Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 05

Α. Δροσόπουλος

19-10-2022

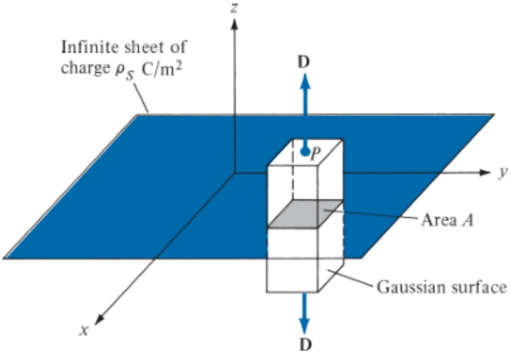
Outline

Topic

1. **Ηλεκτρικό Πεδίο**

Φορτισμένη επίπεδη επιφάνεια

Εστω επίπεδη επιφάνεια απείρων διαστάσεων (επίπεδο $z = 0$) φορτισμένη ομοιόμορφα με πυκνότητα ρ_S $\mathrm{C/m^2}$. Η επιφάνεια Gauss είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που «κόβει» τη φορτισμένη επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα.



Φορτισμένη επίπεδη επιφάνεια 2

Το πεδίο $\mathbf{E} = E\,\hat{\mathbf{z}}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια και η μη μηδενική συνεισφορά είναι από την επάνω και κάτω πλευρά. Έχουμε

$$\rho_S \int_S dS = \rho_S A = Q \Rightarrow \frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} =$$

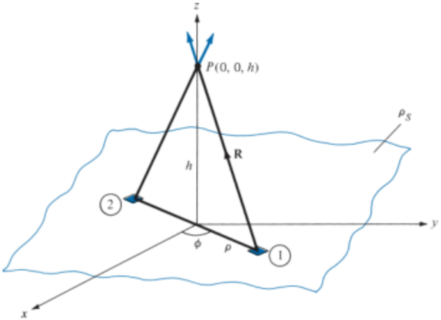
$$= E\left[\int_{\text{επάνω}} dS + \int_{\text{κάτω}} dS\right] = E[A + A] = 2AE$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{z}}$$

Πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας

Θεωρούμε επίπεδη επιφάνεια, απείρων διαστάσεων, φορτισμένη ομοιόμορφα με πυκνότητα φορτίου ρ_S. Το στοιχειώδες φορτίο dQ μιας στοιχειώδους επιφάνειας dS σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

$$dQ = \rho_S \, dS = \rho_S \, \rho \, d\phi \, d\rho$$



Σχήμα: Ηλεκτρικό πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας

Πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας 2

Η συνεισφορά του dQ στο ολικό πεδίο $\mathbf{E}$ στο σημείο $P(0,0,h)$ είναι

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2}\,\hat{\mathbf{R}} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}$$

όπου

$$\mathbf{r} = h\,\hat{\mathbf{z}} \qquad \mathbf{r}' = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \mathbf{r}-\mathbf{r}' = -\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + h\,\hat{\mathbf{z}} \qquad \|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\| = (\rho^2+h^2)^{1/2}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_S\;\rho\;d\phi\;d\rho[-\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + h\,\hat{\mathbf{z}}]}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+h^2)^{3/2}}$$

Λόγω συμμετρίας για κάθε στοιχειώδες φορτίο dQ σε γωνία ϕ υπάρχει το συμμετρικό του στη γωνία $\phi+\pi$ που μηδενίζει τη συνιστώσα $\hat{\boldsymbol{\rho}}$. Οπότε

$$\mathbf{E} = \int_S d\mathbf{E}_z = \frac{\rho_S}{4\pi\epsilon_0}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\infty}\frac{h\rho\;d\rho\;d\phi}{(\rho^2+h^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\rho_S\;h\;2\pi}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\infty}(\rho^2+h^2)^{-3/2}\,\frac{1}{2}\,d(\rho^2)\hat{\mathbf{z}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S\;h}{2\epsilon_0}\left[-(\rho^2+h^2)^{-1/2}\right]\Big|_0^{\infty}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

Πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας 3

Όπως φαίνεται το πεδίο είναι ανεξάρτητο της απόστασης από το φορτισμένο επίπεδο καθώς και το σημείο παρατήρησης του πεδίου P.

