Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 04

Α. Δροσόπουλος

14-10-2022

Outline

Topic

1. **Ηλεκτρικό Πεδίο**

Ηλεκτρικό πεδίο 6

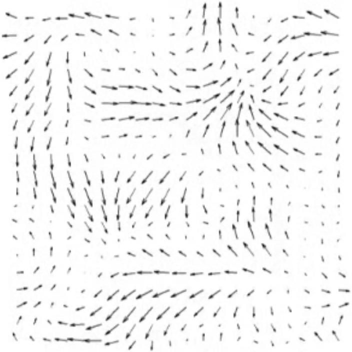
- Μικροσκοπικά, η πυκνότητα φορτίου είναι ασυνεχής. Μακροσκοπικά, τη θεωρούμε συνεχή. Η απόσταση $\mathscr{r} = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ είναι μεγαλύτερη από τις διαστάσεις του στοιχειώδους όγκου που συμπεριλαμβάνει τα φορτία (πολλά).
- Πεδίο είναι γενικότερα μια ποσότητα που είναι συνάρτηση της θέσης στο χώρο. Έχουμε τα βαθμωτά (scalar fields) και τα διανυσματικά (vector fields). Στη γενική περίπτωση, βαθμωτά και διανυσματικά πεδία μπορούν να μεταβάλλονται με το χρόνο.

Πεδία

Ένα πεδίο είναι μια συνάρτηση που περιγράφει κάποιο μέγεθος σε κάποια σημείο του χώρου. Το μέγεθος μπορεί να είναι βαθμωτό ή διανυσματικό και να μεταβάλλεται ή όχι και στο χώρο και στο χρόνο.

Scalar Field, $f(x,y)$

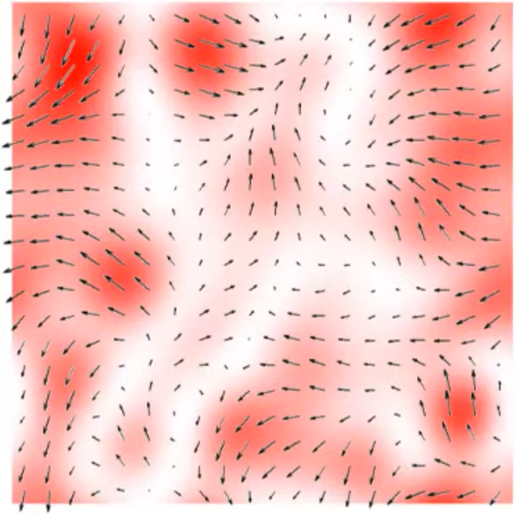
magnitude(x,y,z)



Vector Field, $\vec{v}(x,y)$

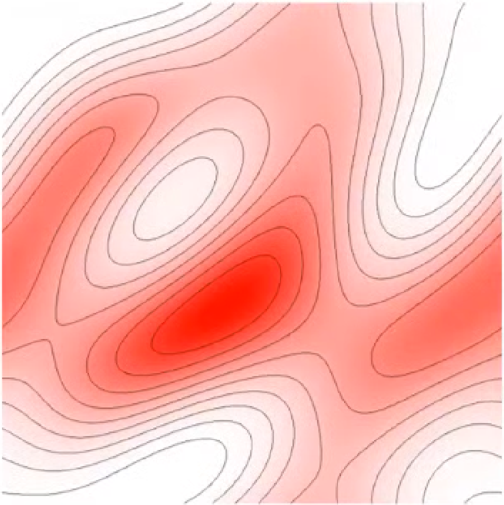
magnitude(x,y,z)
+direction(x,y,z)

Πεδία 2



Σχήμα: Εναλλακτική μορφή διανυσματικού πεδίου

Πεδία 3



Σχήμα: Υψομετρικά περιγράμματα - isocontour lines σε βαθμωτά πεδία

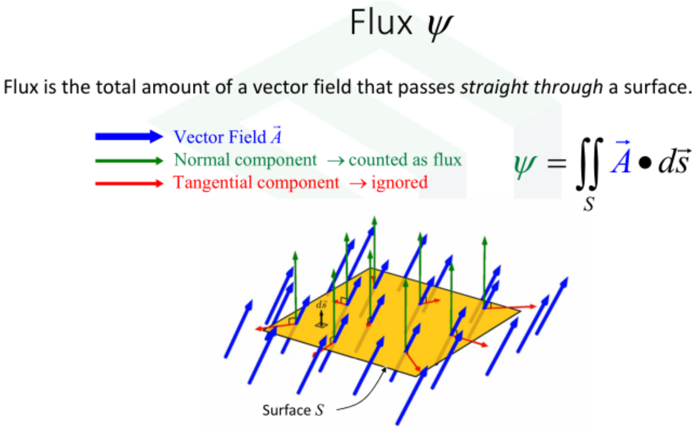
Ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές

Ένα ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να περιγραφεί από τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, ένα σύστημα καμπύλων που βοηθά να προσδιορίσουμε την ένταση του πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο αυτού.

