# Ηλεκτρομαγνητισμός

## Διάλεξη 09

Α. Δροσόπουλος

06-12-2021

# Outline

# Topic

1. Εξισώσεις Maxwell

2. Μετασχηματιστές

# Εισαγωγικά

- Στατικά ηλεκτρικά πεδία. $\mathbf{E}(x, y, z)$. Στατικά φορτία δημιουργούν ηλεκτροστατικά πεδία.
- Στατικά μαγνητικά πεδία. $\mathbf{H}(x, y, z)$. Στατικά ρεύματα (συνεχή) - φορτία κινούμενα με σταθερή ταχύτητα δημιουργούν μαγνητοστατικά πεδία.
- Επιταχυνόμενα φορτία / εναλλασσόμενο ρεύμα δημιουργούν δυναμικά, χρονικώς μεταβαλλόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία (ηλεκτρομαγνητικά κύματα).
- Τα πεδία $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ και $\mathbf{H}(x, y, z, t)$. Σε αντίθεση με τα στατικά, τα χρονικώς μεταβαλλόμενα πεδία εμπλέκονται μεταξύ τους. Αυτά ενδιαφέρουν στις περισσότερες εφαρμογές.

# Νόμος Faraday

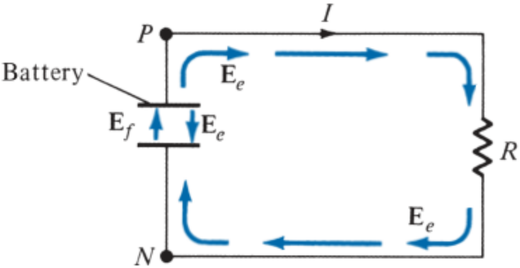
- Μετά τα πειράματα του Oersted ότι ένα συνεχές ρεύμα δημιουργεί μαγνητικό πεδίο (εδώ βασίστηκαν Ampere και Biot-Savart για τους νόμους τους) το ερώτημα τέθηκε εάν ένα μαγνητικό πεδίο μπορούσε να δημιουργήσει ηλεκτρικό ρεύμα. Περίπου 11 χρόνια μετά τον Oersted, το 1831, οι Faraday και Henry ανεκάλυψαν ότι ένα εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ηλεκτρικό ρεύμα.
- Η μεταβολή της μαγνητικής ροής σε κλειστό κύκλωμα δημιουργεί επαγωγική τάση στο κύκλωμα που με τη σειρά της προκαλεί ροή ρεύματος.

$$V_{\text{emf}} = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{E}\cdot d\ell$$

Το αρνητικό πρόσημο (νόμος Lentz) απλώς σημαίνει ότι η επαγωγική τάση αντιτίθεται στη ροή που την προκαλεί, δηλ. το επαγωγικό ρεύμα δημιουργεί μαγνητικό πεδίο αντίθετο από το αρχικό.

# Νόμος Faraday (συνέχεια 1)

- Ηλεκτρικό πεδίο είναι ο χώρος όπου εξασκούνται δυνάμεις σε ηλεκτρικά φορτία. Στην ηλεκτροστατική οι γραμμές ηλεκτρικής ροής πηγάζουν από και καταλήγουν σε φορτία. Με τον νόμο Faraday βλέπουμε ότι έχουμε δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου και επαγωγικά. Πολλά συστήματα μετατροπής ενέργειας πέφτουν σε αυτή τη κατηγορία.




- Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος.

# Νόμος Faraday (συνέχεια 2)

- Οι ηλεκτροχημικές αντιδράσεις δημιουργούν επαγωγικό πεδίο $\mathbf{E}_f$ μέσα στη μπαταρία. Τα φορτία που συσσωρεύονται στους ακροδέκτες δημιουργούν ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathbf{E}_e$ μέσα και έξω στη μπαταρία, αντιθέτου φοράς μέσα. Το $\mathbf{E}_f$ είναι μηδενικό εκτός της μπαταρίας και αντίθετο του $\mathbf{E}_e$ εντός. Το ολικό πεδίο είναι $\mathbf{E} = \mathbf{E}_f + \mathbf{E}_e$. Ολοκληρώνοντας στο κύκλωμα, η τάση είναι

$$V_{\text{emf}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_L \mathbf{E}_f \cdot d\boldsymbol{\ell} + 0 = \int_N^P \mathbf{E}_f \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

  όπου η κυκλοφορία του $\mathbf{E}_e$ είναι μηδενική εφόσον είναι συντηρητικό.
- Μέσα στη μπαταρία

$$V_{\text{emf}} = \int_N^P \mathbf{E}_f \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\int_N^P \mathbf{E}_e \cdot d\boldsymbol{\ell} = IR$$

Συμπεράσματα/παρατηρήσεις

- Ένα ηλεκτροστατικό πεδίο δεν μπορεί να υποστηρίξει συνεχές ρεύμα σε κλειστό κύκλωμα γιατί η κυκλοφορία του είναι μηδέν.
- Το επαγωγικό πεδίο $\mathbf{E}_f$ είναι μη-συντηρητικό.
- Ηλεκτρική τάση και δυναμικό είναι μη ισοδύναμες έννοιες σε μη στατικές συνθήκες.

# Νόμος Faraday (συνέχεια 3)

Έχουμε

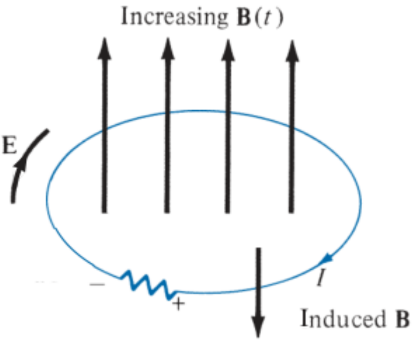
$$V_{\text{emf}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

όπου $S$ η επιφάνεια που σχηματίζει το κύκλωμα με σύνορο την κλειστή διαδρομή $L$ των αγωγών του. Μεταβολή ροής έχουμε με τρεις τρόπους:

1. Στατικό βρόχο σε χρονικά μεταβαλλόμενο $\mathbf{B}$.
2. Κινούμενο βρόχο σε στατικό $\mathbf{B}$.
3. Κινούμενο βρόχο σε χρονικά μεταβαλλόμενο $\mathbf{B}$.

# Περίπτωση 1

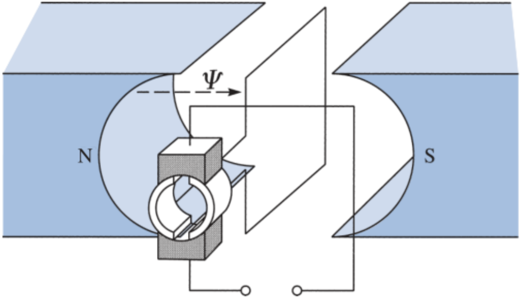
Στατικός βρόχος σε χρονικά μεταβαλλόμενο $\mathbf{B}$.




$$V_{\text{emf}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$$

# Περίπτωση 2

Κινούμενος βρόχος σε στατικό **B**.



