Ηλεκτρομαγνητισμός
Διάλεξη 03

Α. Δροσόπουλος

12-10-2022

Outline

Topic

1. Μαθηματικό υπόβαθρο
2. Φορτίο
3. Coulomb
4. Ηλεκτρικό Πεδίο

Συστήματα αξόνων: σχέσεις

Κυλινδρικές σε Καρτεσιανές

Αλλαγές μεταβλητών:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \rho\cos\phi \\ y & = & \rho\sin\phi \\ z & = & z \end{array}\right.$$

Αλλαγές συνιστωσών:

$$\left\{\begin{array}{lcl} A_x & = & A_\rho \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - A_\phi \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_y & = & A_\rho \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + A_\phi \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_z & = & A_z \end{array}\right.$$

Συστήματα αξόνων: σχέσεις

Καρτεσιανές σε Κυλινδρικές

Αλλαγές μεταβλητών:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\rho & = & \sqrt{x^2+y^2}\\ \phi & = & \tan^{-1}(y/x)\\ z & = & z\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl}\sin\phi & = & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \cos\phi & = & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right.$$

Αλλαγές συνιστωσών:

$$\left\{\begin{array}{lcl}A_\rho & = & A_x\cos\phi + A_y\sin\phi\\ A_\phi & = & -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi\\ A_z & = & A_z\end{array}\right.$$

Συστήματα αξόνων: σχέσεις

Σφαιρικές σε Καρτεσιανές

Αλλαγές μεταβλητών:
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\sin\theta\cos\phi \\ y & = & r\sin\theta\sin\phi \\ z & = & r\cos\theta \end{array}\right.$$

Αλλαγές συνιστωσών:
$$\left\{\begin{array}{lcl} A_x & = & \dfrac{A_r x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \dfrac{A_\theta xz}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}} - \dfrac{A_\phi y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_y & = & \dfrac{A_r y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \dfrac{A_\theta yz}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}} + \dfrac{A_\phi x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_z & = & \dfrac{A_r z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \dfrac{A_\theta \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{array}\right.$$

Συστήματα αξόνων: σχέσεις

Καρτεσιανές σε Σφαιρικές

Αλλαγές μεταβλητών:

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi &= \tan^{-1}(y/x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\phi &= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\phi &= \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Αλλαγές συνιστωσών:

$$\begin{cases} A_r &= A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta \\ A_\theta &= A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta \\ A_\phi &= -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi \end{cases}$$

Αποστάσεις μεταξύ δυο σημείων

Η απόσταση d μεταξύ δυο σημείων με διανύσματα θέσης $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ δίδεται από

$$d = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|$$

και στα τρία συστήματα συντεταγμένων είναι:

καρτεσιανό: $$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

κυλινδρικό: $$d = \sqrt{\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\phi_2 - \phi_1) + (z_2 - z_1)^2}$$

σφαιρικό: $$d = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_1r_2\cos\theta_2\cos\theta_1 - 2r_1r_2\sin\theta_2\sin\theta_1\cos(\phi_2 - \phi_1)}$$

Άσκηση 1.01

Εάν $\mathbf{A} = (1, \alpha, 1)$ και $\mathbf{B} = (\alpha, 1, 1)$ και $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ κάθετα μεταξύ τους, ποια η τιμή της παραμέτρου α;

Σύμφωνα με το τεστ εσωτερικού γινομένου

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \alpha + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1/2$$

Άσκηση 1.01

Εάν $\mathbf{A} = (1, \alpha, 1)$ και $\mathbf{B} = (\alpha, 1, 1)$ και $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ κάθετα μεταξύ τους, ποια η τιμή της παραμέτρου α;

Σύμφωνα με το τεστ εσωτερικού γινομένου

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \alpha + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1/2$$

Άσκηση 1.02

Ποιο είναι το μέτρο της προβολής του $\mathbf{A} = (6, 2, -3)$ στο $\mathbf{B} = (3, -4, 0)$ καθώς και το μέτρο της προβολής του $\mathbf{B}$ στο $\mathbf{A}$;

