Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 06

Α. Δροσόπουλος

21-10-2022

Outline

1. Διαφορά Δυναμικού - Δυναμικό - Δυναμική Ενέργεια
2. Ασκήσεις

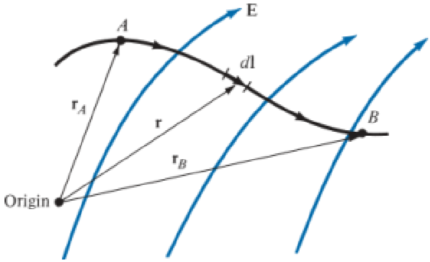
Topic

1. Διαφορά Δυναμικού - Δυναμικό - Δυναμική Ενέργεια

2. Ασκήσεις

Ηλεκτρικό δυναμικό - Τάση

Μέχρι στιγμής είδαμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο $\mathbf{E}$ από το νόμο Coulomb ή, αν η κατανομή φορτίου που δημιουργεί το πεδίο είναι συμμετρική, από τον νόμο Gauss. Υπάρχει άλλος ένας τρόπος, από το βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό U. Μάλιστα αυτός ο τρόπος είναι ευκολότερος εφόσον δουλεύουμε με βαθμωτή αντι για διανυσματική συνάρτηση.



Σχήμα: Μεταφορά φορτίου q σε ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathbf{E}$

Ηλεκτρικό δυναμικό - Τάση 2

Έστω ότι θέλουμε να μετακινήσουμε ένα σημειακό φορτίο q από το Α στο Β σε χώρο που υπάρχει ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathbf{E}$. Από τον νόμο Coulomb, η δύναμη από το πεδίο στο q είναι $\mathbf{F}_\pi = q\mathbf{E}$ οπότε η εξωτερική δύναμη που χρειάζεται για να γίνει η μετακίνηση πρέπει να είναι $\mathbf{F}_\varepsilon = -q\mathbf{E}$.

Το στοιχειώδες έργο που δίνει η εξωτερική δύναμη κατά τη στοιχειώδη μετατόπιση $d\mathbf{l}$ είναι:

$$dW = -q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Το αρνητικό πρόσημο εκφράζει το γεγονός ότι το έργο παράγεται από την εξωτερική δύναμη που αντιτίθεται στη δύναμη του πεδίου. Επομένως, το συνολικό έργο που καταναλώνεται ή αλλιώς, η δυναμική ενέργεια που απαιτείται για τη μετακίνηση του φορτίου q από το Α στο Β είναι:

$$W = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Ηλεκτρικό δυναμικό - Τάση 3

Διαιρώντας με το φορτίο έχουμε το μέγεθος

$$U_{AB} = \frac{W}{q} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

γνωστό σαν *διαφορά δυναμικού* μεταξύ A και B ή *ηλεκτρική τάση*, μιας και φανερώνει πόσο μεγάλη είναι η τάση αλληλοεξουδετέρωσης των συγκεκριμένων φορτίων.

- Για τη διαφορά δυναμικού U_{AB} το A είναι το αρχικό σημείο και το B το τελικό.
- Εάν U_{AB} αρνητική, υπάρχει έλλειμα δυναμικής ενέργειας στη μετακίνηση του φορτίου q από το A στο B που σημαίνει ότι το έργο το παράγει το πεδίο. Εάν U_{AB} θετική, υπάρχει κέρδος δυναμικής ενέργειας, που σημαίνει ότι το έργο το παράγει η εξωτερική δύναμη και η ενέργεια αποθηκεύεται στο πεδίο.
- Η διαφορά δυναμικού U_{AB} είναι ανεξάρτητη από τη διαδρομή και εξαρτάται μόνο από αρχικό και τελικό σημείο (πεδίο συντηρητικό).
- Μονάδες της U_{AB} είναι Joule/Coulomb (J/C) ή volt (V).

Διαφορά Δυναμικού - Δυναμικό

Εάν ορίσουμε αυθαίρετα σημείο αναφοράς το A, σημαίνει ότι έχουμε μια βαθμωτή συνάρτηση για κάθε σημείο B που μας δίνει το έργο ανά μονάδα φορτίου που απαιτείται για την μεταφορά του από το σημείο αναφοράς στο B. Η συνάρτηση αυτή είναι το βαθμωτό δυναμικό ή δυναμική συνάρτηση ή απλά δυναμικό πεδίου. Όπως προκύπτει, το δυναμικό του σημείου αναφοράς είναι μηδέν.

