

Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 07

A. Δροσόπουλος

22-11-2021

- 1 Παράδειγμα αντιστάτη
- 2 Παράδειγμα χωρητικότητας
- 3 Μαγνητοστατικά πεδία
- 4 Νόμος Ampere
- 5 Μαγνητική επαγωγή
- 6 Περίληψη

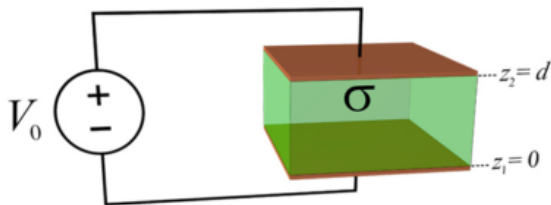
- 1 Παράδειγμα αντιστάτη
- 2 Παράδειγμα χωρητικότητας
- 3 Μαγνητοστατικά πεδία
- 4 Νόμος Ampere
- 5 Μαγνητική επαγωγή
- 6 Περίληψη

Παράδειγμα αντιστάτη 1

Step 1 – Choose coordinate system.

Cartesian

Step 2 – Assume V_0



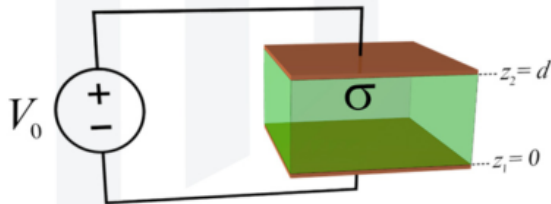
Παράδειγμα αντιστάτη 1

Step 3 – Solve Laplace's equation

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \quad V(0) = 0 \text{ and } V(d) = V_0$$

$$V(z) = \frac{V_0 z}{d} \quad 0 \leq z \leq d$$



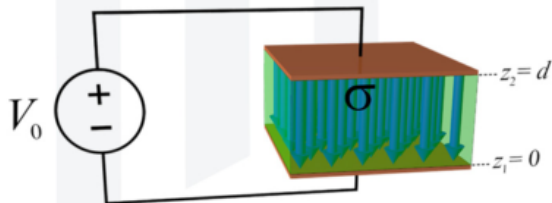
Παράδειγμα αντιστάτη 1

Step 4 – Calculate \vec{E}

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz} \hat{a}_z$$

$$\vec{E} = -\frac{d}{dz} \left(\frac{V_0 z}{d} \right) \hat{a}_z \quad 0 \leq z \leq d$$

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{d} \hat{a}_z \quad 0 \leq z \leq d$$



Παράδειγμα αντιστάτη 1

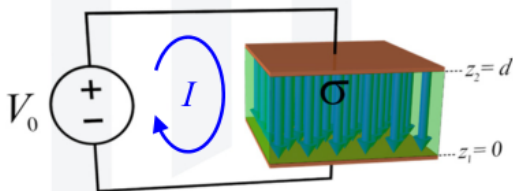
Step 5 – Calculate Current I

$$I = \iint_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_S \sigma \left(-\frac{V_0}{d} \hat{a}_z \right) \cdot d\vec{s}$$

$$I = -\sigma \frac{V_0}{d} \underbrace{\iint_S \hat{a}_z \cdot d\vec{s}}_S = -\frac{\sigma V_0}{d} S$$

The sign can be ignored since the direction of the current is known.

$$I = \frac{\sigma V_0}{d} S$$

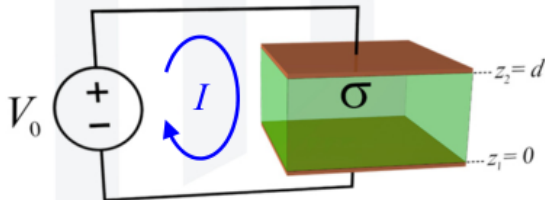


Παράδειγμα αντιστάτη 1

Step 6 – Calculate R using $R = V_0/I$.

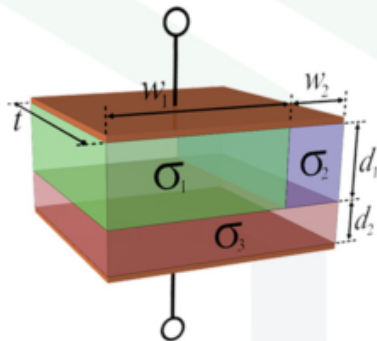
$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{V_0}{\frac{\sigma V_0}{d} S} = \frac{d}{\sigma S}$$

$$R = \frac{d}{\sigma S}$$

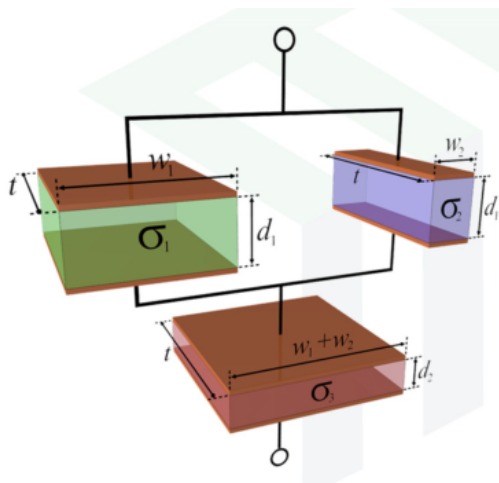


Παράδειγμα αντιστάτη 2

Suppose there exists an inhomogeneous resistor.

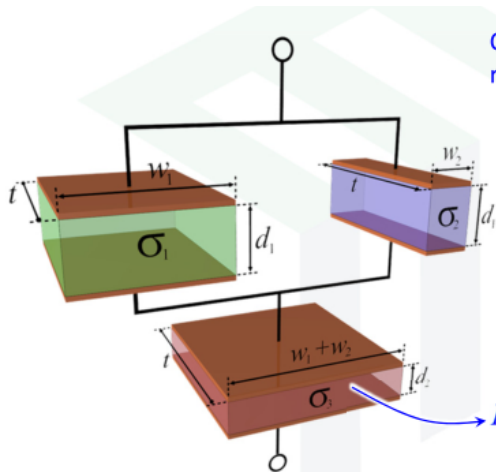


Παράδειγμα αντιστάτη 2



The inhomogeneous resistor is separated into a combination of homogeneous resistors.

Παράδειγμα αντιστάτη 2



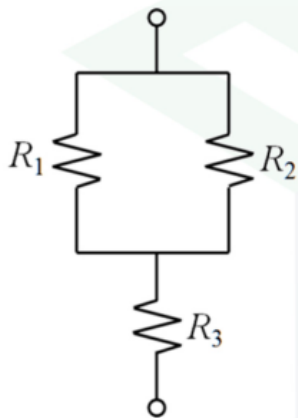
Calculate each homogeneous resistor independently.

$$R_1 = \frac{d_1}{\sigma_1 S_1} = \frac{d_1}{\sigma_1 t w_1}$$

$$R_2 = \frac{d_1}{\sigma_2 S_2} = \frac{d_1}{\sigma_2 t w_2}$$

$$R_3 = \frac{d_2}{\sigma_3 S_3} = \frac{d_2}{\sigma_3 t (w_1 + w_2)}$$

Παράδειγμα αντιστάτη 2



We view the resistor as a series/parallel combination of resistors.

The equivalent resistance is

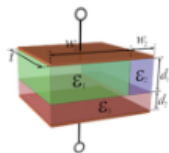
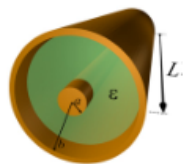
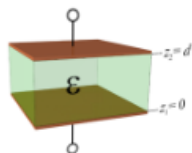
$$R_{\text{eq}} = R_1 \parallel R_2 + R_3$$
$$= \left(\frac{d_1}{\sigma_1 t w_1} \parallel \frac{d_1}{\sigma_2 t w_2} \right) + \frac{d_2}{\sigma_3 t (w_1 + w_2)}$$

$$R_{\text{eq}} = \frac{1}{t} \left[\frac{d_1 \sigma_1 \sigma_2 w_1 w_2}{\sigma_1 w_1 + \sigma_2 w_2} + \frac{d_2}{\sigma_3 (w_1 + w_2)} \right]$$

- 1 Παράδειγμα αντιστάτη
- 2 Παράδειγμα χωρητικότητας**
- 3 Μαγνητοστατικά πεδία
- 4 Νόμος Ampere
- 5 Μαγνητική επαγωγή
- 6 Περίληψη

Παράδειγμα χωρητικότητας

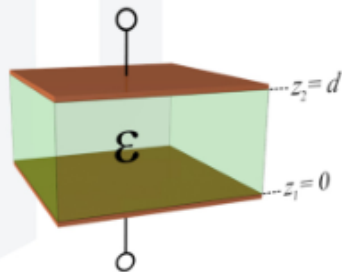
- Parallel plate capacitor
- How big is a Farad?
- Coaxial capacitor
- RG-59 coax
- Inhomogeneous capacitor



Παράδειγμα χωρητικότητας 1

Step 1 – Choose a convenient coordinate system.

Cartesian

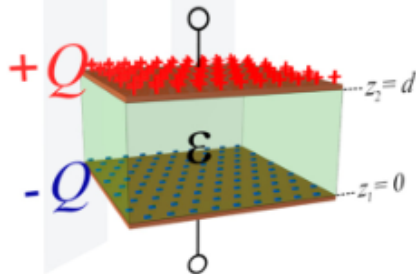


Παράδειγμα χωρητικότητας 1

Step 1 – Choose a convenient coordinate system.

Cartesian

Step 2 – Let the plates carry charges $+Q$ and $-Q$.



Παράδειγμα χωρητικότητας 1

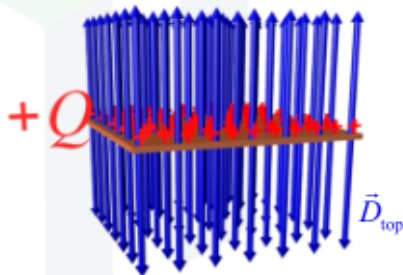
Step 3 – Calculate \vec{D} using Gauss' law.