# Περίπτωση 2 (συνέχεια 1)

Από τη δύναμη σε κινούμενα φορτία μέσα σε μαγνητικό πεδίο ορίζουμε ηλεκτρικό πεδίο κίνησης $\mathbf{E}_m$ ως εξής

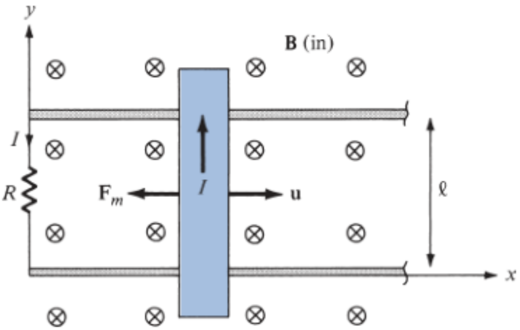
$$\mathbf{F}_m = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{E}_m = \frac{\mathbf{F}_m}{Q} = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

ΗΕΔ κίνησης

$$V_{\text{emf}} = \oint_L \mathbf{E}_m \cdot d\ell = \oint_L (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell$$

# Περίπτωση 2 (συνέχεια 2)

Παρόμοια κατάσταση έχουμε και με ένα μεταβλητό πλαίσιο.




$$\mathbf{F}_m = I\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} \Rightarrow F_m = I\ell B \quad \text{και} \quad V_{\text{emf}} = uB\ell$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}_m) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E}_m = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

# Περίπτωση 3

Κινούμενος βρόχος σε χρονικά μεταβαλλόμενο $\mathbf{B}$.

$$V_{\text{emf}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\ell = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_L (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

# Ρεύμα μετατόπισης

Μεταβολή στροβιλισμού μαγνητικού πεδίου σε χρονικά μεταβαλλόμενες συνθήκες.

Για στατικές συνθήκες $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$.

Απόκλιση στροβιλισμού για οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο είναι μηδέν.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

Η εξίσωση συνεχείας όμως απαιτεί

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \neq 0$$

Τροποποιούμε τον στροβιλισμό με την προσθήκη ενός επιπλέον όρου

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{J}_d$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_d = -\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

# Ρεύμα μετατόπισης (συνέχεια 1)

Άρα

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

και τελικά η πλήρη εξίσωση Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

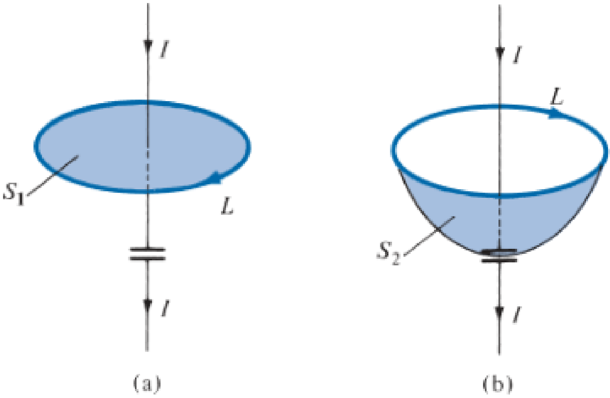
όπου $\mathbf{J}_d$ η πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης και $\mathbf{J}$ η πυκνότητα ρεύματος αγωγιμότητας.

Ο όρος αυτός εισήχθη από τον Maxwell και προβλέπει την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, κάτι που πειραματικά επαληθεύτηκε αρκετά χρόνια αργότερα (Hertz).

Το ρεύμα μετατόπισης είναι

$$I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

# Ρεύμα μετατόπισης (συνέχεια 2)




**Σχήμα:** Εξήγηση για ρεύμα μετατόπισης σε πυκνωτή

# Τελική μορφή εξισώσεων Maxwell

| Differential Form | Integral Form | Remarks |
| --- | --- | --- |
| $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ | $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho_v \, dv$ | Gauss's law |
| $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ | $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ | Nonexistence of isolated magnetic charge* |
| $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ | $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ | Faraday's law |
| $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ | $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{J} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$ | Ampère's circuit law |

*This is also referred to as Gauss's law for magnetic fields.

# Τελική μορφή εξισώσεων Maxwell (συνέχεια 1)

Εξίσωση Lorentz

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

Εξίσωση συνέχειας

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Καταστατικές εξισώσεις (γραμμικότητα, ομογένεια, ισοτροπία)

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \rho_v \mathbf{u}$$

# Τελική μορφή εξισώσεων Maxwell (συνέχεια 2)

Οριακές συνθήκες

$$
\begin{array}{ccc}
E_{1t} - E_{2t} = 0 & \text{ή} & (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \\
H_{1t} - H_{2t} = K & \text{ή} & (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{K} \\
D_{1n} - D_{2n} = \rho_s & \text{ή} & (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho_s \\
B_{1n} - B_{2n} = 0 & \text{ή} & (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0
\end{array}
$$

Για ιδανικό αγωγό ($\sigma = \infty$)

$$\mathbf{E} = 0,\ \mathbf{H} = 0,\ \mathbf{J} = 0 \qquad \text{και} \qquad \mathbf{B}_n = 0,\ \mathbf{E}_t = 0$$

Για ιδανικό διηλεκτρικό ($\sigma = 0$) το μόνο που αλλάζει στα παραπάνω είναι ότι $\mathbf{K} = 0$.

# Χρονικώς μεταβαλλόμενα δυναμικά

Για στατικά πεδία έχουμε

$$V = \int_v \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon R} \qquad \mathbf{A} = \int_v \frac{\mu \mathbf{J} dv}{4\pi R}$$

Για χρονικώς μεταβαλλόμενα πεδία

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon} = -\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \Rightarrow$$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

# Χρονικώς μεταβαλλόμενα δυναμικά (συνέχεια 1)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) =$$

$$= \mu \mathbf{J} - \mu\epsilon \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Με χρήση της ταυτότητας $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, έχουμε

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\mu \mathbf{J} + \mu\epsilon \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Ένα διανυσματικό πεδίο ορίζεται πλήρως εάν γνωρίζουμε στροβιλισμό και απόκλιση. Τον στροβιλισμό τον ορίσαμε ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$). Εάν ορίσουμε την απόκλιση (συνθήκη Lorentz)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

# Χρονικώς μεταβαλλόμενα δυναμικά (συνέχεια 2)

μπορούμε να αποσυνδέσουμε τα δυο δυναμικά σε δυο κυματικές εξισώσεις

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \qquad \text{και} \qquad \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

και οι λύσεις (καθυστερημένα δυναμικά - retarded potentials)

$$V = \int_v \frac{[\rho_v] dv}{4\pi\epsilon R} \qquad \mathbf{A} = \int_v \frac{\mu [\mathbf{J}] dv}{4\pi R}$$

όπου ο χρόνος $t$ στα μεγέθη $[\rho_v]$ και $[\mathbf{J}]$ είναι ο καθυστερημένος χρόνος (retarded time) $t'$

$$t' = t - \frac{R}{u}$$

όπου $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ είναι η απόσταση μεταξύ πηγής $\mathbf{r}'$ και πεδίου $\mathbf{r}$ και η ταχύτητα μετάδοσης

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Η παραπάνω ταχύτητα στο κενό είναι η γνωστή μας ταχύτητα του φωτός.