Διαφορά Δυναμικού - Δυναμικό (2)

Όταν τα φορτία (που δημιουργούν το πεδίο) βρίσκονται σε πεπερασμένες μεταξύ τους αποστάσεις επιλέγουμε συνήθως σαν σημείο αναφοράς το άπειρο. Το δυναμικό κάποιου σημείου P στο χώρο είναι τότε

$$U_P = -\int_{\infty}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Το δυναμικό πεδίου που οφείλεται σε ένα σημειακό φορτίο q είναι

$$U_P = -\int_{\infty}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{P} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

όπου r η απόσταση μεταξύ q και P.

Για σύστημα φορτίων $q_1, q_2, \dots q_N$ που βρίσκονται σε πεπερασμένες μεταξύ τους αποστάσεις, με επαλληλία

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}$$

Διαφορά Δυναμικού - Δυναμικό (3)

Και για συνεχή κατανομή φορτίου σε πεπερασμένο όγκο V

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$$

όπου $U(\mathbf{r})$ το δυναμικό στη θέση $\mathbf{r}$, $\rho(\mathbf{r}')$ η πυκνότητα φορτίων στο σημείο $\mathbf{r}'$, dV' στοιχειώδης όγκος στην περιοχή του σημείου $\mathbf{r}'$ και $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ η απόσταση μεταξύ των σημείων $\mathbf{r}$ και $\mathbf{r}'$.

Παρατηρείστε ότι στις εκφράσεις του δυναμικού η απόσταση στον παρονομαστή βρίσκεται στην πρώτη δύναμη ενώ για το πεδίο $\mathbf{E}$ βρίσκεται στην δεύτερη δύναμη.

Το έργο το οποίο παράγεται κατά τη μετακίνηση φορτίου q από σημείο 1 σε σημείο 2 είναι

$$W = q(U_2 - U_1) = qU_{12}$$

όπου U_{12} η διαφορά των δυναμικών μεταξύ των σημείων 1 και 2.

Παράδειγμα

Έστω δυο σημειακά φορτία $Q_1 = -4\ \mu\text{C}$, $Q_2 = 5\ \mu\text{C}$ τοποθετημένα στα σημεία $(2, -1, 3)$ και $(0, 4, -2)$ αντίστοιχα (μονάδες μήκους m). Με την παραδοχή ότι το δυναμικό στο ∞ είναι 0, ποιο είναι το δυναμικό στο $(1, 0, 1)$;

$$U(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0\|\mathbf{r}-\mathbf{r'}_1\|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0\|\mathbf{r}-\mathbf{r'}_2\|}$$

$$\|\mathbf{r}-\mathbf{r'}_1\| = \|(1,0,1)-(2,-1,3)\| = 2.4495\ \text{m}$$

$$\|\mathbf{r}-\mathbf{r'}_2\| = \|(1,0,1)-(0,4,-2)\| = 5.0990\ \text{m}$$

$$U(1,0,1) = -5871.7\ \text{V}$$

Παράδειγμα

Έστω σημειακό φορτίο $Q = 5$ nC στο $(-3, 4, 0)$ (μονάδες μήκους m) και γραμμή $y = 1, z = 1$ με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου πυκνότητας $\rho_L = 2$ nC/m. Να βρεθούν:

1. Το δυναμικό U στο $A(5, 0, 1)$ αν $U = 0$ V στο $O(0, 0, 0)$.
2. Το δυναμικό U στο $B(-2, 5, 3)$ αν $U = 100$ V στο $C(1, 2, 1)$.
3. Αν $U = -5$ V στο $O(0, 0, 0)$ ποια η διαφορά δυναμικού U_{CB};

Το δυναμικό σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου αναλύεται σε $U = U_Q + U_L$ όπου U_Q η συνεισφορά από το σημειακό φορτίο και U_L η συνεισφορά από το γραμμικό. Για το σημειακό:

$$U_Q = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot dr\hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1$$

Για τη φορτισμένη γραμμή:

$$U_L = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot d\rho\, \hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln\rho + C_2$$

και

$$U = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln\rho + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C$$

Παράδειγμα 2

όπου $C = C_1 + C_2$, σταθερά, ρ η απόσταση από τη γραμμή $y = 1, z = 1$ στο σημείο που υπολογίζεται το δυναμικό και r η απόσταση από το Q στο ίδιο σημείο.

