

# Ηλεκτρομαγνητισμός

## Διάλεξη 08

A. Δροσόπουλος

04-11-2022

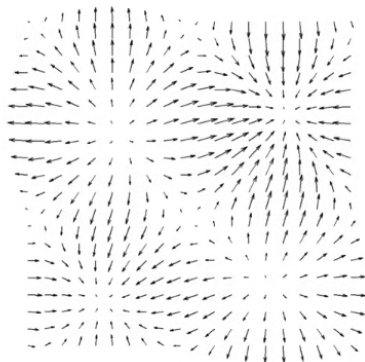
## 1 Διαφορικός λογισμός και Ασκήσεις

## 1 Διαφορικός λογισμός και Ασκήσεις

# Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου

Η απόκλιση διανυσματικού πεδίου φανερώνει τα σημεία του πεδίου όπου «πηγάζει» ή «εξαφανίζεται». Σύγκλιση ή απόκλιση (πηγές, sources, καταβόθρες, sinks).

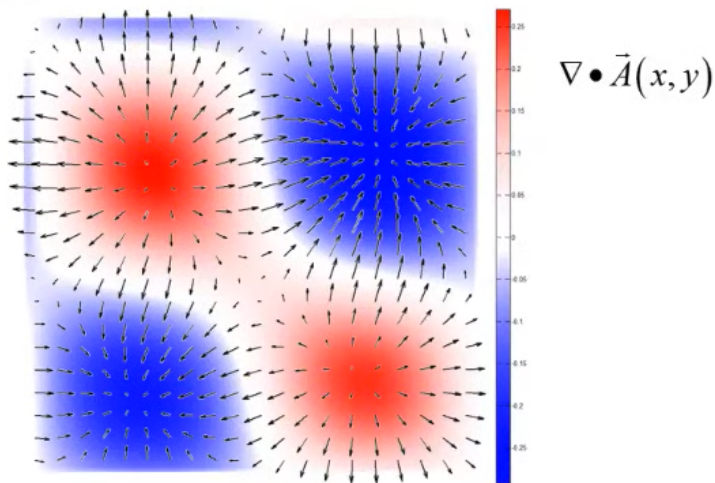
Συμβολίζεται:  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ,  $\text{div}\mathbf{A}$ .



$\vec{A}(x,y)$

**Σχήμα:** Ξεκινάμε με ένα διανυσματικό πεδίο.

## Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου 2



**Σχήμα:** Με την απόκλιση καταλήγουμε σε βαθμωτό.

# Θεώρημα Gauss ή θεώρημα απόκλισης

Ξεκινάμε από τη ροή του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{A}$  μέσα από μια κλειστή επιφάνεια  $S$  που περικλείει κάποιον όγκο  $V$ . Θεωρούμε ότι το πεδίο είναι ορισμένο μέσα στον όγκο  $V$  και η απόκλιση (ανεξάρτητα από συστήματα συντεταγμένων) ορίζεται

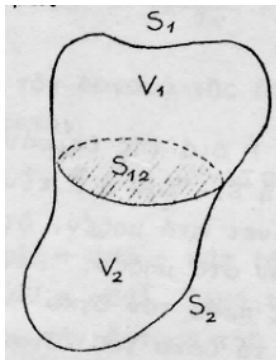
$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

Ο Gauss συνεχίζει με το θεώρημα Gauss ή θεώρημα απόκλισης: «Το επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{A}$  μέσα από κλειστή επιφάνεια  $S$  ισούται με το ολοκλήρωμα της απόκλισης στον όγκο  $V$  που περικλείεται από την επιφάνεια  $S$ ».

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$

Για την απόδειξη ξεκινάμε από το διαχωρισμό ενός όγκου  $V$  σε δυο.

# Θεώρημα Gauss ή θεώρημα απόκλισης 2



**Σχήμα:** Η  $S_{12}$  χωρίζει τον  $V$  σε  $V_1$  και  $V_2$ .

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{S_1+S_{12}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_1 + \oint_{S_2+S_{12}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_2$$

# Θεώρημα Gauss ή θεώρημα απόκλισης 3

Συνεχίζοντας τις υποδιαιρέσεις

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_1 + \oint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_2 + \dots = \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_i$$

και

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^N V_i \left( \frac{\oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i} \right)$$

Για  $N \rightarrow \infty$  και  $V_i \rightarrow 0$  η παράσταση στην παρένθεση είναι η απόκλιση του  $\mathbf{A}$ , το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα και ο  $V_i$  γίνεται  $dV$ .

