Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 07

Α. Δροσόπουλος

02-11-2022

Outline

Topic

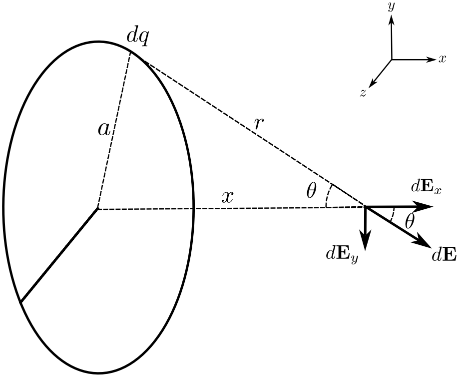
1. Ασκήσεις

2. Διαφορικός λογισμός και Ασκήσεις

Άσκηση 6

Φορτίο q κατανέμεται ομοιόμορφα με μορφή λεπτού δακτυλίου ακτίνας a. Υπολογίστε το $\mathbf{E}$ στον άξονα του δακτυλίου. Σε ποια απόσταση από το κέντρο του δακτυλίου και επί του άξονά του η ένταση του πεδίου $\mathbf{E}$ γίνεται μέγιστη και πόση είναι αυτή;

Αντί για δακτύλιο θεωρείστε λεπτό δίσκο ακτίνας R στον οποίο κατανέμεται ομοιόμορφα το φορτίο q και υπολογίστε το $\mathbf{E}$ στον άξονα του δίσκου.



Άσκηση 6 - Λύση

Επιλέγουμε άξονα δακτυλίου τον άξονα x. Στοιχειώδες φορτίο dq επί του δακτυλίου δημιουργεί στοιχειώδες πεδίο $d\mathbf{E}$ σε σημείο του άξονα. Αυτό αναλύεται σε συνιστώσα παράλληλη στον άξονα και συνιστώσα κάθετη. Το συμμετρικό ως προς το κέντρο του δακτυλίου στοιχειώδες φορτίο δημιουργεί και αυτό το δικό του πεδίο στο ίδιο σημείο. Η κάθετη συνιστώσα εξουδετερώνεται και μένει η παράλληλη με μέτρο

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\,dq}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Ολοκληρώνοντας για όλα τα dq έχουμε

$$E_x = \int dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{xq}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

και το ολικό πεδίο είναι

$$\mathbf{E}(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{x}}$$

Άσκηση 6 - Λύση 2

Για το σημείο x που έχουμε μέγιστο πεδίο, $dE_x/dx = 0$. Οπότε

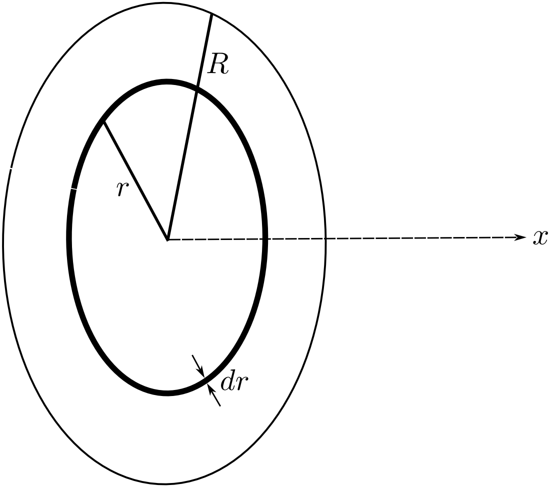
$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(x^2+a^2)^{3/2} - 3x^2(x^2+a^2)^{1/2}}{(x^2+a^2)^3}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$(x^2 + a^2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

και

$$\mathbf{E}_{\max} = \pm\frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2}\,\hat{\mathbf{x}}$$

Άσκηση 6 - Λύση 3



Άσκηση 6 - Λύση 4

Για τον δίσκο χρησιμοποιούμε την προηγούμενη σχέση δακτυλίου και θεωρούμε ότι ο δίσκος αναλύεται σε δακτυλίους ακτίνας r όπου $0 \leq r \leq R$. Η πυκνότητα φορτίου όπως κατανέμεται ομοιόμορφα σε ολόκληρο το δίσκο είναι

$$\rho = \frac{q}{\pi R^2}$$

και ένας δακτύλιος με πάχος dr θα έχει εμβαδόν

$$dS = 2\pi r dr$$

και φορτίο

$$dq = \rho dS = 2\pi r \rho dr$$

Οπότε

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\, 2\pi r \rho dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{x\rho}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

