

Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 06

A. Δροσόπουλος

15-11-2021

- 1 Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες
- 2 Περίληψη Ηλεκτροστατικά προβλήματα
- 3 Ασκήσεις

1 Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες

2 Περίληψη Ηλεκτροστατικά προβλήματα

3 Ασκήσεις

Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες

Ο προσδιορισμός του ηλεκτρικού πεδίου στα προηγούμενα γινόταν είτε με το νόμο Coulomb είτε με το νόμο Gauss εφόσον ήταν γνωστή η κατανομή του φορτίου. Εναλλακτικά, μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και η σχέση $\mathbf{E} = -\nabla V$ εάν το δυναμικό πεδίο ήταν γνωστό στην περιοχή ενδιαφέροντος. Στην πράξη όμως και η κατανομή φορτίου και το δυναμικό πεδίο είναι άγνωστα.

Αυτό που συνήθως γνωρίζουμε είναι απλώς φορτίο και δυναμικό σε κάποια σύνορα, διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ υλικών και θέλουμε \mathbf{E} και V για ολόκληρη την περιοχή. Σε αυτά τα προβλήματα χρησιμοποιούμε εξισώσεις Laplace ή Poisson ή μέθοδο ειδώλων ([method of images](#)) και τα προβλήματα ονομάζονται προβλήματα οριακών συνθηκών ([boundary value problems](#)).

Τα παραπάνω μαθηματικά εργαλεία μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε μεταξύ άλλων στην εύρεση αντίστασης και χωρητικότητας για διάφορα ηλεκτρικά αντικείμενα / στοιχεία.

Εξισώσεις Poisson και Laplace

Για γραμμικά, ισότροπα υλικά ισχύει ο νόμος Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho_v$$

και για ηλεκτροστατικά πεδία

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις, για ανομοιογενή υλικά:

$$\nabla \cdot (-\epsilon \nabla V) = \rho_v \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho_v$$

ενώ για ομογενή:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Οι παραπάνω δυο εξισώσεις αποτελούν την εξίσωση Poisson. Στην ειδική περίπτωση όπου $\rho_v = 0$ (περιοχή χωρίς ελεύθερα φορτία) έχουμε

$$\nabla^2 V = 0$$

την εξίσωση Laplace.

Εξισώσεις Poisson και Laplace (συνέχεια 1)

Εξίσωση Laplace στα τρία συστήματα συντεταγμένων

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Χρησιμοποιείται και σε άλλα πεδία.

Θεώρημα μοναδικότητας (uniqueness theorem)

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων και το ερώτημα γεννάται αν δίνουν διαφορετικές λύσεις. Ή αλλιώς, εάν έχουμε μια λύση της εξίσωσης Laplace για συγκεκριμένες οριακές συνθήκες, υπάρχει κάποια άλλη; Διαφορετική; Η λύση που έχουμε είναι μοναδική; Απάντηση: Ναι. Η απόδειξη με εις άτοπο απαγωγή.

Έστω δυο λύσεις V_1 , V_2 της εξίσωσης Laplace που ικανοποιούν τις ίδιες οριακές συνθήκες. Άρα:

$$\nabla^2 V_1 = 0, \quad \nabla^2 V_2 = 0, \quad V_1 = V_2 \text{ στο σύνορο}$$

Για τη διαφορά τους $V_d = V_1 - V_2$ έχουμε:

$$\nabla^2 V_d = \nabla^2 V_2 - \nabla^2 V_1 = 0, \quad V_d = 0 \text{ στο σύνορο}$$

Έστω $\mathbf{A} = V_d \nabla V_d$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (V_d \nabla V_d) = V_d \nabla^2 V_d + \nabla V_d \cdot \nabla V_d$$

και τη σχέση $\nabla^2 V_d = 0$ έχουμε:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla V_d \cdot \nabla V_d$$

Θεώρημα μοναδικότητας (συνέχεια 1)

και με το θεώρημα απόκλισης:

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

όπου S η επιφάνεια που περικλείει τον όγκο v και αποτελεί το σύνορο/όριο στο πρόβλημά μας, έχουμε:

$$\int_v \nabla V_d \cdot \nabla V_d \, dv = \oint_S V_d \nabla V_d \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \int_v |\nabla V_d|^2 \, dv = 0$$

που σημαίνει $|\nabla V_d| = 0$ παντού στο χώρο v και άρα V_d σταθερό παντού στο χώρο v συμπεριλαμβανομένου του συνόρου. Και επειδή $V_1 = V_2$ στο σύνορο, είναι ίσα και παντού στο χώρο v . Τελικά η λύση είναι μία και μοναδική.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται η μοναδικότητα λύσης και για την εξίσωση Poisson.

Αναγκαία στοιχεία για λύση προβλήματος οριακών συνθηκών

- Η κατάλληλη διαφορική εξίσωση (Laplace ή Poisson).
- Οι συγκεκριμένες οριακές συνθήκες.
- Η περιοχή λύσης.

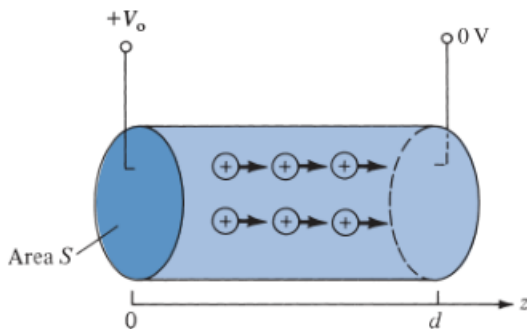
Αν λείπει κάτι από τα παραπάνω δεν μπορούμε να έχουμε πλήρη λύση.

Η γενική διαδικασία για επίλυση προβλήματος οριακών συνθηκών είναι:

- 1 Επίλυση εξίσωσης Laplace ($\rho_v = 0$) ή Poisson ($\rho_v \neq 0$) είτε με απευθείας ολοκλήρωση αν η V είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής είτε με χωρισμό μεταβλητών αν η V είναι συνάρτηση περισσοτέρων της μιας μεταβλητής. Η λύση αυτή είναι γενική, με κάποιες άγνωστες σταθερές ολοκλήρωσης.
- 2 Από τις οριακές συνθήκες προσδιορίζονται αυτές οι σταθερές και η λύση γίνεται μοναδική.
- 3 Έχοντας το V , βρίσκουμε $\mathbf{E} = -\nabla V$, $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$.
- 4 Μπορούμε να συνεχίσουμε στην εύρεση του φορτίου Q ενός αγωγού με $Q = \int_S \rho_S dS$, όπου $\rho_S = D_n$ η κάθετη συνιστώσα του \mathbf{D} στον αγωγό. Η χωρητικότητα ενός ζεύγους αγωγών είναι τότε $C = Q/V$. Μπορούμε επίσης να βρούμε την αντίσταση $R = V/I$ όπου $I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$.

Η ηλεκτροδυναμική άντληση (Electrohydrodynamic pumping, EHD pumping) είναι μέθοδος μη μηχανικής άντλησης όπου διηλεκτρικό υγρό σε έντονο ηλεκτρικό πεδίο αλληλεπιδρά με φορτισμένα σωματίδια και κινείται. Η ροή του υγρού μπορεί να απάγει θερμότητα από στοιχεία που λειτουργούν σε συνθήκες υψηλής ισχύος και να επιτυγχάνει ψύξη.

Εφαρμογή 1 (συνέχεια 1)



Έστω το παραπάνω μοντέλο EHD αντλίας. Η περιοχή μεταξύ των ηλεκτροδίων περιέχει μια ομοιόμορφη κατανομή φορτίου ρ_0 που παράγεται στο αριστερό ηλεκτρόδιο και συλλέγεται στο δεξί. Υπολογίστε την πίεση της αντλίας εάν $\rho_0 = 25 \text{ mC/m}^3$ και $V_0 = 22 \text{ kV}$.