Πυκνότητα, καμπυλότητα και φορά των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών χαράζονται έτσι ώστε:

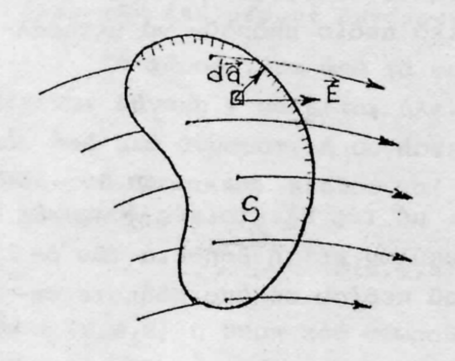
1. Η διεύθυνση της εφαπτομένης σε κάθε σημείο ηλεκτρικής δυναμικής γραμμής να συμπίπτει με τη διεύθυνση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο αυτό.
2. Η ηλεκτρική δυναμική γραμμή έχει παντού τη φορά του ηλεκτρικού πεδίου.
3. Η πυκνότητα των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών σε κάθε σημείο είναι ανάλογη του μέτρου της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο αυτό.

Ροή (flux) διανυσματικού πεδίου



Σχήμα: Ροή: Ολική ποσότητα διανυσματικού πεδίου που διέρχεται κάθετα από μια επιφάνεια

Ηλεκτρική ροή



Σχήμα: Ηλεκτρική ροή από επιφάνεια S

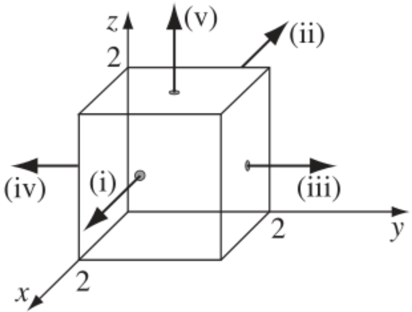
$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε τη ροή του πεδίου

$$\mathbf{v} = 2xz\,\hat{\mathbf{x}} + (x+2)\,\hat{\mathbf{y}} + y(z^2-3)\,\hat{\mathbf{z}}$$

που διέρχεται από τις επιφάνειες του κύβου του σχήματος όπου εξαιρούμε την κάτω πλευρά.



Παράδειγμα (2)

(i): $x = 2,\ d\mathbf{a} = dydz\,\hat{\mathbf{x}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = 2xzdydz = 4zdydz$

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = 4\int_0^2 dy \int_0^2 zdz = 16$$

(ii): $x = 0,\ d\mathbf{a} = -dydz\,\hat{\mathbf{x}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = -2xzdydz = 0$

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = 0$$

(iii): $y = 2,\ d\mathbf{a} = dxdz\,\hat{\mathbf{y}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = (x+2)dxdz$

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = \int_0^2 (x+2)dx \int_0^2 dz = 12$$

Παράδειγμα (3)

(iv): $y = 0,\ d\mathbf{a} = -dxdz\,\hat{\mathbf{y}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = -(x+2)dxdz$

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = -\int_0^2 (x+2)dx \int_0^2 dz = -12$$

(v): $z = 2,\ d\mathbf{a} = dxdy\,\hat{\mathbf{z}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = y(z^2-3)dxdy = ydxdy$

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = \int_0^2 dx \int_0^2 ydy = 4$$

Άρα, συνολική ροή:

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = 16 + 0 + 12 - 12 + 4 = 20$$

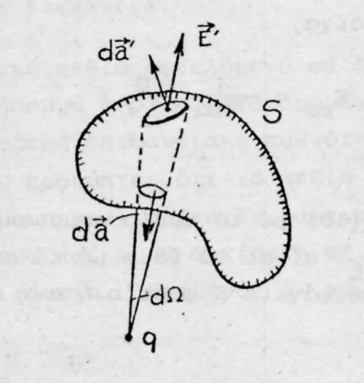
Νόμος Gauss

Ο νόμος του Gauss εκφράζει τη σχέση μεταξύ της ηλεκτρικής ροής που διέρχεται από κάποια κλειστή επιφάνεια και του ηλεκτρικού φορτίου που την παράγει και εσωκλείεται από την επιφάνεια.