Στην πράξη, σε πυκνωτή με δυο παράλληλες φορτισμένες πλάκες χρησιμοποιούμε τον παραπάνω τύπο κατά προσέγγιση και βλέπουμε ότι το πεδίο που δημιουργείται μεταξύ των πλακών του πυκνωτή είναι:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} + \frac{(-\rho_S)}{2\epsilon_0}(-\hat{\mathbf{z}}) = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

Φορτισμένη σφαίρα

Έστω σφαίρα, ακτίνας a, φορτισμένη ομοιόμορφα με πυκνότητα $\rho_o\ \mathrm{C/m^3}$. Είναι προφανές ότι έχουμε σφαιρική συμμετρία και επιλέγουμε σαν επιφάνεια Gauss μια κλειστή σφαιρική επιφάνεια, με ίδιο κέντρο και ακτίνα $r \leq a$ ή $r \geq a$ (οι δυο δυνατές περιπτώσεις).

Φορτισμένη σφαίρα 2

Για $r \le a$ το ολικό φορτίο που εσωκλείει η επιφάνεια Gauss είναι

$$Q = \int_V \rho_o dV = \rho_o \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{r} r^2 \sin\theta dr\, d\theta\, d\phi = \rho_o \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \oint_S dS = E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \rho_o \frac{4}{3\epsilon_0}\pi r^3 \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \rho_o\, \frac{r}{3\epsilon_0}\, \hat{\mathbf{r}} \quad \text{για} \quad r \le a$$

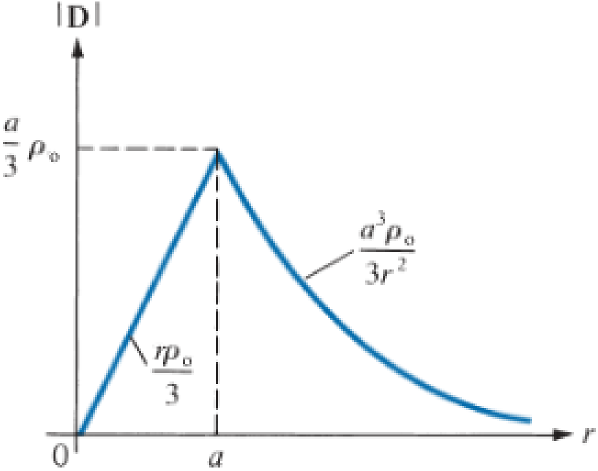
Για $r \ge a$ το ολικό φορτίο που εσωκλείει η επιφάνεια Gauss είναι

$$Q = \int_V \rho_o dV = \rho_o \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{a} r^2 \sin\theta dr\, d\theta\, d\phi = \rho_o \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \rho_o \frac{4}{3\epsilon_0}\pi a^3 \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \rho_o\, \frac{a^3}{3\epsilon_0 r^2}\, \hat{\mathbf{r}} \quad \text{για} \quad r \ge a$$

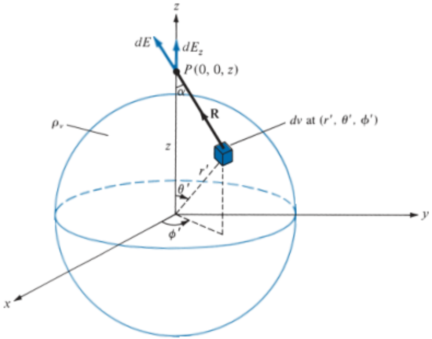
Φορτισμένη σφαίρα 3



Ηλεκτρικό πεδίο κατανομής φορτίου στο χώρο

Έστω σφαίρα ακτίνας a γεμάτη με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου πυκνότητας ρ_V. Το στοιχειώδες φορτίο dQ που αντιστοιχεί στον στοιχειώδη όγκο dV στο σημείο (r', θ', ϕ') είναι

$$dQ = \rho_V \, dV \Rightarrow Q = \int_V \rho_V \, dV = \rho_V \int_V dV = \rho_V \frac{4\pi a^3}{3}$$



Σχήμα: Ηλεκτρικό πεδίο κατανομής φορτίου στο χώρο

Ηλεκτρικό πεδίο κατανομής φορτίου στο χώρο 2

και Q είναι το ολικό φορτίο της σφαίρας.