Recall the field around an infinite plate.

$$\vec{D} = \frac{\rho_s}{2} \hat{a}_n$$

Field below the top plate,

$$\vec{D}_{\text{top}} = -\frac{\rho_s}{2} \hat{a}_z$$



Παράδειγμα χωρητικότητας 1

Step 3 – Calculate \vec{D} using Gauss' law.

Recall the field around an infinite plate.

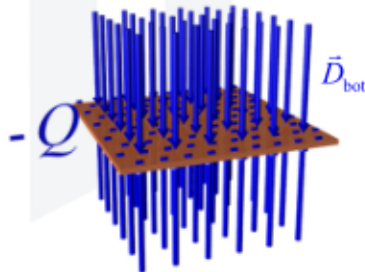
$$\vec{D} = \frac{\rho_s}{2} \hat{a}_n$$

Field below the top plate,

$$\vec{D}_{\text{top}} = -\frac{\rho_s}{2} \hat{a}_n$$

Field above the bottom plate,

$$\vec{D}_{\text{bot}} = -\frac{\rho_s}{2} \hat{a}_z$$



Παράδειγμα χωρητικότητας 1

Step 3 – Calculate \vec{D} using Gauss' law.

Recall the field around an infinite plate.

$$\vec{D} = \frac{\rho_S}{2} \hat{a}_n$$

Field below the top plate,

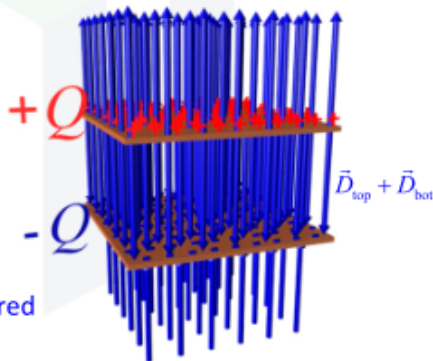
$$\vec{D}_{\text{top}} = -\frac{\rho_S}{2} \hat{a}_n$$

Field above the bottom plate,

$$\vec{D}_{\text{bot}} = -\frac{\rho_S}{2} \hat{a}_n$$

When both plates are considered

$$\vec{D} = \vec{D}_{\text{top}} + \vec{D}_{\text{bot}} = -\rho_S \hat{a}_z$$



Παράδειγμα χωρητικότητας 1

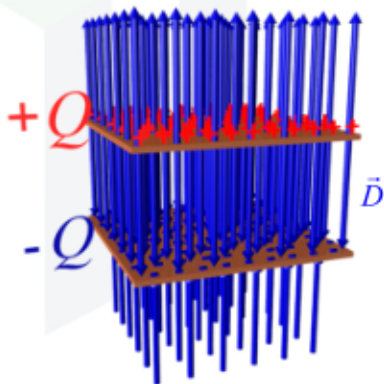
Step 3 – Calculate \vec{D} using Gauss' law.

The surface charge density is

$$\rho_s = \frac{Q}{S}$$

The final express for \vec{D}

$$\vec{D} = -\rho_s \hat{a}_z = -\frac{Q}{S} \hat{a}_z$$

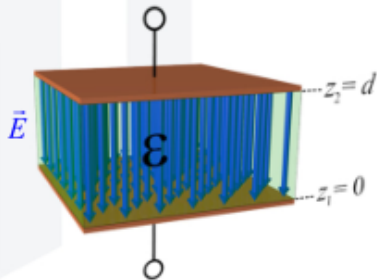


Παράδειγμα χωρητικότητας 1

Step 4 – Calculate \vec{E} .

Calculate \vec{E} from the constitutive relation.

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = -\frac{Q}{\epsilon S} \hat{a}_z$$



Παράδειγμα χωρητικότητας 1

Step 5 – Calculate V_0 .

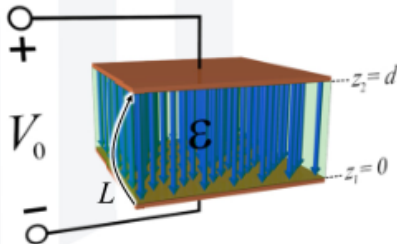
Given \vec{E} , calculate V_0 by integrating from the bottom plate to the top plate.

$$V_0 = -\int_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$V_0 = -\int_0^d \left(-\frac{Q}{\epsilon S} \hat{a}_z \right) \cdot dz \hat{a}_z$$

$$V_0 = \frac{Q}{\epsilon S} \int_0^d dz$$

$$V_0 = \frac{Qd}{\epsilon S}$$



Παράδειγμα χωρητικότητας 1

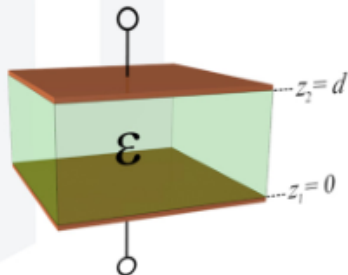
Step 6 – Calculate capacitance C .

$$C = \frac{|Q|}{|V_0|} = \frac{|Q|}{\frac{|Qd|}{\epsilon S}} = \frac{Q}{\frac{Qd}{\epsilon S}} = \frac{\epsilon S}{d}$$

The final answer is

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

Self-check – C should not be a function of Q or V_0 .



Παράδειγμα χωρητικότητας

Suppose the plates of a capacitor are 10 m by 20 m and the gap between the plates is 1 mm.

$$C = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r LW}{d} = \frac{(8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m})(1.0)(10 \text{ m})(20 \text{ m})}{(0.001 \text{ m})}$$

$$= 1.78 \times 10^{-6} \text{ F}$$

$$= 1.78 \mu\text{F}$$

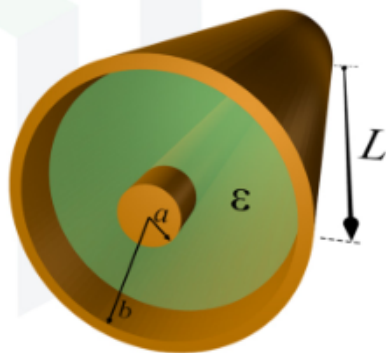
The capacitor is physically very large, yet the capacitance is very small.

The Farad is a HUGE unit!!!

Παράδειγμα χωρητικότητας 2

Step 1 – Choose a convenient coordinate system.

Cylindrical (ρ, ϕ, z)

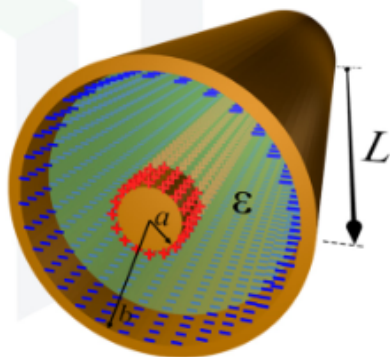


Παράδειγμα χωρητικότητας 2

Step 1 – Choose a convenient coordinate system.

Cylindrical (ρ, ϕ, z)

Step 2 – Let the plates carry charges $+Q$ and $-Q$.



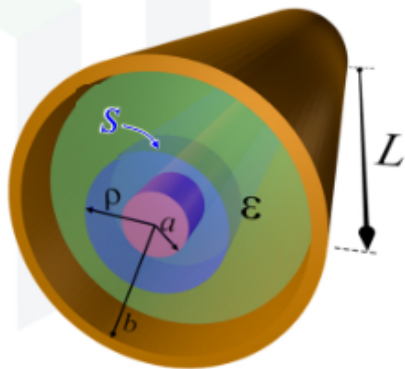
Παράδειγμα χωρητικότητας 2

Step 3 – Calculate \vec{D} using Gauss' law.

Define a Gaussian surface with radius ρ to be inside of the dielectric.

$$Q = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

From the boundary conditions, it is known that the electric field will be normal at the interfaces to the metal.

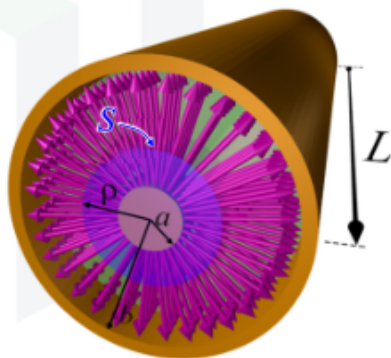


Παράδειγμα χωρητικότητας 2

Step 3 – Calculate \vec{D} using Gauss' law.

The only field configuration that makes sense considering the boundary conditions is when the field is purely radially directed.

$$\vec{D} = D_\rho(\rho, \phi, z) \hat{a}_\rho$$

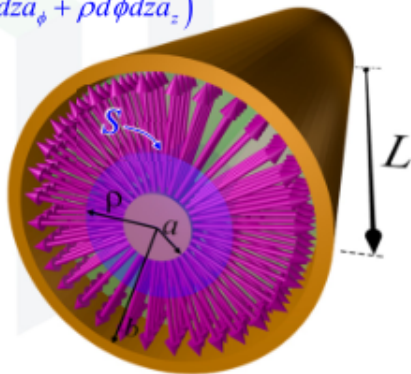


Παράδειγμα χωρητικότητας 2

Step 3 – Calculate \vec{D} using Gauss' law.

Gauss' law becomes

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^L \int_0^{2\pi} (D_\rho \hat{a}_\rho) \cdot (\rho d\phi dz \hat{a}_\rho + d\rho dz \hat{a}_\phi + \rho d\phi dz \hat{a}_z) \\ &= \int_0^L \int_0^{2\pi} D_\rho \rho d\phi dz \\ &= D_\rho \rho \int_0^L \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) dz \\ &= D_\rho \rho \int_0^L (2\pi) dz \\ &= 2\pi D_\rho \rho \left(\int_0^L dz \right) = 2\pi D_\rho \rho L \end{aligned}$$



Παράδειγμα χωρητικότητας 2

Step 3 – Calculate \vec{D} using Gauss' law.