Εφαρμογή 1 (συνέχεια 1)

Εφόσον $\rho_v \neq 0$ χρησιμοποιούμε εξίσωση Poisson με $\rho_v = \rho_0$:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_0}{\epsilon}$$

Η συμμετρία του προβλήματος και οι οριακές συνθήκες $V(z=0) = V_0$ και $V(z=d) = 0$ δείχνουν ότι η εξάρτησή μας είναι μόνο στην συντεταγμένη z . Οπότε

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon} \Rightarrow \dots \Rightarrow V = -\frac{\rho_0 z^2}{2\epsilon} + Az + B$$

όπου A και B σταθερές ολοκλήρωσης. Εφαρμογή οριακών συνθηκών δίνει:

$$\text{για } z = 0, V = V_0 \quad V_0 = B$$

$$\text{για } z = d, V = 0 \quad 0 = -\frac{\rho_0 d^2}{2\epsilon} + Ad + V_0 \Rightarrow A = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d}$$

$$\text{και } V = -\frac{\rho_0 z^2}{2\epsilon} + \left(\frac{\rho_0 d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d} \right) z + V_0$$

Εφαρμογή 1 (συνέχεια 2)

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz} \hat{\mathbf{z}} = \left(\frac{\rho_0 z}{\epsilon} - \frac{\rho_0 d}{2\epsilon} + \frac{V_0}{d} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

και η δύναμη:

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{E} dq = \int_v \rho_0 \mathbf{E} dv = \rho_0 \int dS \int_{z=0}^d \mathbf{E} dz = \rho_0 S \left[\frac{V_0 z}{d} + \frac{\rho_0}{2\epsilon} (z^2 - zd) \right] \Bigg|_0^d \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{F} = \rho_0 S V_0 \hat{\mathbf{z}}$$

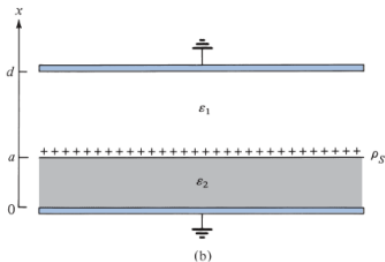
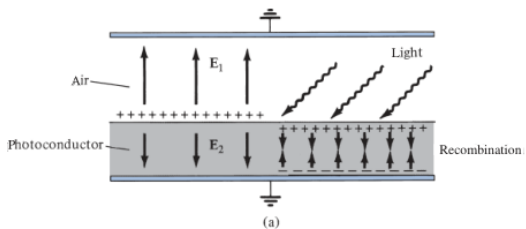
Η πίεση είναι η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας:

$$P = \frac{F}{S} = \rho_0 V_0 = 25 \times 10^{-3} \times 22 \times 10^3 = 550 \text{ N/m}^2$$

Σε ατμόσφαιρες, είναι 0.00543 atm.

Το κοινό, ξηρογραφικό, φωτοτυπικό μηχάνημα είναι ηλεκτροστατική εφαρμογή. Η φωτοαγώγιμος επιφάνεια αρχικά φορτίζεται ομοιόμορφα. Η σελίδα που είναι για φωτοτυπία φωτίζεται κατάλληλα και το φως εστιάζεται στο επάνω μέρος της φωτοαγώγιμης επιφάνειας. Τα φορτία από το κάτω μέρος συνδυάζονται με αυτά στο επάνω για εξουδετέρωση. Η εικόνα της φωτοτυπίας σχηματίζεται στο λεπτό στρώμα φορτισμένου γραφίτη που απλώνεται στη φωτοαγώγιμη επιφάνεια. Το ηλεκτρικό πεδίο προσελκύει το φορτισμένο γραφίτη στο χαρτί, αυτό θερμαίνεται και λειώνει εκεί σχηματίζοντας τη φωτοτυπία. Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο στις δυο επιφάνειες του φωτοαγωγού;

Εφαρμογή 2 (συνέχεια 1)



Εφαρμογή 2 (συνέχεια 2)

Το ολικό φορτίο είναι μηδέν άρα χρησιμοποιούμε την εξίσωση Laplace. Το δυναμικό επίσης εξαρτάται μόνο από το x και έχουμε:

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

Με διπλή ολοκλήρωση: $V = Ax + B$. Ξεχωρίζουμε τις δυο περιοχές πάνω και κάτω από την $x = a$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} V_1 &= A_1 x + B_1, & x > a \\ V_2 &= A_2 x + B_2, & x < a \end{aligned}$$

Οι οριακές συνθήκες στα γειωμένα ηλεκτρόδια είναι:

$$\begin{aligned} V_1(x = d) &= 0 \\ V_2(x = 0) &= 0 \end{aligned}$$

Στη φωτοαγώγιμη επιφάνεια:

$$\begin{aligned} V_1(x = a) &= V_2(x = a) \\ D_{1n} - D_{2n} &= \rho_S \end{aligned}$$

Εφαρμογή 2 (συνέχεια 3)

Επομένως:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = A_1 d + B_1 \\ 0 = 0 + B_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B_1 = -A_1 d \\ B_2 = 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 a + B_1 = A_2 a \\ D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_1(a-d) - A_2 a = 0 \\ -\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2 = \rho_S \end{array}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = -\epsilon \nabla V$ με

$$\rho_S = D_{1n} - D_{2n} = \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = -\epsilon_1 \frac{dV_1}{dx} + \epsilon_2 \frac{dV_2}{dx} = -\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2$$

Λύνοντας ως προς A_1, A_2 έχουμε

$$A_1 = \frac{a \rho_S}{(a-d)\epsilon_2 - a\epsilon_1} \quad A_2 = \frac{(a-d)\rho_S}{(a-d)\epsilon_2 - a\epsilon_1}$$

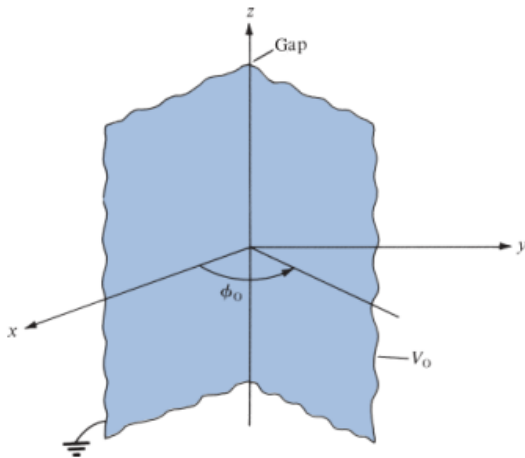
και

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{dV_1}{dx} \hat{\mathbf{x}} = -A_1 \hat{\mathbf{x}} = \frac{\rho_S}{\epsilon_1 \left[1 + \frac{\epsilon_2 d}{\epsilon_1 a} - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right]} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{dV_2}{dx} \hat{\mathbf{x}} = -A_2 \hat{\mathbf{x}} = \frac{\rho_S \left(1 - \frac{d}{a} \right)}{\epsilon_1 \left[1 + \frac{\epsilon_2 d}{\epsilon_1 a} - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right]} \hat{\mathbf{x}}$$

Παράδειγμα 1

Αγώγιμα ημι-επίπεδα $\phi = 0$ και $\phi = \pi/6$ διαχωρίζονται με ένα πολύ λεπτό μονωτικό διάκενο (άξονας z). Εάν $V(\phi = 0) = 0$ και $V(\phi = \pi/6) = 100$ V υπολογίστε V και \mathbf{E} στην περιοχή μεταξύ των επιπέδων.



Παράδειγμα 1 (συνέχεια 1)

Εφόσον το V εξαρτάται μόνο από την ϕ χρησιμοποιούμε εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0$$

εφόσον $\rho = 0$ εξαιρείται λόγω του διακένου. Ολοκλήρωση δυο φορές δίνει:

$$V = A\phi + B$$

Με οριακές συνθήκες

$$\text{για } \phi = 0, V = 0, \quad 0 = 0 + B \Rightarrow B = 0$$

$$\text{για } \phi = \phi_0, V = V_0, \quad V_0 = A\phi_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{\phi_0}$$

$$\text{Οπότε } V = \frac{V_0}{\phi_0} \phi$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια 2)

και

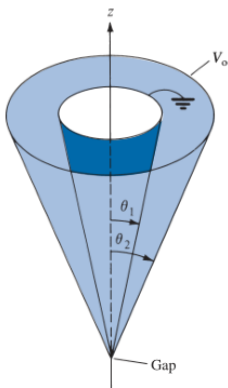
$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho} \frac{dV}{d\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{V_0}{\rho\phi_0} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Αντικαθιστώντας $V_0 = 100 \text{ V}$ και $\phi_0 = \pi/6$

$$V = \frac{600}{\pi} \phi \quad \text{και} \quad \mathbf{E} = -\frac{600}{\pi\rho} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Παράδειγμα 2

Δυο αγώγιμες κωνικές επιφάνειες ($\theta = \pi/10$ και $\theta = \pi/6$) έχουν ένα μικροσκοπικό διάκενο στην κορυφή τους ($r = 0$) και δεν είναι σε επαφή. Αν $V(\theta = \pi/10) = 0$ και $V(\theta = \pi/6) = 50$ V, βρείτε V και \mathbf{E} στο χώρο μεταξύ τους.



