

Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 05

A. Δροσόπουλος

08-11-2021

- 1 Ασκήσεις
- 2 Ηλεκτρικό πεδίο σε υλικά

1 Ασκήσεις

2 Ηλεκτρικό πεδίο σε υλικά

Άσκηση 2.14

Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σφαίρας ακτίνας R με πυκνότητα φορτίου ανάλογη με την απόσταση από το κέντρο, $\rho = kr$, όπου k σταθερά.

Από νόμο Gauss εντός της σφαίρας:

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{r=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} kr r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \\ &= \frac{k}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{4} r^4 = \frac{\pi k}{\epsilon_0} r^4 \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

Εκτός της σφαίρας:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\pi k}{\epsilon_0} R^4 \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

1 Ασκήσεις

2 Ηλεκτρικό πεδίο σε υλικά

- Ηλεκτρικό πεδίο σε κενό ή αέρα και ηλεκτρικό πεδίο στην ύλη.
- Αγωγοί και μονωτές.
- Αγωγιμότητα, ηλεκτρικό ρεύμα και πόλωση.
- Ηλεκτρική επιδεκτικότητα (electric susceptibility), διαπερατότητα (permittivity), γραμμικότητα (linearity), ιστροπικότητα (isotropy), ομογένεια (homogeneity), διηλεκτρική αντοχή (dielectric strength) και χρόνος χαλάρωσης (relaxation time).
- Οριακές συνθήκες (boundary conditions)

Ηλεκτρικές ιδιότητες υλικών

- Επισκόπηση. Όχι σε βάθος μελέτη.
- Αγωγιμότητα σ σε S/m. Ανάλογα με την τιμή της διακρίνουμε τα υλικά σε αγωγούς, μονωτές και ημιαγωγούς.
- Οι μεταλλικοί αγωγοί έχουν $\sigma \gg 1$. Π.χ. χαλκός, αλουμίνιο.
- Οι μονωτές έχουν $\sigma \ll 1$. Π.χ. γυαλί, πλαστικό.
- Οι ημιαγωγοί έχουν ενδιάμεση τιμή. Π.χ. Πυρίτιο, γερμάνιο.
- Η αγωγιμότητα υλικών εξαρτάται από τη θερμοκρασία και τη συχνότητα.
- Η αγωγιμότητα μετάλλων αυξάνεται όσο ελαττώνεται η θερμοκρασία. Για θερμοκρασίες κοντά στο απόλυτο μηδέν μπορεί να γίνει πολύ μεγάλη - υπεραγώγιμη κατάσταση (μόλυβδος σε 4 K, $\sigma \sim 10^{20}$ S/m).

Η αγωγιμότητα εξαρτάται από τον αριθμό των διαθέσιμων ηλεκτρονίων (φορτίων) που άγουν ηλεκτρικό ρεύμα στα υλικά. Οι αγωγοί έχουν πληθώρα ελευθέρων ηλεκτρονίων ενώ στα διηλεκτρικά ο αριθμός είναι σχετικά μικρός.

Ηλεκτρικές ιδιότητες υλικών (συνέχεια 1)

TABLE B.1 Approximate Conductivity* of Some Common Materials at 20°C

Material	Conductivity (siemens/meter)
<i>Conductors</i>	
Silver	6.1×10^7
Copper (standard annealed)	5.8×10^7
Gold	4.1×10^7
Aluminum	3.5×10^7
Tungsten	1.8×10^7
Zinc	1.7×10^7
Brass	1.1×10^7
Iron (pure)	10^7
Lead	5×10^6
Mercury	10^6
Carbon	3×10^4
Water (sea)	4
<i>Semiconductors</i>	
Germanium (pure)	2.2
Silicon (pure)	4.4×10^{-4}
<i>Insulators</i>	
Water (distilled)	10^{-4}
Earth (dry)	10^{-5}
Bakelite	10^{-10}
Paper	10^{-11}
Glass	10^{-12}
Porcelain	10^{-12}
Mica	10^{-15}
Paraffin	10^{-15}
Rubber (hard)	10^{-15}
Quartz (fused)	10^{-17}
Wax	10^{-17}

Ηλεκτρικό ρεύμα και πυκνότητα ρεύματος

Πριν εξετάσουμε τη συμπεριφορά του ηλεκτρικού πεδίου σε αγωγούς ή μονωτές εξετάζουμε την κίνηση ηλεκτρικών φορτίων (ηλεκτρικό ρεύμα).

