Ασκήσεις 01

Ηλεκτρομαγνητισμός

Α. Δροσόπουλος

31 Οκτωβρίου 2021

1 Μαθηματικό υπόβαθρο

1.1 Άσκηση

Εάν $\mathbf{A} = (1, \alpha, 1)$ και $\mathbf{B} = (\alpha, 1, 1)$ και **A**, **B** κάθετα μεταξύ τους, ποια η τιμή της παραμέτρου α;

Λύση

Πρέπει $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, οπότε, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (1, \alpha, 1) \cdot (\alpha, 1, 1) = \alpha + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1/2$.

1.2 Άσκηση

Ποιο είναι το μέτρο της προβολής του $\mathbf{A} = (6, 2, -3)$ στο $\mathbf{B} = (3, -4, 0)$;

Λύση

Ζητείται το $A \cos\theta$ όπου θ η γωνία μεταξύ των **A** και **B**.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta = (6, 2, -3) \cdot (3, -4, 0) \Rightarrow A\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{B} = 2$$

```
>> A=[6 2 -3]; B=[3 -4 0];
>> Ap = dot(A,B)/norm(B)
Ap = 2
```

1.3 Άσκηση

Έστω $\mathbf{A} = (-2, 5, 1)$, $\mathbf{B} = (1, 0, 3)$, $\mathbf{C} = (4, -6, 10)$. Υπολογίστε τα μεγέθη: $\mathbf{A} - \mathbf{B} + 5\mathbf{C}$, $(2\mathbf{A} + 5\mathbf{B})/|\mathbf{C}|$, $\hat{\mathbf{a}}_x \times \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, την γωνία μεταξύ **A** και **B**

Λύση

```
>> A=[-2 5 1]; B=[1 0 3]; C=[4 -6 10];
>> A-B+5*C
ans =
   17  -25   48
>> (2*A+5*B)/norm(C)
ans =
   0.081111   0.811107   1.378882
>> ax=[1 0 0]; cross(ax,A)
ans =
   0  -1   5
>> dot(A,cross(B,C))
ans = -32
>> acos(dot(A,B)/(norm(A)*norm(B)))*180/pi
ans = 86.690
```

1.4 Άσκηση

Έστω $\mathbf{A} = (4, 2, -1)$ και $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, 3)$. a) Εάν **A** και **B** παράλληλα, υπολογίστε α και β. b) Εάν **A** και **B** κάθετα, υπολογίστε α και β.

Λύση

a) Εάν **A** και **B** παράλληλα, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (6 + \beta, -12 + \alpha, 4\beta + 2\alpha) = 0 \Rightarrow \beta = -6 \qquad \alpha = 12 \qquad 4\beta + 2\alpha = 4(-6) + 2(12) = -24 + 24 = 0$$

b) Εάν **A** και **B** κάθετα, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 4\alpha + 2\beta - 3 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3 - 2\beta}{4} \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{3 - 4\alpha}{2}$$

Μια εξίσωση, δυο άγνωστοι άρα μόνο σχέση μεταξύ τους μπορούμε να έχουμε.

1.5 Άσκηση

Μετατρέψτε τις παρακάτω καρτεσιανές συντεταγμένες σε κυλινδρικές και σφαιρικές. $P(2, 5, 1)$, $Q(-3, 4, 0)$, $R(6, 2, -4)$.

Λύση

Διάλεξη 2, σελ 60.

Καρτεσιανές	$P(2, 5, 1)$	$Q(-3, 4, 0)$	$R(6, 2, -4)$
Κυλινδρικές	$P(5.3852, 68.199^\circ, 1)$	$Q(5, 126.87^\circ, 0)$	$R(6.3246, 18.435^\circ, -4)$
Σφαιρικές	$P(5.4772, 79.480^\circ, 68.199^\circ)$	$Q(5, 90^\circ, 126.87^\circ)$	$R(7.4833, 122.31^\circ, 18.435^\circ)$

```
octave:1> P=[2 5 1];
octave:2> rho=sqrt(P(1)^2+P(2)^2)
rho = 5.3852
octave:3> phi=atan2(P(2),P(1))*180/pi
phi = 68.199
octave:4> r=sqrt(P(1)^2+P(2)^2+P(3)^2)
r = 5.4772
octave:5> theta=acos(P(3)/r)*180/pi
theta = 79.480
octave:6> phi=atan2(P(2),P(1))*180/pi
phi = 68.199

octave:11> P=[-3 4 0]
octave:12> rho=sqrt(P(1)^2+P(2)^2)
rho = 5
octave:13> phi=atan2(P(2),P(1))*180/pi
phi = 126.87
octave:14> r=sqrt(P(1)^2+P(2)^2+P(3)^2)
r = 5
octave:15> theta=acos(P(3)/r)*180/pi
theta = 90
octave:16> phi=atan2(P(2),P(1))*180/pi
phi = 126.87

octave:1> P=[6 2 -4];
octave:2> rho=sqrt(P(1)^2+P(2)^2)
rho = 6.3246
octave:5> phi=phi=atan2(P(2),P(1))*180/pi
phi = 18.435
octave:6> r=sqrt(P(1)^2+P(2)^2+P(3)^2)
r = 7.4833
octave:7> theta=acos(P(3)/r)*180/pi
```

```
theta = 122.31
octave:8> phi=phi=atan2(P(2),P(1))*180/pi
phi = 18.435
```