Το στοιχειώδες πεδίο εκτός της σφαίρας σε απόσταση r από το κέντρο το υπολογίζουμε για το σημείο $P(0,0,z)$

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2}\,\hat{\mathbf{R}} = \frac{\rho_V\,dV}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

Λόγω συμμετρίας οι συνιστώσες E_x, E_y μηδενίζονται και μένει μόνο η συνιστώσα E_z.

$$E_z = \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \int_V dE\cos\alpha = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\cos\alpha\;dV}{R^2}$$

Από νόμο συνημιτόνου

$$R^2 = z^2 + r'^2 - 2zr'\cos\theta' \Rightarrow \cos\theta' = \frac{z^2 + r'^2 - R^2}{2zr'}$$

$$r'^2 = z^2 + R^2 - 2zR\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR}$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη ως προς θ' με σταθερά z, r' έχουμε

$$\sin\theta'\;d\theta' = \frac{RdR}{zr'}$$

Καθώς το θ' μεταβάλλεται από 0 σε π, το R μεταβάλλεται από $(z-r')$ σε $(z+r')$ για P εκτός της σφαίρας. Οπότε

$$E_z = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\cos\alpha\, dV}{R^2} = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\cos\alpha\; r'^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\phi'\, dr'}{R^2} =$$

$$= \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0}\int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r'^2 \frac{RdR}{zr'} dr' \frac{z^2+R^2-r'^2}{2zR}\frac{1}{R^2} =$$

$$= \frac{\rho_V 2\pi}{8\pi\epsilon_0 z^2}\int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r'^2 \frac{RdR}{r'} dr' \frac{z^2+R^2-r'^2}{R}\frac{1}{R^2} =$$

$$= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2}\int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r'\, dRdr' \frac{z^2+R^2-r'^2}{R^2} =$$

$$= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2}\int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r' \left[1+\frac{z^2-r'^2}{R^2}\right] dRdr' =$$

$$= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2}\int_{r'=0}^{a} r' \left[R-\frac{z^2-r'^2}{R}\right]_{R=z-r'}^{z+r'} dr' =$$

$$= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2}\int_{r'=0}^{a} 4r'^2 dr' = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0 z^2}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

Ηλεκτρικό πεδίο κατανομής φορτίου στο χώρο 4

Οπότε

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\,\hat{\mathbf{z}} \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Εφόσον

$$Q = \rho_V \frac{4\pi a^3}{3}$$

τότε

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_V\ 4\pi a^3}{3 \cdot 4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho_V\ a^3}{3\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

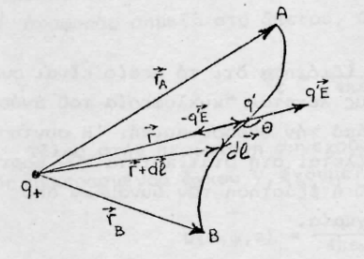
που ταυτίζεται με το πεδίο σημειακού φορτίου Q που είδαμε προηγουμένως.

Συντηρητικά πεδία

Χαρακτηριστική ιδιότητα ηλεκτροστατικού πεδίου είναι ότι το έργο που χρειάζεται για τη μετακίνηση φορτίου q μεταξύ δυο σημείων είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται αποκλειστικά από τα δυο σημεία.

Τα πεδία αυτά ονομάζονται *συντηρητικά* ή *αστρόβιλα*.

Στα συντηρητικά πεδία είναι πάντοτε δυνατόν να βρούμε μια βαθμωτή συνάρτηση η οποία να περιγράφει το πεδίο. Τη δυναμική συνάρτηση ή δυναμικό.



Σχήμα: Παραγωγή έργου κατά τη μετακίνηση φορτίου σε πεδίο.

Συντηρητικά πεδία (2)

Έστω θετικό σημειακό φορτίο q' που βρίσκεται μέσα σε ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathbf{E}$ που οφείλεται σε θετικό φορτίο q. Η δύναμη από το πεδίο στο q' είναι $q'\mathbf{E}$.

Θεωρούμε την εφαρμογή μιας εξωτερικής δύναμης $-q'\mathbf{E}$ (το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η εξωτερική δύναμη αντιτίθεται στη δύναμη του πεδίου). Η $-q'\mathbf{E}$ πρέπει να είναι απειροστά μεγαλύτερη από την $q'\mathbf{E}$ ώστε η μετακίνηση από το Α στο Β να πραγματοποιείται χωρίς το φορτίο q να αποκτά επιτάχυνση και επομένως κινητική ενέργεια. Τέτοια μετακίνηση απαιτεί άπειρο χρόνο. Δεν υπάρχει πρόβλημα, δεδομένου ότι η μετακίνηση δεν υλοποιείται αλλά θεωρείται. Υπό την επίδραση αυτής της εξωτερικής δύναμης έχουμε στοιχειώδη μετατόπιση $d\mathbf{l}$ και παράγεται στοιχειώδες έργο

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -q'\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q'Edl\cos\theta = -q'Edr$$

όπου dr η μεταβολή του μέτρου του διανύσματος θέσης $\mathbf{r}$ του φορτίου q' κατά τη στοιχειώδη μετατόπιση $d\mathbf{l}$. Το συνολικά παραγόμενο έργο κατά τη μετακίνηση από το Α στο Β δίδεται από

$$W = -q'\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

Το παραγόμενο έργο είναι ανεξάρτητο της τροχιάς μετακίνησης και εξαρτάται αποκλειστικά από τις θέσεις Α και Β. Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου είναι συντηρητικό.