- Ηλεκτρικό ρεύμα είναι η ποσότητα φορτίου που διέρχεται μια επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου (C/s, A)

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

- Εάν ρεύμα ΔI διέρχεται κάθετα από μια επίπεδη επιφάνεια ΔS η πυκνότητα ρεύματος είναι:

$$\mathbf{J} = \frac{\Delta I}{\Delta S} \quad \text{ή} \quad \Delta I = J \Delta S$$

- Για οποιοδήποτε προσανατολισμό της επιφάνειας, έχουμε $\Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$ και το ολικό ρεύμα μέσω μιας επιφάνειας S είναι:

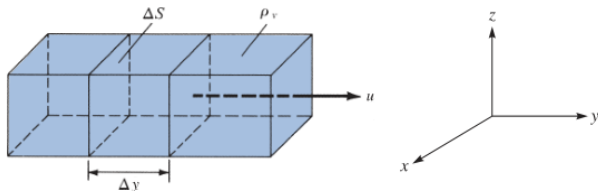
$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Βλέπουμε ότι I είναι η ροή του \mathbf{J} .

- Ανάλογα με τον τρόπο δημιουργίας του ρεύματος έχουμε τρία διαφορετικά είδη: ρεύμα μεταφοράς (convection current), ρεύμα αγωγιμότητας (conduction current) και ρεύμα μετατόπισης (displacement current).

Ρεύμα μεταφοράς (convection current)

Το ρεύμα μεταφοράς, εν αντιθέσει με το ρεύμα αγωγιμότητας, δεν εξαρτάται από αγωγούς και επομένως δεν ικανοποιεί τον νόμο του Ohm. Εμφανίζεται όταν ρεύμα κυκλοφορεί σε μονωτικά υλικά, π.χ. υγρά, αέρια ή το κενό. Δέσμη ηλεκτρονίων σε λυχνία κενού είναι π.χ. ρεύμα μεταφοράς.



Σχήμα: Ρεύμα μεταφοράς σε λεπτό νήμα

Ρεύμα μεταφοράς (συνέχεια 1)

Για ροή φορτίου πυκνότητας ρ_v με ταχύτητα $\mathbf{u} = u_y \hat{\mathbf{y}}$ έχουμε:

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_v \Delta S \frac{\Delta y}{\Delta t} = \rho_v \Delta S u_y$$

και η πυκνότητα ρεύματος κάθετα στην επιφάνεια ΔS :

$$J_y = \frac{\Delta I}{\Delta S} = \rho_v u_y$$

και στη γενική περίπτωση:

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u}$$

Το ρεύμα I εδώ είναι το ρεύμα μεταφοράς και J η πυκνότητα ρεύματος μεταφοράς σε A/m^2 .

Ρεύμα αγωγιμότητας (conduction current)

Το ρεύμα αγωγιμότητας χρειάζεται αγωγό που διαθέτει μεγάλο σχετικά αριθμό ελευθέρων ηλεκτρονίων που μπορούν να κινηθούν με την εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου. Η δύναμη που εξασκείται σε ένα ηλεκτρόνιο φορτίου $-e$ από πεδίο \mathbf{E} είναι:

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$$

Εφόσον το ηλεκτρόνιο δεν είναι ελεύθερο στο χώρο δεν θα υποστεί κάποια σταθερή επιτάχυνση. Απεναντίας, θα υποστεί συνεχείς συγκρούσεις με το ατομικό πλέγμα περιπλανώμενο από το ένα άτομο στο άλλο. Αν θεωρήσουμε ότι έχει μάζα m , μέση ταχύτητα μετατόπισης \mathbf{u} (drift velocity) και μέσο χρόνο τ μεταξύ συγκρούσεων τότε:

$$\frac{m\mathbf{u}}{\tau} = -e\mathbf{E} \quad \text{και} \quad \mathbf{u} = -\frac{e\tau}{m} \mathbf{E}$$

Για n ηλεκτρόνια ανά μονάδα όγκου η πυκνότητα φορτίου θα είναι:

$$\rho_v = -ne$$

και η πυκνότητα ρεύματος αγωγιμότητας:

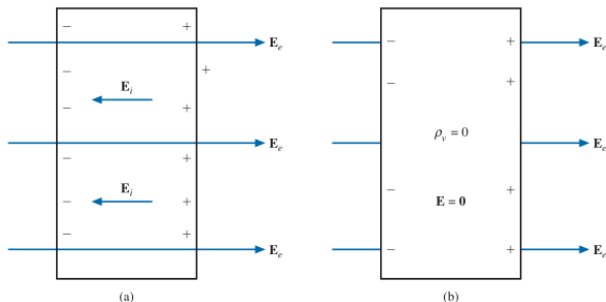
$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u} = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}$$

Και καταλήξαμε στο γενικευμένο νόμο του Ohm.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Μεμονωμένος αγωγός

Εν γένει έχουμε μεμονωμένους αγωγούς και αγωγούς υπό τάση.



Σχήμα: Μεμονωμένος αγωγός υπό την επίδραση εξωτερικού πεδίου.

Μεμονωμένος αγωγός (συνέχεια 1)

Σε αγωγό όπως στο σχήμα, υπό την επίδραση εξωτερικού πεδίου, τα θετικά φορτία κινούνται στην κατεύθυνση του πεδίου και αρνητικά αντίθετα. Η μετακίνηση είναι σχεδόν ακαριαία. Τα φορτία συσσωρεύονται στην επιφάνεια του αγωγού και σχηματίζουν ένα επιφανειακό φορτίο που δημιουργεί ένα εσωτερικό επαγώμενο ηλεκτρικό πεδίο που αντιτίθεται και εξουδετερώνει το εξωτερικό πεδίο.

Αποτέλεσμα: Ένας ιδανικός αγωγός ($\sigma = \infty$) δεν μπορεί να έχει εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = 0$$

και η επιφάνεια του αγωγού είναι ισοδυναμική επιφάνεια.

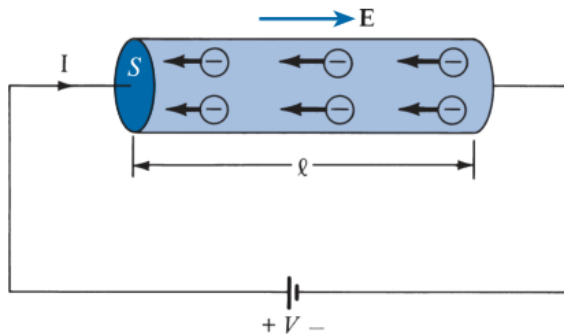
Εναλλακτικά, από τη σχέση $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ για πεπερασμένο \mathbf{J} όταν $\sigma = \infty$ πρέπει $\mathbf{E} = 0$.

Επομένως, στο εσωτερικό αγωγού για ηλεκτροστατικά πεδία:

$$\mathbf{E} = 0 \quad \rho_v = 0 \quad V_{ab} = 0$$

όπου a, b δυο οποιαδήποτε σημεία στο εσωτερικό του αγωγού. Ισοδυναμικό μέσο.

Αγωγός υπό τάση



Σχήμα: Αγωγός μήκους ℓ με ομοιόμορφη διατομή S .

Αγωγός υπό τάση (συνέχεια 1)

Εδώ, $\mathbf{E} \neq 0$ μέσα στον αγωγό γιατί δεν βρισκόμαστε πια σε μεμονωμένο σύστημα σε ισορροπία. Έχουμε:

$$E = \frac{V}{\ell} \quad J = \frac{I}{S} = \sigma E = \frac{\sigma V}{\ell}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{\rho_c \ell}{S}$$

η γνωστή μας ηλεκτρική αντίσταση, με $\rho_c = 1/\sigma$ η ειδική αντίσταση του υλικού.

Η ισχύς ορίζεται σαν τον ρυθμό μεταβολής ενέργειας ή, σαν δύναμη επί ταχύτητα.

$$P = \int_v \rho_v dv \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = \int_v \mathbf{E} \cdot \rho_v \mathbf{u} dv = \int_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$$

ο νόμος Joule.

Για αγωγό σταθερής διατομής, $dv = dS dl$ και

$$P = \int_L E dl \int_S J dS = VI = I^2 R$$

η γνώριμη ισχύς και νόμος Joule από τα κυκλώματα.

Παράδειγμα

Για $\mathbf{J} = (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})/r^3$ υπολογίστε το ρεύμα που διέρχεται από

- 1 Ένα ημισφαιρικό κέλυφος ακτίνας 20 cm, $0 < \theta < \pi/2$, $0 < \phi < 2\pi$.
- 2 Ένα σφαιρικό κέλυφος ακτίνας 10 cm.