και

$$E_x = \frac{x\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{x\rho}{4\epsilon_0} \left[-\frac{2}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right]_0^R = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right]$$

Επομένως

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right] \hat{\mathbf{x}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right] \hat{\mathbf{x}}$$

Άσκηση 7

Υπολογίστε το έργο κατά τη μετακίνηση του φορτίου q_2 μέχρι του μέσου M. Δίδονται: $q_1 = 4\ \mu\text{C}$, $q_2 = 2\ \mu\text{C}$ και $\ell = 40$ cm.

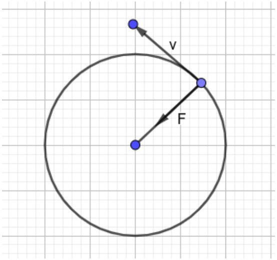
Έχουμε:

$$W = q_2 U_{AB} = q_2 \left(\frac{Kq_1}{r_B} - \frac{Kq_1}{r_A} \right) = Kq_2q_1 \left(\frac{2}{\ell} - \frac{1}{\ell} \right) = 0.18\ \text{J}$$

```
>> q1=4e-6; q2=2e-6; ell=0.4; K=9e9;
>> W=q2*K*q1*(1/(ell/2)-1/ell)
W =  0.18000
```

Άσκηση 8

Υπολογίστε κλασσικά τη συχνότητα περιστροφής, τη γραμμική ταχύτητα και τη στροφορμή του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου ($R = 0.53$ Å, $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C). Δίδεται 1 Å $= 10^{-10}$ m.



Άσκηση 8 - Λύση

$$F = \frac{mv^2}{R} = K\frac{e^2}{R^2} \Rightarrow v = e\sqrt{\frac{K}{mR}} = 2.187 \times 10^6 \text{ m/s}$$

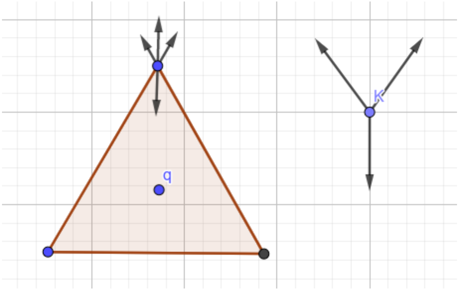
$$\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 6.568 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$L = mvR = 1.056 \times 10^{-34} \text{ kgm}^2/\text{s}$$

```
>> K=9e9; e=1.602e-19; m=9.11e-31; R=0.53e-10;
>> v=e*sqrt(K/(m*R))
v =  2187190.66266
>> printf("v = %g\n",v)
v = 2.18719e+06
>> w=v/R
w =    4.1268e+16
>> f=w/(2*pi)
f =  6567966140516086
>> printf("f = %g\n",f)
f = 6.56797e+15
>> L=m*v*R
L =    1.0560e-34
```

Άσκηση 9

Θεωρείστε ένα ηλεκτρόνιο σε κάθε κορυφή ισοπλεύρου τριγώνου και φορτίο $q > 0$ στο κέντρο βάρους αυτού. Να βρεθεί το φορτίο q για το οποίο μηδενίζεται η δύναμη σε κάθε ηλεκτρόνιο.



Άσκηση 9 - Λύση

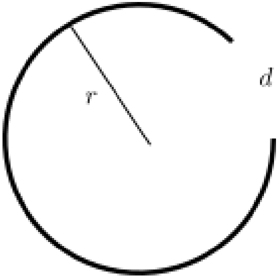
Πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου a. Ύψος $v = a\sqrt{3}/2$. Απόσταση κορυφής από κέντρο βάρους $(2/3)v = a\sqrt{3}/3$.

$$F_e = K\frac{e^2}{a^2} \qquad F_q = K\frac{qe}{a^2/3}$$

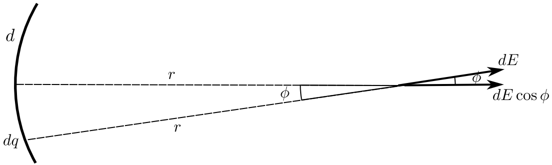
$$2F_e\cos(30^\circ) = F_q \Rightarrow 2K\frac{e^2}{a^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = K\frac{3qe}{a^2} \Rightarrow q = e\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άσκηση 10

Δακτύλιος με ακτίνα r έχει διάκενο d και είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με φορτίο Q. Να βρεθεί το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο του δακτυλίου. Δίδονται: $Q = 2$ μC, $r = 1$ m, $d = 2$ cm.