Για σημειακό φορτίο q στην αρχή των αξόνων, σφαιρικές συντεταγμένες, κλειστή επιφάνεια σφαίρα με κέντρο το q:

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{q}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi =$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[(-\cos\theta)\right]_0^{\pi} 2\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Νόμος Gauss (2)



Σχήμα: Για φορτίο έξω από την κλειστή επιφάνεια

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Νόμος Gauss (3)

Άρα

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \begin{cases} q/\epsilon_0 & \text{εάν } q \text{ εντός της } S \\ 0 & \text{εάν } q \text{ εκτός της } S \end{cases}$$

Για πολλά διακεκριμένα φορτία q_i που περικλείονται από την κλειστή επιφάνεια S, με την αρχή επαλληλίας

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

και για συνεχή κατανομή φορτίου πυκνότητας ρ

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

Το δεξιό ολοκλήρωμα υπολογίζεται στον χώρο V που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια S.

Νόμος Gauss (4)

Ο νόμος του Gauss εκφράζει ότι η ολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται μέσα από μια κλειστή επιφάνεια ισούται με το ολικό ηλεκτρικό φορτίο που εσωκλείεται από την επιφάνεια. Είναι θεμελιώδης (μια από τις εξισώσεις Maxwell). Με προσεκτική μελέτη βλέπουμε ότι βασίζεται

1. Στην εξάρτηση της δύναμης από το αντίστροφο του τετραγώνου της αποστάσεως των φορτίων.
2. Στην κεντρική φύση των δυνάμεων.
3. Στην αρχή της επαλληλίας.

Δηλ. νόμο Coulomb και αρχή επαλληλίας.

Ισχύει επίσης και στο πεδίο βαρύτητας.

Προσφέρει έναν απλούστερο τρόπο εύρεσης ηλεκτρικού πεδίου για συμμετρικές κατανομές φορτίων (π.χ. σφαιρική, κυλινδρική, επίπεδη). Ισχύει βέβαια και για μη συμμετρικές κατανομές μόνο που τότε η λύση δεν είναι απλή.

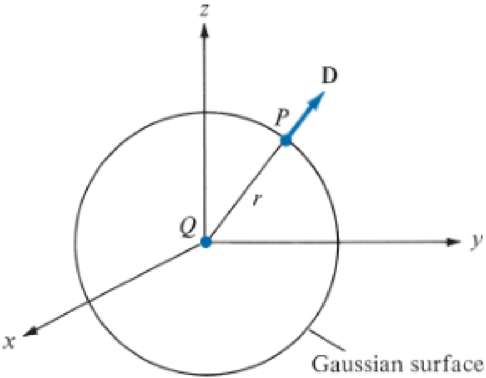
Εφαρμογές νόμου Gauss

Η διαδικασία εφαρμογής του νόμου Gauss είναι:

- Διαπιστώνουμε εάν υπάρχει συμμετρία.
- Κατασκευάζουμε κατάλληλη κλειστή επιφάνεια (επιφάνεια Gauss) όπου $\mathbf{E}$ είναι κάθετο ή εφαπτόμενο στην επιφάνεια. Εάν είναι κάθετο, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = EdS$ και εάν είναι εφαπτόμενο $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$.
- Η επιφάνεια είναι αυθαίρετη αλλά πρέπει να έχει κάποια από τη συμμετρία της κατανομής φορτίου. Η επιλογή της εξαρτάται από τη δική μας διαίσθηση και εμπειρία.

Σημειακό φορτίο

Έστω σημειακό φορτίο στην αρχή των αξόνων κάποιου συστήματος συντεταγμένων. Θέλουμε το πεδίο $\mathbf{E}$ σε κάποιο σημείο στο χώρο. Είναι προφανές ότι έχουμε σφαιρική συμμετρία και επιλέγουμε σαν επιφάνεια Gauss μια κλειστή σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το σημειακό φορτίο.