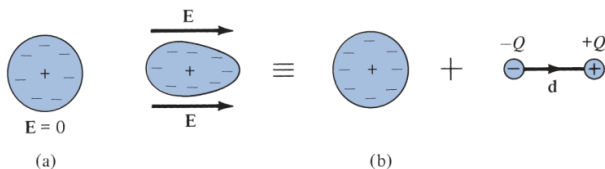
$$\begin{aligned} I &= \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}}{r^3} \cdot r^2 \sin \theta d\phi d\theta \hat{\mathbf{r}} = \\ &= \frac{2}{r} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta) = \frac{4\pi}{0.2} \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 10\pi = 31.4 \text{ A} \end{aligned}$$

Στη δεύτερη περίπτωση

$$I = \frac{4\pi}{0.1} \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 0$$

Πόλωση σε διηλεκτρικά

Υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου ένα αρχικά μη πολωμένο άτομο/μόριο εμφανίζει πόλωση.



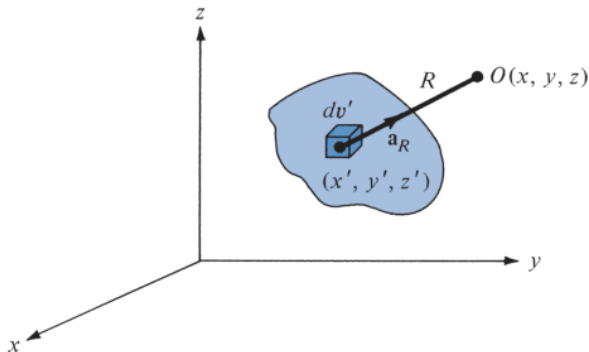
Σχήμα: Εμφάνιση πόλωσης σε μη πολωμένο άτομο/μόριο. Υπέρθεση.

Εάν το άτομο/μόριο έχει αρχική φυσική πόλωση το ηλεκτρικό πεδίο θα εφαρμόσει ροπή που θα προσανατολίσει τα δίπολα.

Ορίζουμε την πόλωση διηλεκτρικού (σε C/m^2) σαν την διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου για N δίπολα στον όγκο Δv .

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N Q_k \mathbf{d}_k}{\Delta v}$$

Πόλωση σε διηλεκτρικά (συνέχεια 1)



Σχήμα: Τμήμα διηλεκτρικού με διπολική ροπή \mathbf{P} ανά μονάδα όγκου.

Έστω τμήμα διηλεκτρικού υλικού με διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου \mathbf{P} . Το δυναμικό dV σε εξωτερικό σημείο O λόγω της διπολικής ροπής $\mathbf{P}dv'$ είναι:

Πόλωση σε διηλεκτρικά (συνέχεια 2)

$$dV = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R dv'}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

όπου $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Μπορεί να δειχθεί ότι:

$$\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\mathbf{a}_R}{R^2}$$

Οπότε

$$\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R}{R^2} = \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right)$$

και με χρήση της ταυτότητα $\nabla' \cdot f\mathbf{A} = f\nabla' \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla' f$ αυτό γίνεται:

$$\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R}{R^2} = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{R}$$

Πόλωση σε διηλεκτρικά (συνέχεια 3)

Ολοκληρώνοντας στον όγκο του υλικού:

$$\begin{aligned} V &= \int_{v'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{R} \right] dv' = \\ &= \oint_{S'} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}'_n}{4\pi\epsilon_0 R} dS' + \int_{v'} \frac{(-\nabla' \cdot \mathbf{P})}{4\pi\epsilon_0 R} dv' \end{aligned}$$

όπου \mathbf{a}'_n μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς τα έξω στην επιφάνεια S' του διηλεκτρικού. Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι το δυναμικό δημιουργείται από δεσμευμένες κατανομές φορτίου επιφάνειας και όγκου με πυκνότητες (παραλείπουμε τόνους):

$$\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n \quad \text{και} \quad \rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

και δεσμευμένα φορτία στην επιφάνεια και το εσωτερικό του διηλεκτρικού:

$$\begin{aligned} Q_b &= \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \oint \rho_{ps} dS \\ -Q_b &= \int_v \rho_{pv} dv = - \int_v \nabla \cdot \mathbf{P} dv \end{aligned}$$