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos\theta$$

Προβολή $\mathbf{A}$ στο $\mathbf{B}$

$$A \cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{B} = 2$$

Προβολή $\mathbf{B}$ στο $\mathbf{A}$

$$B \cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{A} = 1.4286$$

Άσκηση 1.02

Ποιο είναι το μέτρο της προβολής του $\mathbf{A} = (6, 2, -3)$ στο $\mathbf{B} = (3, -4, 0)$ καθώς και το μέτρο της προβολής του $\mathbf{B}$ στο $\mathbf{A}$;

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos\theta$$

Προβολή $\mathbf{A}$ στο $\mathbf{B}$

$$A \cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{B} = 2$$

Προβολή $\mathbf{B}$ στο $\mathbf{A}$

$$B \cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{A} = 1.4286$$

Άσκηση 1.02 (συν)

```
octave:1> A=[6 2 -3]; B=[3 -4 0];
octave:2> dot(A,B)/norm(B)
ans = 2
octave:3> dot(A,B)/norm(A)
ans = 1.4286
octave:4> dot(A,B)
ans = 10
octave:5> norm(A)
ans = 7
octave:6> norm(B)
ans = 5
```

Άσκηση 1.03

Έστω $\mathbf{A} = (-2, 5, 1)$, $\mathbf{B} = (1, 0, 3)$, $\mathbf{C} = (4, -6, 10)$. Υπολογίστε τα μεγέθη:

- $\mathbf{A} - \mathbf{B} + 5\mathbf{C}$
- $(2\mathbf{A} + 5\mathbf{B})/\|\mathbf{C}\|$
- $\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$
- γωνία μεταξύ $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} + 5\mathbf{C} = (17, -25, 48)$$

$$(2\mathbf{A} + 5\mathbf{B})/\|\mathbf{C}\| = (0.081111, 0.811107, 1.378882)$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A} = (0, -1, 5)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -32$$

$$\cos^{-1}\left[\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}\right] = 86.69^\circ$$

Άσκηση 1.03

Έστω $\mathbf{A} = (-2, 5, 1)$, $\mathbf{B} = (1, 0, 3)$, $\mathbf{C} = (4, -6, 10)$. Υπολογίστε τα μεγέθη:

- $\mathbf{A} - \mathbf{B} + 5\mathbf{C}$
- $(2\mathbf{A} + 5\mathbf{B})/\|\mathbf{C}\|$
- $\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$
- γωνία μεταξύ $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} + 5\mathbf{C} = (17, -25, 48)$$

$$(2\mathbf{A} + 5\mathbf{B})/\|\mathbf{C}\| = (0.081111, 0.811107, 1.378882)$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A} = (0, -1, 5)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -32$$

$$\cos^{-1}\left[\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}\right] = 86.69^\circ$$

Άσκηση 1.03 (συν)

```
octave:7> A=[-2 5 1]; B=[1 0 3]; C=[4 -6 10];
octave:8> A-B+5*C
ans =

   17  -25   48

octave:9> (2*A+5*B)/norm(C)
ans =

   0.081111   0.811107   1.378882

octave:10> x=[1 0 0];
octave:11> cross(x,A)
ans =

   0  -1   5

octave:12> dot(A,cross(B,C))
ans = -32
octave:13> acos( dot(A,B)/(norm(A)*norm(B)) ) * 180/pi
ans = 86.690
```

Άσκηση 1.04

Έστω $\mathbf{A} = (4, 2, -1)$ και $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, 3)$. Εαν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ παράλληλα, υπολογίστε α και β.

Σύμφωνα με το τεστ εξωτερικού γινομένου πρέπει

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 4 & 2 & -1 \\ \alpha & \beta & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(6 + \beta)\hat{\mathbf{x}} - (12 + \alpha)\hat{\mathbf{y}} + (4\beta - 2\alpha)\hat{\mathbf{z}} = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha = -12 \qquad \beta = -6 \qquad 4\beta - 2\alpha = 0$$

Άσκηση 1.04

Έστω $\mathbf{A} = (4, 2, -1)$ και $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, 3)$. Εαν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ παράλληλα, υπολογίστε α και β.