Σημειακό φορτίο 2

Εφόσον $\mathbf{E}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια και έχει σταθερή τιμή στην επιφάνεια

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E\, 4\pi r^2$$

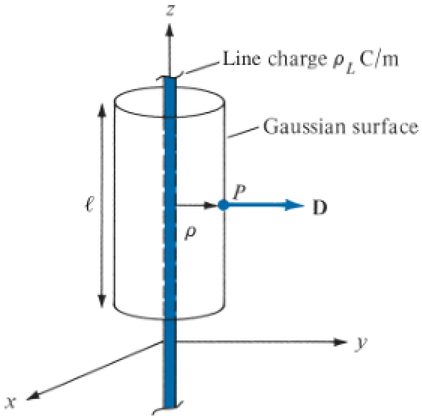
οπότε

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, \hat{\mathbf{r}}$$

η γνωστή μας σχέση.

Φορτισμένη ευθεία

Έστω ευθεία απείρου μήκους, στον άξονα z, φορτισμένη ομοιόμορφα με πυκνότητα ρ_L C/m. Θέλουμε το πεδίο $\mathbf{E}$ στο σημείο P. Η συμμετρία εδώ είναι κυλινδρική και το ζητούμενο πεδίο είναι της μορφής $\mathbf{E} = E\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$ με μηδενική z συνιστώσα. Οπότε:



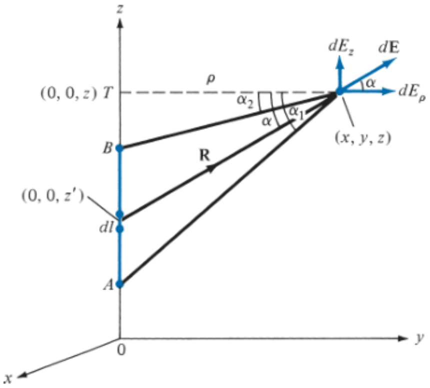
Φορτισμένη ευθεία 2

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho_L \ell}{\epsilon_0} = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \int_S dS = E\, 2\pi\rho\ell \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Ηλεκτρικό πεδίο γραμμής

Θεωρούμε ευθύγραμμη και ομοιόμορφα κατανεμημένη κατανομή φορτίου από A έως B και ζητούμε το ηλεκτροστατικό πεδίο σε κάποιο σημείο του χώρου όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα: Ηλεκτρικό πεδίο ευθύγραμμου φορτισμένου τμήματος

Ηλεκτρικό πεδίο γραμμής 2

Το σύστημα έχει κυλινδρική συμμετρία και θεωρούμε την γραμμική κατανομή φορτίου στον άξονα z από A έως B. Έχουμε $dQ = \rho_L d\ell' = \rho_L dz'$ και το σημείο P που υπολογίζουμε το πεδίο έχει συντεταγμένες (x, y, z). Οπότε:

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\mathscr{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x, y, z) - (0, 0, z') = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (z - z')\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E} = \int_L \frac{\rho_L\, d\ell'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^3} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (z - z')\,\hat{\mathbf{z}}}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}\, dz'$$

$$R = |\mathbf{R}| = \frac{\rho}{\cos\alpha} \qquad z - z' = \rho\tan\alpha \Rightarrow z' = z - \rho\tan\alpha \Rightarrow dz' = -\rho\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\tan\alpha\,\hat{\mathbf{z}}}{(\rho/\cos\alpha)^3} \rho \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0\rho} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \sin\alpha\,\hat{\mathbf{z}}]\, d\alpha \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0\rho}[-(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\,\hat{\mathbf{z}}]$$

Στην ειδική περίπτωση όπου το φορτισμένο ευθύγραμμο τμήμα εκτείνεται από $-\infty$ έως $+\infty$ έχουμε $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = -\pi/2$, η συνιστώσα z εξαφανίζεται και

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Ηλεκτρικό πεδίο γραμμής 3

Τι σημαίνει η τελευταία σχέση;

Σημαίνει ότι πάτε στο επίπεδο που σχηματίζει το σημείο και η ευθεία. Το σημείο εφαρμογής του διανύσματος $\mathbf{E}$ είναι ακριβώς αυτό το σημείο. Έχει συνιστώσα $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ και συνιστώσα $\hat{\mathbf{z}}$. Η συνισταμένη είναι το ολικό πεδίο $\mathbf{E}$ στο σημείο εκείνο.