Πόλωση σε διηλεκτρικά (συνέχεια 4)

Για αρχικά ουδέτερο διηλεκτρικό το ολικό φορτίο παραμένει ουδέτερο. Εάν αντιθέτως το διηλεκτρικό έχει αρχικά ελεύθερα φορτία με πυκνότητα ρ_v η ολική πυκνότητα θα είναι:

$$\begin{aligned}\rho_t &= \rho_v + \rho_{pv} = \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} \Rightarrow \\ \rho_v &= \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} - \rho_{pv} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \nabla \cdot \mathbf{D}\end{aligned}$$

και

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- Η επίδραση του διηλεκτρικού στο \mathbf{E} είναι να το αυξήσει κατά \mathbf{P} .
- Αύξηση της ηλεκτρικής ροής μέσα στο διηλεκτρικό.
- Για πολλά διηλεκτρικά η \mathbf{P} είναι ανάλογη του \mathbf{E} και έχουμε

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$$

όπου χ_e η ηλεκτρική επιδεκτικότητα (electric susceptibility) του υλικού που δείχνει πόσο επιδεκτικό (ευαίσθητο) είναι το διηλεκτρικό στο ηλεκτρικό πεδίο.

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E}$$

όπου ϵ η διαπερατότητα (permittivity) του μέσου ή διηλεκτρική σταθερά.

- Τα παραπάνω ισχύουν για ιδανικά διηλεκτρικά.
- Για ισχυρά πεδία ο διαχωρισμός φορτίων είναι τόσο έντονος που μπορεί να «σπάσει» τους κανονικούς δεσμούς και να τραβήξει ηλεκτρόνια από άτομα. Έχουμε διάτρηση διηλεκτρικού (dielectric breakdown). Εξαρτάται από: φύση υλικού, θερμοκρασία, υγρασία και διάρκεια εφαρμογής του πεδίου.
- Η ελάχιστη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου πάνω από την οποία έχουμε διάτρηση διηλεκτρικού ονομάζεται *διηλεκτρική αντοχή* του συγκεκριμένου υλικού.

Πίνακας διηλεκτρικής σταθεράς για μερικά υλικά

TABLE B.2 Approximate Dielectric Constant or Relative Permittivity (ϵ_r) and Strength of Some Common Materials*

Material	Dielectric Constant ϵ_r (Dimensionless)	Dielectric Strength E (V/m)
Barium titanate	1200	7.5×10^6
Water (sea)	80	
Water (distilled)	81	
Nylon	8	
Paper	7	12×10^6
Glass	5–10	35×10^6
Mica	6	70×10^6
Porcelain	6	
Bakelite	5	20×10^6
Quartz (fused)	5	30×10^6
Rubber (hard)	3.1	25×10^6
Wood	2.5–8.0	
Polystyrene	2.55	
Polypropylene	2.25	
Paraffin	2.2	30×10^6
Petroleum oil	2.1	12×10^6
Air (1 atm)	1	3×10^6

Γραμμικά, ισότροπα και ομογενή διηλεκτρικά

- **Γραμμικά:** Όταν το \mathbf{D} μεταβάλλεται γραμμικά με το \mathbf{E} .
- **Ομογενή:** Όταν το ϵ είναι σταθερό στο χώρο που εξετάζουμε. **Ανομοιογενή** όταν δεν είναι. Η ατμόσφαιρα π.χ. είναι ανομοιογενές μέσο γιατί το ϵ μεταβάλλεται με το ύψος.
- **Ισότροπα:** Όταν \mathbf{D} και \mathbf{E} συγγραμμικά. Οι ιδιότητες μεταβάλλονται με τον ίδιο τρόπο σε όλες τις κατευθύνσεις.

Γραμμικά, ισότροπα και ομογενή διηλεκτρικά (συνέχεια 1)

- Για **ανισότροπα** υλικά, π.χ. κρυσταλλικά υλικά και μαγνητισμένο πλάσμα

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

Παρόμοιες ονομασίες ισχύουν και για αγωγούς όπου $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ με την αγωγιμότητα σ .

Απλά υλικά αυτά που είναι γραμμικά, ισότροπα και ομογενή (linear, isotropic, homogeneous, LIH). Απλή αντικατάσταση $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$.