Σύμφωνα με το τεστ εξωτερικού γινομένου πρέπει

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 4 & 2 & -1 \\ \alpha & \beta & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(6 + \beta)\hat{\mathbf{x}} - (12 + \alpha)\hat{\mathbf{y}} + (4\beta - 2\alpha)\hat{\mathbf{z}} = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha = -12 \qquad \beta = -6 \qquad 4\beta - 2\alpha = 0$$

Άσκηση 1.05

Μετατρέψτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες των παρακάτω σημείων σε κυλινδρικές και σφαιρικές. $P(2, 5, 1)$, $Q(-3, 4, 0)$, $R(6, 2, -4)$.

$$
\begin{array}{lll}
P: & (5.3852, 68.199^\circ, 1) & (5.4772, 79.480^\circ, 68.199^\circ) \\
Q: & (5, 126.87^\circ, 0) & (5, 90^\circ, 126.87^\circ) \\
R: & (6.3246, 18.435^\circ, -4) & (7.4833, 122.31^\circ, 18.435^\circ)
\end{array}
$$

Άσκηση 1.05

Μετατρέψτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες των παρακάτω σημείων σε κυλινδρικές και σφαιρικές. $P(2, 5, 1)$, $Q(-3, 4, 0)$, $R(6, 2, -4)$.

$$
\begin{array}{lll}
P: & (5.3852, 68.199^\circ, 1) & (5.4772, 79.480^\circ, 68.199^\circ) \\
Q: & (5, 126.87^\circ, 0) & (5, 90^\circ, 126.87^\circ) \\
R: & (6.3246, 18.435^\circ, -4) & (7.4833, 122.31^\circ, 18.435^\circ)
\end{array}
$$

Άσκηση 1.05 (συν)

```
octave:14> x=2; y=5; z=1;
octave:15> rho=sqrt(x^2+y^2)
rho = 5.3852
octave:16> phi=atan2(y,x)
phi = 1.1903
octave:17> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 68.199
octave:18> help atan2

octave:21> r=sqrt(x^2+y^2+z^2)
r = 5.4772
octave:22> theta=acos(z/r)*180/pi
theta = 79.480
octave:23> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 68.199
```

Άσκηση 1.05 (συν)

```
octave:24> x=-3; y=4; z=0;
octave:25> rho=sqrt(x^2+y^2)
rho = 5
octave:26> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 126.87

octave:27> r=sqrt(x^2+y^2+z^2)
r = 5
octave:28> theta=acos(z/r)*180/pi
theta = 90
octave:29> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 126.87
```

Άσκηση 1.05 (συν)

```
octave:30> x=6; y=2; z=-4;
octave:31> rho=sqrt(x^2+y^2)
rho = 6.3246
octave:32> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 18.435

octave:33> r=sqrt(x^2+y^2+z^2)
r = 7.4833
octave:34> theta=acos(z/r)*180/pi
theta = 122.31
octave:35> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 18.435
```

Άσκηση 1.06

Εκφράστε τα παρακάτω διανύσματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

- $\mathbf{A} = \rho \sin\phi \, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \cos\phi \, \hat{\boldsymbol{\varphi}} - 2z \, \hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{B} = 4r \cos\phi \, \hat{\mathbf{r}} + r \, \hat{\boldsymbol{\theta}}$
- $\mathbf{F} = (4/r^2) \, \hat{\mathbf{r}}$

Κυλινδρικές: $\mathbf{A} = A_\rho \, \hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\phi \, \hat{\boldsymbol{\varphi}} + A_z \, \hat{\mathbf{z}}$