Συντηρητικά πεδία (3)

Στην περίπτωση ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται σε σύστημα φορτίων q_i, σύμφωνα με την αρχή επαλληλίας, το συνολικά παραγόμενο έργο κατά τη μετακίνηση ενός θετικού φορτίου q' μεταξύ των σημείων A και B είναι

$$W = -q' \sum_i \int_A^B \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -q' \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

όπου

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$$

Εφόσον κάθε όρος του αθροίσματος είναι ανεξάρτητος της τροχιάς τότε και το άθροισμα θα είναι επίσης ανεξάρτητο της τροχιάς. Για κλειστή τροχιά

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, η «κυκλοφορία του διανύσματος $\mathbf{E}$» είναι μηδέν. Πεδίο συντηρητικό.

Η συντηρητική φύση του ηλεκτροστατικού πεδίου οφείλεται στη στατικότητα των φορτίων και την κεντρική φύση των δυνάμεων ενώ η εξάρτηση από το τετράγωνο της απόστασης δεν είναι αναγκαία.

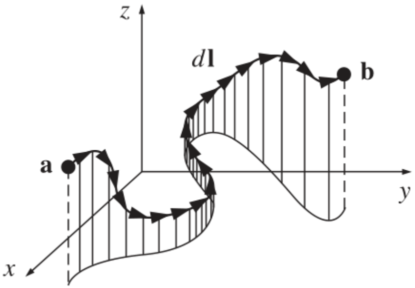
Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{v}$ σε μια συγκεκριμένη καμπύλη από το σημείο $\mathbf{a}$ στο σημείο $\mathbf{b}$ της καμπύλης είναι:

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

όπου $d\mathbf{l}$ το διάνυσμα της απειροστής μετατόπισης. Αν η καμπύλη είναι κλειστή ($\mathbf{a} = \mathbf{b}$) τότε:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$



Επικαμπύλια ολοκληρώματα (2)

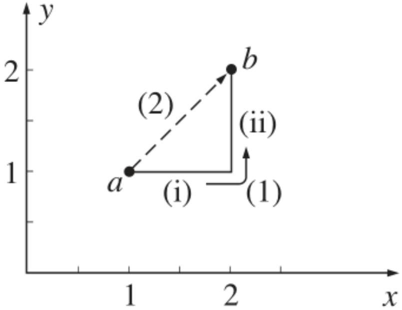
Σε κάθε σημείο της καμπύλης παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbf{v}$ σε αυτό το σημείο επί την μετατόπιση $d\mathbf{l}$ μέχρι το επόμενο σημείο της καμπύλης.

Παράδειγμα: Έργο που παράγει μια δύναμη.

Η τιμή του ολοκληρώματος εξαρτάται από τη συγκεκριμένη καμπύλη εκτός αν το πεδίο είναι συντηρητικό (conservative) οπότε εξαρτάται μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο.

Παράδειγμα

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου $\mathbf{v} = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + 2x(y+1)\,\hat{\mathbf{y}}$ από το σημείο $\mathbf{a} = (1,1,0)$ στο σημείο $\mathbf{b} = (2,2,0)$ κατά μήκος των διαδρομών (1) και (2). Ποια η τιμή του ολοκληρώματος στην κλειστή διαδρομή (1)-(2);



Παράδειγμα (2)

Η μετατόπιση είναι $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$. Η διαδρομή (1) αποτελείται από το τμήμα (i) όπου $dy = dz = 0$ και

$$d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}}, \quad y = 1, \quad \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = y^2 dx = dx, \quad \int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 dx = 1$$

Για το τμήμα (ii) όπου $dx = dz = 0$

$$d\mathbf{l} = dy\,\hat{\mathbf{y}}, \quad x = 2, \quad \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 2x(y+1)dy = 4(y+1)dy, \quad \int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 4\int_1^2 (y+1)dy = 10$$

άρα συνολικά για τη διαδρομή (1)

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 1 + 10 = 11$$

Παράδειγμα (3)

Για τη διαδρομή (2), $x = y,\ dx = dy,\ dz = 0$

$$d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = x^2 dx + 2x(x+1)dx = (3x^2 + 2x)dx$$

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (3x^2 + 2x)dx = (x^3 + x^2)\Big|_1^2 = 10$$

Για την κλειστή διαδρομή (1)-(2)

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 11 - 10 = 1$$