# Αρμονικά πεδία

Ωραίες, καλές οι παραπάνω εξισώσεις αλλά πολύπλοκες και χρονοβόρες στην επίλυση. Μπορούμε να κάνουμε κάποια απλοποίηση;

Ναι. Υπόθεση ότι τα πεδία είναι αρμονικά. Πάμε σε φάσορες. Εάν ένα διάνυσμα $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ είναι αρμονικό στο χρόνο, τότε

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \Re e\{\mathbf{A}(x, y, z)e^{j\omega t}\}$$

π.χ. για το πεδίο $\mathbf{A}(x, t) = A_0 \cos(\omega t - \beta x)\,\hat{\mathbf{y}}$ γράφουμε

$$\mathbf{A}(x, t) = \Re e\{A_0 e^{-j\beta x} e^{j\omega t}\}\,\hat{\mathbf{y}}$$

και ο φάσορας είναι

$$\mathbf{A}(x) = A_0 e^{-j\beta x}$$

Ισχύουν επίσης (όπως στη ανάλυση κυκλωμάτων)

$$\frac{\partial}{\partial t} \to j\omega \qquad \int dt \to \frac{1}{j\omega}$$

# Αρμονικά πεδία (συνέχεια 1)

| Point Form | Integral Form |
|---|---|
| $\nabla \cdot \mathbf{D}_s = \rho_{vs}$ | $\oint \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_{vs}\, dv$ |
| $\nabla \cdot \mathbf{B}_s = 0$ | $\oint \mathbf{B}_s \cdot d\mathbf{S} = 0$ |
| $\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega \mathbf{B}_s$ | $\oint \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \int \mathbf{B}_s \cdot d\mathbf{S}$ |
| $\nabla \times \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s + j\omega \mathbf{D}_s$ | $\oint \mathbf{H}_s \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{J}_s + j\omega \mathbf{D}_s) \cdot d\mathbf{S}$ |

# Εξισώσεις Maxwell

| | Integral Form | Differential Form | Name |
|---|---|---|---|
| Time-Domain | $Q_e(t)=\oiint_S \vec{D}(t)\bullet d\vec{s}=\iiint_V \rho_v(t)\,dv$ | $\nabla\bullet\vec{D}(t)=\rho_v(t)$ | Gauss' Law |
| | $\oiint_S \vec{B}(t)\bullet d\vec{s}=0$ | $\nabla\bullet\vec{B}(t)=0$ | No Magnetic Charge |
| | $V_{emf}(t)=\oint_L \vec{E}(t)\bullet d\vec{\ell}=-\iint_S\left[\frac{\partial\vec{B}(t)}{\partial t}\right]\bullet d\vec{s}$ | $\nabla\times\vec{E}(t)=-\frac{\partial\vec{B}(t)}{\partial t}$ | Faraday's Law |
| | $I(t)=\oint_L \vec{H}(t)\bullet d\vec{\ell}=\iint_S\left[\vec{J}(t)+\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t}\right]\bullet d\vec{s}$ | $\nabla\times\vec{H}(t)=\vec{J}(t)+\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t}$ | Ampere's Circuit Law |
| | $\oiint_S \vec{J}\bullet d\vec{s}=-\frac{\partial Q_e}{\partial t}$ | $\nabla\bullet\vec{J}=-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}$ | Continuity of Current |
| | $\vec{D}(t)=\left[\varepsilon(t)\right]*\vec{E}(t)$<br>$\vec{B}(t)=\left[\mu(t)\right]*\vec{H}(t)$ | Electric Response<br>Magnetic Response | Constitutive Relations |
| Frequency-Domain | $Q_e=\oiint_S \vec{D}\bullet d\vec{s}=\iiint_V \rho_v\,dv$ | $\nabla\bullet\vec{D}=\rho_v$ | Gauss' Law |
| | $\oiint_S \vec{B}\bullet d\vec{s}=0$ | $\nabla\bullet\vec{B}=0$ | No Magnetic Charge |
| | $V_{emf}=\oint_L \vec{E}\bullet d\vec{\ell}=-\iint_S\left[j\omega\vec{B}\right]\bullet d\vec{s}$ | $\nabla\times\vec{E}=-j\omega\vec{B}$ | Faraday's Law |
| | $I=\oint_L \vec{H}\bullet d\vec{\ell}=\iint_S\left[\vec{J}+j\omega\vec{D}\right]\bullet d\vec{s}$ | $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\vec{D}$ | Ampere's Circuit Law |
| | $\oiint_S \vec{J}\bullet d\vec{s}=-j\omega Q_e$ | $\nabla\bullet\vec{J}=-j\omega\rho_v$ | Continuity of Current |
| | $\vec{D}=\left[\varepsilon\right]\vec{E}$<br>$\vec{B}=\left[\mu\right]\vec{H}$ | Electric Response<br>Magnetic Response | Constitutive Relations |

## Parameter Definitions

Electric Field Intensity, $E$ (V/m)
Electric Flux Density, $D$ (C/m$^2$)
Magnetic Field Intensity, $H$ (A/m)
Magnetic Flux Density, $B$ (Wb/m$^2$)
Electric Current Density, $J$ (A/m$^2$)
Volume Charge Density, $\rho_v$ (C/m$^3$)
Permittivity, $\varepsilon$ (F/m)
Permeability, $\mu$ (H/m)
Electrical Conductivity, $\sigma$ (1/$\Omega\cdot$m)

## Constants

Permittivity: $[\varepsilon]=\varepsilon_0[\varepsilon_r]$

$\varepsilon_0=8.8541878176\times10^{-12}$ (F/m)

Permeability: $[\mu]=\mu_0[\mu_r]$

$\mu_0\approx4\pi\times10^{-7}$ (H/m)

$\mu_0=1.2566370614\times10^{-6}$ (H/m)

Impedance: $\eta_0\approx120\pi$ ($\Omega$)

$\eta_0=376.73031346177$ ($\Omega$)

Speed of Light: $c_0=299,792,458$ (m/s)

## Lorentz Force Law

$\vec{F}=q\vec{E}+q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$

## Sign Convention

$e^{-jkz}$ For propagation in the +z direction.

# Παράδειγμα 1

Το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στο κενό δίδονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{E} = \frac{50}{\rho}\cos(\omega t + \beta z)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\ \mathrm{V/m} \qquad \mathbf{H} = \frac{H_0}{\rho}\cos(\omega t + \beta z)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\ \mathrm{A/m}$$

όπου $\omega = 10^6\ \mathrm{rad/s}$. Εκφράστε τις σχέσεις σε μορφή φάσορα και προσδιορίστε τις σταθερές $H_0$ και $\beta$ έτσι ώστε τα πεδία να ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell.