Καρτεσιανές: $\mathbf{A} = A_x \, \hat{\mathbf{x}} + A_y \, \hat{\mathbf{y}} + A_z \, \hat{\mathbf{z}}$

$$A_x = 0$$

$$A_y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$A_z = -2z$$

Άσκηση 1.06 (συν)

Σφαιρικές: $\mathbf{B} = 4r\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = B_r\,\hat{\mathbf{r}} + B_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + B_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$

Καρτεσιανές: $\mathbf{B} = B_x\,\hat{\mathbf{x}} + B_y\,\hat{\mathbf{y}} + B_z\,\hat{\mathbf{z}}$

$$B_x = \frac{x(4x+z)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$B_y = \frac{y(4x+z)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$B_z = \frac{4xz}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Άσκηση 1.06 (συν)

Σφαιρικές: $\mathbf{F} = (4/r^2)\,\hat{\mathbf{r}} = F_r\,\hat{\mathbf{r}} + F_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$

Καρτεσιανές: $\mathbf{F} = F_x\,\hat{\mathbf{x}} + F_y\,\hat{\mathbf{y}} + F_z\,\hat{\mathbf{z}}$

$$F_x = \frac{4x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$F_y = \frac{4y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$F_z = \frac{4z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Άσκηση 1.07

Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των παρακάτω ζευγών σημείων.

- $(2, 1, 5)$ και $(6, -1, 2)$
- $(3, \pi/2, -1)$ και $(5, 3\pi/2, 5)$
- $(10, \pi/4, 3\pi/4)$ και $(5, \pi/6, 7\pi/4)$
- $(4, 30^\circ, 0^\circ)$ και $(6, 90^\circ, 180^\circ)$

```
octave:5> r1=[2 1 5]; r2=[6 -1 2]; d=norm(r1-r2)
d = 5.3852

octave:6> r1=[3 pi/2 -1]; r2=[5 3*pi/2 5];
octave:7> d=sqrt(r2(1)^2 + r1(1)^2 - 2*r1(1)*r2(1)*cos(r2(2)-r1(2)) + (r2(3)-r1(3))^2)
d = 10

octave:8> r1=[10 pi/4 3*pi/4]; r2=[5 pi/6 7*pi/4];
octave:9> d=sqrt((r2(1)^2 + r1(1)^2 - 2*r1(1)*r2(1)*cos(r2(2))*cos(r1(2)) -
          2*r1(1)*r2(1)*sin(r2(2))*sin(r1(2))*cos(r2(3)-r1(3))))
d = 9.9558

octave:11> r1=[4 30*pi/180 0]; r2=[6 90*pi/180 180*pi/180];
octave:12> d=sqrt((r2(1)^2 + r1(1)^2 - 2*r1(1)*r2(1)*cos(r2(2))*cos(r1(2)) -
           2*r1(1)*r2(1)*sin(r2(2))*sin(r1(2))*cos(r2(3)-r1(3))))
d = 8.7178
```

Topic

Ηλεκτρικό φορτίο

Η μελέτη της αλληλεπίδρασης μεταξύ υλικών σωμάτων οδηγεί στην παραδοχή μιας φυσικής οντότητας, του ηλεκτρικού φορτίου, που η παρουσία του γίνεται αντιληπτή, μεταξύ άλλων, από αναπτυσσόμενες ελκτικές ή απωστικές δυνάμεις μεταξύ φορτισμένων σωμάτων. Την οντότητα του ηλεκτρικού φορτίου την δεχόμαστε αξιωματικά για να εξηγήσουμε τα ηλεκτρικά φαινόμενα που παρατηρούμε γύρω μας. Εντελώς ανάλογα αποδεχόμαστε και την οντότητα της μάζας για υλικά σώματα.

Ενδιαφέρον το μοντέλο Bohr και αυτό της κβαντομηχανικής.