Άσκηση 10 - Λύση



Αν δεν υπήρχε διάκενο, το πεδίο λόγω συμμετρίας θα ήταν μηδέν. Εφόσον υπάρχει διάκενο, το πεδίο είναι μη μηδενικό και οφείλεται αποκλειστικά στο κομμάτι φορτίου απέναντι από το διάκενο. Έχουμε για φορτίο dq του τμήματος αυτού

$$dE\cos\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\phi \qquad \rho = \frac{Q}{2\pi r - d} \qquad dq = \rho r d\phi$$

Μέτρο ολικού πεδίου όπου $\Phi = d/(2r)$ η γωνία που βλέπει το μισό τόξο

$$E = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\Phi}\frac{dq}{r^2}\cos\phi = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\Phi}\frac{\rho r d\phi}{r^2}\cos\phi = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r}\sin\Phi = 57.478\ \mathrm{V/m}$$

```
>> K=9e9; Q=2e-6; r=1; d=2e-2; PHI=d/(2*r); rho=Q/(2*pi*r-d);
>> E=(2*K*rho/r)*sin(PHI)
E =  57.478
```

Topic

1. Ασκήσεις

2. Διαφορικός λογισμός και Ασκήσεις

Διαφορικός λογισμός

Έστω συνάρτηση $f(x)$. Η παράγωγος df/dx μας δίνει το ρυθμό μεταβολής, πόσο γρήγορα αλλάζει η $f(x)$ (αύξηση ή ελάττωση) όταν αλλάζει η μεταβλητή x.

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$$

Έστω συνάρτηση $f(x, y, z)$. Ο ρυθμός μεταβολής είναι πιο σύνθετος εδώ γιατί βρισκόμαστε στον τρισδιάστατο χώρο και εξαρτάται από την κατεύθυνση. Από λογισμό συναρτήσεων πολλών μεταβλητών:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot (dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}) = \nabla f \cdot d\mathbf{l}$$

$$\text{όπου} \qquad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

η κλίση ή βάθμωση (gradient, grad) της συνάρτησης f. Συμβολίζεται: ∇f, grad$f$.

Βάθμωση

Η βάθμωση μιας βαθμωτής συνάρτησης (βαθμωτό πεδίο) στον τρισδιάστατο χώρο είναι διανυσματικό πεδίο όπου σε κάθε σημείο του χώρου μας δίνει το διάνυσμα του μέγιστου ρυθμού μεταβολής του πεδίου. Πρόσημο θετικό σημαίνει μέγιστη αύξηση. Πρόσημο αρνητικό σημαίνει μέγιστη ελάττωση.

Ο τελεστής ανάδελτα (del operator) σε καρτεσιανές:

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

είναι διανυσματικός τελεστής που δρα στην συνάρτηση που ακολουθεί. Αν η συνάρτηση είναι βαθμωτή, έχουμε την βάθμωση που είδαμε.

Αν είναι διανυσματική, έχουμε δυο ειδών αποτελέσματα.

1. $\nabla \cdot \mathbf{A}$ Απόκλιση (divergence, div) που είναι βαθμωτή συνάρτηση.
2. $\nabla \times \mathbf{A}$ Στροβιλισμός (curl, rot) που είναι διανυσματική συνάρτηση.