Για την περίπτωση (1) θέλουμε r και ρ για τα σημεία O και A. Η απόσταση ρ από οποιοδήποτε σημείο (x, y, z) του χώρου, στη γραμμή $y = 1, z = 1$, που είναι παράλληλη στον άξονα x είναι η απόσταση μεταξύ (x, y, z) και $(x, 1, 1)$. Οπότε

$$\rho = \|(x, y, z) - (x, 1, 1)\| = \sqrt{(y-1)^2 + (z-1)^2}$$

και

$$\rho_O = \|(0,0,0) - (0,1,1)\| = \sqrt{2} \qquad r_O = \|(0,0,0) - (-3,4,0)\| = 5$$
$$\rho_A = \|(5,0,1) - (5,1,1)\| = 1 \qquad r_A = \|(5,0,1) - (-3,4,0)\| = 9$$

Επομένως:

$$U_A - U_O = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_O}{\rho_A} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_O}\right) = U_A = 8.4766 \text{ V}$$

Με την παραπάνω αφαίρεση αποφύγαμε τον υπολογισμό της σταθεράς C.

Παράδειγμα 3

Για την περίπτωση (2) θέλουμε r και ρ για τα σημεία B και C.

$$\rho_B = \|(-2,5,3)-(-2,1,1)\| = \sqrt{20} \qquad r_B = \|(-2,5,3)-(-3,4,0)\| = \sqrt{11}$$

$$\rho_C = \|(1,2,1)-(1,1,1)\| = 1 \qquad r_C = \|(1,2,1)-(-3,4,0)\| = \sqrt{21}$$

$$U_B - U_C = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ \ln\frac{\rho_C}{\rho_B} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_C}\right) = -50.175\mathrm{V} \Rightarrow U_B = 49.825\ \mathrm{V}$$

Για την περίπτωση (3) τα πράγματα είναι πιο απλά. Δεν χρειαζόμαστε την αναφορά που δίδεται για το U_O και για την διαφορά CB το U_B το υπολογίσαμε και το U_C δίδεται. Άρα

$$U_{CB} = U_B - U_C = -50.175\ \mathrm{V}$$

Δυναμική ενέργεια

Για να προσδιορίσουμε την ενέργεια που έχει ένα σύμπλεγμα φορτίων θα πρέπει να δούμε πόσο έργο χρειάζεται να καταναλώσουμε για να το δημιουργήσουμε. Έστω ότι θέλουμε να φτιάξουμε ένα σύμπλεγμα τριών φορτίων q_1, q_2, q_3 σε αρχικά κενό χώρο. Φέρνουμε το φορτίο q_1 από το άπειρο στο P_1. Δεν καταναλώνουμε έργο γιατί ο χώρος είναι κενός και δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο. Η μεταφορά του q_2 από το άπειρο στο P_2 καταναλώνει έργο $q_2 U_{21}$ όπου U_{21} το δυναμικό στο P_2 από το φορτίο q_1 στο P_1. Ομοίως και για τη μεταφορά του q_3 στο P_3 καταναλώνεται έργο $q_3(U_{32} + U_{31})$. Το ολικό έργο είναι:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + q_2 U_{21} + q_3(U_{32} + U_{31})$$

Αν σχηματίσουμε το σύμπλεγμα με ανάστροφη φορά φορτίων:

$$W = W_3 + W_2 + W_1 = 0 + q_2 U_{23} + q_1(U_{12} + U_{13})$$

Αθροισμα

$$2W = q_1(U_{12} + U_{13}) + q_2(U_{21} + U_{23}) + q_3(U_{31} + U_{32}) = q_1 U_1 + q_2 U_2 + q_3 U_3 \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1 U_1 + q_2 U_2 + q_3 U_3\right)$$

Δυναμική ενέργεια 2

Επομένως για $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots q_N$ φορτία η δυναμική ενέργεια W_i για το q_i λόγω αλληλεπιδράσεως με τα υπόλοιπα φορτία $q_{j\neq i}$ θα είναι

$$W_i = \sum_{j\neq i}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

όπου r_{ij} η απόσταση των φορτίων q_i, q_j. Η συνολική ενέργεια W του συστήματος θα είναι το άθροισμα όλων των επιμέρους δυναμικών ενεργειών W_i

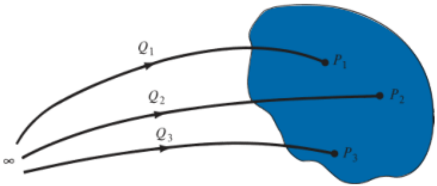
$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} W_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Ο παράγοντας $1/2$ εμφανίζεται γιατί οι όροι $q_i q_j / r_{ij}$ και $q_j q_i / r_{ji}$ παριστάνουν την ενέργεια του ίδιου ζεύγους. Η σχέση γενικεύεται

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \left(\sum_{j\neq i}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i U_i$$

Τονίζεται εδώ ότι το U_i είναι το συνολικό δυναμικό από όλα τα φορτία που δημιουργούν πεδίο στο χώρο πλην του q_i στο σημείο που βρίσκεται το q_i.