Τα φορτία στη φύση τα διακρίνουμε σε δυο είδη, θετικά και αρνητικά. Η ονομασία είναι αυθαίρετη (Benjamin Franklin) γιατί δεν υπάρχει ιδιότητα του ηλεκτρικού φορτίου που να δικαιολογεί αυτόν τον χαρακτηρισμό. Εκείνο που χαρακτηρίζει τα φορτία είναι η έλξη μεταξύ αντιθέτων (ετερωνύμων) και η άπωση μεταξύ ομοίων (ομονύμων) φορτίων.

Από διαλέξεις Ηλεκτρομαγνητισμού Walter Lewin

Εισαγωγικά πειράματα από MIT.

Walter Lewin

- walt01, What holds our world together
- walt02, πρώτο πείραμα στατικού ηλεκτρισμού, επαγωγή, ανταλλαγή φορτίου
- walt03, φόρτιση μονωτή - εισαγωγή
- walt04, φόρτιση μονωτή - πείραμα
- walt05, beating Simon
- walt06, flying hair

Λεπτομέρειες για γεννήτρια van de Graaff διαχωρισμού φορτίων με μηχανική τριβή.

Ηλεκτρικό Φορτίο 2

Ισχύει η αρχή της διατηρήσεως, όπου το ολικό άθροισμα θετικών και αρνητικών φορτίων σε ένα μεμονωμένο σύστημα παραμένει σταθερό με την πάροδο του χρόνου. Μεμονωμένο σύστημα θεωρούμε εκείνο στο οποίο δεν γίνεται ανταλλαγή μάζας με το περιβάλλον. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε ηλεκτρικό φορτίο από το τίποτα αλλά ούτε και να το καταστρέψουμε.

Παραβίαση αυτής της αρχής θα αποτελούσε π.χ. η δημιουργία μεμονωμένα ενός φορτισμένου σωματιδίου, κάτι που δεν έχει παρατηρηθεί ποτέ. Δημιουργία φορτίων παρατηρείται, αλλά πάντα σε ζεύγη αντιθέτως φορτισμένων σωματιδίων με συνολικό αλγεβρικό άθροισμα φορτίου μηδέν. Π.χ. δίδυμη γένεση (pair production) όπου ένα φωτόνιο κατάλληλης ενέργειας μετατρέπεται σε ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου (ίσο και αντίθετο φορτίο, ίσα ακριβώς μάζα).

Ηλεκτρικό Φορτίο 3

Το ηλεκτρικό φορτίο έχει επίσης την ιδιότητα να παραμένει αναλλοίωτο κατά τους μετασχηματισμούς Lorentz μεταξύ αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα φορτίου σε ένα σώμα είναι ανεξάρτητη από την κινητική κατάσταση του σώματος σε σχέση με παρατηρητή που μετράει. Η ιδιότητα αυτή σχετίζεται με τη μεταβολή της μάζας ενός σώματος σε σχέση με την ταχύτητά του όπως περιγράφεται από τη θεωρία της σχετικότητος. Σε πειράματα, το μετρήσιμο μέγεθος είναι ο λόγος q/m, όπου m η μάζα του σώματος και q είναι το φορτίο που μεταφέρει. Η μεταβολή του λόγου αυτού με την ταχύτητα εξηγείται πλήρως, και μόνο, με τη μεταβολή της μάζας με την ταχύτητα

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

όπου m_0 είναι η μάζα ηρεμίας του σώματος, v είναι η ταχύτητά του και c είναι η ταχύτητα του φωτός. Επομένως δεχόμαστε ότι το φορτίο δεν αλλάζει με την ταχύτητα.