1.6 Άσκηση

Εκφράστε τα παρακάτω διανύσματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

- $\mathbf{A} = \rho \sin\phi \, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \cos\phi \, \hat{\boldsymbol{\varphi}} - 2z \, \hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{B} = 4r \cos\phi \, \hat{\mathbf{r}} + r \, \hat{\boldsymbol{\theta}}$
- $\mathbf{F} = (4/r^2) \, \hat{\mathbf{r}}$

Λύση

Διάλεξη 2, σελ 60.

$$\mathbf{A} = \left(A_\rho \frac{x}{\rho} - A_\phi \frac{y}{\rho} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(A_\rho \frac{y}{\rho} + A_\phi \frac{x}{\rho} \right) \hat{\mathbf{y}} + A_z \, \hat{\mathbf{z}} = \sqrt{x^2+y^2} \, \hat{\mathbf{y}} - 2z \, \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B} = \left(\frac{B_r x}{r} + \frac{B_\theta xz}{r\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{B_\phi y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{B_r y}{r} + \frac{B_\theta yz}{r\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{B_\phi x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{B_r z}{r} - \frac{B_\theta \sqrt{x^2+y^2}}{r} \right) \hat{\mathbf{z}} =$$

$$= \left(\frac{4x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{4xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{4xz}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2} \right) \hat{\mathbf{z}} =$$

$$= \left(\frac{x(4x+z)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{y(4x+z)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{4xz}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{F} = \left(\frac{F_r x}{r} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{F_r y}{r} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{F_r z}{r} \right) \hat{\mathbf{z}} =$$

$$= \left(\frac{4x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{4y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{4z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

1.7 Άσκηση

Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των παρακάτω ζευγών σημείων. a) $(2,1,5)$ και $(6,-1,2)$. b) $(3,\pi/2,-1)$ και $(5,3\pi/2,5)$. c) $(10,\pi/4,3\pi/4)$ και $(5,\pi/6,7\pi/4)$. d) $(4,30^\circ,0^\circ)$ και $(6,90^\circ,180^\circ)$.

Λύση

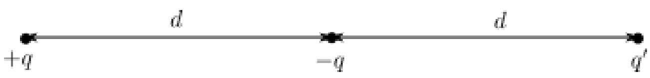
Διάλεξη 4, σελ 4.

```
octave:2> r1=[2 1 5]; r2=[6 -1 2]; d=norm(r2-r1)
d = 5.3852
octave:3> r1=[3 pi/2 -1]; r2=[5 3*pi/2 5];
octave:5> d=sqrt(r2(1)^2+r1(1)^2-2*r1(1)*r2(1)*cos(r2(2)-r1(2))+(r2(3)-r1(3))^2)
d = 10
octave:6> r1=[10 pi/4 3*pi/4]; r2=[5 pi/6 7*pi/4];
octave:7> d=sqrt(r2(1)^2+r1(1)^2-2*r1(1)*r2(1)*cos(r2(2))*cos(r1(2))-
          2*r1(1)*r2(1)*sin(r2(2))*sin(r1(2))*cos(r2(3)-r1(3)))
d = 9.9558
octave:8> r1=[4 30*pi/180 0]; r2=[6 90*pi/180 180*pi/180];
octave:9> d=sqrt(r2(1)^2+r1(1)^2-2*r1(1)*r2(1)*cos(r2(2))*cos(r1(2))-
          2*r1(1)*r2(1)*sin(r2(2))*sin(r1(2))*cos(r2(3)-r1(3)))
d = 8.7178
```

2 Ηλεκτροστατική

2.1 Άσκηση

Ποια είναι η σχέση μεταξύ των φορτίων $+q$, $-q$ και q' ώστε η δύναμη στο φορτίο $+q$ να είναι μηδέν; Ποια είναι η δυναμική ενέργεια του συστήματος;



