5.8×10^7
Gold	4.1×10^7
Aluminum	3.5×10^7
Tungsten	1.8×10^7
Zinc	1.7×10^7
Brass	1.1×10^7
Iron (pure)	10^7
Lead	5×10^6
Mercury	10^6
Carbon	3×10^4
Water (sea)	4
<i>Semiconductors</i>	
Germanium (pure)	2.2
Silicon (pure)	4.4×10^{-4}
<i>Insulators</i>	
Water (distilled)	10^{-4}
Earth (dry)	10^{-5}
Bakelite	10^{-10}
Paper	10^{-11}
Glass	10^{-12}
Porcelain	10^{-12}
Mica	10^{-15}
Paraffin	10^{-15}
Rubber (hard)	10^{-15}
Quartz (fused)	10^{-17}
Wax	10^{-17}