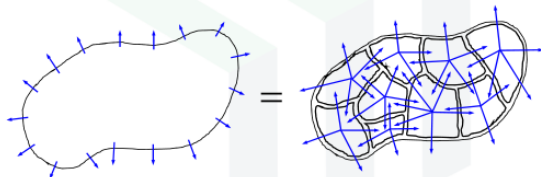
$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$



# Θεώρημα Gauss ή θεώρημα απόκλισης 4

## Divergence Theorem

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dv$$



The divergence theorem allows us to write a closed-contour surface integral as a volume integral.

**Σχήμα:** Συνδέει ροή διανυσματικού πεδίου μέσα από μια κλειστή επιφάνεια με την απόκλιση του πεδίου στον εσωκλεισμένο όγκο

# Νόμος Gauss από εξισώσεις Maxwell

Αν αντί του τυχαίου  $\mathbf{A}$  θεωρήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E}$  και το νόμο Gauss

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

Και για όγκο  $V$  οποιουδήποτε σχήματος και μεγέθους και σε κάθε σημείο του χώρου

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

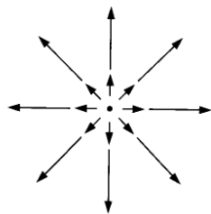
η διαφορική μορφή του νόμου Gauss.

## Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου 3

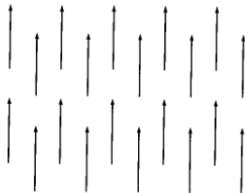
Η απόκλιση διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{A}(x, y, z)$  στο τρισδιάστατο χώρο εκφράζεται στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \left( \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}) = \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned}$$

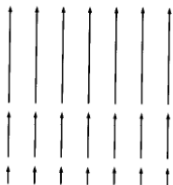
# Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου 4



(a)



(b)



(c)

# Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου 5

(a)  $\mathbf{A} = \mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}$

(b)  $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}}$

(c)  $\mathbf{C} = z \hat{\mathbf{z}}$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial(1)}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = \frac{\partial z}{\partial z} = 0 + 0 + 1 = 1$$

Υπολογίστε την απόκλιση των παρακάτω πεδίων:

- $\mathbf{A} = x^2 \hat{\mathbf{x}} + 3xz^2 \hat{\mathbf{y}} - 2xz \hat{\mathbf{z}}$
  - $\mathbf{B} = xy \hat{\mathbf{x}} + 2yz \hat{\mathbf{y}} + 3xz \hat{\mathbf{z}}$
  - $\mathbf{C} = y^2 \hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2) \hat{\mathbf{y}} + 2yz \hat{\mathbf{z}}$
- 

Απαντήσεις:

- $\nabla \cdot \mathbf{A} = 2x + 0 - 2x = 0$
- $\nabla \cdot \mathbf{B} = y + 2z + 3x$
- $\nabla \cdot \mathbf{C} = 0 + 2x + 2y = 2(x + y)$

# Άσκηση

Σχεδιάστε το πεδίο  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{r}}/r^2$  και υπολογίστε την απόκλιση. Σχολιάστε την απάντηση.

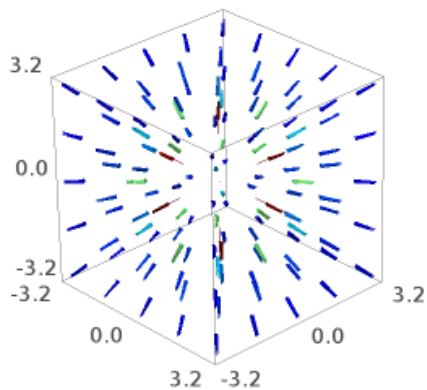
$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= \nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^3} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}] + \frac{\partial}{\partial y} [y(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}] + \frac{\partial}{\partial z} [z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}] = \\ &= ()^{-3/2} + x \left( -\frac{3}{2} \right) ()^{-5/2} 2x + ()^{-3/2} + y \left( -\frac{3}{2} \right) ()^{-5/2} 2y + ()^{-3/2} + z \left( -\frac{3}{2} \right) ()^{-5/2} 2z = \\ &= 3r^{-3} - 3r^{-5}(x^2 + y^2 + z^2) = 3r^{-3} - 3r^{-3} = 0\end{aligned}$$

Σχόλιο.