Εξίσωση συνέχειας

Από την αρχή διατήρησης του φορτίου η μεταβολή ελάττωσης του φορτίου Q_{in} μέσα σε κάποιο χώρο πρέπει να είναι ίση με την ροή του ρεύματος μέσω της επιφάνειας που περικλείει τον χώρο.

$$I_{out} = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_{in}}{dt}$$

Από το θεώρημα απόκλισης

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{J} dv$$

και επειδή

$$-\frac{dQ_{in}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_v \rho_v dv = -\int_v \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{J} dv = -\int_v \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

και

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

η εξίσωση συνέχειας.

Βασίστηκε στην αρχή διατήρησης του φορτίου και στην ουσία υπονοεί ότι δεν μπορούμε να έχουμε συσσώρευση φορτίου σε κάποιο χώρο. Για σταθερές καταστάσεις ρεύματος $\partial \rho_v / \partial t = 0$ και $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ από όπου εξάγεται ο κανόνας ρευμάτων Kirchhoff.

Εξίσωση συνέχειας (συνέχεια 1)

Εάν εισάγουμε φορτίο σε κάποιο υλικό έχουμε:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon}$$

$$\nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma \rho_v}{\epsilon} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_v = 0$$

γραμμική, ομογενής, συνήθης διαφορική εξίσωση με λύση:

$$\rho_v = \rho_{v0} \exp(-t/T_r)$$

όπου

$$T_r = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

ο χρόνος χαλάρωσης (relaxation time), δηλ. ο χρόνος που ελαττώνεται το φορτίο στο $1/e = 36.8\%$ της αρχικής τιμής.

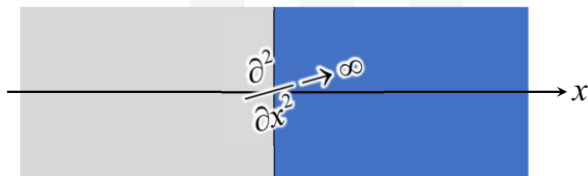
Π.χ. $T_r = 1.53 \times 10^{-19}$ s για το χαλκό και $T_r = 51.2$ ημέρες για τον χαλαζία.

Οριακές συνθήκες

Συχνά λύνουμε ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα με διαφορικές εξισώσεις.

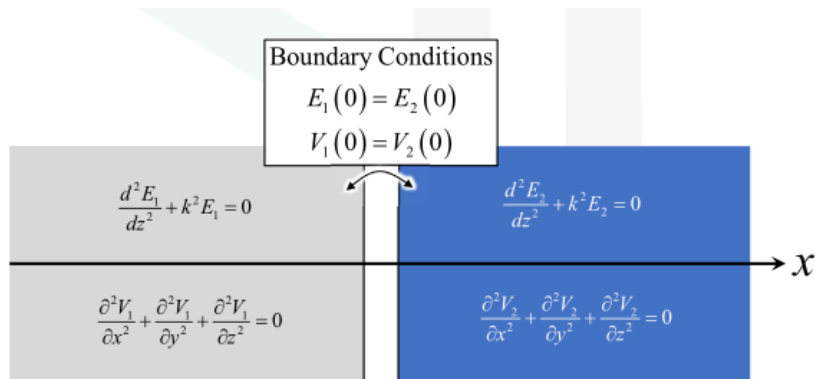
$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k^2 E = 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Μόνο που οι παράγωγοι απειρίζονται σε ασυνέχειες.



Οριακές συνθήκες (συνέχεια 1)

Άρα λύνουμε τις εξισώσεις σε κάθε περιοχή χωριστά και τις συνδέουμε στις διαχωριστικές επιφάνειες με τις οριακές συνθήκες.



Οριακές συνθήκες (συνέχεια 2)

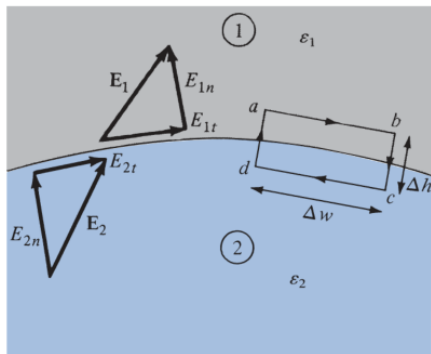
Και επειδή ολοκληρωτικές εξισώσεις δεν χρειάζονται οριακές συνθήκες αρκεί να μην περιέχουν παραγώγους, χρησιμοποιούμε