Solving for \vec{D} gives

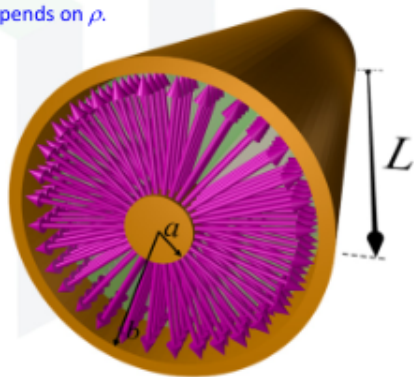
$$D_{\rho}(\rho, \phi, z) = \frac{Q}{2\pi\rho L} \quad \vec{D} \text{ only depends on } \rho.$$

$$\vec{D}(\rho) = \frac{Q}{2\pi\rho L} \hat{a}_{\rho}$$

Step 4 – Calculate \vec{E} .

Calculate \vec{E} from the constitutive relation.

$$\vec{E}(\rho) = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{Q}{2\pi\epsilon\rho L} \hat{a}_{\rho}$$

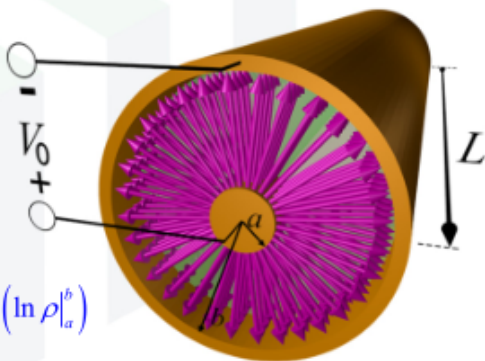


Παράδειγμα χωρητικότητας 2

Step 5 – Calculate V_0 .

Given \vec{E} , calculate V_0 by integrating from the inner conductor to the outer conductor.

$$\begin{aligned}V_0 &= -\int_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\&= -\int_a^b \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon\rho L} \hat{a}_\rho \right) \cdot (d\rho \hat{a}_\rho) \\&= -\int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon\rho L} d\rho \\&= -\frac{Q}{2\pi\epsilon L} \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho = -\frac{Q}{2\pi\epsilon L} \left(\ln \rho \Big|_a^b \right)\end{aligned}$$

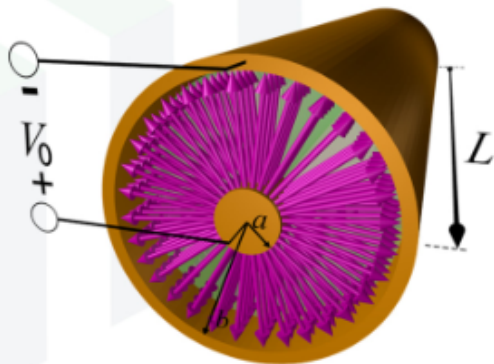


Παράδειγμα χωρητικότητας 2

Step 5 – Calculate V_0 .

Continued...

$$\begin{aligned}V_0 &= -\frac{Q}{2\pi\epsilon L} \left(\ln \rho \Big|_a^b \right) \\ &= -\frac{Q}{2\pi\epsilon L} (\ln b - \ln a) \\ &= -\frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln \left(\frac{b}{a} \right)\end{aligned}$$

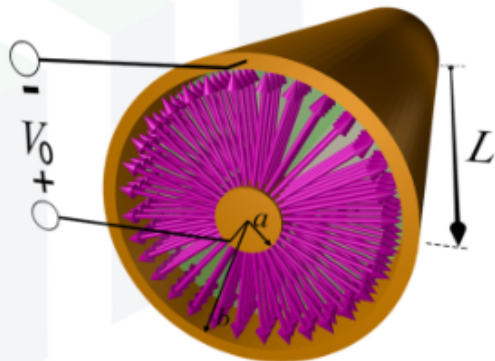


Παράδειγμα χωρητικότητας 2

Step 6 – Calculate capacitance C .

$$C = \frac{|Q|}{|V_0|}$$
$$= \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$



* Self Check – C is not a function of Q or V_0 .

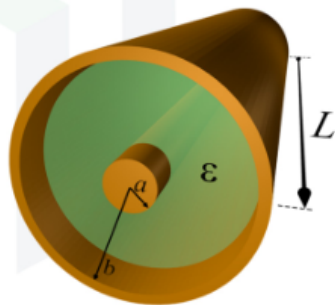
Παράδειγμα χωρητικότητας

Distributed Capacitance

Sometimes it is desired to specify the capacitance without knowledge of L .

This is done using the distributed capacitance, which is defined as capacitance per unit length.

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

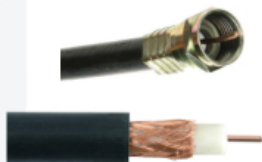


Παράδειγμα χωρητικότητας

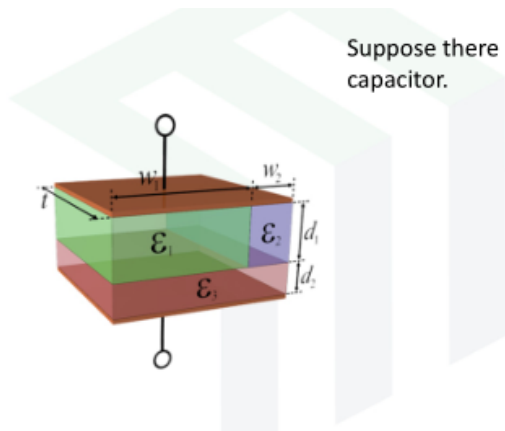
A standard RG-59 coax has

Inner conductor diameter: 0.81 mm (20 AWG)
Outer conductor diameter: 3.66 mm
Dielectric constant: 2.1
Specified capacitance: 86.9 pF/m

$$\begin{aligned}\frac{C}{L} &= \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(b/a)} \\ &= \frac{2\pi(8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m})(2.1)}{\ln(3.66 \text{ mm}/0.81 \text{ mm})} \\ &= 7.746 \times 10^{-11} \text{ F/m} = \boxed{77.46 \text{ pF/m}}\end{aligned}$$

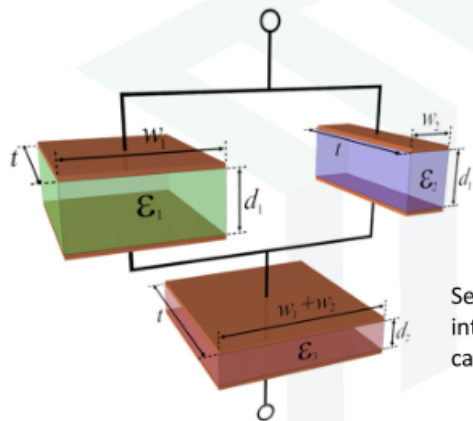


Παράδειγμα χωρητικότητας 3



Suppose there exists an inhomogeneous capacitor.

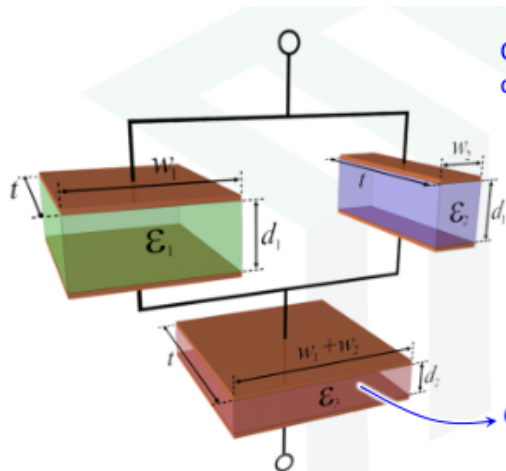
Παράδειγμα χωρητικότητας 3



Separate the inhomogeneous capacitor into a combination of homogeneous capacitors.

Παράδειγμα χωρητικότητας 3

Calculate each homogeneous capacitor independently.

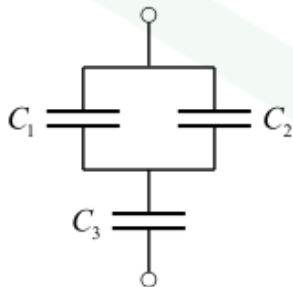


$$C_1 = \frac{\epsilon_1 S_1}{d_1} = \frac{\epsilon_1 t w_1}{d_1}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_2 S_2}{d_1} = \frac{\epsilon_2 t w_2}{d_1}$$

$$C_3 = \frac{\epsilon_3 S_3}{d_2} = \frac{\epsilon_3 t (w_1 + w_2)}{d_2}$$

Παράδειγμα χωρητικότητας 3



View the capacitor as a series/parallel combination of capacitors.

The equivalent capacitance is

$$C_{\text{eq}} = (C_1 + C_2) \parallel C_3 \\ = \left(\frac{\epsilon_1 t w_1}{d_1} + \frac{\epsilon_2 t w_2}{d_1} \right) \parallel \frac{\epsilon_3 t (w_1 + w_2)}{d_2}$$

$$C_{\text{eq}} = \frac{t \epsilon_3 (\epsilon_1 w_1 + \epsilon_2 w_2) (w_1 + w_2)}{d_2 (\epsilon_1 w_1 + \epsilon_2 w_2) + \epsilon_3 d_1 (w_1 + w_2)}$$

- 1 Παράδειγμα αντιστάτη
- 2 Παράδειγμα χωρητικότητας
- 3 Μαγνητοστατικά πεδία**
- 4 Νόμος Ampere
- 5 Μαγνητική επαγωγή
- 6 Περίληψη

Από εξισώσεις Maxwell

Maxwell's Equations

$$\nabla \times \vec{E} = -\cancel{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} - \cancel{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Constitutive Relations

$$\vec{D} = [\varepsilon] \vec{E}$$

$$\vec{B} = [\mu] \vec{H}$$

Electrostatic Equations

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\vec{D} = [\varepsilon] \vec{E}$$

Magnetostatic Equations

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = [\mu] \vec{H}$$

Εξισώσεις Maxwell για μαγνητοστατική

Νόμος Ampere

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Έχουμε μαγνητικό πεδίο μόνο αν έχουμε ρεύμα. Τα μαγνητικά πεδία κυκλοφορούν γύρω από ρεύματα.