Παράδειγμα 2 (συνέχεια 1)

Το V εξαρτάται μόνο από τη γωνία θ επομένως η εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right] = 0$$

εφόσον $r = 0$ και $\theta = 0, \pi$ εξαιρούνται. Η πρώτη ολοκλήρωση δίνει

$$\sin \theta \frac{dV}{d\theta} = A \Rightarrow \frac{dV}{d\theta} = \frac{A}{\sin \theta}$$

Η δεύτερη ολοκλήρωση δίνει

$$\begin{aligned} V &= A \int \frac{d\theta}{\sin \theta} = A \int \frac{d\theta}{2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2)} = A \int \frac{(1/2) \sec^2(\theta/2) d\theta}{\tan(\theta/2)} = \\ &= A \int \frac{d[\tan(\theta/2)]}{\tan(\theta/2)} = A \ln[\tan(\theta/2)] + B \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια 2)

Οριακές συνθήκες τώρα:

$$V(\theta = \theta_1) = 0 \Rightarrow A \ln[\tan(\theta_1/2)] + B = 0 \Rightarrow B = -A \ln[\tan(\theta_1/2)] \Rightarrow$$

$$V = A \ln \left[\frac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_1/2)} \right]$$

$$V(\theta = \theta_2) = V_0 \Rightarrow A \ln \left[\frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)} \right] = V_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)} \right]}$$

$$\text{και } V = \frac{V_0 \ln \left[\frac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_1/2)} \right]}{\ln \left[\frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)} \right]}$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια 3)

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{A}{r \sin \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{V_0}{r \sin \theta \ln \left[\frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)} \right]} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

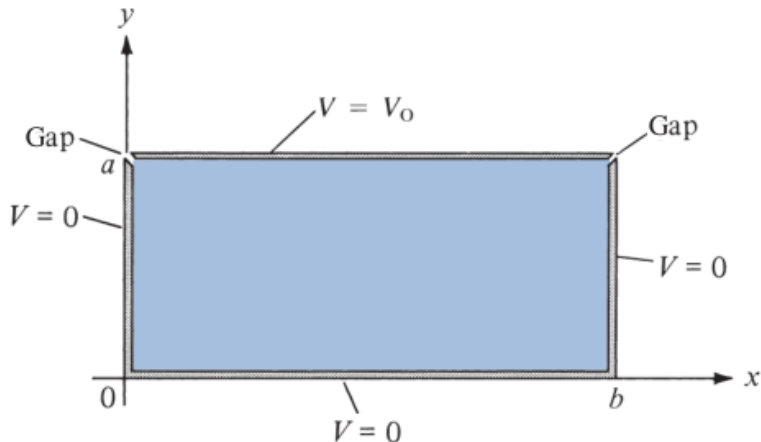
Για $\theta_1 = \pi/10$, $\theta_2 = \pi/6$, $V_0 = 50$ V έχουμε

$$V = 95.1 \ln \left[\frac{\tan(\theta/2)}{0.158} \right] \text{ V}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{95.1}{r \sin \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \text{ V/m}$$

Παράδειγμα 3

Σε ορθογώνια μεταλλική κατασκευή απείρου μήκους με διατομή όπως φαίνεται στο σχήμα προσδιορίστε το δυναμικό στο εσωτερικό του. Υπολογίστε την τιμή του δυναμικού στο σημείο $(a/2, 3a/4)$ όταν $V_0 = 100 \text{ V}$ και $b = 2a$.



Παράδειγμα 3 (συνέχεια 1)

Το δυναμικό εδώ εξαρτάται μόνο από τις διαστάσεις x και y και είναι συνάρτηση $V(x, y)$. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η εξίσωση Laplace είναι:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

με οριακές συνθήκες:

$$V(x = 0, 0 \leq y < a) = 0$$

$$V(x = b, 0 \leq y < a) = 0$$

$$V(0 \leq x \leq b, y = 0) = 0$$

$$V(0 < x < b, y = a) = V_0$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 2)

Λύνουμε τη εξίσωση Laplace με μέθοδο διαχωριζομένων μεταβλητών (separation of variables), δηλ αναζητούμε λύση της μορφής:

$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Laplace

$$X''Y + Y''X = 0 \Rightarrow -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda$$

όπου λ σταθερά διαχωρισμού. Επομένως:

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$Y'' - \lambda Y = 0$$

Οι οριακές συνθήκες γίνονται τώρα:

$$V(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$V(b, y) = X(b)Y(y) = 0 \Rightarrow X(b) = 0$$

$$V(x, 0) = X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$$

$$V(x, a) = X(x)Y(a) = V_0 \quad (\text{μη διαχωρίσιμες})$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 3)

Περίπτωση 1:

Παράμετρος $\lambda = 0$:

$$X'' = 0 \Rightarrow X = Ax + B$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$X(b) = 0 \Rightarrow Ab + 0 = 0 \Rightarrow A = 0$$

Οπότε:

$$X(x) = 0 \Rightarrow V = 0$$

που δεν έχει νόημα οπότε $\lambda \neq 0$.

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 4)

Περίπτωση 2:

Παράμετρος $\lambda < 0$, έστω $\lambda = -\alpha^2$.

$$X'' - \alpha^2 X = 0 \quad \text{ή} \quad (D^2 - \alpha^2)X = 0 \quad \text{όπου} \quad D = \frac{d}{dx}$$

$$DX = \pm \alpha X$$

Για το + πρόσημο έχουμε

$$\frac{dX}{dx} = \alpha X \Rightarrow \frac{dX}{X} = \alpha dx \Rightarrow X = A_1 e^{\alpha x}$$

Ομοίως και για το - πρόσημο

$$X = A_2 e^{-\alpha x}$$

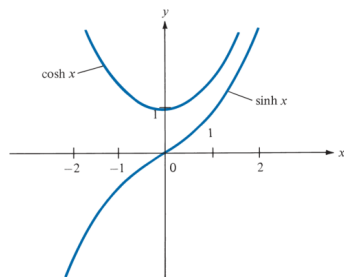
με τελική λύση

$$X(x) = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x}$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 5)

Συνηθίζεται εδώ να μετασχηματίζουμε τις εκθετικές εξισώσεις σε εξισώσεις με υπερβολικά ημίτονα και συνημίτονα.

$$\cosh \alpha x = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} \quad \sinh \alpha x = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}$$



$$e^{\alpha x} = \cosh \alpha x + \sinh \alpha x \quad e^{-\alpha x} = \cosh \alpha x - \sinh \alpha x$$

$$X(x) = (A_1 + A_2) \cosh \alpha x + (A_1 - A_2) \sinh \alpha x = B_1 \cosh \alpha x + B_2 \sinh \alpha x$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 6)

Με τις οριακές συνθήκες

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 = B_1 \cdot 1 + B_2 \cdot 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

$$X(b) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + B_2 \sinh \alpha b$$

και επειδή $\sinh \alpha b \neq 0$ πρέπει $B_2 = 0$.

Ούτε αυτή η λύση έχει νόημα οπότε λ δεν μπορεί να είναι αρνητικό.

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 7)

Περίπτωση 3:

Παράμετρος $\lambda > 0$, έστω $\lambda = \beta^2$.

$$X'' + \beta^2 X = 0 \quad \text{ή} \quad (D^2 + \beta^2)X = 0 \Rightarrow DX = \pm j\beta X$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως πριν

$$X(x) = c_1 e^{j\beta x} + c_2 e^{-j\beta x}$$

και από τον τύπο του Euler $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ έχουμε
 $e^{j\beta x} = \cos \beta x + j \sin \beta x$ και $e^{-j\beta x} = \cos \beta x - j \sin \beta x$, οπότε

$$X(x) = (c_1 + c_2) \cos \beta x + j(c_1 - c_2) \sin \beta x = d_1 \cos \beta x + d_2 \sin \beta x$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 8)

και με τις οριακές συνθήκες

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 = d_1 \cdot 1 + 0 \Rightarrow d_1 = 0$$

$$X(b) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + d_2 \sin \beta b$$

Έχουμε $d_2 \neq 0$ (αλλιώς έχουμε πάλι εξίσωση που δεν βγάζει νόημα). Τότε

$$\sin \beta b = 0 \Rightarrow \beta b = n\pi \Rightarrow \beta = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Αποκλείσαμε $n = 0$ καθώς και $n = -1, -2, -3, \dots$ μιας και η τιμή της λ δεν αλλάζει. Επομένως η λύση είναι

$$X_n(x) = d_n \sin \frac{n\pi x}{b}$$

Πάμε τώρα για λύση της $Y(y)$. Έχουμε

$$Y'' - \beta^2 Y = 0 \Rightarrow Y = h_1 \cosh \beta y + h_2 \sinh \beta y$$

και από τις οριακές συνθήκες

$$Y(0) = 0 \Rightarrow 0 = h_1 \cdot 1 + 0 \Rightarrow h_1 = 0$$

$$Y_n(y) = h_n \sinh \frac{n\pi y}{b}$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 9)

και η λύση για το δυναμικό είναι:

$$V_n(x, y) = d_n h_n \sin \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi y}{b}$$

Με το θεώρημα υπέρθεσης εφόσον τα V_1, V_2, \dots είναι λύσεις της Laplace τότε και ο γραμμικός συνδυασμός τους είναι επίσης λύση. Η γενική λοιπόν λύση είναι:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi y}{b}$$

με c_n σταθερές που προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες.