Δυναμική ενέργεια 3



Σχήμα: Δημιουργία συμπλέγματος φορτίων

Για συνεχή κατανομή φορτίων στο χώρο πυκνότητας ρ η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$W = \frac{1}{2}\int_V U\rho dV$$

όπου V ο συνολικός χώρος φορτίου.

Δυναμική ενέργεια 4

Επομένως, η δυναμική ενέργεια συστήματος φορτίων ισούται με το έργο που καταναλώθηκε για τη μεταφορά των φορτίων από το άπειρο στις θέσεις που βρίσκονται στο σύστημα. Αποτέλεσμα της μεταφοράς είναι η δημιουργία στο χώρο ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$. Λέμε λοιπόν ότι το έργο που καταναλώθηκε μετατράπηκε σε ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου ή ότι είναι αποθηκευμένο στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργήθηκε.

Για συντηρητικά πεδία η αποθηκευμένη ενέργεια μπορεί να μετατραπεί πάλι σε μηχανικό έργο αν τα φορτία αφεθούν ελεύθερα να κινηθούν (π.χ. κλείσιμο κυκλώματος). Κάθε στοιχείο όγκου του πεδίου περικλείει ενέργεια που προφανώς εξαρτάται από την ένταση του πεδίου στο χώρο του στοιχείου.

Θα δούμε στα παρακάτω ότι αυτή η ηλεκτροστατική ενέργεια σαν συνάρτηση του πεδίου είναι

$$W_E = \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})dV = \frac{1}{2}\int_V \epsilon_0 E^2 dV$$

και ορίζουμε πυκνότητα ηλεκτροστατικής ενέργειας w_E σε $\mathrm{J/m^3}$ το μέγεθος

$$w_E = \frac{dW_E}{dV} = \frac{1}{2}\,\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}\,\epsilon_0 E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon_0}$$

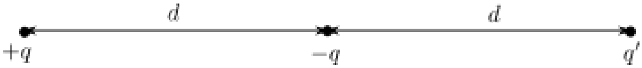
Topic

1. Διαφορά Δυναμικού - Δυναμικό - Δυναμική Ενέργεια

2. Ασκήσεις

Άσκηση 1

Ποια είναι η σχέση μεταξύ των φορτίων $+q$, $-q$ και q' ώστε η δύναμη στο φορτίο $+q$ να είναι μηδέν; Ποια είναι η δυναμική ενέργεια του συστήματος; Ερμηνεύστε το πρόσημο της έκφρασης της δυναμικής ενέργειας.



Άσκηση 1 - Λύση

Η δύναμη στο $+q$ από το $-q$ είναι ελκτική. Για να μηδενίζεται η ολική δύναμη, η επι μέρους δύναμη από το q' πρέπει να είναι απωστική. Άρα:

$$K\frac{q^2}{d^2} = K\frac{qq'}{4d^2} \Rightarrow q' = 4q$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} Q_i U_i$$

όπου Q_i είναι $+q$, $-q$, q' αντίστοιχα και U_i είναι τα αντίστοιχα δυναμικά σε κάθε φορτίο από όλα τα άλλα φορτία. Άρα:

$$W_E = \frac{1}{2}\left[q\left(-K\frac{q}{d} + K\frac{q'}{2d}\right) - q\left(K\frac{q}{d} + K\frac{q'}{d}\right) + q'\left(-K\frac{q}{d} + K\frac{q}{2d}\right)\right] =$$