Νόμος Gauss για μαγνητικά πεδία

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Δεν έχουμε απόκλιση. Δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα. Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές δεν έχουν αρχή ή τέλος αλλά υπάρχουν. Άρα εμφανίζονται μόνο σε βρόχους.

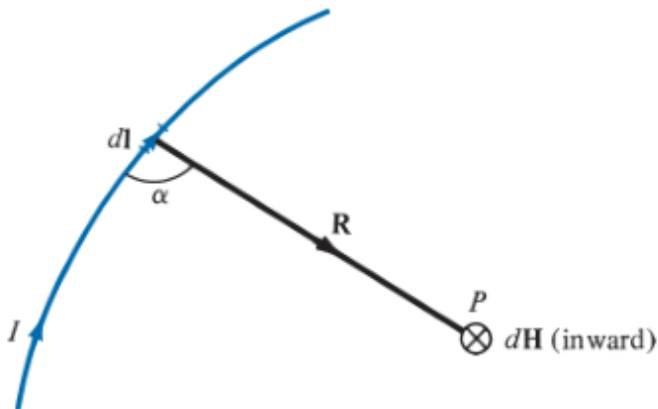
Καταστατικές εξισώσεις

$$\mathbf{B} = [\mu]\mathbf{H}$$

Το μαγνητικό πεδίο συνδέεται με την πυκνότητα μαγνητικής ροής μέσω της μαγνητικής διαπερατότητας. Το μαγνητικό πεδίο δεν βλέπει ηλεκτρική διαπερατότητα.

Νόμος Biot-Savart

Το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο dH σε σημείο P που παράγεται από στοιχειώδες ρεύμα $I d\ell$ είναι ανάλογο με το γινόμενο του $I d\ell$ με το ημίτονο της γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ του στοιχειώδους ρεύματος και της γραμμής που συνδέει το ρεύμα με το P και αντιστρόφως ανάλογο με το τετράγωνο της μεταξύ τους απόστασης.



Νόμος Biot-Savart (συνέχεια 1)

Το μέτρο:

$$dH \sim \frac{Id\ell \sin \alpha}{R^2}$$

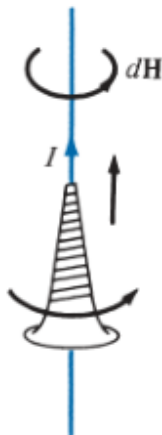
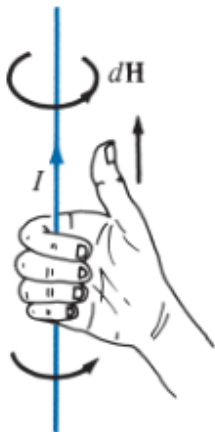
$$dH = \frac{Id\ell \sin \alpha}{4\pi R^2}$$

Και η πλήρης μορφή:

$$d\mathbf{H} = \frac{Id\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{Id\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

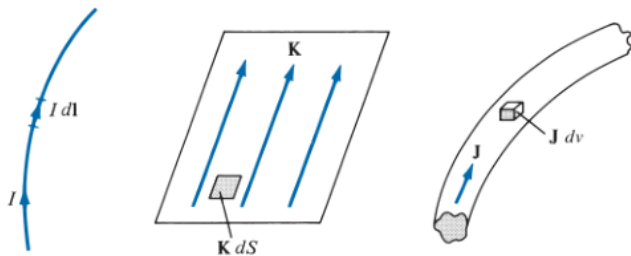
Νόμος Biot-Savart (συνέχεια 2)

Κανόνας δεξιού χεριού ή δεξιόστροφου κοχλίας



Νόμος Biot-Savart (συνέχεια 3)

Κατανομές ρεύματος: Γραμμική, επιφανειακή και χώρου



Νόμος Biot-Savart (συνέχεια 4)

Ολικό μαγνητικό πεδίο γραμμικού ρεύματος

$$\mathbf{H} = \int_L \frac{I d\ell \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

Ολικό μαγνητικό πεδίο επιφανειακού ρεύματος

$$\mathbf{H} = \int_S \frac{\mathbf{K} dS \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

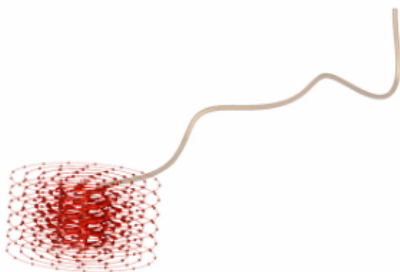
Ολικό μαγνητικό πεδίο ρεύματος χώρου

$$\mathbf{H} = \int_v \frac{\mathbf{J} dv \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

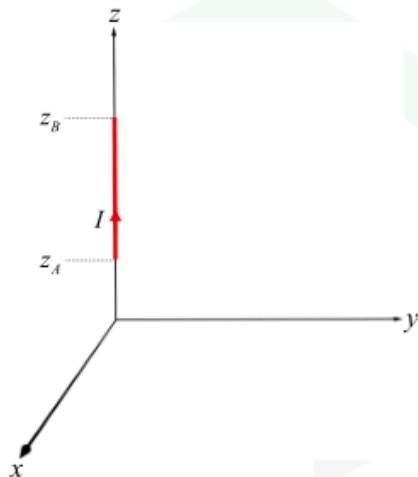
Total Magnetic Field

The total magnetic field \vec{H} due to a long wire is obtained by integrating the Biot-Savart law over the length of the wire.

$$\vec{H} = \int_L d\vec{H} = \int_L \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2}$$



Example #1 – Finite Length Wire



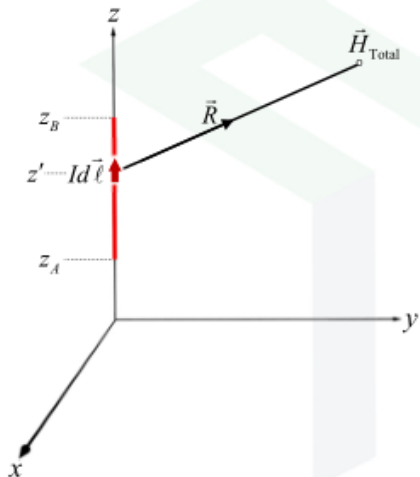
What is the magnetic field \vec{H}

The total magnetic field is obtained by integrating the Biot-Savart law.

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \int_L d\vec{H} \\ &= \int_{z_A}^{z_B} \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} \\ &= \int_{z_A}^{z_B} \frac{Id\vec{\ell} \times \vec{R}}{4\pi R^3}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια 1)

Example #1 – Finite Length Wire



What is the magnetic field \vec{H} ?

For this problem

$$d\vec{\ell} = dz\hat{a}_z \quad \vec{R} = \rho\hat{a}_\rho + (z - z')\hat{a}_z$$

Thus, our cross product becomes

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} \times \vec{R} &= (dz\hat{a}_z) \times [\rho\hat{a}_\rho + (z - z')\hat{a}_z] \\ &= \rho dz\hat{a}_\phi \end{aligned}$$

Putting this back into the integral gives

$$\vec{H} = \int_{z_A}^{z_B} \frac{I \rho dz \hat{a}_\phi}{4\pi R^3} = \frac{\rho I}{4\pi} \hat{a}_\phi \int_{z_A}^{z_B} \frac{dz}{R^3}$$

Example #1 – Finite Length Wire

What is the magnetic field \vec{H} ?

Instead of integrating over z , integrate over angle ϕ .

$$z_A \rightarrow \phi_1$$

$$z_B \rightarrow \phi_2$$

$$dz' \rightarrow ?$$

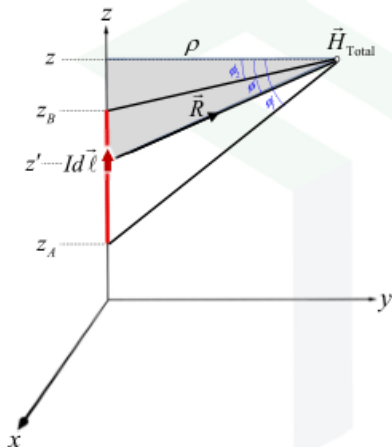
$$\vec{R}/|\vec{R}|^3 \rightarrow ?$$

From the figure, it can be seen that

$$\tan \phi = \frac{z - z'}{\rho} \rightarrow z' = z - \rho \tan \phi$$

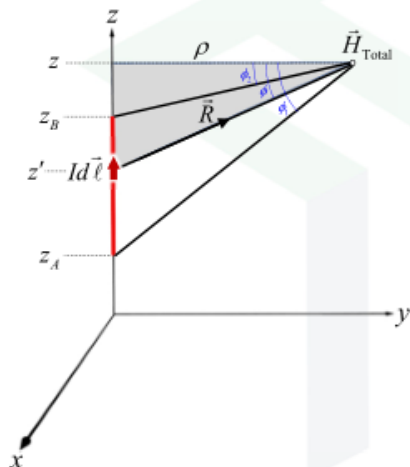
Differentiate this expression to get

$$dz' = -\rho \sec^2 \phi d\phi$$



Παράδειγμα 1 (συνέχεια 3)

Example #1 – Finite Length Wire



What is the magnetic field \vec{H} ?