Παράδειγμα

Υπολογίστε τη βάθμωση του μέτρου του διανύσματος θέσης $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Έχουμε:

$$\nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{z}} =$$

$$= \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$$

Ποιο είναι το νόημα του παραπάνω αποτελέσματος;

Άσκηση

Υπολογίστε τη βάθμωση των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$
2. $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$
3. $f(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z)$

Απαντήσεις:

$$\nabla f = 2\,x\hat{\mathbf{x}} + 3\,y^2\hat{\mathbf{y}} + 4\,z^3\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla f = 2\,xy^3z^4\hat{\mathbf{x}} + 3\,x^2y^2z^4\hat{\mathbf{y}} + 4\,x^2y^3z^3\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla f = e^x \ln(z) \sin(y)\,\hat{\mathbf{x}} + \cos(y)\, e^x \ln(z)\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{e^x \sin(y)}{z}\hat{\mathbf{z}}$$

Άσκηση

Το ύψος κάποιου λόφου (σε m) δίδεται από:

$$h(x,y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12)$$

όπου x και y οι αποστάσεις αντίστοιχα (σε km) ανατολικά και βόρεια κάποιας πόλης που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.

- Σε ποιο σημείο βρίσκεται η κορυφή του λόφου;
- Πόσο είναι το ύψος του;
- Πόσο απότομη είναι η κλίση του λόφου (σε m/km) σε σημείο που βρίσκεται 1 km ανατολικά και 1 km βόρεια της πόλης. Προς ποια κατεύθυνση στο σημείο αυτό η κλίση γίνεται πιο απότομη;

Κορυφή του λόφου $\nabla h = 0$. Οπότε:

$$\nabla h = (-60\,x + 20\,y - 180)\,\hat{\mathbf{x}} + (20\,x - 80\,y + 280)\,\hat{\mathbf{y}}$$

Άσκηση (συν)

$$\left.\begin{array}{rcl} -60\,x+20\,y-180 & = & 0 \\ 20\,x-80\,y+280 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x=-2 \\ y=3 \end{array}$$

που σημαίνει $2\ \mathrm{km}$ δυτικά και $3\ \mathrm{km}$ βόρεια της πόλης.

Το ύψος του λόφου είναι $h(-2,3) = 720\ \mathrm{m}$.

Κλίση του λόφου στο σημείο $(1,1)$ είναι: $\nabla h(1,1) = 220(-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$.

Μέτρο της κλίσης: $|\nabla h| = 220\sqrt{2} \sim 311.1\ \mathrm{m/km}$

Κατεύθυνση: βορειοδυτική.

Άσκηση

Έστω $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ το διάνυσμα απόστασης από κάποιο σταθερό σημείο (x', y', z') στο μεταβλητό σημείο (x, y, z) και έστω $\mathscr{r}$ το μήκος του. Δείξτε ότι:

- $\nabla(\mathscr{r}^2) = 2\boldsymbol{\mathscr{r}}$
- $\nabla(1/\mathscr{r}) = -\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}/\mathscr{r}^2$
- Ποια είναι η γενική σχέση για $\nabla(\mathscr{r}^n)$;

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}} \qquad \mathscr{r} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\nabla(\mathscr{r}^2) = \frac{\partial}{\partial x}[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}()\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}()\hat{\mathbf{z}} =$$
$$= 2(x - x')\hat{\mathbf{x}} + 2(y - y')\hat{\mathbf{y}} + 2(z - z')\hat{\mathbf{z}} = 2\boldsymbol{\mathscr{r}}$$

Άσκηση (συν)

$$\nabla(1/\mathscr{r}) = \frac{\partial}{\partial x}[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-1/2}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}()^{-1/2}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}()^{-1/2}\,\hat{\mathbf{z}} =$$

$$= -\frac{1}{2}()^{-3/2}2(x-x')\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}()^{-3/2}2(y-y')\,\hat{\mathbf{y}} - \frac{1}{2}()^{-3/2}2(z-z')\,\hat{\mathbf{z}} =$$

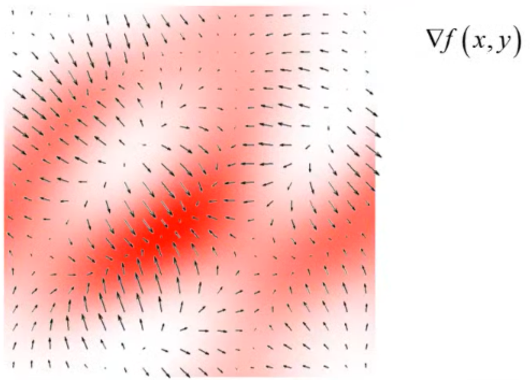
$$= -()^{-3/2}[(x-x')\,\hat{\mathbf{x}} + (y-y')\,\hat{\mathbf{y}} + (z-z')\,\hat{\mathbf{z}}] = -\frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^3} = -\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}$$