Ηλεκτρικό Φορτίο 4

Άλλη βασική ιδιότητα είναι η κβάντωση, όπου οποιαδήποτε ποσότητα ηλεκτρικού φορτίου είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του φορτίου e του ηλεκτρονίου (elementary charge). Πειράματα ακριβείας μέχρι τα μέσα του περασμένου αιώνα δείχνουν ότι αν υπάρχει διαφορά, θα είναι μικρότερη από $10^{-20}e$. (Σημείωση: Σήμερα γνωρίζουμε ότι υπάρχουν υπο-σωματίδια, τα quarks, με φορτίο $e/3$. Ο χώρος ύπαρξής τους όμως είναι της τάξεως της διαμέτρου των στοιχειωδών σωματιδίων $\sim 10^{-15}$ m και ποτέ δεν εμφανίζονται μεμονωμένα). Η κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου αγνοείται στον κλασσικό ηλεκτρομαγνητισμό όπου δεχόμαστε ότι το φορτίο είναι συνεχές με οποιαδήποτε τιμή.

Topic

1. Μαθηματικό υπόβαθρο
2. Φορτίο
3. **Coulomb**
4. Ηλεκτρικό Πεδίο

Νόμος Coulomb

Οι δυνάμεις μεταξύ φορτίων ονομάζονται δυνάμεις Coulomb και για δυο φορτισμένα υλικά σημεία με φορτία q_1, q_2 και απόσταση $\mathscr{r}$ μεταξύ τους, ακολουθούν νόμο ανάλογο με τον νόμο της παγκοσμίου έλξεως:

$$\mathbf{F} = K \frac{q_1 q_2}{\mathscr{r}^2} \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$$

όπου $\mathscr{r}$ η απόσταση μεταξύ των φορτίων και $\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$ μοναδιαίο διάνυσμα στην ευθεία που τα συνδέει. Η κατεύθυνση του $\mathbf{F}$ είναι ελκτική για ετερώνυμα φορτία και απωστική για ομώνυμα.

Στο σύστημα μονάδων SI τα φορτία έχουν μονάδα το coulomb, C, η απόσταση είναι σε μέτρα, m, η δύναμη είναι σε Newton, N και η σταθερά $K = 9 \times 10^9\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2$ ή m/F. Εναλλακτικά:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \qquad \text{όπου} \qquad \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C}^2/(\mathrm{Nm}^2) \text{ ή } \mathrm{F}/\mathrm{m}$$

η ηλεκτρική διαπερατότητα του κενού και κατά προσέγγιση του αέρα.

Νόμος Coulomb 2

Για τις δυνάμεις μεταξύ φορτισμένων σωμάτων δεχόμαστε ότι ισχύει η αρχή της επαλληλίας σύμφωνα με την οποία η δύναμη μεταξύ ζεύγους φορτίων είναι ανεξάρτητη από την παρουσία άλλων φορτίων. Η ολική δύναμη θα είναι το διανυσματικό άθροισμα δυνάμεων από όλα τα ζεύγη φορτίων που αλληλεπιδρούν σε ένα σύστημα. Η αρχή αυτή διαπιστώνεται μόνο πειραματικά και δεν είναι καθόλου προφανής.

Για τη δύναμη που εξασκεί ένα στάσιμο φορτίο q στη θέση $\mathbf{r}'$ σε ένα δοκιμαστικό φορτίο Q στη θέση $\mathbf{r}$ ισχύει ο νόμος Coulomb

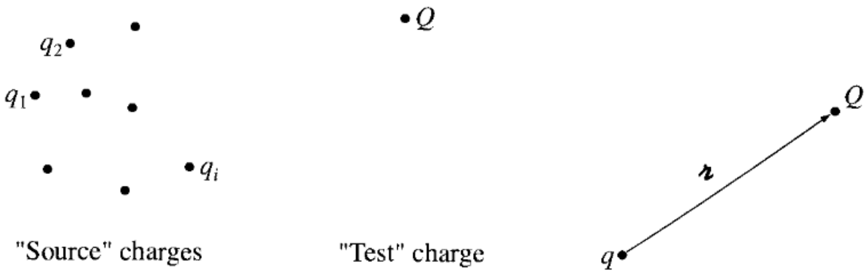
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{\mathscr{r}^2}\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$$

όπου

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

και η δύναμη έχει την κατεύθυνση μεταξύ q και Q. Η φορά είναι απωστική αν τα φορτία είναι ομώνυμα και ελκτική αν είναι ετερώνυμα.