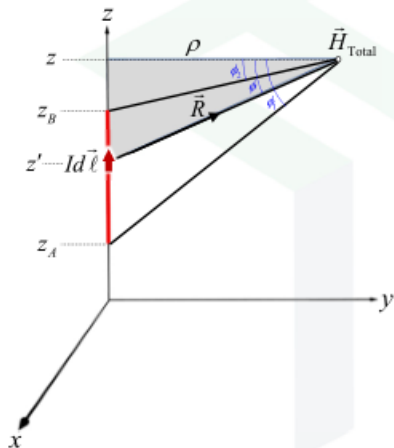
The vector \vec{R} is

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \rho \hat{a}_\rho + (z - z') \hat{a}_z \\ &= \rho \hat{a}_\rho + \rho \tan \phi \hat{a}_z \\ &= \frac{\rho}{\cos \phi} (\cos \phi \hat{a}_\rho + \sin \phi \hat{a}_z) \\ &= \rho \sec \phi \underbrace{(\cos \phi \hat{a}_\rho + \sin \phi \hat{a}_z)}_{\text{Magnitude is 1}}\end{aligned}$$

An expression can now be written for R^3 .

$$\begin{aligned}R^3 &= |\vec{R}|^3 \\ &= \left| \rho \sec \phi (\cos \phi \hat{a}_\rho + \sin \phi \hat{a}_z) \right|^3 \\ &= (\rho \sec \phi)^3\end{aligned}$$

Example #1 – Finite Length Wire



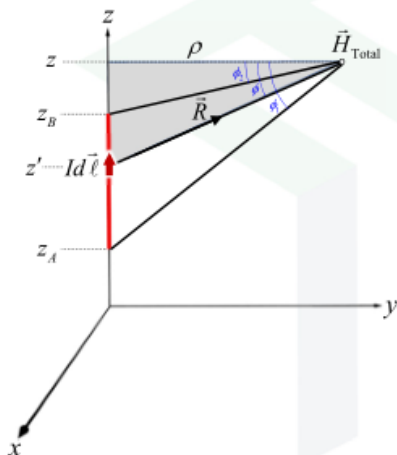
What is the magnetic field \vec{H} ?

The integral in terms of ϕ becomes

$$\begin{aligned}
 \vec{H} &= \frac{\rho I}{4\pi} \hat{a}_\rho \int_{z_A}^{z_B} \frac{dz}{(\rho \sec \phi)^3} \\
 &= \frac{\rho I}{4\pi} \hat{a}_\rho \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{(-\rho \sec^2 \phi d\phi)}{(\rho \sec \phi)^3} \\
 &= -\frac{I}{4\pi\rho} \hat{a}_\rho \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{\sec \phi} \\
 &= -\frac{I}{4\pi\rho} \hat{a}_\rho \int_{\phi_1}^{\phi_2} \cos \phi d\phi
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια 5)

Example #1 – Finite Length Wire



What is the magnetic field \vec{H} ?

The integral can now be evaluated as

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{I}{4\pi\rho} \hat{a}_\phi \int_{\phi_1}^{\phi_2} \cos\phi d\phi \\ &= -\frac{I}{4\pi\rho} \hat{a}_\phi (\sin\phi|_{\phi_1}^{\phi_2}) \\ &= -\frac{I}{4\pi\rho} \hat{a}_\phi (\sin\phi_2 - \sin\phi_1) \\ &= \frac{I}{4\pi\rho} (\sin\phi_1 - \sin\phi_2) \hat{a}_\phi\end{aligned}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi\rho} (\sin\phi_1 - \sin\phi_2) \hat{a}_\phi$$

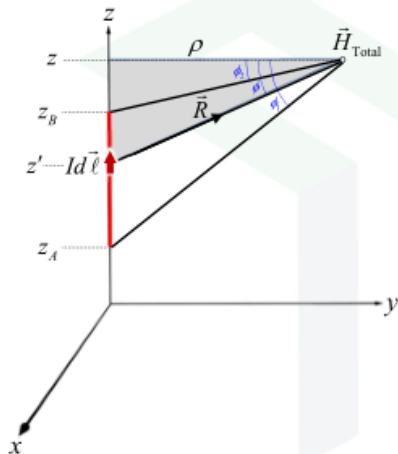
Παράδειγμα 1 (συνέχεια 6)

Example #1 – Finite Length Wire

Observations about the solution:

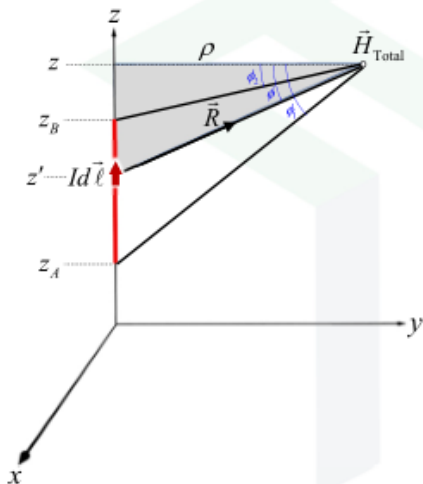
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi\rho} (\sin\phi_1 - \sin\phi_2) \hat{a}_\phi$$

1. This solution is applicable to any straight wire with uniform current.
2. Magnitude of \vec{H} decays as $1/\rho$.
3. Magnetic has only an \hat{a}_ϕ component. This means the magnetic field forms loops around the wire.



Παράδειγμα 1 (συνέχεια 7)

Example #2 – Infinite Length Wire



What is the magnetic field \vec{H} ?

For the infinite length wire,

$$\phi_1 = 90^\circ \quad \phi_2 = -90^\circ$$

The expression for \vec{H} reduces to

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{I}{4\pi\rho} (\sin\phi_1 - \sin\phi_2) \hat{a}_\phi \\ &= \frac{I}{4\pi\rho} [\sin(90^\circ) - \sin(-90^\circ)] \hat{a}_\phi \\ &= \frac{I}{4\pi\rho} [1 - (-1)] \hat{a}_\phi\end{aligned}$$

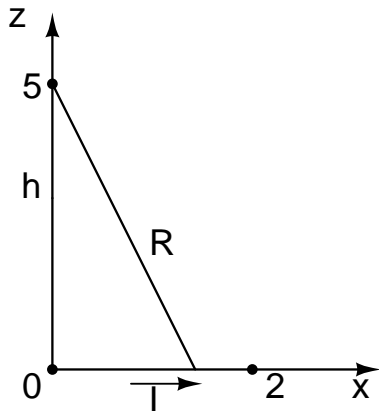
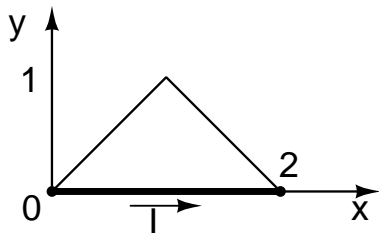
$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{a}_\phi$$

Μονάδα μαγνητικού πεδίου H

Η μονάδα του μαγνητικού πεδίου H είναι A/m

Παράδειγμα 1

Ο αγώγιμος τριγωνικός βρόχος στο σχήμα μεταφέρει ρεύμα 10 A. Βρείτε το \mathbf{H} στο $(0, 0, 5)$ που οφείλεται στην πλευρά που βρίσκεται στον άξονα x .



Παράδειγμα 1 (συνέχεια 1)

Από νόμο Biot-Savart

$$\mathbf{H} = \int_L \frac{I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

$$d\boldsymbol{\ell} = dx \hat{\mathbf{x}} \quad \mathbf{R} = h \hat{\mathbf{z}} - x \hat{\mathbf{x}} \quad d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{R} = dx \hat{\mathbf{x}} \times (h \hat{\mathbf{z}} - x \hat{\mathbf{x}}) = -h dx \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{-h dx \hat{\mathbf{y}}}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{Ih \hat{\mathbf{y}}}{4\pi} \int_0^L \frac{dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

Με την αντικατάσταση $x = h \tan \theta$ έχουμε

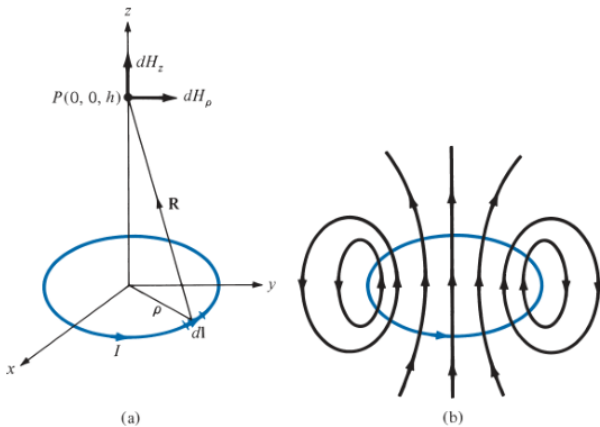
$$\int_0^L \frac{dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \dots = \frac{\sin \theta}{h^2} \Big|_0^{\theta_L} = \frac{\sin \theta_L}{h^2} = \frac{\sin(\tan^{-1}(L/h))}{h^2}$$

$$\mathbf{H} = -\frac{I}{4\pi h} \sin(\tan^{-1}(L/h)) \hat{\mathbf{y}} = -59.1 \hat{\mathbf{y}} \text{ mA/m}$$

όπου $h = 5$, $L = 2$, $I = 10$.

Παράδειγμα 2

Ο κυκλικός βρόχος $x^2 + y^2 = 9, z = 0$, στο σχήμα (a) διαρρέεται από συνεχές ρεύμα 10 A στην κατεύθυνση $\hat{\phi}$. Προσδιορίστε το \mathbf{H} στα σημεία $(0, 0, 4)$ και $(0, 0, -4)$.