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0 \quad \text{και} \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{enc}$$

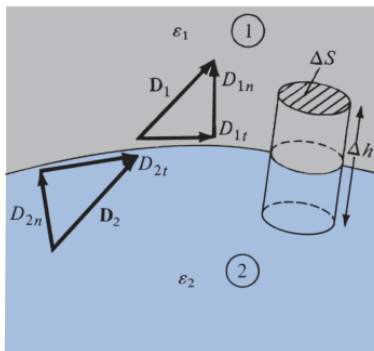
όπου Q_{enc} είναι το ελεύθερο φορτίο που εσωκλείεται από την επιφάνεια S . Βολεύει επίσης να «σπάσουμε» τα πεδία σε εφαπτόμενη και κάθετη συνιστώσα στη διαχωριστική επιφάνεια.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_n \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_t + \mathbf{D}_n$$

Διηλεκτρικό - διηλεκτρικό



(a)



(b)

Διηλεκτρικό - διηλεκτρικό (συνέχεια 1)

Από το (a)

$$0 = E_{1t}\Delta w - E_{1n}\frac{\Delta h}{2} - E_{2n}\frac{\Delta h}{2} - E_{2t}\Delta w + E_{2n}\frac{\Delta h}{2} + E_{1n}\frac{\Delta h}{2}$$

$$0 = (E_{1t} - E_{2t})\Delta w \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$$

Η εφαπτόμενη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι συνεχής και εφόσον $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \mathbf{D}_t + \mathbf{D}_n$ έχουμε

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$

η εφαπτόμενη συνιστώσα της πυκνότητας ηλεκτρικής ροής είναι ασυνεχής.

Από το (b)

$$\Delta Q = \rho_S \Delta S = D_{1n} \Delta S - D_{2n} \Delta S \Rightarrow$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S$$

και για $\rho_S = 0$ (μηδενικό ελεύθερο επιφανειακό φορτίο) η κάθετη συνιστώσα της πυκνότητας ηλεκτρικής ροής είναι συνεχής:

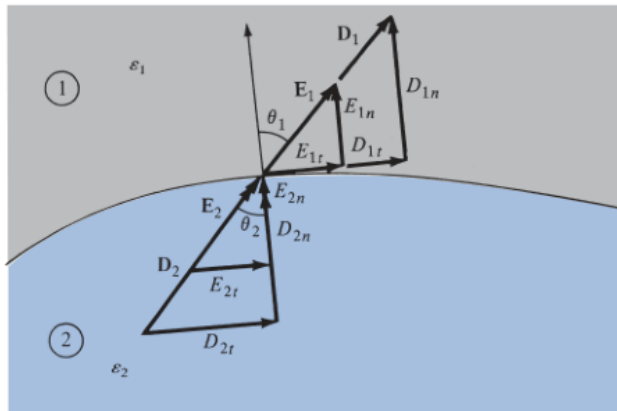
$$D_{1n} = D_{2n}$$

και η κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου ασυνεχής:

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

Διηλεκτρικό - διηλεκτρικό (συνέχεια 2)

Διάθλαση ηλεκτρικού πεδίου

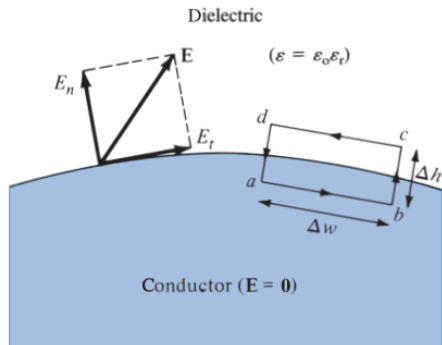


$$E_1 \sin \theta_1 = E_{1t} = E_{2t} = E_2 \sin \theta_2$$

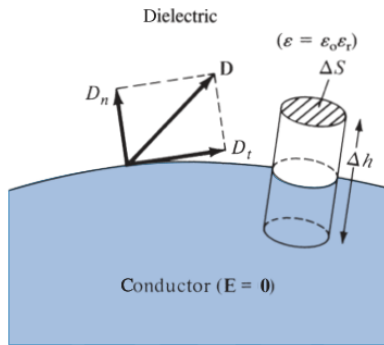
$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = D_{1n} = D_{2n} = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