---

Η σχέση των δοθέντων πεδίων με τους αντίστοιχους φάσορες είναι:

$$\mathbf{E}(z,t) = \Re e\{\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}\}, \qquad \mathbf{H}(z,t) = \Re e\{\mathbf{H}(z)e^{j\omega t}\}$$

$$\mathbf{E}(z) = \frac{50}{\rho}e^{j\beta z}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad \mathbf{H}(z) = \frac{H_0}{\rho}e^{j\beta z}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

# Παράδειγμα 1 (συνέχεια 1)

Στο κενό, $\rho_v = 0$, $\sigma = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ και οι εξισώσεις Maxwell γίνονται:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad &\rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad &\rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\
\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad &\rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E} \\
\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad &\rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τους φάσορες του προβλήματος στις παραπάνω εξισώσεις Maxwell έχουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_\rho) = 0$$

# Παράδειγμα 1 (συνέχεια 2)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left( \frac{H_0}{\rho} e^{j\beta z}\, \hat{\boldsymbol{\rho}} \right) = \frac{\partial H_\rho}{\partial z}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{j\beta H_0}{\rho} e^{j\beta z}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Πρέπει

$$\frac{j\beta H_0}{\rho} e^{j\beta z}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} = j\omega\epsilon_0 \frac{50}{\rho} e^{j\beta z}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \Rightarrow \beta H_0 = 50\omega\epsilon_0$$

Ομοίως

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left( \frac{50}{\rho} e^{j\beta z}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) = -\frac{\partial E_\phi}{\partial z}\, \hat{\boldsymbol{\rho}} = -j\beta \frac{50}{\rho} e^{j\beta z}\, \hat{\boldsymbol{\rho}} =$$

$$= -j\omega\mu_0 \mathbf{H} = -j\omega\mu_0 \frac{H_0}{\rho} e^{j\beta z}\, \hat{\boldsymbol{\rho}} \Rightarrow 50\beta = \omega\mu_0 H_0$$

$$H_0 = \pm 50\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \pm 0.1327 \text{ A/m} \qquad \text{και} \qquad \beta = \frac{50\omega\epsilon_0}{H_0} = \pm 3.336 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$$

# Παράδειγμα 2

Σε μέσο με παραμέτρους $\sigma = 0$, $\mu = \mu_0$ και $\epsilon = 4\epsilon_0$ και πεδίο $\mathbf{E} = 20\sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{y}}$ V/m όπου $\omega = 10^8$ rad/s, προσδιορίστε $\beta$ και $\mathbf{H}$.

---

Μέθοδος 1 (πεδίο χρόνου)

Από νόμο Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ είμαστε εντάξει ($\rho_v = 0$).

Από νόμο Faraday βγάζουμε έκφραση για το $\mathbf{H}$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} \int (\nabla \times \mathbf{E}) dt$$

Από τη σχέση που δίδεται

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{E_y}{\partial z}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{E_y}{\partial x}\,\hat{\mathbf{z}} = 20\beta\cos(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{x}}$$

# Παράδειγμα 2 (συνέχεια 1)

$$\mathbf{H} = -\frac{20\beta}{\mu}\int \cos(\omega t - \beta z)dt\,\hat{\mathbf{x}} = -\frac{20\beta}{\mu\omega}\sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{x}}$$

Από εδώ φαίνεται ότι ικανοποιείται και ο νόμος Gauss για τα μαγνητικά πεδία

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$$

Από το νόμο Ampere και για $\sigma = 0$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon}\int (\nabla \times \mathbf{H})dt$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z}\,\hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{20\beta^2}{\mu\omega}\cos(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{20\beta^2}{\mu\epsilon\omega}\int \cos(\omega t - \beta z)dt\,\hat{\mathbf{y}} = \frac{20\beta^2}{\mu\epsilon\omega^2}\sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{y}}$$

# Παράδειγμα 2 (συνέχεια 2)

Συγκρίνοντας με το δοθέν $\mathbf{E}$ έχουμε

$$\frac{20\beta^2}{\mu\epsilon\omega^2} = 20 \Rightarrow \beta = \pm\omega\sqrt{\mu\epsilon} = \pm 2\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \pm 0.6671 \text{ rad/m}$$

Κρατάμε τη θετική τιμή για ισοτροπικά υλικά. Οπότε

$$\mathbf{H} = -\frac{20\beta}{\mu\omega}\sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{x}} = -0.1062\sin(\omega t - 0.6671 z)\,\hat{\mathbf{x}} \text{ A/m}$$

# Παράδειγμα 2 (συνέχεια 3)

## Μέθοδος 2 (πεδίο συχνοτήτων)

$$\mathbf{E}(z,t) = \Im m\{\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}\} \Rightarrow \mathbf{E}(z) = 20e^{-j\beta z}\,\hat{\mathbf{y}}$$

και πάλι

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{(-j\omega\mu)} = \frac{1}{(-j\omega\mu)}\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z}\,\hat{\mathbf{x}}\right) = -\frac{20\beta}{\omega\mu}e^{-j\beta z}\,\hat{\mathbf{x}}$$

Ικανοποιείται και η $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$.

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\nabla \times \mathbf{H}}{j\omega\epsilon}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon}\frac{\partial H_x}{\partial z}\,\hat{\mathbf{y}} = \frac{20\beta^2 e^{-j\beta z}}{\omega^2\mu\epsilon}\,\hat{\mathbf{y}}$$

# Παράδειγμα 2 (συνέχεια 4)

που σημαίνει ότι όπως και πριν

$$20 = \frac{20\beta^2}{\omega^2 \mu\epsilon} \Rightarrow \beta = 0.6671 \text{ rad/m}$$

Και για το $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = -\frac{20\beta}{\omega\mu} e^{-j\beta z}\, \hat{\mathbf{x}} = -0.1062 e^{-j\beta z}\, \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H} = \Im m\{-0.1062 e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\}\, \hat{\mathbf{x}} = -0.1062 \sin(\omega t - \beta z)\, \hat{\mathbf{x}} \text{ A/m}$$

# Δυο ενδιαφέροντα video

Και δυο ενδιαφέροντα video από το youtube

Maxwell’s laws

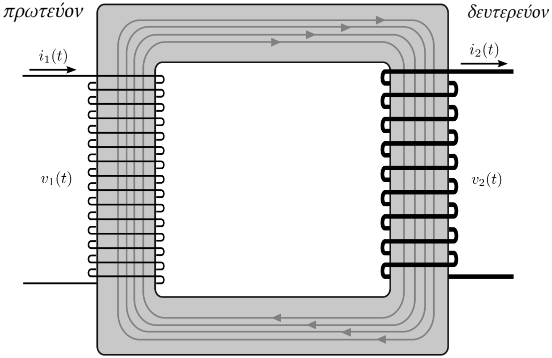
Maxwell’s equations

# Topic

1. Εξισώσεις Maxwell
2. Μετασχηματιστές

# Μετασχηματιστές

Κυκλώματα που περιέχουν στοιχεία που αλληλεπιδρούν με μαγνητικά πεδία ονομάζονται κυκλώματα μαγνητικής σύζευξης. Ο μετασχηματιστής είναι ο δομικός λίθος για τέτοιου είδους κυκλώματα. Χρησιμοποιεί δυο πηνία που είναι μαγνητικά συζευγμένα για να μεταφέρει ενέργεια από το ένα στο άλλο. Οι μετασχηματιστές είναι βασικά στοιχεία σε κυκλώματα ισχύος όπου χρησιμοποιούνται στην αλλαγή της τιμής της τάσης ή του ρεύματος. Χρησιμοποιούνται επίσης και σε άλλα ηλεκτρικά και ηλεκτρονικά κυκλώματα για προσαρμογή εμπεδήσεων και ηλεκτρική απομόνωση μεταξύ διαφορετικών τμημάτων του κυκλώματος.