Παράδειγμα 2 (συνέχεια 1)

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\ell \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

όπου $d\ell = \rho d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$, $\mathbf{R} = (0, 0, h) - (x, y, 0) = -\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + h \hat{\mathbf{z}}$ και

$$d\ell \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & \rho d\phi & 0 \\ -\rho & 0 & h \end{vmatrix} = \rho h d\phi \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho^2 d\phi \hat{\mathbf{z}}$$

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi(\rho^2 + h^2)^{3/2}} (\rho h d\phi \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho^2 d\phi \hat{\mathbf{z}}) = dH_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + dH_z \hat{\mathbf{z}}$$

Εδώ, λόγω συμμετρίας τα απέναντι στοιχειώδη ρεύματα θα δώσουν αντίθετες συνιστώσες dH_ρ οπότε $H_\rho = 0$. Εναλλακτικά, γράφοντας $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}$ και ολοκληρώνοντας για $0 \leq \phi \leq 2\pi$ δίνει πάλι μηδέν. Οπότε:

$$\mathbf{H} = \int dH_z \hat{\mathbf{z}} = \int_0^{2\pi} \frac{I \rho^2 d\phi \hat{\mathbf{z}}}{4\pi(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{I \rho^2 2\pi \hat{\mathbf{z}}}{4\pi(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{I \rho^2 \hat{\mathbf{z}}}{2(\rho^2 + h^2)^{3/2}}$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια 2)

Αντικατάσταση $I = 10$ A, $\rho = 3$, $h = 4$ δίνει

$$\mathbf{H}(0, 0, 4) = \frac{10 \cdot 3^2 \hat{\mathbf{z}}}{2(9 + 16)^{3/2}} = 0.36 \hat{\mathbf{z}} \text{ A/m}$$

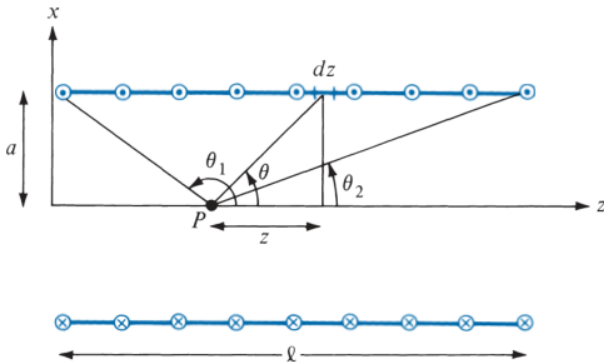
Ομοίως και για $h = -4$

$$\mathbf{H}(0, 0, -4) = \mathbf{H}(0, 0, 4) = 0.36 \hat{\mathbf{z}} \text{ A/m}$$

Η ροή του μαγνητικού πεδίου φαίνεται στο σχήμα (b).

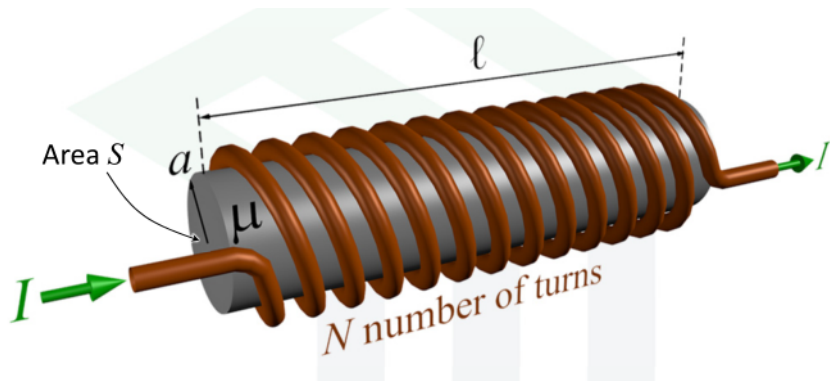
Παράδειγμα 3

Σωληνοειδές μήκους ℓ και ακτίνας a αποτελείται από N στροφές /σπείρες σύρματος που διαρρέονται από ρεύμα I . Να βρεθεί το \mathbf{H} σε σημείο P του άξονά του όπως φαίνεται στο σχήμα. Πως απλοποιείται η σχέση για $\ell \gg a$ στο κέντρο του σωληνοειδούς;



Σχήμα: Κάτοψη του σωληνοειδούς

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 1)



Σχήμα: Εικόνα του σωληνοειδούς

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 2)

Αξιοποιούμε το προηγούμενο παράδειγμα με κάθε σπείρα έναν κυκλικό βρόχο και

$$dH_z = \frac{Id\ell a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{Ia^2 ndz}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

όπου $n = N/\ell$ η πυκνότητα σπειρών με $d\ell = ndz$. Από το σχήμα (a) $\tan \theta = a/z$ και

$$dz = -a \csc^2 \theta d\theta = -\frac{(z^2 + a^2)^{3/2}}{a^2} \sin \theta d\theta$$

$$dH_z = -\frac{nI}{2} \sin \theta d\theta \Rightarrow H_z = -\frac{nI}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{nI}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

και

$$\mathbf{H} = \frac{nI}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \hat{\mathbf{z}} = \frac{NI}{2\ell} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \hat{\mathbf{z}}$$

Στο κέντρο του σωληνοειδούς

$$\cos \theta_2 = \frac{\ell/2}{(a^2 + \ell^2/4)^{1/2}} = -\cos \theta_1$$

και

$$\mathbf{H} = \frac{In\ell}{2(a^2 + \ell^2/4)^{1/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

Για $\ell \gg a$ ή $\theta_2 \approx 0^\circ$ και $\theta_1 \approx 180^\circ$,

$$\mathbf{H} = nI \hat{\mathbf{z}} = \frac{NI}{\ell} \hat{\mathbf{z}}$$

Άσκηση

Σωληνοειδές μήκους $\ell = 75$ cm και ακτίνας $a = 5$ cm αποτελείται από $N = 2000$ στροφές /σπείρες σύρματος που διαρρέονται από ρεύμα $I = 50$ mA. Να βρεθεί το \mathbf{H} στα σημεία $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 75$ cm), $(0, 0, 50$ cm).

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\ell} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \hat{\mathbf{z}}$$

Στο $(0, 0, 0)$, $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = \tan^{-1}(a/\ell) = 3.814^\circ$ και

$$\mathbf{H}(0, 0, 0) = 66.52 \hat{\mathbf{z}} \text{ A/m}$$

Στο $(0, 0, 75)$, $\theta_1 = 180 - \tan^{-1}(a/\ell) = 176.2^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$ και

$$\mathbf{H}(0, 0, 75) = 66.52 \hat{\mathbf{z}} \text{ A/m}$$

Στο $(0, 0, 50)$, $\theta_1 = 180 - \tan^{-1}(a/50) = 174.3^\circ$, $\theta_2 = \tan^{-1}(a/25) = 11.3^\circ$ και

$$\mathbf{H}(0, 0, 50) = 131.7 \hat{\mathbf{z}} \text{ A/m}$$

- 1 Παράδειγμα αντιστάτη
- 2 Παράδειγμα χωρητικότητας
- 3 Μαγνητοστατικά πεδία
- 4 Νόμος Ampere**
- 5 Μαγνητική επαγωγή
- 6 Περίληψη

Νόμος ρεύματος Ampere

Νόμος ρεύματος Ampere: Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του \mathbf{H} σε μια κλειστή καμπύλη ισούται με το ολικό ρεύμα I_{enc} που εσωκλείει η καμπύλη.

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I_{\text{enc}}$$

Είναι ανάλογος του νόμου Gauss και χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του \mathbf{H} για συμμετρικές κατανομές ρευμάτων.

Από το θεώρημα του Stokes

$$I_{\text{enc}} = \oint_L \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \quad \text{και} \quad I_{\text{enc}} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

έχουμε τη διαφορική μορφή

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

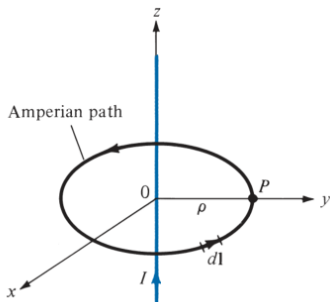
που ισχύει στην μαγνητοστατική (και είναι μια από τις εξισώσεις Maxwell).

Σημειώστε ότι εφόσον $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \neq 0$, το μαγνητικό πεδίο ΔΕΝ είναι συντηρητικό.

Walter, [walt08.mkv](#)

Ρευματοφόρος αγωγός απείρου μήκους

Έστω ρευματοφόρος αγωγός απείρου μήκους στον άξονα z . Ποιο είναι το \mathbf{H} στο σημείο P ;



Για διαδρομή Ampere (όρος ανάλογος με επιφάνεια Gauss) επιλέγουμε κύκλο με κέντρο τον άξονα του ρεύματος και κυλινδρικές συντεταγμένες. Επομένως

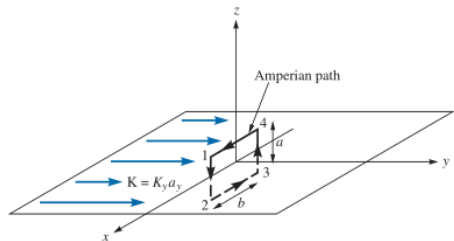
$$I = \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L H_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \rho d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} = H_\phi \rho \oint_L d\phi = H_\phi 2\pi\rho \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

όπως είδαμε και με το νόμο Biot-Savart στην προηγούμενη διάλεξη.