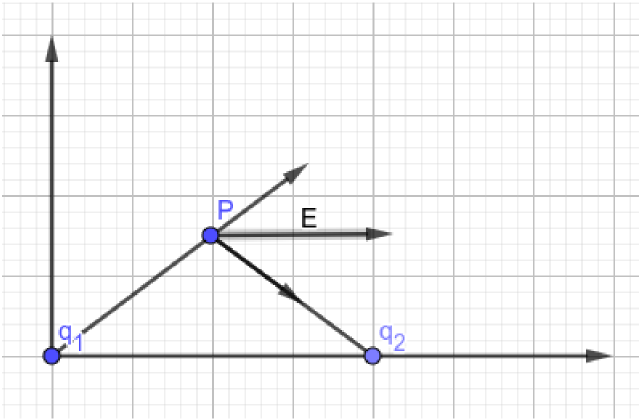
$$= \frac{K}{2}\left[\left(-\frac{q^2}{d} + \frac{4q^2}{2d}\right) - \left(\frac{q^2}{d} + \frac{4q^2}{d}\right) + \left(-\frac{4q^2}{d} + \frac{4q^2}{2d}\right)\right] =$$

$$= \frac{K}{2}\left[-\frac{q^2}{d} - \frac{q^2}{d} - \frac{4q^2}{d} - \frac{4q^2}{d} + \frac{4q^2}{2d} + \frac{4q^2}{2d}\right] =$$

$$= -\frac{K}{2}\frac{6q^2}{d} = -K\frac{3q^2}{d} = -\frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

Άσκηση 2

Δυο σημειακά φορτία $q_1 = 1.25 \times 10^{-8}$ C, $q_2 = -1.25 \times 10^{-8}$ C βρίσκονται στα σημεία $(0, 0)$ και $(8, 0)$. Οι αποστάσεις σε m. Να βρεθεί η ένταση του πεδίου στο $(4, 3)$.



Άσκηση 2 - Λύση

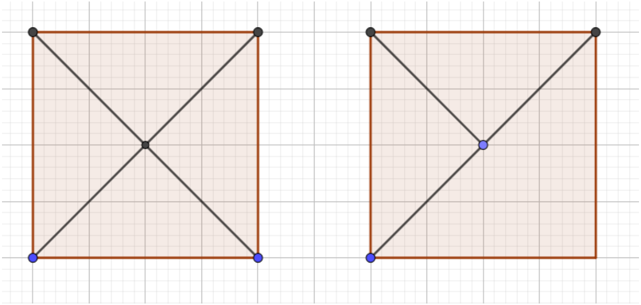
$$\mathbf{r} = (4, 3) \qquad \mathbf{r}'_{\mathbf{1}} = (0, 0) \qquad \mathbf{r}'_{\mathbf{2}} = (8, 0)$$

$$\mathbf{E} = Kq_1 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\mathbf{1}}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\mathbf{1}}\|^3} + Kq_2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\mathbf{2}}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\mathbf{2}}\|^3} = (7.2, 0)\ \mathrm{N/C}$$

```
>> r=[4 3]; r1=[0 0]; r2=[8 0]; K=9e9; q1=1.25e-8; q2=-1.25e-8;
>> E=K*q1*(r-r1)/(norm(r-r1))^3 + K*q2*(r-r2)/(norm(r-r2))^3
E =
   7.20000   0.00000
```

Άσκηση 3

Να βρεθεί η δύναμη σε φορτίο $4q$ στο κέντρο τετραγώνου όταν σε κάθε κορυφή του υπάρχει φορτίο q. Ποια είναι η δύναμη όταν σε μια από τις κορυφές του δεν υπάρχει φορτίο; Εφαρμογή για $q = 2\ \mathrm{C}$ και πλευρά τετραγώνου $a = 0.2\ \mathrm{cm}$.



Άσκηση 3 - Λύση

Όλα τα φορτία ομώνυμα άρα δυνάμεις απωστικές. Όταν και οι τέσσερις κορυφές έχουν φορτίο, λόγω συμμετρίας, η δύναμη στο κέντρο είναι μηδέν. Όταν μόνο οι τρεις κορυφές έχουν φορτίο, μόνο η μια κορυφή απέναντι της κενής, μετρά. Αν a η πλευρά, $a\sqrt{2}$ η διαγώνιος και $a\sqrt{2}/2$ η ημι-διαγώνιος.

$$\mathbf{r} = (a/2, a/2) \qquad \mathbf{r}_1' = (0, a)$$

$$\mathbf{F} = K4q^2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1'\|^3} = (5.0912 \times 10^{16}, -5.0912 \times 10^{16})\ \mathrm{N}$$