Νόμος Coulomb 3



Σχήμα: Φορτία πηγής, δοκιμαστικό και απόσταση μεταξύ τους

Στην ηλεκτροστατική τα φορτία πηγής είναι στάσιμα αλλά το δοκιμαστικό μπορεί να κινείται.

Νόμος Coulomb 4

Γενικεύοντας (αρχή επαλληλίας), για σύστημα N στασίμων φορτίων, $q_1, q_2, \dots q_N$ σε θέσεις $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots \mathbf{r}'_N$, η συνολική δύναμη σε φορτίο Q στη θέση $\mathbf{r}$ είναι:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N = \frac{Qq_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}'_1)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_1|^3} + \cdots + \frac{Qq_N}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}'_N)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_N|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_i|^3}$$

Εναλλακτικά, για $\boldsymbol{\mathscr{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_i$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{\mathscr{r}_i^2}\,\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}_i = Q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

όπου

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{\mathscr{r}_i^2}\,\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}_i$$

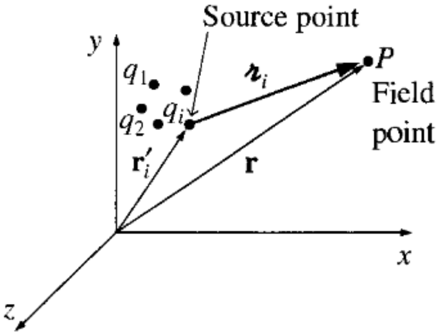
είναι το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν τα φορτία πηγής.

Δυνάμεις Coulomb

Οι δυνάμεις Coulomb είναι πολύ ισχυρότερες από τις δυνάμεις βαρύτητος. Σε σύστημα π.χ. δυο ηλεκτρονίων με φορτίο $e = 1.60217662 \times 10^{-19}$ C, μάζα $m_e = 9.10938356 \times 10^{-31}$ kg για την ίδια απόσταση r:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K}{G}\frac{e^2}{m_e^2} = \frac{9 \times 10^9}{6.67 \times 10^{-11}}\frac{e^2}{m_e^2} = 4.1741 \times 10^{42}$$

Topic



Σχήμα: Ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P

Ηλεκτρικό πεδίο 2

Όπως έχουμε πει σε προηγούμενο μάθημα το ηλεκτρικό πεδίο έχει τη δική του φυσική οντότητα. Σε χώρο που υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο αν φέρουμε κάποιο άλλο φορτίο (δοκιμαστικό) θα εξασκηθεί δύναμη σε αυτό. Το παραπάνω μοντέλο είναι καλό αν η αλληλεπίδραση μεταξύ του δοκιμαστικού φορτίου Q και των φορτίων πηγής είναι αμελητέα.

$$\mathbf{E} = \lim_{Q \to 0} \frac{\mathbf{F}}{Q}$$

Μην ξεχνάμε ότι και το Q δημιουργεί γύρω του το δικό του πεδίο.

Προφανώς το Q δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το φορτίο του ηλεκτρονίου (προσοχή στον υπολογισμό πεδίων σε ατομικές διαστάσεις) αλλά το παραπάνω όριο το ερμηνεύουμε ότι το Q είναι αρκετά μικρό και δεν επηρεάζει τα άλλα στάσιμα φορτία του χώρου που δημιουργούν το πεδίο. Η ακριβής ονομασία του πεδίου είναι τότε *ηλεκτροστατικό πεδίο*.

- Ο Maxwell π.χ. πίστευε ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αντιπροσωπεύει πιέσεις και παραμορφώσεις κάποιου αόρατου, αρχέγονου, ζελατινοειδούς μέσου, του αιθέρα.
- Βασίστηκε στην αναλογία ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και κυμάτων σε νερό ή αέρα (ο Maxwell προέβλεψε την ύπαρξη των πρώτων και ο Hertz αργότερα το επαλήθευσε πειραματικά).