# Αμοιβαία επαγωγή

Ο νόμος της επαγωγής του Faraday λέει ότι, αν έχουμε ένα πηνίο στο οποίο υπάρχει μεταβολή της μαγνητικής ροής $\phi$ που διέρχεται μέσα από τις σπείρες του πηνίου, τότε στα άκρα του πηνίου εμφανίζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη:

$$E = N\frac{d\phi}{dt}$$

με πολικότητα που να αντιτίθεται στο αίτιο που προκαλεί τη μεταβολή της $\phi$. Η μαγνητική ροή οφείλεται στο ρεύμα που διαρρέει το πηνίο. Π.χ. για σωληνοειδές μήκους $\ell$, έχουμε

$$\phi(t) = B(t)S = \frac{\mu_0 i(t) N}{\ell}S = kNi(t)$$

Ίδια σχέση με κάποιο συντελεστή $k$ που εξαρτάται μόνο από τα γεωμετρικά και μαγνητικά χαρακτηριστικά ισχύει για οποιοδήποτε πηνίο.

# Αμοιβαία επαγωγή (συνέχεια 1)

Επομένως, αν έχουμε δυο πηνία 1 και 2 μέσα από τα οποία διέρχεται ρεύμα $i_1(t)$ και $i_2(t)$ αντίστοιχα, και τα πηνία είναι μακρυά το ένα από το άλλο, οι αντίστοιχες μαγνητικές ροές θα είναι

$$\phi_1(t) = k_1 N_1 i_1(t) \qquad \phi_2(t) = k_2 N_2 i_2(t)$$

και οι αντίστοιχες ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις στα άκρα κάθε πηνίου:

$$v_{11}(t) = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} = k_1 N_1^2 \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \qquad v_{22}(t) = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = k_2 N_2^2 \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Οι δυο δείκτες 12 σημαίνουν ότι το αποτέλεσμα στο στοιχείο 1 δημιουργείται από το αίτιο στο στοιχείο 2. Επομένως, η τάσεις $v_{11}(t)$, $v_{22}(t)$ είναι οι τάσεις εξ αυτεπαγωγής στα δυο πηνία.

# Αμοιβαία επαγωγή (συνέχεια 2)

Ας θεωρήσουμε τώρα δυο πηνία με αυτεπαγωγές $L_1$, $L_2$ που βρίσκονται κοντά το ένα στο άλλο. Το πηνίο 1 έχει $N_1$ τυλίγματα ενώ το πηνίο 2 έχει $N_2$ τυλίγματα. Μέρος της μαγνητικής ροής κάθε πηνίου εμπλέκεται και διέρχεται από τις σπείρες του άλλου πηνίου. Υπάρχει αμοιβαία επαγωγή (mutual inductance). Οι αντίστοιχες μαγνητικές ροές είναι

$$\phi_{12}(t) = k_{12} N_2 i_2(t) \qquad \phi_{21}(t) = k_{21} N_1 i_1(t)$$

Η ροή $\phi_{12}(t)$ είναι η ροή στο πηνίο 1 λόγω του ρεύματος στο πηνίο 2 και η ροή $\phi_{21}(t)$ είναι η ροή στο πηνίο 2 λόγω του ρεύματος στο πηνίο 1. Όταν οι ροές/ρεύματα μεταβάλλονται, τότε έχουμε την εμφάνιση τάσεων εξ επαγωγής

$$v_{12}(t) = N_1 \frac{d\phi_{12}}{dt} = k_{12} N_1 N_2 \frac{di_2}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$v_{21}(t) = N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = k_{21} N_2 N_1 \frac{di_1}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

όπου $M_{12}$, $M_{21}$ είναι οι συντελεστές αμοιβαίας επαγωγής. Για γραμμικά μαγνητικά υλικά $k_{12} = k_{21} = k_M$ οπότε και $M_{12} = M_{21} = M$. Οπότε οι ολικές τάσεις σε κάθε πηνίο είναι

$$v_1(t) = v_{11}(t) + v_{12}(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \qquad v_2(t) = v_{22}(t) + v_{21}(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}$$

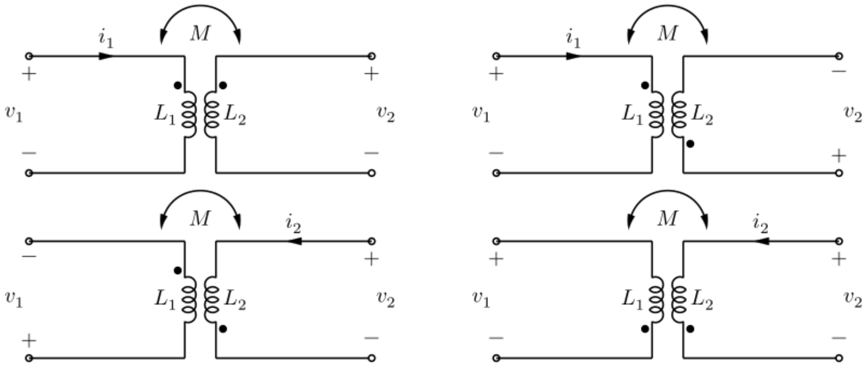
# Σύμβαση τελείας

Η αμοιβαία επαγωγή είναι η ιδιότητα ενός επαγωγέα να δημιουργεί επαγωγικά μια τάση στα άκρα ενός άλλου, γειτονικού επαγωγέα, ανάλογα με την μεταβολή του ρεύματος στον πρώτο. Σαν φυσικό μέγεθος, η αμοιβαία επαγωγή είναι πάντοτε θετική. Η επαγώμενη τάση όμως $Mdi/dt$ μπορεί να είναι είτε θετική, είτε αρνητική. Αντίθετα με την τάση εξ αυτεπαγωγής $Ldi/dt$, της οποίας η πολικότητα εξαρτάται από το ρεύμα που διαρρέει τον επαγωγέα και τον νόμο του Lentz, η πολικότητα της αμοιβαίας επαγωγής $Mdi/dt$ εξαρτάται από το τι γίνεται σε 4 ακροδέκτες συμπεριλαμβανομένου του τρόπου περιτύλιξης των δυο πηνίων.

Στο προηγούμενο σχήμα μετασχηματιστή έχουμε ένα ζεύγος πηνίων με κοινό πυρήνα (για να φαίνεται καλύτερα ο τρόπος περιέλιξης). Η ολική μαγνητική ροή που φαίνεται στο σχήμα έχει τέσσερις συνιστώσες, $\phi_{11}(t)$, $\phi_{22}(t)$, $\phi_{21}(t)$ και $\phi_{12}(t)$. Μας ενδιαφέρουν οι δυο τελευταίες που αντιπροσωπεύουν την ροή λόγω αμοιβαίας επαγωγής από το πηνίο 1 στο 2 και από το πηνίο 2 στο 1 αντίστοιχα. Ανάλογα με την φορά περιέλιξης των πηνίων και τη φορά των ρευμάτων που κυκλοφορούν σε αυτά, οι επαγώμενες τάσεις μπορεί να εμφανίζονται με θετική ή αρνητική πολικότητα.

# Σύμβαση τελείας (συνέχεια 1)

Επειδή σε σχηματικό διάγραμμα δεν μπορεί να συμπεριληφθεί η φορά περιέλιξης κάθε πηνίου, ακολουθείται η σύμβαση τελείας (dot convention). Σύμφωνα με αυτήν, τοποθετείται μια τελεία στον ακροδέκτη κάθε πηνίου σε ένα ζευγάρι συζευγμένων πηνίων, που δείχνει την φορά της μαγνητικής ροής εάν το ρεύμα εισέρχεται στο πηνίο από αυτόν τον ακροδέκτη. Η τελεία χρησιμεύει στον προσδιορισμό της πολικότητας της αμοιβαίας επαγωγής.