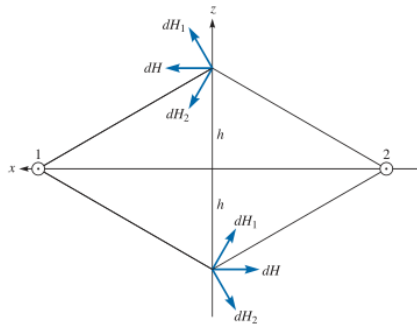
Ρευματοφόρα επιφάνεια απείρων διαστάσεων

Έστω αγώγιμο επίπεδο $z = 0$ με ομοιόμορφη πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{K} = K_y \hat{\mathbf{y}}$ A/m. Νόμος Ampere στη διαδρομή που φαίνεται στο σχ (a)

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I_{\text{enc}} = K_y b$$



(a)



(b)

Ρευματοφόρα επιφάνεια απείρων διαστάσεων (συνέχεια 1)

Για να σχηματίσουμε μια ιδέα πως είναι το πεδίο, θεωρούμε πως όλο το επίπεδο αποτελείται από παράλληλα ρευματοφόρα νήματα. Στο σχ (b) θεωρούμε ένα ζεύγος. Με τον κανόνα δεξιού χεριού και τη συμμετρία, είναι φανερό ότι

$$\mathbf{H} = \begin{cases} H_0 \hat{\mathbf{x}} & z > 0 \\ -H_0 \hat{\mathbf{x}} & z < 0 \end{cases}$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \left(\int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 \right) \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0(-a) + (-H_0)(-b) + 0(a) + H_0(b) = 2H_0b$$

Άρα

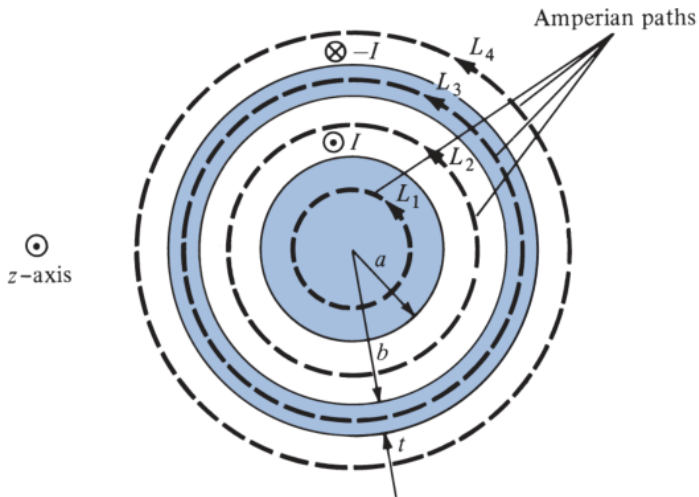
$$\mathbf{H} = \begin{cases} K_y/2 \hat{\mathbf{x}} & z > 0 \\ -K_y/2 \hat{\mathbf{x}} & z < 0 \end{cases}$$

Στη γενική περίπτωση έχουμε

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα από το επίπεδο στο σημείο πεδίου.

Ομοαξονικό καλώδιο απείρου μήκους



Ομοαξονικό καλώδιο απείρου μήκους (συνέχεια 1)

Έστω ομοαξονικό καλώδιο απείρου μήκους που αποτελείται από δυο ομοαξονικούς κυλίνδρους με κοινό άξονα τον z . Στο σχήμα φαίνεται η διατομή. Ο εσωτερικός αγωγός έχει ακτίνα a και μεταφέρει ρεύμα I . Ο εξωτερικός αγωγός έχει εσωτερική ακτίνα b , πάχος t και μεταφέρει ρεύμα επιστροφής $-I$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε το πεδίο παντού στις 4 δυνατές περιοχές: $0 \leq \rho \leq a$, $a \leq \rho \leq b$, $b \leq \rho \leq b + t$ και $\rho \geq b + t$ με την προϋπόθεση ότι το ρεύμα κατανέμεται ομοιόμορφα.

Για την περιοχή $0 \leq \rho \leq a$

$$\oint_{L_1} \mathbf{H} \cdot d\ell = I_{\text{enc}} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{J} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{\mathbf{z}} \quad d\mathbf{S} = \rho d\phi d\rho \hat{\mathbf{z}}$$

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{I}{\pi a^2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho} \rho d\phi d\rho = \frac{I}{\pi a^2} \pi \rho^2 = \frac{I \rho^2}{a^2}$$

$$\oint_{L_1} \mathbf{H} \cdot d\ell = H_\phi \int_{L_1} d\ell = H_\phi 2\pi \rho = \frac{I \rho^2}{a^2} \Rightarrow H_\phi = \frac{I \rho}{2\pi a^2}$$

Για την περιοχή $a \leq \rho \leq b$

$$\oint_{L_2} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I_{\text{enc}} = I$$

$$H_{\phi} 2\pi\rho = I \Rightarrow$$

$$H_{\phi} = \frac{I}{2\pi\rho}$$

Ομοαξονικό καλώδιο απείρου μήκους (συνέχεια 3)

Για την περιοχή $b \leq \rho \leq b + t$

$$\oint_{L_3} \mathbf{H} \cdot d\ell = H_\phi 2\pi\rho = I_{\text{enc}} = I + \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

όπου \mathbf{J} η πυκνότητα ρεύματος του εξωτερικού αγωγού κατά μήκος του $-\hat{\mathbf{z}}$

$$\mathbf{J} = -\frac{I}{\pi[(b+t)^2 - b^2]} \hat{\mathbf{z}}$$

$$I_{\text{enc}} = I - \frac{I}{\pi[(b+t)^2 - b^2]} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=b}^{\rho} \rho d\phi d\rho = I \left[1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt} \right]$$

και

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \left[1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt} \right]$$

Ομοαξονικό καλώδιο απείρου μήκους (συνέχεια 4)

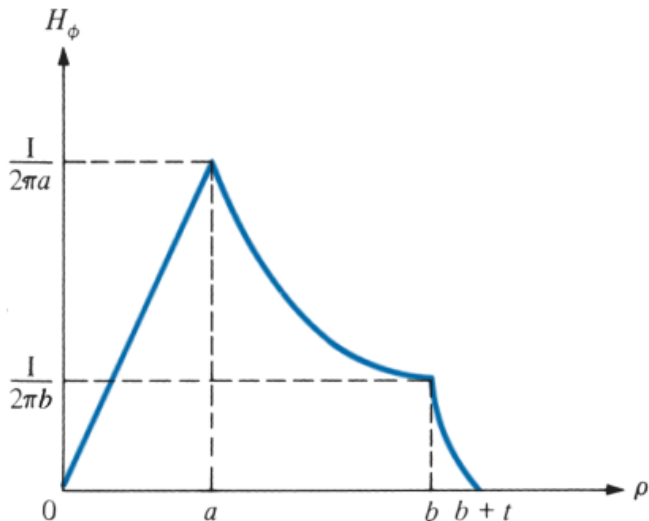
Για την περιοχή $\rho \geq b + t$

$$\oint_{L_4} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I - I = 0 \Rightarrow H_\phi = 0$$

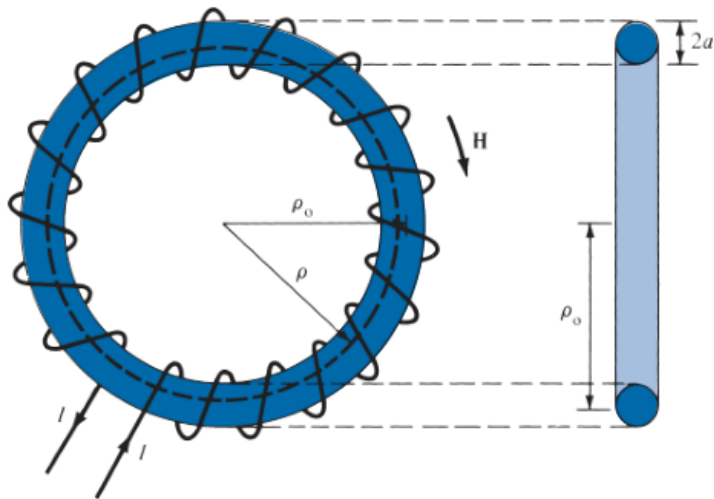
Συνολικά

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{I\rho}{2\pi a^2} \hat{\boldsymbol{\phi}} & 0 \leq \rho \leq a \\ \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\boldsymbol{\phi}} & a \leq \rho \leq b \\ \frac{I}{2\pi\rho} \left[1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} & b \leq \rho \leq b + t \\ 0 & \rho \geq b + t \end{cases}$$

Ομοαξονικό καλώδιο απείρου μήκους (συνέχεια 5)



Τοροειδές (toroid)



Σχήμα: Τοροειδές με κυκλική διατομή

Τοροειδές (συνέχεια 1)

Για την περιοχή $\rho_0 - a < \rho < \rho_0 + a$ έχουμε

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\ell = I_{\text{enc}} \Rightarrow H \cdot 2\pi\rho = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{2\pi\rho}$$

Για περίμετρο τοροειδούς $\ell \approx 2\pi\rho_0$, όπου ρ_0 η μέση ακτίνα, έχουμε

$$H \approx \frac{NI}{\ell}$$

ίδια σχέση όπως για το μακρύ σωληνοειδές.

Στις άλλες περιοχές έχουμε $H = 0$.

Άσκηση

Τοροειδές με κυκλική διατομή και κέντρο την αρχή των αξόνων έχει άξονα τον άξονα z , $N = 1000$ σπείρες, $\rho_0 = 10$ cm, $a = 1$ cm και μεταφέρει ρεύμα $I = 100$ mA. Υπολογίστε το $|\mathbf{H}|$ στα σημεία α) (3 cm, -4 cm, 0) και β) (6 cm, 9 cm, 0).

Το πρώτο σημείο βρίσκεται στην εσωτερική περιοχή του τοροειδούς και η καμπύλη Ampere εσωκλείει μηδενικό ρεύμα. Άρα $H = 0$.

Για το δεύτερο σημείο $\rho = \sqrt{6^2 + 9^2} = 10.817$ cm η απόσταση από το κέντρο, άρα μέσα στο δακτύλιο του τοροειδούς και

$$H = \frac{NI}{2\pi\rho} = 147.14 \text{ A/m}$$

- 1 Παράδειγμα αντιστάτη
- 2 Παράδειγμα χωρητικότητας
- 3 Μαγνητοστατικά πεδία
- 4 Νόμος Ampere
- 5 Μαγνητική επαγωγή**
- 6 Περίληψη

Μαγνητική επαγωγή - Πυκνότητα μαγνητικής ροής

Η πυκνότητα μαγνητικής ροής \mathbf{B} είναι παρόμοια με την πυκνότητα ηλεκτρικής ροής \mathbf{D} . Όπως έχουμε $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ στο κενό ή αέρα, έτσι έχουμε και

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

όπου μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού με τιμή $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$.