Αγωγός - διηλεκτρικό



(a)



(b)

Αγωγός - διηλεκτρικό (συνέχεια 1)

$$0 = 0 \cdot \Delta w + 0 \cdot \frac{\Delta h}{2} + E_n \cdot \frac{\Delta h}{2} - E_t \cdot \Delta w - E_n \cdot \frac{\Delta h}{2} - 0 \cdot \frac{\Delta h}{2}$$

και καθώς $\Delta h \rightarrow 0$ έχουμε $E_t = 0$

$$\Delta Q = D_n \cdot \Delta S - 0 \cdot \Delta S \Rightarrow$$

$$D_n = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \rho_S$$

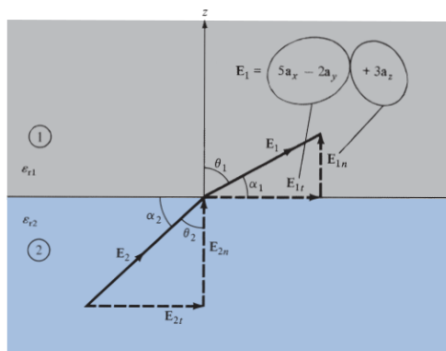
Συμπεράσματα:

- Μέσα στον αγωγό: $\rho_v = 0$, $\mathbf{E} = 0$, $\nabla V = 0$.
- Ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει εξωτερικά του αγωγού και είναι κάθετο στην επιφάνεια του. Ηλεκτρική ασπίδα (κλωβός Faraday).

Παράδειγμα

Δυο ομογενή, εκτεταμένα, ιστροπικά διηλεκτρικά έχουν κοινή επαφή το επίπεδο $z = 0$. Για $z > 0$, $\epsilon_{r1} = 4$ και για $z < 0$, $\epsilon_{r2} = 3$. Στο χώρο $z \geq 0$ έχουμε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_1 = (5, -2, 3)$ kV/m. Υπολογίστε:

- \mathbf{E}_2 για $z \leq 0$.
- Τις γωνίες που σχηματίζουν τα $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ με την διεπαφή.
- Την πυκνότητα ενέργειας σε J/m³ στα δυο διηλεκτρικά.
- Την ενέργεια σε κύβο ακμής 2 m με κέντρο στο $(3, 4, -5)$.



Παράδειγμα (λύση 1)

Κάθετες συνιστώσες: $\mathbf{E}_{1n} = (\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{z}} = (0, 0, 3)$ $\mathbf{E}_{2n} = (\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{z}}$

Επίσης, για παράλληλες συνιστώσες: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_t \Rightarrow$

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{1n} = (5, -2, 0) \quad \mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t} = (5, -2, 0)$$

και για το \mathbf{E}_2

$$\mathbf{D}_{2n} = \mathbf{D}_{1n} \Rightarrow \mathbf{E}_{2n} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \mathbf{E}_{1n} = \frac{4}{3}(3\hat{\mathbf{z}}) = 4\hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2t} + \mathbf{E}_{2n} = (5, -2, 4) \text{ kV/m}$$

Από το σχήμα, οι γωνίες που σχηματίζουν τα \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 με την διεπαφή:

$$\tan \theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} = 1.7951 \Rightarrow \theta_1 = 60.9^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 90^\circ - \theta_1 = 29.1^\circ$$

$$\tan \theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} = 1.3463 \Rightarrow \theta_2 = 53.4^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 90^\circ - \theta_2 = 36.6^\circ$$

Παράδειγμα (λύση 2)

Οι πυκνότητες ενέργειας:

$$w_{E1} = \frac{1}{2} \epsilon_1 |\mathbf{E}_1|^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{10^{-9}}{36\pi} (25 + 4 + 9) \times 10^6 = 6.72 \times 10^{-4} \text{ J/m}^3$$

$$w_{E2} = \frac{1}{2} \epsilon_2 |\mathbf{E}_2|^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{10^{-9}}{36\pi} (25 + 4 + 16) \times 10^6 = 5.97 \times 10^{-4} \text{ J/m}^3$$

Ο κύβος βρίσκεται εξ ολοκλήρου στην περιοχή 2. Οπότε:

$$W_E = w_{E2} \times 2^3 = 4.775 \times 10^{-3} \text{ J} = 4.775 \text{ mJ}$$