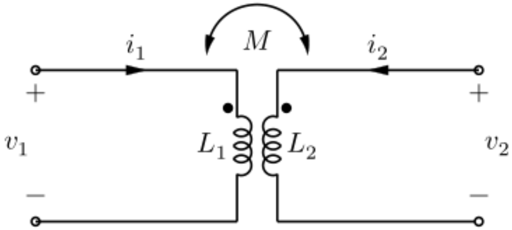
# Σύμβαση τελείας (συνέχεια 2)

- Εάν το ρεύμα εισέρχεται στον ακροδέκτη τελεία ενός πηνίου, η πολικότητα της επαγώμενης τάσης είναι θετική στον ακροδέκτη τελεία του δεύτερου πηνίου.
- Εάν το ρεύμα εξέρχεται από τον ακροδέκτη τελεία ενός πηνίου, η πολικότητα της επαγώμενης τάσης είναι αρνητική στον ακροδέκτη τελεία του δεύτερου πηνίου.

Στην πράξη, όταν αναλύουμε ένα κύκλωμα, σχεδιάζουμε πρώτα τα κλαδικά ρεύματα. Στην περίπτωση αυτή είναι πιο εύχρηστος ο παρακάτω ορισμός της σύμβασης τελείας.

- Εάν τα ρεύματα που διέρχονται από τα πηνία εισέρχονται ή εξέρχονται και τα δυο από τους ακροδέκτες τελεία, το πρόσημο της εξ επαγωγής τάσης θα είναι το ίδιο με το πρόσημο της εξ αυτεπαγωγής τάσης.
- Εάν το ένα ρεύμα εισέρχεται στον ακροδέκτη τελεία του ενός πηνίου και το άλλο εξέρχεται από τον ακροδέκτη τελεία του άλλου πηνίου τότε το πρόσημο της εξ επαγωγής τάσης θα είναι αντίθετο με το πρόσημο της εξ αυτεπαγωγής τάσης.

# Ενέργεια σε κύκλωμα μαγνητικής σύζευξης




Η στιγμιαία ισχύς σε κάθε πηνίο είναι

$$p_1(t) = v_1(t)i_1(t) = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} \pm M i_1 \frac{di_2}{dt} \qquad p_2(t) = v_2(t)i_2(t) = L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} \pm M i_2 \frac{di_1}{dt}$$

και η ολική ισχύς του συστήματος

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = L_1 \left[ i_1 \frac{di_1}{dt} \right] \pm M \left[ i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right] + L_2 \left[ i_2 \frac{di_2}{dt} \right] =$$

$$= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right]$$

# Ενέργεια (συνέχεια 1)

Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας είναι η ισχύς, οπότε η ενέργεια του συστήματος είναι

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2$$

όπου το πρόσημο $+$ είναι για την περίπτωση όπου και τα δυο ρεύματα εισέρχονται ή εξέρχονται από τους ακροδέκτες τελεία, ενώ το πρόσημο $-$ είναι για την περίπτωση όπου το ένα ρεύμα εισέρχεται και το άλλο εξέρχεται από τους αντίστοιχους ακροδέκτες τελεία.

Για τον υπολογισμό των ορίων μέσα στα οποία κυμαίνεται η αμοιβαία επαγωγή $M$ παρατηρούμε ότι η ενέργεια είναι πάντοτε μεγαλύτερη ή ίση με μηδέν. Άρα,

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 - M i_1 i_2 \geq 0$$

Εάν προσθαφαιρέσουμε τον όρο $i_1 i_2 \sqrt{L_1 L_2}$ και συμπληρώσουμε το τετράγωνο, έχουμε

$$\frac{1}{2}\left(i_1\sqrt{L_1} - i_2\sqrt{L_2}\right)^2 + i_1 i_2\left(\sqrt{L_1 L_2} - M\right) \geq 0$$

οπότε

$$\sqrt{L_1 L_2} - M \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

# Ενέργεια (συνέχεια 2)

Δηλ. η αμοιβαία επαγωγή δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από τον γεωμετρικό μέσο των αυτεπαγωγών των δυο πηνίων. Την ποιότητα της σύζευξης την ποσοτικοποιούμε με τον συντελεστή σύζευξης $k$ όπου

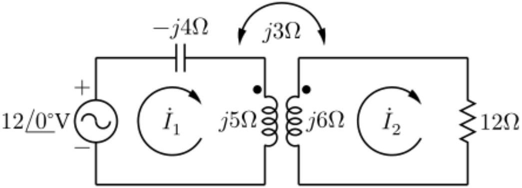
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \qquad \text{με} \qquad 0 \leq k \leq 1$$

Για $k = 1$ έχουμε 100% σύζευξη, την οποία ονομάζουμε ιδανική ή τέλεια γιατί σημαίνει ότι όλη η μαγνητική ροή από το ένα πηνίο περνάει επίσης και από το άλλο. Για $k > 0.5$ έχουμε ισχυρή σύζευξη, ενώ για $k < 0.5$ έχουμε ασθενή σύζευξη. Το $k$ δείχνει το ποσοστό της μαγνητικής ροής από το ένα πηνίο που διέρχεται από το άλλο.

Περιμένουμε ότι η πειραματική τιμή του $k$ εξαρτάται από το πόσο κοντά είναι τα πηνία, το τι πυρήνα έχουν, ποια είναι η οριοθέτησή τους στο χώρο (παράλληλη ή κάθετη μεταξύ τους) και τον αριθμό των τυλιγμάτων τους.

# Άσκηση 8

Να βρεθούν τα ρεύματα $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$




---

Από τη σύμβαση τελείας ($\dot{I}_1$ εισέρχεται, $\dot{I}_2$ εξέρχεται) η αμοιβαία επαγωγή είναι αρνητική. Στον αριστερό βρόγχο έχουμε

$$-12 + (-j4 + j5)\dot{I}_1 - j3\dot{I}_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad j\dot{I}_1 - j3\dot{I}_2 = 12$$

Στον δεξιό βρόγχο

$$-j3\dot{I}_1 + (12 + j6)\dot{I}_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{I}_1 = \frac{(12 + j6)\dot{I}_2}{j3} = (2 - j4)\dot{I}_2$$

# Άσκηση 8 (συνέχεια 1)

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση

$$(j2 + 4 - j3)\dot{I}_2 = (4 - j)\dot{I}_2 = 12 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{I}_2 = \frac{12}{4 - j} = 2.91 \,\underline{/14.036^\circ}\ \mathrm{A}$$

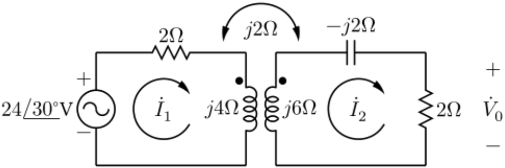
και

$$\dot{I}_1 = (2 - j4)\dot{I}_2 = 13.02 \,\underline{/-49.399^\circ}\ \mathrm{A}$$