$$\nabla(\mathscr{r}^n) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathscr{r}^n)\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathscr{r}^n)\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}(\mathscr{r}^n)\,\hat{\mathbf{z}} = n\,\mathscr{r}^{n-1}\frac{\partial \mathscr{r}}{\partial x}\,\hat{\mathbf{x}} + \cdots =$$

$$= n\,\mathscr{r}^{n-1}\frac{2(x-x')}{2\,\mathscr{r}}\,\hat{\mathbf{x}} + \cdots = n\,\mathscr{r}^{n-1}\frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} = n\,\mathscr{r}^{n-1}\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$$

Βαθμίδα ή βάθμωση (grad) βαθμωτού πεδίου

Γενίκευση της παραγώγου σε περισσότερες διαστάσεις. Χαρακτηρίζει τον ρυθμό μεταβολής της τιμής ενός βαθμωτού πεδίου στην κατεύθυνση που είναι μέγιστος. Η βάθμωση (grad, gradient) παράγει ένα διανυσματικό πεδίο.



Σχήμα: Βαθμίδα βαθμωτού πεδίου

Βαθμίδα ή βάθμωση (grad) βαθμωτού πεδίου 2

Σαν γενίκευση της παραγώγου ισχύουν επίσης:

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

$$\nabla f^n = n f^{n-1}\nabla f$$

όπου f και g βαθμωτά πεδία στον τρισδιάστατο χώρο και n ακέραιος.

Σημειώνουμε ότι:

- Το μέτρο της βάθμωσης ∇f ισούται με τον μέγιστο ρυθμό μεταβολής της f στο χώρο.
- Η βάθμωση ∇f δείχνει την κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της f στο χώρο.
- Η βάθμωση ∇f σε κάθε σημείο στο χώρο είναι κάθετη στη σταθερή επιφάνεια $f = c$ που περνά από αυτό το σημείο.
- Η προβολή (ή συνιστώσα) της βάθμωσης ∇f στην κατεύθυνση κάποιου μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{a}$ είναι $\nabla f \cdot \mathbf{a}$ και ονομάζεται η παράγωγος κατεύθυνσης του πεδίου f στην κατεύθυνση του $\mathbf{a}$.
- Για $\mathbf{A} = \nabla f$, το f είναι το βαθμωτό δυναμικό του $\mathbf{A}$.

Παράδειγμα

Για το πεδίο $W = x^2y^2 + xyz$, υπολογίστε τη βάθμωση ∇W και την παράγωγο κατεύθυνσης $dW/d\ell$ στην κατεύθυνση $\mathbf{a} = (3, 4, 12)$ στο σημείο $(2, -1, 0)$.

$$\nabla W = \frac{\partial W}{\partial x}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial W}{\partial y}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial W}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}} = (2xy^2 + yz)\,\hat{\mathbf{x}} + (2x^2y + xz)\,\hat{\mathbf{y}} + (xy)\,\hat{\mathbf{z}}$$

Στο σημείο $(2, -1, 0)$ έχουμε $\nabla W = (4, -8, -2)$ οπότε

$$\frac{dW}{d\ell} = \nabla W \cdot \hat{\mathbf{a}} = (4, -8, -2) \cdot \frac{(3, 4, 12)}{\|(3, 4, 12)\|} = -3.3846$$

Σχέση ηλεκτρικού πεδίου με δυναμικό

Από τα παραπάνω έχουμε για το δυναμικό $U(x, y, z)$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) dz =$$

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot (dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}) = \nabla U \cdot d\mathbf{l}$$

Δεδομένου ότι $dU = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ έχουμε

$$\mathbf{E} = -\nabla U$$

Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στον ορισμό του δυναμικού σαν έργο ανά μονάδα φορτίου κάποιας εξωτερικής δύναμης που αντιτίθεται στο πεδίο και όχι της δύναμης του πεδίου. Άρα, η φορά της έντασης του πεδίου δείχνει τη φορά κατά την οποία το δυναμικό ελαττώνεται.