Με την οριακή συνθήκη στο επάνω μέρος της κατασκευής έχουμε

$$V(x, a) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b}$$

που είναι ανάπτυγμα σειράς Fourier του V_0 .

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 10)

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέρη της εξίσωσης με $\sin(m\pi x/b)$ και ολοκληρώνοντας για $0 < x < b$ έχουμε

$$\int_0^b V_0 \sin \frac{m\pi x}{b} dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi x}{b} dx$$

Με την ορθογωνιότητα της ημιτονικής συνάρτησης

$$\int_0^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \end{cases}$$

έχουμε (μόνο τα $m = n$ είναι μη μηδενικά)

$$\begin{aligned} \int_0^b V_0 \sin \frac{n\pi x}{b} dx &= c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi x}{b} dx \Rightarrow \\ -V_0 \frac{b}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{b} \Big|_0^b &= c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \frac{1}{2} \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{b}\right) dx \Rightarrow \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 11)

$$\frac{V_0 b}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \frac{b}{2} \Rightarrow$$

$$c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \Rightarrow$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

και η τελική λύση:

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}$$

Συνήθως αρκεί η άθροιση των πρώτων λίγων όρων.

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 12)

Για $x = a/2$ και $y = 3a/4$ με $b = 2a$ έχουμε:

$$V\left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{4}\right) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \sinh\left(\frac{3n\pi}{8}\right)}{n \sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

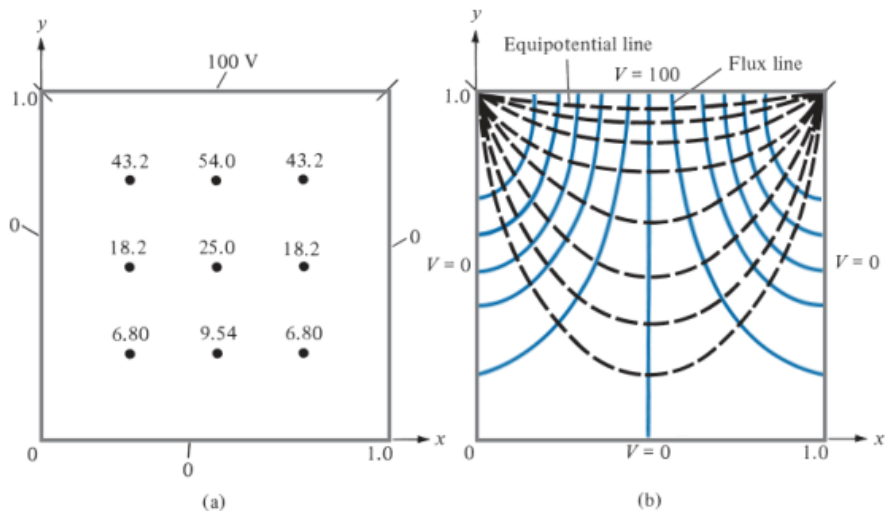
```
V0=100; c = 4*V0/pi; csum = 0;
for n=1:2:30
    sumv = sin(n*pi/4)*sinh(3*n*pi/8)/(n*sinh(n*pi/2));
    csum += sumv;
    printf(" %4d %12.8f %10.6f \n",n,sumv,csum)
end
printf(" V = %g Volt \n",c*csum)
```

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 13)

1	0.45172814	0.451728
3	0.07250830	0.524236
5	-0.01985073	0.504386
7	-0.00646484	0.497921
9	0.00229255	0.500213
11	0.00085521	0.501069
13	-0.00032994	0.500739
15	-0.00013037	0.500608
17	0.00005245	0.500661
19	0.00002140	0.500682
21	-0.00000883	0.500673
23	-0.00000367	0.500670
25	0.00000154	0.500671
27	0.00000065	0.500672
29	-0.00000028	0.500672

V = 63.7475 Volt

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 14)



Σχήμα: Για $a = b = 1$ m, $V_0 = 100$ V

Στα προηγούμενα έχουμε βρει την αντίσταση αγωγού μήκους ℓ και ομοιόμορφης διατομής S που βρίσκεται υπό τάση:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ell}{\sigma S} = \rho \frac{\ell}{S}$$

Εάν η διατομή δεν είναι ομοιόμορφη η παραπάνω σχέση δεν ισχύει. Έχουμε τότε:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int_L \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

που είναι πρόβλημα οριακών συνθηκών.

Αντίσταση (συνέχεια 1)

Η διαδικασία που ακολουθούμε τότε είναι:

- 1 Επιλογή κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων.
- 2 Υπόθεση ότι V_0 η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δυο τερματικών του αγωγού.
- 3 Επίλυση εξίσωσης Laplace $\nabla^2 V = 0$ για εύρεση του δυναμικού V .
Υπολογισμός $\mathbf{E} = -\nabla V$, και $I = \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$.
- 4 Υπολογισμός $R = V_0/I$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να υποθέσουμε ρεύμα I_0 , να υπολογίσουμε το V και κατόπιν την αντίσταση $R = V/I_0$.

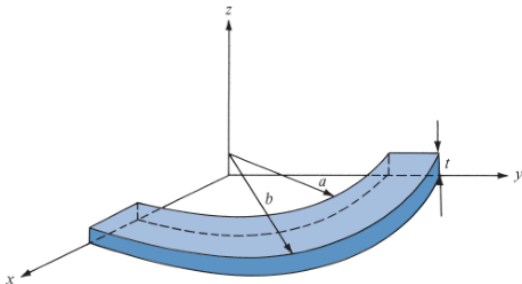
Παράδειγμα 4

Μεταλλική ράβδος αγωγιμότητας σ κάμπτεται σχηματίζοντας τόξο 90° με εσωτερική ακτίνα a , εξωτερική b και πάχος t όπως στο σχήμα. Δείξτε ότι η αντίσταση μεταξύ των επιφανειών $\rho = a$ και $\rho = b$ είναι:

$$R_1 = \frac{2 \ln(b/a)}{\sigma \pi t}$$

και η αντίσταση μεταξύ των επιφανειών $z = 0$ και $z = t$ είναι:

$$R_2 = \frac{4t}{\sigma \pi (b^2 - a^2)}$$



Παράδειγμα 4 (συνέχεια 1)

Πρώτο ερώτημα:

Έστω τάση V_0 μεταξύ των κυρτών επιφανειών $\rho = a$ και $\rho = b$ έτσι ώστε $V(\rho = a) = 0$ και $V(\rho = b) = V_0$. $V = V(\rho)$ και η εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0 \Rightarrow \rho \frac{dV}{d\rho} = A \Rightarrow \frac{dV}{d\rho} = \frac{A}{\rho}$$

$$V = A \ln \rho + B$$

Από τις οριακές συνθήκες

$$V(\rho = a) = 0 \Rightarrow 0 = A \ln a + B \Rightarrow B = -A \ln a$$

$$V(\rho = b) = V_0 \Rightarrow V_0 = A \ln b + B = A \ln b - A \ln a = A \ln \frac{b}{a} \Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln(b/a)}$$

και έχουμε:

$$V = A \ln \rho - A \ln a = A \ln(\rho/a) = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \ln(\rho/a)$$

Παράδειγμα 4 (συνέχεια 2)

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{d\rho} \hat{\rho} = -\frac{A}{\rho} \hat{\rho} = -\frac{V_0}{\rho \ln(b/a)} \hat{\rho}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad d\mathbf{S} = -\rho d\phi dz \hat{\rho}$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^t \frac{V_0 \sigma}{\rho \ln(b/a)} dz \rho d\phi = \frac{\pi}{2} \frac{t V_0 \sigma}{\rho \ln(b/a)}$$