Επαλήθευση με spice

# Άσκηση 9

Να βρεθεί η τάση εξόδου $\dot{V}_0$




---

Από σύμβαση τελείας ($\dot{I}_1$ εισέρχεται, $\dot{I}_2$ εξέρχεται) η αμοιβαία επαγωγή είναι αρνητική. Οι εξισώσεις για τους δυο βρόγχους είναι

$$(2 + j4)\dot{I}_1 - j2\dot{I}_2 = 24 \underline{/30^\circ}$$

$$-j2\dot{I}_1 + (2 + j6 - j2)\dot{I}_2 = 0$$

# Άσκηση 9 (συνέχεια 1)

Λύνοντας την δεύτερη ως προς $\dot{I}_1$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε

$$(2-j)(2+j4)\dot{I}_2 - j2\dot{I}_2 = 24\underline{/30^\circ} \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_2 = \frac{24\underline{/30^\circ}}{8+j4} = 2.683\underline{/3.435^\circ}\ \mathrm{A}$$

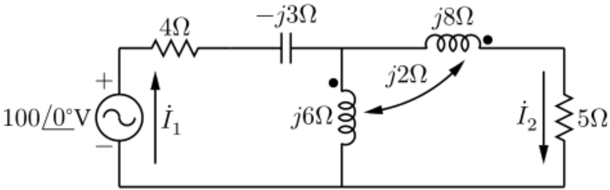
και

$$\dot{V}_o = 2\dot{I}_2 = 5.367\underline{/3.435^\circ}\ \mathrm{V}$$

Επαλήθευση με spice

# Άσκηση 10

Να βρεθούν τα ρεύματα $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$



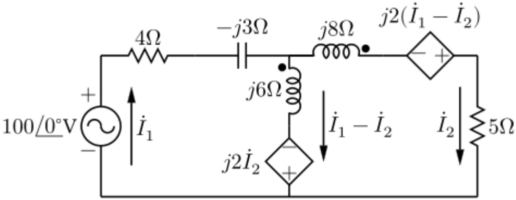

---

Μετατρέπουμε το αρχικό κύκλωμα στο επόμενο.

Από τον κανόνα τελείας το $\dot{I}_1 - \dot{I}_2$ εισέρχεται σε τελεία, το $\dot{I}_2$ εξέρχεται. Άρα η τάση εξ' επαγωγής είναι αρνητική. Στον αριστερό βρόγχο έχουμε:

$$-100 + \dot{I}_1(4 - j3) + (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)j6 - j2\dot{I}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (4 + j3)\dot{I}_1 - j8\dot{I}_2 = 100$$

# Άσκηση 10 (συνέχεια 1)




Στο δεξιό βρόγχο έχουμε:

$$j8\dot{I}_2 - j2(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + 5\dot{I}_2 + j2\dot{I}_2 - j6(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -j8\dot{I}_1 + (5 + j18)\dot{I}_2 = 0$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$\dot{I}_1 = 20.3\ \underline{/3.504^\circ}\ \text{A} \qquad \dot{I}_2 = 8.693\ \underline{/19.03^\circ}\ \text{A}$$

Επαλήθευση με spice

# Ιδανικοί μετασχηματιστές

Ο μετασχηματιστής είναι ένα ηλεκτρικό στοιχείο που χρησιμοποιεί τη μαγνητική σύζευξη μεταξύ δυο πηνίων. Βρίσκει εφαρμογή σε πολλές ηλεκτρικές συσκευές αλλά η κύρια εφαρμογή του είναι σε συσκευές ισχύος και στο ηλεκτρικό δίκτυο όπου παίζει το ρόλο μεταφορέα ενέργειας μεταξύ πηγής και φορτίου. Η συνήθης δομή του είναι δυο πηνία, το πρωτεύον (συνδεδεμένο με την πηγή) και το δευτερεύον (συνδεδεμένο με το φορτίο). Η βασική του λειτουργία είναι να αλλάζει τάσεις και ρεύματα μεταξύ πρωτεύοντος και δευτερεύοντος έτσι ώστε η μεταφορά ενέργειας από πηγή σε φορτίο να γίνεται με τη μεγαλύτερη δυνατή απόδοση.

Θέλουμε επομένως μεγιστοποίηση της μαγνητικής σύζευξης και ελαχιστοποίηση των απωλειών. Στην ιδανική περίπτωση, στον ιδανικό μετασχηματιστή, αυτό σημαίνει τέλεια σύζευξη $(k = 1)$ και μηδενικές απώλειες.

Επομένως, αν έχουμε δυο πηνία 1 (πρωτεύον) και 2 (δευτερεύον) μέσα από τα οποία διέρχεται ρεύμα $i_1(t)$ και $i_2(t)$ αντίστοιχα, οι αντίστοιχες μαγνητικές ροές είναι:

$$\phi_1(t) = k_1 N_1 i_1(t) \qquad \phi_2(t) = k_2 N_2 i_2(t)$$

ενώ οι αντίστοιχες μαγνητικές ροές λόγω μαγνητικής σύζευξης είναι

$$\phi_{12}(t) = k_{12} N_2 i_2(t) \qquad \phi_{21}(t) = k_{21} N_1 i_1(t)$$

# Ιδανικοί μετασχηματιστές (συνέχεια 1)

Τέλεια σύζευξη σημαίνει $\phi_{21}(t) = \phi_1(t)$ και $\phi_{12}(t) = \phi_2(t)$ καθώς επίσης και $k_1 = k_2 = k_{12} = k_{21} = k_M$. Οι σχέσεις τάσεις-ρεύματος μεταξύ πρωτεύοντος και δευτερεύοντος γίνονται τότε:

$$v_1(t) = k_M N_1^2 \frac{di_1}{dt} \pm k_M N_1 N_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2(t) = \pm k_M N_1 N_2 \frac{di_1}{dt} + k_M N_2^2 \frac{di_2}{dt}$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα $N_1$ από την πρώτη εξίσωση και $\pm N_2$ από τη δεύτερη:

$$v_1(t) = N_1 \left( k_M N_1 \frac{di_1}{dt} \pm k_M N_2 \frac{di_2}{dt} \right)$$

$$v_2(t) = \pm N_2 \left( k_M N_1 \frac{di_1}{dt} \pm k_M N_2 \frac{di_2}{dt} \right)$$

οπότε διαιρώντας τη δεύτερη με τη πρώτη έχουμε:

$$\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \pm \frac{N_2}{N_1} = \pm n$$

όπου το $(+)$ αναφέρεται σε μαγνητική σύζευξη που προστίθεται και το $(-)$ σε μαγνητική σύζευξη που αφαιρείται.

# Ιδανικοί μετασχηματιστές (συνέχεια 2)

Ο λόγος $n$ είναι ο λόγος τυλιγμάτων του δευτερεύοντος ως προς το πρωτεύον. Για $n > 1$ έχουμε ανύψωση τάσης, με την τάση στο δευτερεύον να είναι μεγαλύτερη από την τάση στο πρωτεύον, ενώ για $n < 1$ έχουμε υποβιβασμό τάσης, με την τάση στο δευτερεύον να είναι μικρότερη από την τάση στο πρωτεύον, Σε εφαρμογές δικτύου οι μεταβολές αυτές μπορεί να είναι της τάξης των εκατοντάδων $\mathrm{kV}$.