[sketch applet](#)

```
sage: x,y,z=var('x y z')
sage: p=plot_vector_field3d((x/(x^2+y^2+z^2)^(3/2),y/(x^2+y^2+z^2)^(3/2),z/(x^2+y^2+z^2)^(3/2)),
(x,-3,3),(y,-3,3),(z,-3,3))
sage: p.show()
Launched html viewer for Graphics3d Object
sage: p.save('fig1r2.png')
```

# Άσκηση





Από την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου συναρτήσε του δυναμικού

$$\mathbf{E} = -\nabla U$$

παίρνουμε την απόκλιση

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla U = -\nabla^2 U$$

Ο τελεστής ανάδελτα τετράγωνο ονομάζεται τελεστής Laplace ή απλά Λαπλασιανή (Laplacian). Σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

και δρα σε βαθμωτή συνάρτηση. Σε περίπτωση διανυσματικού πεδίου δρα σε κάθε βαθμωτή συνιστώσα ξεχωριστά.

# Εξισώσεις Laplace, Poisson

Με τον νόμο Gauss σε διαφορική μορφή έχουμε την εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Για περιοχές όπου η πυκνότητα φορτίου είναι μηδενική, έχουμε την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 U = 0$$

Η τελευταία εξίσωση βρίσκει εφαρμογή σε πολλά πεδία φυσικής. Οι συναρτήσεις που την ικανοποιούν ονομάζονται *αρμονικές συναρτήσεις* με χαρακτηριστικές ιδιότητες που απλουστεύουν σημαντικά την επίλυση πολλών προβλημάτων κλασσικών πεδίων.

# Νόημα εξίσωσης Laplace

Συνήθως δουλεύουμε με την απλή βαθμωτή εξίσωση Laplace  $\nabla^2 U = 0$  εφόσον βαθμωτές εξισώσεις είναι απλούστερες στη λύση από διανυσματικές. Αυτή μας δίνει το βαθμωτό δυναμικό σε μια περιοχή και από αυτό υπολογίζουμε όλα τα άλλα μεγέθη.

## Meaning of Laplace's Equation

Laplace's equation is

$$\nabla^2 u = 0$$

$\nabla^2$  is a 3D second-order derivative.

→ A second-order derivative quantifies curvature.

→ But, we set the second-order derivative to zero.

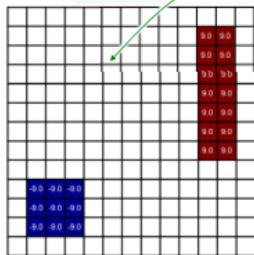


Functions satisfying Laplace's equation vary linearly.

# Νόημα εξίσωσης Laplace (συνέχεια 1)

## Problem Setup

Suppose we know the value of  $V(x,y)$  at some points in space.



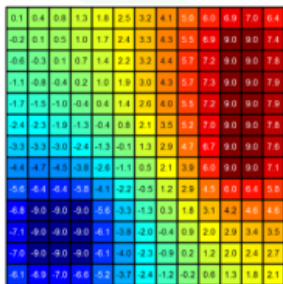
What does the function look like at every other point?

Figure it out by solving Laplace's equation.

$$\nabla^2 V(x, y) = 0$$

## Solution of Laplace's Equation

Laplace's equation is sort of a "number filler inner."



Laplace's equation fills in the numbers so they vary linearly between known regions.

## Another Example

X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	10	17	23	28	33	40	46	51	X	X	X	X	X
X	X	15							55	X	X	X	X	X
X	X	20							60	X	X	X	X	X
X	X	25							65	X	X	X	X	X
X	X	31							70	X	X	X	X	X
X	X	36							75	X	X	X	X	X
X	X	42							80	X	X	X	X	X
X	X	48							85	X	X	X	X	X
X	X	54	62	66	71	77	81	86	90	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

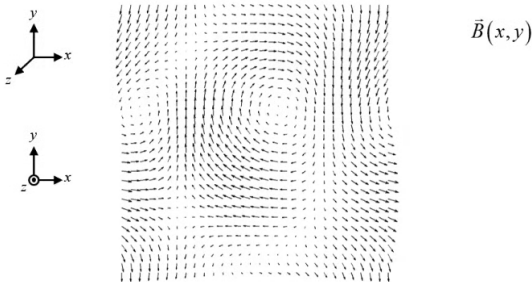


X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	10	17	23	28	33	40	46	51	X	X	X	X	X
X	X	15	21	26	34	39	45	50	55	X	X	X	X	X
X	X	20	26	32	38	44	50	55	60	X	X	X	X	X
X	X	25	31	38	43	49	54	60	65	X	X	X	X	X
X	X	31	37	43	49	54	60	65	70	X	X	X	X	X
X	X	36	42	48	54	59	65	70	75	X	X	X	X	X
X	X	42	48	54	60	65	70	75	80	X	X	X	X	X
X	X	48	54	60	65	71	76	80	85	X	X	X	X	X
X	X	54	60	66	71	77	81	86	90	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