και

$$R_1 = \frac{V_0}{I} = \frac{2 \ln(b/a)}{\sigma \pi t}$$

Παράδειγμα 4 (συνέχεια 3)

Δεύτερο ερώτημα:

Έστω τάση V_0 μεταξύ των επιπέδων επιφανειών $z = 0$ και $z = t$ έτσι ώστε $V(z = a) = 0$ και $V(z = t) = V_0$. $V = V(z)$ και η εξίσωση Laplace είναι:

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \Rightarrow V = Az + B$$

Από τις οριακές συνθήκες:

$$V(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + B \Rightarrow B = 0$$

$$V(t) = V_0 \Rightarrow V_0 = At \Rightarrow A = V_0/t$$

Οπότε: $V = \frac{V_0}{t}z$ $\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{V_0}{t} \hat{\mathbf{z}}$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\frac{\sigma V_0}{t} \hat{\mathbf{z}} \quad d\mathbf{S} = -\rho d\phi d\rho \hat{\mathbf{z}}$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=a}^b \frac{V_0 \sigma}{t} \rho d\phi d\rho = \frac{V_0 \sigma}{t} \frac{\pi}{2} \frac{\rho^2}{2} \Big|_a^b = \frac{V_0 \sigma \pi (b^2 - a^2)}{4t}$$

και

$$R_2 = \frac{V_0}{I} = \frac{4t}{\sigma \pi (b^2 - a^2)}$$

Παράδειγμα 4 (συνέχεια 4)

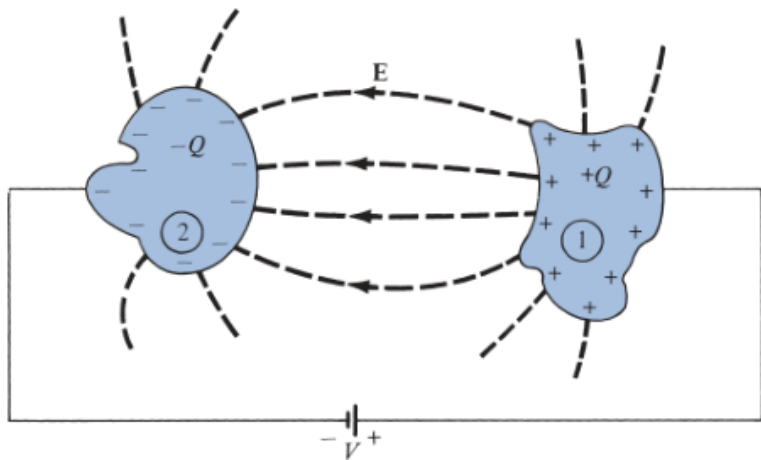
Εναλλακτικά, επειδή η διατομή είναι ίδια μεταξύ των δυο επιφανειών

$$R_2 = \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{t}{\sigma(\pi/4)(b^2 - a^2)} = \frac{4t}{\sigma\pi(b^2 - a^2)}$$

Όταν ένας απομονωμένος αγωγός φορτίζεται με φορτίο Q το δυναμικό του V αυξάνεται. Ο λόγος των δυο ονομάζεται χωρητικότητα του αγωγού γιατί δείχνει το ποσό του φορτίου που μπορεί να «χωρέσει» στον αγωγό για συγκεκριμένο δυναμικό. Ο ορισμός γενικεύεται σε συστήματα που αποτελούνται από πολλούς αγωγούς.

Η πιο διαδεδομένη περίπτωση είναι για σύστημα ζεύγους αγωγών με ίσο και αντίθετο φορτίο. Τέτοιο σύστημα ονομάζεται πυκνωτής και οι δυο αγωγοί είναι οι σπλισμοί του πυκνωτή με ενδιάμεσα κενό/αέρα ή κάποιο διηλεκτρικό. Οι δυο σπλισμοί έχουν διαφορετικό δυναμικό και οι γραμμές ηλεκτρικής ροής ξεκινούν κάθετα στην επιφάνεια από αυτόν με το θετικό φορτίο (αγωγός 1) και καταλήγουν στον άλλο με το αρνητικό φορτίο (αγωγός 2).

Χωρητικότητα (συνέχεια 1)



Χωρητικότητα (συνέχεια 2)

Η διαφορά δυναμικού (τάση) μεταξύ των οπλισμών είναι:

$$V = V_1 - V_2 = - \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\ell$$

όπου \mathbf{E} το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών. Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι τότε:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_L \mathbf{E} \cdot d\ell}$$

όπου το ενδιαφέρον μας είναι στο μέτρο της τάσης V και έχουμε αγνοήσει το αρνητικό πρόσημο. Η μονάδα της χωρητικότητας είναι το Farad (F) με συνήθεις τιμές στα μF ή pF .

Όπως και για την αντίσταση μπορούμε:

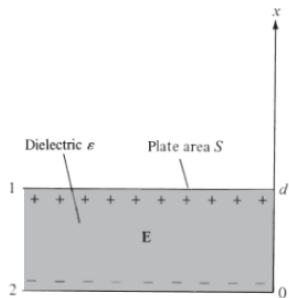
- 1 Να υποθέσουμε το Q . Να προσδιορίσουμε το V συναρτήσει του Q (νόμος Coulomb ή Gauss) και να βρούμε τη C .
- 2 Να υποθέσουμε το V . Να προσδιορίσουμε το Q συναρτήσει του V (εξίσωση Laplace) και να βρούμε τη C .

Πυκνωτής με παράλληλους οπλισμούς

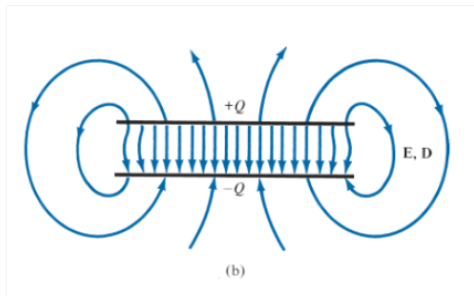
Έστω πυκνωτής με παράλληλους οπλισμούς όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω κάθε οπλισμός έχει επιφάνεια S και απόσταση μεταξύ τους d . Έστω ότι οι οπλισμοί έχουν φορτίο $+Q$ και $-Q$ αντίστοιχα που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο ώστε

$$\rho_S = \frac{Q}{S}$$

Θέλουμε την τάση και το πεδίο μεταξύ οπλισμών καθώς και τη χωρητικότητα του πυκνωτή.



(a)



(b)

Πυκνωτής (συνέχεια 1)

Ιδανικά, η απόσταση d είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις των οπλισμών και μπορούμε να αγνοήσουμε τη σκέδαση στα άκρα και να θεωρήσουμε το πεδίο μεταξύ οπλισμών ότι είναι ομογενές.

Από την ηλεκτρική ροή και το πεδίο παραλλήλου ζεύγους αγώγιμων επιφανειών απείρων διαστάσεων (Διάλεξη 3, σελ 23)

$$\mathbf{D} = -\rho_S \hat{\mathbf{x}} \quad \text{και} \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_S}{\epsilon} (-\hat{\mathbf{x}}) = -\frac{Q}{\epsilon S} \hat{\mathbf{x}}$$

$$V = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\ell = -\int_0^d \left(-\frac{Q}{\epsilon S} \hat{\mathbf{x}} \right) \cdot dx \hat{\mathbf{x}} = \frac{Qd}{\epsilon S}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon S}{d}$$

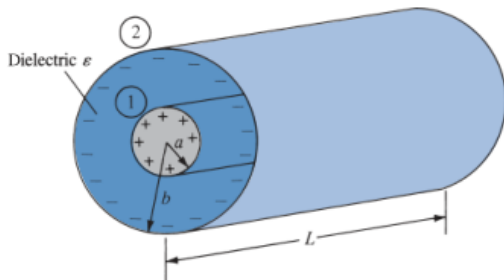
Η παραπάνω σχέση δίνει έναν πρακτικό τρόπο να μετρήσουμε την ϵ_r κάποιου διηλεκτρικού. Μετράμε την χωρητικότητα C_0 με αέρα και C με διηλεκτρικό και έχουμε $\epsilon_r = C/C_0$.