Η μαγνητική ροή μέσα από μια επιφάνεια S είναι

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

όπου Φ η μαγνητική ροή σε Weber (Wb) και η πυκνότητα μαγνητικής ροής σε Wb/m² ή Tesla (T).

- Οι γραμμές μαγνητικής ροής είναι οι γραμμές όπου το \mathbf{B} είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο τους.
- Είναι αυτές όπου προσανατολίζονται οι βελόνες μιας μαγνητικής πυξίδας.
- Κάθε γραμμή είναι κλειστή χωρίς αρχή και τέλος και δεν μπλέκονται μεταξύ τους.
- Εφόσον δεν υπάρχουν μεμονωμένα μαγνητικά φορτία (μονόπολα) έχουμε πάντα

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

και από το θεώρημα απόκλισης

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{B} dv = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

μια από τις εξισώσεις Maxwell

Μαγνητικό βαθμωτό δυναμικό

Δυο ταυτότητες που ισχύουν για οποιοδήποτε βαθμωτό πεδίο V και διανυσματικό πεδίο \mathbf{A} είναι:

$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

Επομένως από τη μαγνητοστατική εξίσωση Maxwell όπου $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, εάν $\mathbf{J} = 0$ έχουμε

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times (-\nabla V_m) = 0$$

που σημαίνει μαγνητικό βαθμωτό δυναμικό V_m με

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \quad \text{για περιοχή όπου} \quad \mathbf{J} = 0$$

σε αναλογία με το βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό $\mathbf{E} = -\nabla V$. Που σημαίνει και εδώ ότι έχουμε αντίστοιχη εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 V_m = 0 \quad \text{για} \quad \mathbf{J} = 0$$

Μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό

Από την εξίσωση Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ και την δεύτερη ταυτότητα μπορούμε να ορίσουμε ένα μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} σε Wb/m ως

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Σε αναλογία με το ηλεκτρικό δυναμικό

$$V = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R}$$

μπορούμε και εδώ να ορίσουμε

$$\mathbf{A} = \int_L \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi R} \quad \mathbf{A} = \int_S \frac{\mu_0 \mathbf{K} dS}{4\pi R} \quad \mathbf{A} = \int_v \frac{\mu_0 \mathbf{J} dv}{4\pi R}$$

για γραμμική, επιφανειακή και χωρική κατανομή ρεύματος αντίστοιχα.

Από τον ορισμό της μαγνητικής ροής και το θεώρημα Stokes

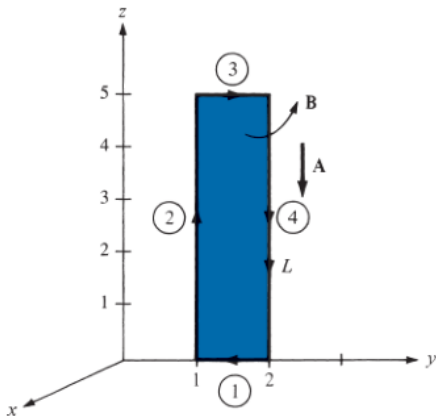
$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού μαγνητικής ροής.

Το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} παρέχει ένα ισχυρό εργαλείο επίλυσης ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων, ιδίως στην περιοχή με ακτινοβολίες και κεραίες.

Άσκηση

Δοθέντος του μαγνητικού δυναμικού $\mathbf{A} = -\rho^2/4 \hat{\mathbf{z}}$ Wb/m υπολογίστε την μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια $\phi = \pi/2$, $1 \leq \rho \leq 2$ m, $0 \leq z \leq 5$ m.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Μέθοδος 1

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \hat{\phi} = \frac{\rho}{2} \hat{\phi} \quad d\mathbf{S} = d\rho dz \hat{\phi}$$

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int_{z=0}^5 \int_{\rho=1}^2 \rho d\rho dz = \frac{5}{4} \rho^2 \Big|_1^2 = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ Wb}$$

Μέθοδος 2

$$\Phi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4$$

$$\Phi_1 = \Phi_3 = 0 \quad \text{εφόσον } \mathbf{A} \text{ έχει μόνο } z \text{ συνιστώσα}$$

$$\Phi = \Phi_2 + \Phi_4 = -\frac{1}{4} \int_0^5 dz - \frac{4}{4} \int_5^0 dz = -\frac{5}{4} + 5 = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ Wb}$$

Προσοχή εδώ στην κατεύθυνση ολοκλήρωσης.

- 1 Παράδειγμα αντιστάτη
- 2 Παράδειγμα χωρητικότητας
- 3 Μαγνητοστατικά πεδία
- 4 Νόμος Ampere
- 5 Μαγνητική επαγωγή
- 6 Περίληψη**

- Νόμος Biot-Savart αντίστοιχος του Coulomb όπου το μαγνητικό πεδίο $d\mathbf{H}$ στο \mathbf{r} που οφείλεται στο στοιχειώδες ρεύμα $I d\boldsymbol{\ell}$ στο \mathbf{r}' είναι

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad \text{σε A/m}$$

όπου $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ και $R = |\mathbf{R}|$. Για επιφανειακά ρεύματα ή ρεύματα χώρου αντικαθιστούμε το $I d\boldsymbol{\ell}$ με $\mathbf{K} dS$ ή $\mathbf{J} dv$ αντίστοιχα.

- Νόμος Ampere παρόμοιος με νόμο Gauss που ορίζει την κυκλοφορία του \mathbf{H} σε έναν κλειστό βρόγχο να ισούται με το ρεύμα που εσωκλείεται από το βρόγχο.

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I_{\text{enc}} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{ή} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

η τρίτη εξίσωση Maxwell. Για συμμετρικά ρεύματα όπου μπορούμε να βρούμε μια διαδρομή Ampere για την οποία $\mathbf{H} = H_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$ είναι σταθερή, το μαγνητικό πεδίο βρίσκεται εύκολα από

$$H_\phi \oint_L d\boldsymbol{\ell} = I_{\text{enc}} \Rightarrow H_\phi = \frac{I_{\text{enc}}}{\ell}$$

- Η μαγνητική ροή μέσω μιας επιφάνειας S είναι

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{σε Wb}$$

όπου \mathbf{B} η πυκνότητα μαγνητικής ροής σε Wb/m^2 . Στο κενό

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

όπου $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ η μαγνητική διαπερατότητα του κενού.

- Εφόσον δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα η ολική μαγνητική ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν.

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{ή} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{η τέταρτη εξίσωση Maxwell}$$

Περίληψη (συνέχεια 2)

- Οι εξισώσεις Maxwell για στατικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία είναι

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

- Το μαγνητικό βαθμωτό δυναμικό ορίζεται σαν

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \quad \text{για} \quad \mathbf{J} = 0$$

και το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό σαν

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{για} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \text{ (Coulomb gauge)}$$

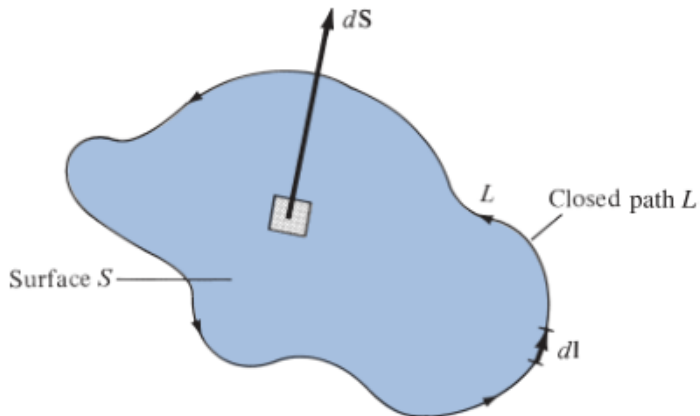
η τελευταία σχέση από $\nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

Με αυτόν τον ορισμό του \mathbf{A} η μαγνητική ροή μέσω μιας επιφάνειας S είναι

$$\Phi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

όπου L είναι μια κλειστή διαδρομή που ορίζει την επιφάνεια S .

Περίληψη (συνέχεια 3)



Σχήμα: Walter Lec15, 3:50-7:30

- Το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό στο \mathbf{r} που οφείλεται στο στοιχειώδες ρεύμα $I d\ell$ στο \mathbf{r}' είναι

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi R} \quad \text{όπου} \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

- Υπάρχουν ομοιότητες μεταξύ ηλεκτροστατικών και μαγνητοστατικών πεδίων όπως φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

Περίληψη (συνέχεια 5)

Term	Electric	Magnetic
Basic laws	$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{a}_R$	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_o I d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$
	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{enc}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{enc}$
Force law	$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$	$\mathbf{F} = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$
Source element	dQ	$dQ\mathbf{u} = Id\mathbf{l}$
Field intensity	$\mathbf{E} = \frac{V}{\ell} \text{ (V/m)}$	$\mathbf{H} = \frac{I}{\ell} \text{ (A/m)}$
Flux density	$\mathbf{D} = \frac{\psi}{S} \text{ (C/m}^2\text{)}$	$\mathbf{B} = \frac{\psi}{S} \text{ (Wb/m}^2\text{)}$
Relationship between fields	$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$
Potentials	$\mathbf{E} = -\nabla V$	$\mathbf{H} = -\nabla V_m \text{ (J = 0)}$
	$V = \int_L \frac{\rho_L d\ell}{4\pi\epsilon R}$	$\mathbf{A} = \int_L \frac{\mu I d\ell}{4\pi R}$
Flux	$\psi = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$	$\psi = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
	$\psi = Q = CV$	$\psi = LI$
	$I = C \frac{dV}{dt}$	$V = L \frac{dI}{dt}$
Energy density	$w_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$	$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$
Poisson's equation	$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$	$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}$