# Στροβιλισμός (curl ή rot) διανυσματικού πεδίου

Στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου είναι ένα άλλο διανυσματικό πεδίο και χαρακτηρίζει την ιδιότητα του αρχικού πεδίου να περιστρέφεται γύρω από κάποιον άξονα. Λίμνη. Φελλός με οδοντογλυφίδες.

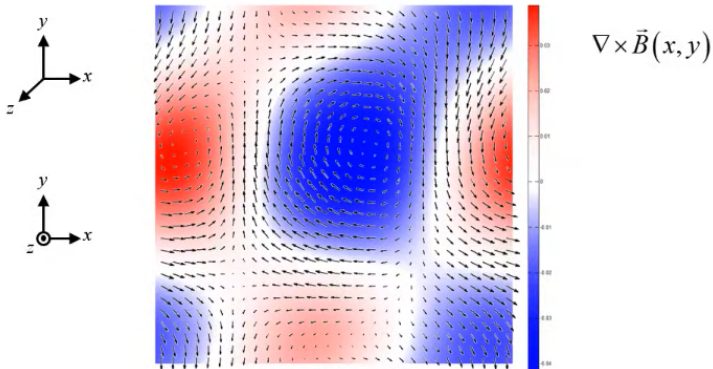
Suppose we start with the following vector field...



**Σχήμα:** Ξεκινάμε με ένα διανυσματικό πεδίο.

# Στροβιλισμός (curl ή rot) διανυσματικού πεδίου 2

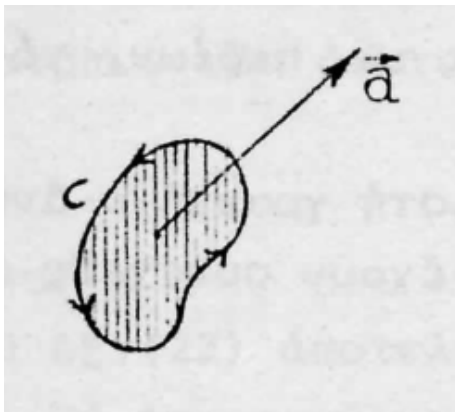
The color in the background is the magnitude of the curl. The direction is either into, or out of, the screen. Red indicates  $+z$  direction while blue indicates  $-z$  direction.



**Σχήμα:** Καταλήγουμε σε ένα διανυσματικό πεδίο.



# Στροβιλισμός (curl ή rot) διανυσματικού πεδίου 3



**Σχήμα:** Η φορά διαγραφής της  $C$  σε συνδυασμό με το  $\vec{a}$  αποτελούν σύστημα δεξιόστροφου κοχλίου.

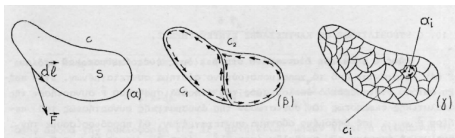
# Στροβιλισμός (curl ή rot) διανυσματικού πεδίου 3

Ορισμός ανεξάρτητος συστήματος συντεταγμένων

$$\text{curl } \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

το όριο της κυκλοφορίας στην κλειστή καμπύλη  $C$  ως προς την επιφάνεια  $a$  όταν αυτή τείνει στο μηδέν. Η ποσότητα αυτή είναι ο στροβιλισμός του πεδίου στο συγκεκριμένο σημείο.

# Θεώρημα Stokes



**Σχήμα:** Άθροισμα κυκλοφοριών στα  $C_i$  ισούται με την κυκλοφορία επί της  $C$ .

Και εδώ μπορούμε να υποδιαιρέσουμε την επιφάνεια που οριοθετείται από την κλειστή καμπύλη  $C$  με κλειστές καμπύλες  $C_i$  και να ορίσουμε

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^N a_i \left( \frac{\oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_i}{a_i} \right)$$

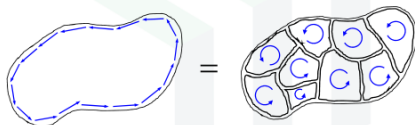
όπου οριακά για  $N \rightarrow \infty$  και  $a_i \rightarrow 0$  η παράσταση στην παρένθεση είναι ο στροβιλισμός του  $\mathbf{F}$ , το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα και  $\mathbf{a}_i \rightarrow d\mathbf{a}$ .