Ομοίως, η ηλεκτρική ενέργεια που μπορεί να αποθηκευτεί στον πυκνωτή είναι:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \int_v \epsilon \frac{Q^2}{\epsilon^2 S^2} dv = \frac{\epsilon Q^2 S d}{2 \epsilon^2 S^2} = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{d}{\epsilon S} \right) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

Ομοαξονικός πυκνωτής

Ομοαξονικό καλώδιο ή ομοαξονικός κυλινδρικός πυκνωτής.



Θεωρούμε μήκος L , ακτίνα κεντρικού αγωγού είναι a και ακτίνα εξωτερικού μεταλλικού περιβλήματος b . Ο χώρος μεταξύ αγωγών περιέχει διηλεκτρικό ϵ . Οι αγωγοί είναι φορτισμένοι με φορτία $+Q$ και $-Q$ αντίστοιχα.

Ομοαξονικός πυκνωτής (συνέχεια 1)

Θεώρημα Gauss με κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας ρ όπου $a < \rho < b$

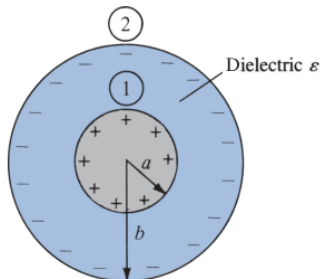
$$Q = \epsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon E 2\pi\rho L \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon\rho L} \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$V = - \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int_b^a \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon\rho L} \hat{\boldsymbol{\rho}} \right) \cdot d\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)}$$

Σφαιρικός πυκνωτής

Σφαιρικός πυκνωτής είναι ένα σύστημα με δυο ομόκεντρες αγωγίμες σφαιρικές επιφάνειες.



Θεωρούμε ακτίνα εσωτερικής επιφάνειας a , εξωτερικής b . Χώρος μεταξύ επιφανειών διηλεκτρικό ϵ . Οι επιφάνειες είναι φορτισμένες με φορτία $+Q$ και $-Q$ αντίστοιχα.

Σφαιρικός πυκνωτής (συνέχεια 1)

Θεώρημα Gauss με σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r όπου $a < r < b$

$$Q = \epsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon E 4\pi r^2 \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\ell = - \int_a^b \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot dr \hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

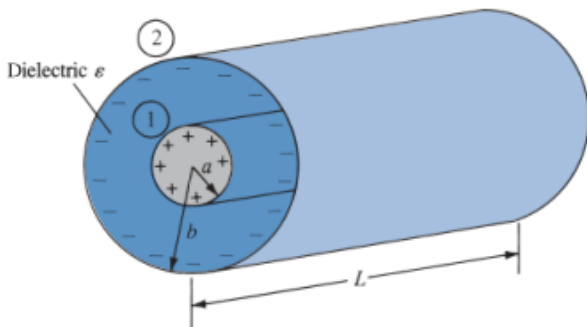
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

Με $b \rightarrow \infty$, $C = 4\pi\epsilon a$ έχουμε την χωρητικότητα μεμονωμένης σφαίρας που είναι κατά προσέγγιση ίδια και για άλλα σχήματα με περίπου ίδιες διαστάσεις. Χρήσιμο στον υπολογισμό παρασιτικής χωρητικότητας στοιχείων.

Παράδειγμα 5

Ένα ομοαξονικό καλώδιο περιέχει μονωτικό υλικό αγωγιμότητας σ . Εάν η ακτίνα του κεντρικού αγωγού είναι a και του εξωτερικού μεταλλικού περιβλήματος b δείξτε ότι η αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους είναι:

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$$



Παράδειγμα 5 (συνέχεια 1)

Θεωρούμε $V(a) = 0$ και $V(b) = V_0$ και η εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0 \Rightarrow \rho \frac{dV}{d\rho} = A \Rightarrow \frac{dV}{d\rho} = \frac{A}{\rho}$$

$$V = A \ln \rho + B$$

Από τις οριακές συνθήκες

$$V(\rho = a) = 0 \Rightarrow 0 = A \ln a + B \Rightarrow B = -A \ln a$$

$$V(\rho = b) = V_0 \Rightarrow V_0 = A \ln b + B = A \ln b - A \ln a = A \ln \frac{b}{a} \Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln(b/a)}$$

και έχουμε:

$$V = A \ln \rho - A \ln a = A \ln(\rho/a) = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \ln(\rho/a)$$

Παράδειγμα 5 (συνέχεια 2)

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{d\rho} \hat{\rho} = -\frac{A}{\rho} \hat{\rho} = -\frac{V_0}{\rho \ln(b/a)} \hat{\rho}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad d\mathbf{S} = -\rho d\phi dz \hat{\rho}$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \frac{V_0 \sigma}{\rho \ln(b/a)} dz \rho d\phi = \frac{2\pi L \sigma V_0}{\ln(b/a)}$$

Η αντίσταση ανά μονάδα μήκους είναι

$$R = \frac{V_0}{I \cdot L} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma}$$

και η αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους είναι

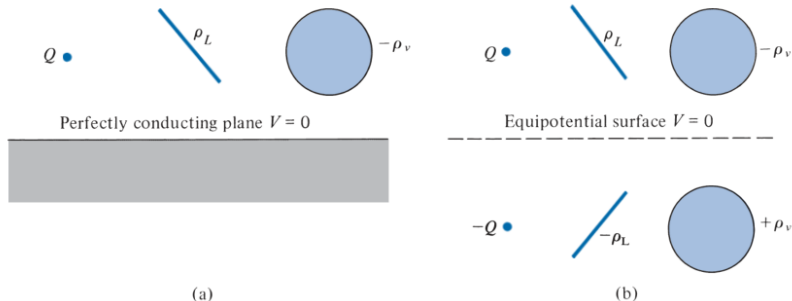
$$G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$$

Μέθοδος ειδώλων (method of images)

Η μέθοδος ειδώλων (Kelvin, 1848) χρησιμοποιείται για προσδιορισμό V , \mathbf{E} , \mathbf{D} και ρ_S που οφείλονται σε φορτία παρουσία αγωγών. Με τη μέθοδο αυτή αποφεύγουμε την επίλυση των εξισώσεων Laplace και Poisson αξιοποιώντας το γεγονός ότι η επιφάνεια ενός αγωγού είναι ισοδυναμική. Αν και δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα ηλεκτροστατικά προβλήματα, εκεί που μπορεί, μετατρέπει ένα δύσκολο πρόβλημα σε απλό.

Σύμφωνα με τη μέθοδο ειδώλων μια δοθείσα κατανομή φορτίου πάνω από ένα τέλεια αγώγιμο απείρων διαστάσεων επίπεδο μπορεί να αντικατασταθεί από την ίδια την κατανομή φορτίου, το είδωλό της και μια ισοδυναμική επιφάνεια στην θέση του αγώγιμου επιπέδου.

Μέθοδος ειδώλων (συνέχεια 1)

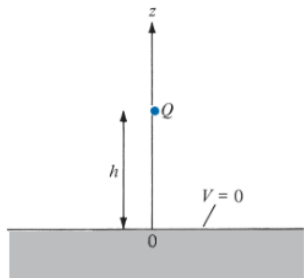


Παράδειγμα σημειακού φορτίου, γραμμικής κατανομής φορτίου και κατανομής φορτίου στο χώρο με την εφαρμογή της μεθόδου ειδώλων.

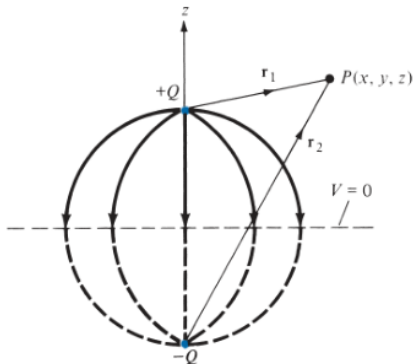
Συνθήκες εφαρμογής:

- 1 Τα φορτία είδωλα πρέπει να βρίσκονται στην αγωγίμη περιοχή (ικανοποιείται η εξίσωση Poisson).
- 2 Τα φορτία είδωλα πρέπει να είναι τοποθετημένα έτσι, ώστε στην αγωγίμη επιφάνεια το δυναμικό είναι μηδενικό ή σταθερό (ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες).

Σημειακό φορτίο επάνω από αγώγιμο γειωμένο επίπεδο



(a)



(b)

Σχήμα: (a) Σημειακό φορτίο και αγώγιμο γειωμένο επίπεδο. (b) Σύστημα φορτίων με μέθοδο ειδώλων.