Ηλεκτρικό πεδίο 3

Για σύστημα σημειακών φορτίων $q_1, q_2, \ldots q_N$, σταθερά διατεταγμένων στο χώρο, σύμφωνα με τον νόμο Coulomb και αρχή επαλληλίας, σε οποιοδήποτε θετικό σημειακό δοκιμαστικό φορτίο Q εξασκείται η συνισταμένη δύναμη

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = Q \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{\mathscr{r}_i^2} \, \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}_i$$

όπου $\mathscr{r}_i$ η απόσταση μεταξύ φορτίου q_i και Q και $\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}_i$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση των δυο φορτίων.

Ο χώρος γύρω από τα φορτία q_i εντός του οποίου κάποιο άλλο φορτίο δέχεται δύναμη $\mathbf{F}$ καλείται ηλεκτρικό πεδίο.

Το ηλεκτρικό πεδίο περιγράφεται από μια διανυσματική συνάρτηση θέσης, την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που είναι

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{\mathscr{r}_i^2} \, \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}_i$$

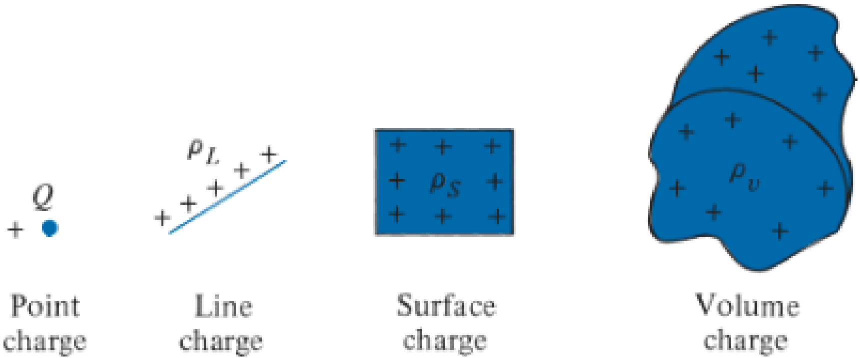
όπου $\mathbf{r}$ η θέση που θεωρούμε την τιμή της συνάρτησης $\mathbf{E}$.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου εκφράζει τη δύναμη ανά μονάδα φορτίου. Για σημειακό φορτίο q στην αρχή των αξόνων έχουμε

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \, \hat{\mathbf{r}}$$

Ηλεκτρικό πεδίο 4

Μπορούμε να γενικεύσουμε την κατανομή των φορτίων που δημιουργούν ένα πεδίο από το σημειακό φορτίο σε ευθύγραμμο αγωγό (γραμμή), σε επιφάνεια και σε όγκο.



Σχήμα: Κατανομές φορτίου.

Ηλεκτρικό πεδίο 5

Νόημα εδώ έχει η πυκνότητα φορτίου, ρ_L σε (C/m) για γραμμικό φορτίο σε κάποια καμπύλη L, ρ_S σε $(\mathrm{C}/\mathrm{m}^2)$ για επιφανειακό φορτίο σε κάποια επιφάνεια S και ρ_V σε $(\mathrm{C}/\mathrm{m}^3)$ για χώρο όγκου V. Οπότε το ολικό φορτίο q που δημιουργεί πεδίο σε κάθε περίπτωση είναι:

$$q = \int_L \rho_L \, d\ell \qquad q = \int_S \rho_S \, dS \qquad q = \int_V \rho_V \, dV$$

με αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_\Omega \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \, \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \int_\Omega \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \, \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}$$

για οποιαδήποτε κατανομή φορτίου στα σημεία $\mathbf{r}'$ στο χώρο Ω.

Στο βιβλίο σας:

$$\rho_L \to \lambda \qquad \rho_S \to \sigma \qquad \rho_V \to \rho$$

$$dq = \lambda d\ell' \qquad dq = \sigma da' \qquad dq = \rho d\tau'$$