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_a (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a}$$

# Θεώρημα Stokes 2

## Stoke's Theorem

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s}$$



Stoke's theorem allows us to write a closed-contour line integral as a surface integral.

**Σχήμα:** Συνδέει επικαμπύλιο με επιφανειακό ολοκλήρωμα

Το ολοκλήρωμα του στροβιλισμού ενός διανυσματικού πεδίου σε μια επιφάνεια ισούται με την κυκλοφορία του στην κλειστή καμπύλη που οριοθετεί την επιφάνεια.

- Ανεξάρτητο επιφάνειας. Εξαρτάται μόνο από την καμπύλη οριοθέτησης.
- Για κλειστή επιφάνεια μηδενίζεται.

## Στροβιλισμός (curl ή rot) διανυσματικού πεδίου 4

Ο στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{A}$  στο τρισδιάστατο χώρο εκφράζεται στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ως:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

## Στροβιλισμός (curl ή rot) διανυσματικού πεδίου 5

- Ο στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου είναι ένα άλλο διανυσματικό πεδίο
- $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
- $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
- $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f\nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A}$
- Η απόκλιση του στροβιλισμού διανυσματικού πεδίου είναι μηδέν,  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
- Ο στροβιλισμός της βάρθρωσης βαθμωτού πεδίου είναι μηδέν,  $\nabla \times \nabla f = 0$

# Παράδειγμα

Υπολογίστε το στροβιλισμό των πεδίων:

- $\mathbf{P} = x^2yz \hat{\mathbf{x}} + xz \hat{\mathbf{z}},$
- $\mathbf{A} = x^2 \hat{\mathbf{x}} + 3xz^2 \hat{\mathbf{y}} - 2xz \hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{B} = xy \hat{\mathbf{x}} + 2yz \hat{\mathbf{y}} + 3xz \hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{C} = y^2 \hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2) \hat{\mathbf{y}} + 2yz \hat{\mathbf{z}}$

---

$$\nabla \times \mathbf{P} = \left( \frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} =$$

$$= (0 - 0)\hat{\mathbf{x}} + (x^2y - z)\hat{\mathbf{y}} + (0 - x^2z)\hat{\mathbf{z}} = (x^2y - z)\hat{\mathbf{y}} - x^2z\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = -6xz\hat{\mathbf{x}} + 2z\hat{\mathbf{y}} + 3z^2\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -2y\hat{\mathbf{x}} - 3z\hat{\mathbf{y}} - x\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \times \mathbf{C} = 0$$

# Άσκηση

- Έστω δυο διανυσματικά πεδία  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$ . Ποια είναι η έκφραση  $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$  σε καρτεσιανές συντεταγμένες;
- Υπολογίστε την έκφραση  $(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}}$  για το μοναδιαίο διάνυσμα θέσης  $\hat{\mathbf{r}}$ .
- Για τα πεδία  $\mathbf{A} = x^2 \hat{\mathbf{x}} + 3xz^2 \hat{\mathbf{y}} - 2xz \hat{\mathbf{z}}$  και  $\mathbf{B} = xy \hat{\mathbf{x}} + 2yz \hat{\mathbf{y}} + 3xz \hat{\mathbf{z}}$  υπολογίστε το  $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ .

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} &= \left( A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}) = \\ &= \left( A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \\ &+ \left( A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$



# Άσκηση (συν)

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Η συνιστώσα  $x$

$$\begin{aligned} [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}}]_x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \\ &= \frac{1}{r} \left\{ x \left[ (-1/2) - x \frac{1}{2} (-3/2) 2x \right] + yx \left[ -\frac{1}{2} (-3/2) 2y \right] + zx \left[ -\frac{1}{2} (-3/2) 2z \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{x}{r} - \frac{1}{r^3} (x^3 + xy^2 + xz^2) \right\} = \frac{1}{r} \left( \frac{x}{r} - \frac{x}{r} \right) = 0 \end{aligned}$$