Σημειακό φορτίο επάνω από αγωγίμο γειωμένο επίπεδο (συνέχεια 1)

Φορτίο Q σε απόσταση h από αγωγίμο γειωμένο επίπεδο απείρων διαστάσεων. Το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο $P(x, y, z)$ είναι:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{Q\mathbf{r}_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} + \frac{-Q\mathbf{r}_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^3}$$
$$\mathbf{r}_1 = (x, y, z) - (0, 0, h) = (x, y, z - h)$$
$$\mathbf{r}_2 = (x, y, z) - (0, 0, -h) = (x, y, z + h)$$
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(x, y, z - h)}{[x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{3/2}} - \frac{(x, y, z + h)}{[x^2 + y^2 + (z + h)^2]^{3/2}} \right]$$
$$V = V_+ + V_- = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} =$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{[x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z + h)^2]^{1/2}} \right]$$

για $z \geq 0$ και $V = 0$ για $z \leq 0$. Επίσης $V(z = 0) = 0$.

Σημειακό φορτίο επάνω από αγώγιμο γειωμένο επίπεδο (συνέχεια 2)

Η επιφανειακή πυκνότητα του επαγόμενου φορτίου υπολογίζεται τώρα

$$\rho_S = D_n = \epsilon_0 E_n \Big|_{z=0} = \frac{-Qh}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}$$

και το ολικό επαγόμενο φορτίο

$$Q_i = \int \rho_S dS = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-Qh \, dx \, dy}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}$$

και με αλλαγή μεταβλητών $\rho^2 = x^2 + y^2$, $dx dy = \rho d\rho d\phi$

$$\begin{aligned} Q_i &= -\frac{Qh}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho d\phi}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = -\frac{Qh}{2\pi} 2\pi \int_0^{\infty} (\rho^2 + h^2)^{-3/2} \frac{1}{2} d(\rho^2) = \\ &= \frac{Qh}{(\rho^2 + h^2)^{1/2}} \Big|_0^{\infty} = -Q \end{aligned}$$

όπως θα αναμέναμε.

- 1 Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες
- 2 Περίληψη Ηλεκτροστατικά προβλήματα**
- 3 Ασκήσεις

Περίληψη Ηλεκτροστατικά προβλήματα

- Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες είναι εκείνα όπου τα δυναμικά ή οι παράγωγές τους είναι γνωστά στις οριακές επιφάνειες μιας περιοχής και καλούμαστε να προσδιορίσουμε το δυναμικό πεδίο μέσα στην περιοχή. Αυτό γίνεται με επίλυση εξίσωσης Poisson ($\rho_v \neq 0$) ή Laplace ($\rho_v = 0$).
- Σε μη ομογενή περιοχή (ϵ εξαρτάται από τη θέση στο χώρο) η εξίσωση Poisson είναι

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho_v$$

Σε ομογενή περιοχή (ϵ σταθερά, δεν εξαρτάται από τη θέση στο χώρο) η εξίσωση Poisson είναι

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Σε περιοχή μηδενικού φορτίου ($\rho_v = 0$) η εξίσωση Poisson γίνεται εξίσωση Laplace

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = 0 \quad \text{ή} \quad \nabla^2 V = 0$$

Τι σημαίνει ξαφνικά μηδενικό φορτίο;

Περίληψη (συνέχεια 1)

- Δοθέντος ενός ηλεκτροστατικού στοιχείου με κάποια κατανομή φορτίου θέλουμε να δούμε τι πεδίο σχηματίζεται στο στοιχείο.
- Λύνουμε τη διαφορική εξίσωση με διπλή ολοκλήρωση αν το δυναμικό V εξαρτάται από μια μεταβλητή ή με τη μέθοδο διαχωριζομένων μεταβλητών αν εξαρτάται από περισσότερες. Εφαρμογή των οριακών συνθηκών οδηγούν στη μοναδική λύση.
- Ο υπολογισμός της αντίστασης R ή της χωρητικότητας C ενός στοιχείου μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν ένα τέτοιο πρόβλημα οριακών συνθηκών. Για προσδιορισμό της R θεωρούμε τάση V_0 μεταξύ των άκρων του στοιχείου, λύνουμε την εξίσωση Laplace, υπολογίζουμε το ρεύμα $I = \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ και τελικά την $R = V_0/I$. Ομοίως, για την χωρητικότητα C , θεωρούμε τάση V_0 μεταξύ των οπλισμών του στοιχείου, λύνουμε την εξίσωση Laplace, υπολογίζουμε το φορτίο $Q = \int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ και τελικά την $C = Q/V_0$.
- Πρόβλημα οριακών συνθηκών σε σύστημα με κατανομή φορτίου που συμπεριλαμβάνει αγωγίμο επίπεδο ή γωνία που σχηματίζεται από αγωγίμα επίπεδα μπορεί να λυθεί με την μέθοδο ειδώλων. Σύμφωνα με αυτή, αντικαθιστούμε την αγωγίμη επιφάνεια με ισοδυναμική και προσθέτουμε την εικονική κατανομή ειδώλων στο σύστημά μας. Ακολουθεί η διαδικασία λύσης με τις γνωστές τεχνικές.

Νόημα εξίσωσης Laplace

- Συνήθως δουλεύουμε με την απλή βαθμωτή εξίσωση Laplace $\nabla^2 V = 0$ εφόσον βαθμωτές εξισώσεις είναι απλούστερες στη λύση από διανυσματικές. Αυτή μας δίνει το βαθμωτό δυναμικό σε μια περιοχή και από αυτό υπολογίζουμε όλα τα άλλα μεγέθη.

Meaning of Laplace's Equation

Laplace's equation is

$$\nabla^2 u = 0$$

∇^2 is a 3D second-order derivative. \rightarrow A second-order derivative quantifies curvature. \rightarrow But, we set the second-order derivative to zero.

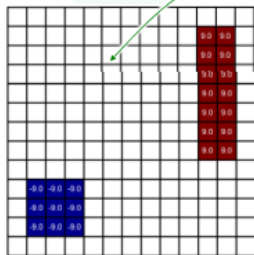


Functions satisfying Laplace's equation vary linearly.

Νόημα εξίσωσης Laplace (συνέχεια 1)

Problem Setup

Suppose we know the value of $V(x,y)$ at some points in space.



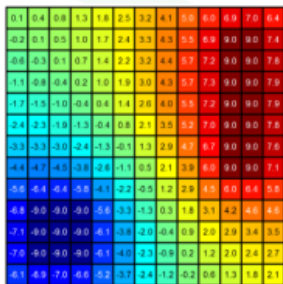
What does the function look like at every other point?

Figure it out by solving Laplace's equation.

$$\nabla^2 V(x, y) = 0$$

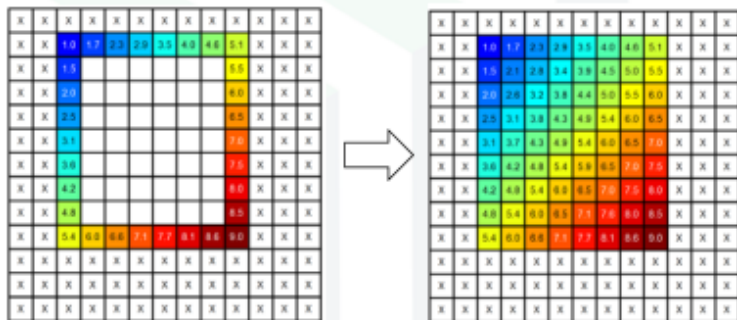
Solution of Laplace's Equation

Laplace's equation is sort of a “number filler inner.”



Laplace's equation fills in the numbers so they vary linearly between known regions.