Μηδενική απώλεια ισχύος σημαίνει ότι η συνολική ισχύς στο πρωτεύον και δευτερεύον είναι μηδενική:

$$v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = 0$$

δηλαδή, ότι ισχύς εισέρχεται στο πρωτεύον εξέρχεται από το δευτερεύον χωρίς καμία απώλεια ή συσσώρευση ενέργειας μέσα στον ίδιο το μετασχηματιστή. Η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται στην πιο γνωστή:

$$\frac{i_2(t)}{i_1(t)} = -\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \mp\frac{1}{n}$$

ή στις

$$v_2(t) = \pm n v_1(t) \qquad \text{και} \qquad i_2(t) = \mp\frac{1}{n}i_1(t)$$

# Ιδανικοί μετασχηματιστές (συνέχεια 3)

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν και για τους παραστατικούς μιγάδες (φάσορες) τάσης και ρεύματος:

$$\dot{V}_2 = \pm n\,\dot{V}_1 \qquad \text{και} \qquad \dot{I}_2 = \mp\frac{1}{n}\,\dot{I}_1$$

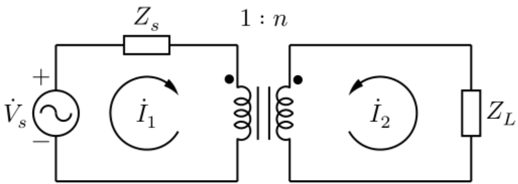
Ισχύει και εδώ ο κανόνας τελείας όπου αν τα ρεύματα $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ εισέρχονται ή εξέρχονται από τις αντίστοιχες τελείες έχουμε:

$$\dot{V}_2 = n\,\dot{V}_1 \qquad \text{και} \qquad \dot{I}_2 = -\frac{1}{n}\,\dot{I}_1$$

ενώ αν το ένα εισέρχεται και το άλλο εξέρχεται από την αντίστοιχη τελεία:

$$\dot{V}_2 = -n\,\dot{V}_1 \qquad \text{και} \qquad \dot{I}_2 = \frac{1}{n}\,\dot{I}_1$$

# Ιδανικοί μετασχηματιστές (συνέχεια 4)




Στην παραπάνω τυπική διάταξη ιδανικού μετασχηματιστή τα ρεύματα εισέρχονται στις τελείες επομένως

$$\dot{V}_2 = n\,\dot{V}_1 \qquad \text{και} \qquad \dot{I}_2 = -\frac{1}{n}\,\dot{I}_1$$

Η εμπέδηση στην είσοδο και έξοδο του μετασχηματιστή είναι:

$$Z_i = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} \qquad Z_L = -\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2} = \frac{n\dot{V}_1}{\dot{I}_1/n} = n^2 Z_i$$

Αυτό σημαίνει ότι με κατάλληλο λόγο τυλιγμάτων $n$ μπορούμε να κάνουμε το κύκλωμα στο πρωτεύον να βλέπει αντίσταση (προσαρμογή εμπέδησης):

$$Z_i = \frac{Z_L}{n^2}$$

# Άσκηση 11

Σε κύκλωμα ιδανικού μετασχηματιστή έχουμε $n = 5$, $Z_s = 2.5 + j1.5\ \Omega$, $Z_L = 75 + j10\ \Omega$. Να βρεθούν οι τάσεις και τα ρεύματα $\dot{V}_1$, $\dot{I}_1$, $\dot{V}_2$, $\dot{I}_2$ όταν $\dot{V}_s = 220\ \underline{/0^\circ}\ \text{V}$.

---

Έχουμε

$$Z_i = \frac{Z_L}{n^2} = \frac{75 + j10}{25} = 3 + j0.4\ \Omega$$

Η πηγή βλέπει ολική εμπέδηση $Z_s + Z_i$ οπότε

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_s}{Z_s + Z_i} = \frac{220\ \underline{/0^\circ}}{5.5 + j1.9} = \frac{220\ \underline{/0^\circ}}{5.82\ \underline{/19.1^\circ}} = 37.8\ \underline{/-19.1^\circ}\ \text{A}$$

και

$$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_i = 37.8\ \underline{/-19.1^\circ} \cdot 3.03\ \underline{/7.6^\circ} = 114\ \underline{/-11.5^\circ}\ \text{V}$$

Εφόσον τα ρεύματα εισέρχονται στις τελείες

$$\dot{V}_2 = n\,\dot{V}_1 \qquad \text{και} \qquad \dot{I}_2 = -\frac{1}{n}\,\dot{I}_1$$

Οπότε:

$$\dot{V}_2 = 5\dot{V}_1 = 570\,\underline{/-11.5^\circ}\ \mathrm{V}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-37.8\,\underline{/-19.1^\circ}}{5} = 7.56\,\underline{/160.9^\circ}\ \mathrm{A}$$

# LTspice

Χρήσιμο link για LTspice: ltwiki.

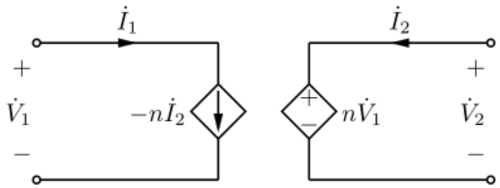
Στο spice ένας μετασχηματιστής αποδίδεται με δυο πηνία που είναι μαγνητικά συζευγμένα. Ιδανικός μετασχηματιστής σημαίνει συντελεστής σύζευξης $k = 1$. Επίσης πρέπει να επιλέξουμε εμείς τιμές αυτεπαγωγής έτσι ώστε ο λόγος τους να είναι $L_1/L_2 = (N_1/N_2)^2 = 1/n^2$ και οι τιμές αυτές πρέπει να είναι αρκετά μεγάλες έτσι ώστε $\omega L \gg R$, δηλ. το μέτρο της εμπέδησης του κάθε πηνίου να είναι πολύ μεγαλύτερο από οποιαδήποτε εν σειρά ωμική αντίσταση.

Για την προηγούμενη άσκηση $n = 5$ άρα $L_1/L_2 = 1/25$. Επιλέγοντας αυθαίρετα $L_1 = 2$ kH πρέπει $L_2 = 50$ kH.

| | αναλυτική λύση | LTspice ευθύ | LTspice μοντέλο |
|---|---|---|---|
| $\dot{V}_1$ | $114.427\underline{/-11.463^\circ}$ | $114.377\underline{/-11.422^\circ}$ | $114.406\underline{/-11.463^\circ}$ |
| $\dot{I}_1$ | $37.808\underline{/-19.058^\circ}$ | $37.798\underline{/-19.104^\circ}$ | $37.800\underline{/-19.059^\circ}$ |
| $\dot{V}_2$ | $572.133\underline{/-11.463^\circ}$ | $571.884\underline{/-11.422^\circ}$ | $572.029\underline{/-11.463^\circ}$ |
| $\dot{I}_2$ | $7.561\underline{/160.942^\circ}$ | $7.558\underline{/160.98^\circ}$ | $7.560\underline{/160.941^\circ}$ |

# LTspice (συνέχεια 1)

Εναλλακτικά, ένα ψάξιμο στο διαδίκτυο φανερώνει το προτεινόμενο μοντέλο ιδανικού μετασχηματιστή:




Δοκιμάζοντας αυτό το μοντέλο στο LTspice έχουμε την τελευταία στήλη τιμών.

# Kirchhoff’s rule

Και ένα τελευταίο από τον Walter Lewin

Kirchhoff’s rule is for the birds