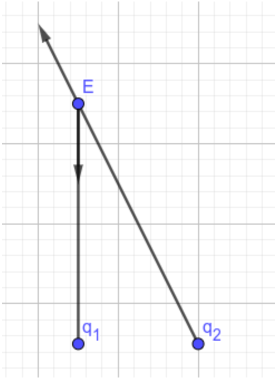
$$\|\mathbf{F}\| = 7.2000 \times 10^{16}\ \mathrm{N}$$

```
>> a=0.2e-2; r=[a/2 a/2]; r1=[0 a]; K=9e9; q=2;
>> F=K*4*q^2*(r-r1)/(norm(r-r1))^3
F =
  5.0912e+16   -5.0912e+16
>> norm(F)
ans =    7.2000e+16
```

Άσκηση 4

Δυο σημειακά φορτία $q_1 = -3\ \mu\mathrm{C}$ και $q_2 = 12\ \mu\mathrm{C}$ βρίσκονται στα σημεία $(0,0)$ και $(30,0)$. Οι αποστάσεις σε cm.

1. Να υπολογιστεί το $\mathbf{E}$ στο σημείο $(0,60)$.
2. Να βρεθεί το σημείο P_0 στο οποίο $\mathbf{E} = 0$.



Άσκηση 4 - Λύση

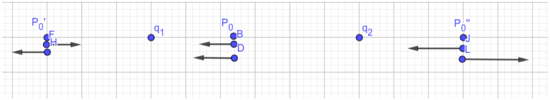
$$\mathbf{r} = (0, 0.6) \qquad \mathbf{r}'_1 = (0, 0) \qquad \mathbf{r}'_2 = (0.3, 0)$$

$$\mathbf{E} = Kq_1 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1\|^3} + Kq_2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2\|^3} = (-1.073, 1.397) \times 10^5 \text{ N/C}$$

```
>> r=[0 0.6]; r1=[0 0]; r2=[0.3 0]; K=9e9; q1=-3e-6; q2=12e-6;
>> E=K*q1*(r-r1)/(norm(r-r1))^3 + K*q2*(r-r2)/(norm(r-r2))^3
E =
  1.0e+05 *
  -1.0733   1.3966
```

Άσκηση 4 - Λύση 2

Για να μηδενιστεί το $\mathbf{E}$ το σημείο P_0 πρέπει να βρίσκεται στην ευθεία που ενώνει τα φορτία, δηλ. άξονα x και να βρίσκεται είτε αριστερά, είτε ανάμεσα, είτε δεξιά.



Αν είναι ανάμεσα, τα πεδία έχουν ίδια φορά, άρα δεν μηδενίζονται. Αν είναι δεξιά, είναι πιο κοντά στο μεγαλύτερο φορτίο που υπερισχύει, άρα πάλι δεν μηδενίζονται. Επομένως είναι αριστερά, σε απόσταση x από το q_1.

$$K\frac{|q_1|}{x^2} = K\frac{|q_2|}{(x+0.3)^2} \Rightarrow \cdots \Rightarrow x = \frac{0.3\sqrt{|q_1|}}{\sqrt{|q_2|}-\sqrt{|q_1|}} = 0.3 \text{ m}$$

Επομένως $P_0 = (-0.3, 0) \text{ m} = (-30, 0) \text{ cm}$.

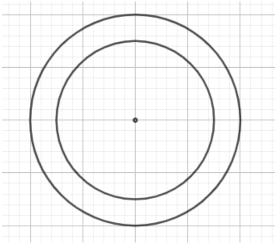
```
>> x=(0.3*sqrt(abs(q1)))/(sqrt(abs(q2))-sqrt(abs(q1)))
x =  0.30000
```

Άσκηση 5

Φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα εντός σφαίρας με ακτίνα R και πυκνότητα φορτίου ρ. Να βρεθούν:

1. η πυκνότητα ρ του φορτίου και
2. το φορτίο εντός του εξωτερικού φλοιού με πάχος d.

Δίδονται: $Q = 12\ \mathrm{C}$, $R = 4\ \mathrm{cm}$, $d = 1\ \mathrm{cm}$.



Άσκηση 5 - Λύση

$$Q = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} = 4.4762 \times 10^4 \text{ C/m}^3$$

Φορτίο q στο φλοιό:

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 - \rho \frac{4}{3}\pi (R-d)^3 = \frac{4\pi\rho}{3}\left[R^3 - (R-d)^3\right] = 6.9375 \text{ C}$$

```
>> Q=12; R=4e-2; d=1e-2;
>> rho=(3*Q)/(4*pi*R^3)
rho =  44762.32774
>> q=(4*pi*rho/3)*(R^3-(R-d)^3)
q =  6.9375
```