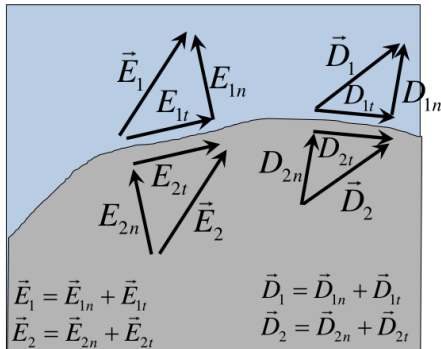
Another Example



Περίληψη οριακές συνθήκες

- Δεν έχουμε ηλεκτροστατικά πεδία μέσα σε αγωγούς, $\rho_v = 0$, $\mathbf{E} = 0$, $\nabla V = 0$.
- Τι συμβαίνει στις διαχωριστικές επιφάνειες διηλεκτρικό-διηλεκτρικό, διηλεκτρικό-αγωγός; Αναλύουμε \mathbf{E} και \mathbf{D} σε τοπικά κάθετη και εφαπτόμενη συνιστώσα στην διαχωριστική επιφάνεια. Για διηλεκτρικό-διηλεκτρικό και $\rho_S = 0$ ισχύει:

Boundary Conditions



Tangential Components:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$

Normal Components:

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \quad D_{1n} = D_{2n}$$

Refraction:

$$\frac{\tan \theta_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan \theta_2}{\epsilon_2}$$

Not Snell's Law

- Για διηλεκτρικό-αγωγό, καταρχήν δεν έχουμε ηλεκτροστατικά πεδία μέσα σε αγωγούς. Στη διαχωριστική επιφάνεια έχουμε

$$\begin{array}{lll} \text{μέρος διηλεκτρικού} & E_t = 0 & D_n = \rho_S \\ \text{μέρος αγωγού} & \mathbf{E} = 0 & \mathbf{D} = 0 \end{array}$$

- 1 Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες
- 2 Περίληψη Ηλεκτροστατικά προβλήματα
- 3 Ασκήσεις**

Να βρεθεί η πόλωση σε ομογενές και ισότροπο διηλεκτρικό με $\epsilon_r = 2.8$,
 $\mathbf{D} = 3 \times 10^{-7} \hat{\mathbf{a}} \text{ C/m}^2$.

Εφόσον $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ και $\chi_e = \epsilon_r - 1$ έχουμε

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{D} = 1.93 \times 10^{-7} \hat{\mathbf{a}} \text{ C/m}^2$$

Να βρεθεί το \mathbf{E} σε υλικό με ηλεκτρική επιδεκτικότητα 3.5 και $\mathbf{P} = 2.3 \times 10^{-7} \hat{\mathbf{a}} \text{ C/m}^2$. Δίδεται $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$.

Με την προϋπόθεση ότι \mathbf{P} και \mathbf{E} συγγραμμικά (ομογενές και ισότροπο διηλεκτρικό)

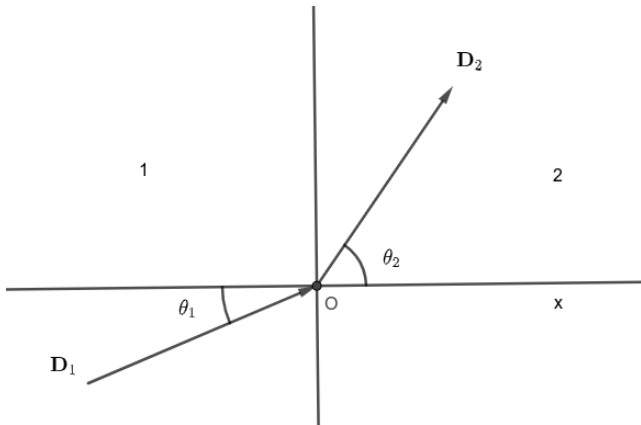
$$\mathbf{E} = \frac{1}{\chi_e \epsilon_0} \mathbf{P} = 7.422 \times 10^3 \hat{\mathbf{a}} \text{ V/m}$$

Δυο σημειακά φορτία σε διηλεκτρικό με $\epsilon_r = 5.2$ αλληλεπιδρούν με δύναμη 8.6 mN. Ποια θα ήταν η αντίστοιχη δύναμη στο κενό;

$$\frac{F_{\text{κενό}}}{F_{\text{διηλεκτρικό}}} = \frac{\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}}{\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2}} = \epsilon_r \Rightarrow F_{\text{κενό}} = 44.7 \text{ mN}$$

Άσκηση

Η περιοχή 1, $x < 0$, είναι αέρας και η περιοχή 2, $x > 0$, είναι διηλεκτρικό με σχετική διηλεκτρική σταθερά 2.4. Δοθέντος $\mathbf{D}_1 = (3, -4, 6)$ C/m² να βρεθούν τα μεγέθη \mathbf{E}_2 , θ_1 , θ_2 .



Άσκηση (συνέχεια 1)

Περιοχή 1, αέρας, $\epsilon_{r1} = 1$ και

$$\mathbf{D}_1 = (3, -4, 6) \text{ C/m}^2 \quad \mathbf{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0}(3, -4, 6) \text{ V/m}$$

Περιοχή 2, διηλεκτρικό, $\epsilon_{r2} = 2.4$ και

$$\mathbf{D}_2 = (3, D_{2y}, D_{2z}) \text{ C/m}^2 \quad \mathbf{E}_2 = \left(E_{2x}, -\frac{4}{\epsilon_0}, \frac{6}{\epsilon_0} \right) \text{ V/m}$$

εφόσον D_n συνεχές (x συνιστώσα) και E_t συνεχές (y και z συνιστώσες). Επομένως

$$\mathbf{D}_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} \mathbf{E}_2 \Rightarrow (3, D_{2y}, D_{2z}) = (\epsilon_0 \epsilon_{r2} E_{2x}, -4\epsilon_{r2}, 6\epsilon_{r2}) \Rightarrow$$

$$E_{2x} = \frac{3}{2.4\epsilon_0} = \frac{1.25}{\epsilon_0} \quad D_{2y} = -4 \cdot 2.4 = -9.6 \quad D_{2z} = 6 \cdot 2.4 = 14.4$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_0}(1.25, -4, 6) \text{ V/m} \quad \cos \theta_1 = \frac{\mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{D}_1|} \quad \cos \theta_2 = \frac{\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{E}_2|}$$

Άσκηση (συνέχεια 2)

```
>> D1=[3 -4 6]
D1 =
     3    -4     6
>> theta1 = acos(dot(D1,[1 0 0])/norm(D1))*180/pi
theta1 = 67.411
>> E2=[1.25 -4 6]
E2 =
     1.2500    -4.0000     6.0000
>> theta2 = acos(dot(E2,[1 0 0])/norm(E2))*180/pi
theta2 = 80.166
>> tan(theta2*pi/180)/tan(theta1*pi/180)
ans = 2.4000
```

Βλέπουμε και την επιβεβαίωση

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} = 2.4$$

Η περιοχή 1, $x < 0$, είναι αέρας και η περιοχή 2, $x > 0$, είναι διηλεκτρικό με σχετική διηλεκτρική σταθερά 3.6. Δοθέντος $\mathbf{E}_1 = (3, 5, -3)$ V/m να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει το \mathbf{E}_2 με την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια $x = 0$.

Η γωνία που σχηματίζει το \mathbf{E}_1 με την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια $x = 0$, $\hat{\mathbf{x}}$ είναι

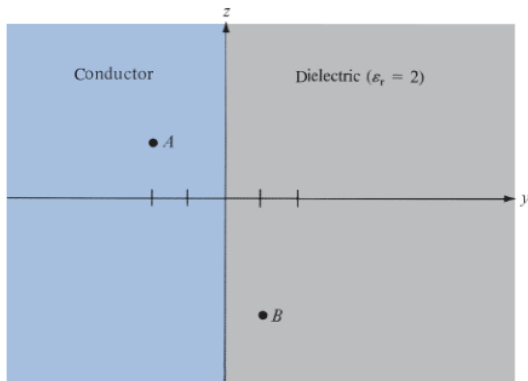
$$\cos \theta_1 = \frac{\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{E}_1|} \Rightarrow \theta_1 = 62.774^\circ$$

Η γωνία που σχηματίζει το \mathbf{E}_2 με την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια $x = 0$, $\hat{\mathbf{x}}$ είναι

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \Rightarrow \tan \theta_2 = 3.6 \tan \theta_1 \Rightarrow \theta_2 = 81.867^\circ$$

Άσκηση

Η περιοχή $y < 0$ αποτελείται από ιδανικό αγωγό ενώ η περιοχή $y > 0$ από διηλεκτρικό με $\epsilon_r = 2$. Εάν η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στον αγωγό είναι 2 nC/m^2 προσδιορίστε τα \mathbf{E} , \mathbf{D} στα σημεία $A(3, -2, 2)$, $B(-4, 1, 5)$.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Το σημείο A είναι μέσα στον αγωγό εφόσον $y = -2 < 0$ στο A . Επομένως $\mathbf{E} = 0 = \mathbf{D}$.

Το σημείο B είναι μέσα στο διηλεκτρικό εφόσον $y = 1 > 0$ στο B . Επομένως

$$D_n = \rho_S = 2 \text{ nC/m}^2 \quad \mathbf{D} = 2 \hat{\mathbf{y}} \text{ nC/m}^2$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 112.9 \hat{\mathbf{y}} \text{ V/m}$$