ομοίως και οι άλλες συνιστώσες οπότε:

$$(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}} = 0$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} &= \left( x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 3xz^2 \frac{\partial}{\partial y} - 2xz \frac{\partial}{\partial z} \right) (xy \hat{\mathbf{x}} + 2yz \hat{\mathbf{y}} + 3xz \hat{\mathbf{z}}) = \\ &= (x^2 y + 3x^2 z^2) \hat{\mathbf{x}} + (6xz^3 - 4xyz) \hat{\mathbf{y}} - (3x^2 z) \hat{\mathbf{z}} = \\ &= x^2(y + 3z^2)\hat{\mathbf{x}} + 2xz(3z^2 - 2y)\hat{\mathbf{y}} - 3x^2 z\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

# Θεώρημα Helmholtz

Ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$  ορίζεται με μοναδικό τρόπο σε μια περιοχή από την απόκλιση και το στροβιλισμό του:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D \quad \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{C}$$

σαν (θεώρημα Helmholtz)

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{W}$$

όπου

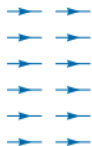
$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{D(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dr' \quad \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dr'$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα σαρώνουν όλη την περιοχή και συγκλίνουν. Σύγκλιση σημαίνει απόκλιση  $D$  και στροβιλισμός  $\mathbf{C}$  να τείνουν στο 0 ταχύτερα από  $1/r^2$  καθώς  $r \rightarrow \infty$  και  $\mathbf{F}$  τείνει στο 0 καθώς  $r \rightarrow \infty$ . Η τυπική οριακή συνθήκη όπου όλα τα πεδία τείνουν στο μηδέν όσο απομακρυνόμαστε από τα φορτία που τα δημιουργούν. Τότε η λύση που προτείνει το θεώρημα Helmholtz είναι και μοναδική.

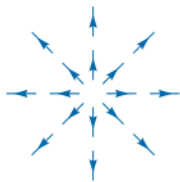
# Κατηγοριοποίηση (classification) διανυσματικών πεδίων

Ένα διανυσματικό πεδίο χαρακτηρίζεται πλήρως από την απόκλιση (divergence) ΚΑΙ το στροβιλισμό (curl) του. Οι περιπτώσεις που έχουμε είναι:

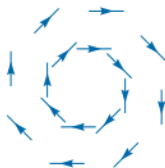
- a)  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla \times \mathbf{A} = 0$
- b)  $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0, \nabla \times \mathbf{A} = 0$
- c)  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla \times \mathbf{A} \neq 0$
- d)  $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0, \nabla \times \mathbf{A} \neq 0$



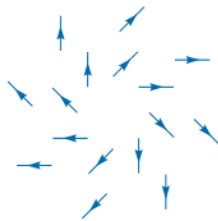
(a)



(b)



(c)



(d)

Ένα διανυσματικό πεδίο λέγεται **συντηρητικό** (conservative), ή **αστρόβιλο** (irrotational) εάν  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ . Από το θεώρημα Stoke's

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

που σημαίνει ότι η κυκλοφορία του πεδίου γύρω από μια κλειστή καμπύλη είναι εκ ταυτότητας μηδέν, άρα η κυκλοφορία είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της καμπύλης. Π.χ. ηλεκτροστατικό πεδίο και πεδίο βαρύτητας. Εν γένει ισχύει ότι  $\nabla \times (\nabla V) = 0$  για οποιοδήποτε βαθμωτό πεδίο  $V$  άρα,

$$\text{εάν } \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

$$\text{τότε } \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0 \text{ και } \mathbf{A} = -\nabla V$$

Το  $\mathbf{A}$  ονομάζεται επίσης δυναμικό πεδίο με  $V$  το βαθμωτό δυναμικό του  $\mathbf{A}$ .

# Σωληνοειδές πεδίο

Ένα διανυσματικό πεδίο λέγεται **σωληνοειδές** εάν έχει μηδενική απόκλιση,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Από το θεώρημα απόκλισης

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = 0$$

φαίνεται ότι οι γραμμές ροής του  $\mathbf{A}$  που εισέρχονται στην κλειστή επιφάνεια  $S$  πρέπει και να εξέρχονται. Δεν έχουμε πηγές (sources) ή καταβόθρες (sinks). Π.χ. ασυμπίεστα ρευστά, μαγνητικά πεδία, πυκνότητες ρεύματος σε σταθερές καταστάσεις. Εν γένει ισχύει ότι  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$  για οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$  άρα,

$$\text{εάν } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\text{τότε } \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{F}$$