Λύση

Η δύναμη στο $+q$ από το $-q$ είναι ελκτική. Για να μηδενίζεται η ολική δύναμη, η επι μέρους δύναμη από το q' πρέπει να είναι απωστική. Άρα:

$$K\frac{q^2}{d^2} = K\frac{qq'}{4d^2} \Rightarrow q' = 4q$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

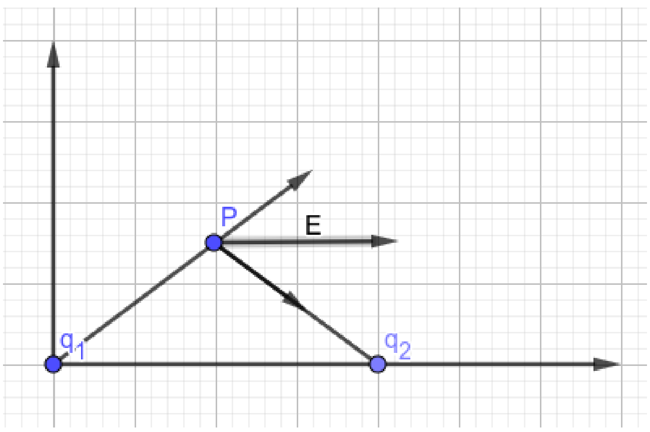
$$W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} Q_i V_i$$

όπου Q_i είναι $+q$, $-q$, q' αντίστοιχα και V_i είναι τα αντίστοιχα δυναμικά σε κάθε φορτίο από όλα τα άλλα φορτία. Άρα:

$$\begin{aligned}
W_E = \frac{1}{2}\left[q\left(-K\frac{q}{d} + K\frac{q'}{2d}\right) - q\left(K\frac{q}{d} + K\frac{q'}{d}\right) + q'\left(-K\frac{q}{d} + K\frac{q}{2d}\right)\right] &= \\
= \frac{K}{2}\left[\left(-\frac{q^2}{d} + \frac{4q^2}{2d}\right) - \left(\frac{q^2}{d} + \frac{4q^2}{d}\right) + \left(-\frac{4q^2}{d} + \frac{4q^2}{2d}\right)\right] &= \\
= \frac{K}{2}\left[-\frac{q^2}{d} - \frac{q^2}{d} - \frac{4q^2}{d} - \frac{4q^2}{d} + \frac{4q^2}{2d} + \frac{4q^2}{2d}\right] &= \\
= -\frac{K}{2}\frac{6q^2}{d} = -K\frac{3q^2}{d} = -\frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 d}
\end{aligned}$$

2.2 Άσκηση

Δυο σημειακά φορτία $q_1 = 1.25 \times 10^{-8}$ C, $q_2 = -1.25 \times 10^{-8}$ C βρίσκονται στα σημεία $(0,0)$ και $(8,0)$. Οι αποστάσεις σε m. Να βρεθεί η ένταση του πεδίου στο $(4,3)$.



Λύση

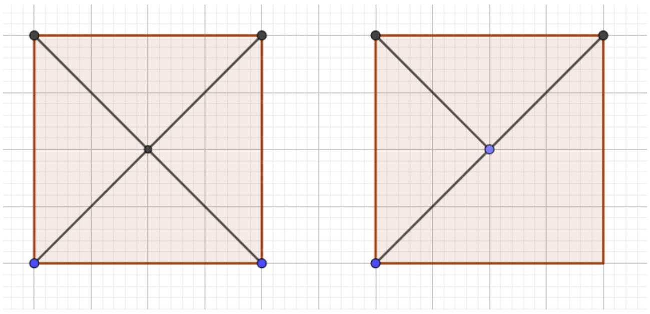
$$\mathbf{r} = (4,3) \qquad \mathbf{r}'_1 = (0,0) \qquad \mathbf{r}'_2 = (8,0)$$

$$\mathbf{E} = Kq_1\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_1|^3} + Kq_2\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_2|^3} = (7.2, 0)\ \mathrm{N/C}$$

```
>> r=[4 3]; r1=[0 0]; r2=[8 0]; K=9e9; q1=1.25e-8; q2=-1.25e-8;
>> E=K*q1*(r-r1)/(norm(r-r1))^3 + K*q2*(r-r2)/(norm(r-r2))^3
E =
   7.20000   0.00000
```

2.3 Άσκηση

Να βρεθεί η δύναμη σε φορτίο $4q$ στο κέντρο τετραγώνου όταν σε κάθε κορυφή του υπάρχει φορτίο q. Ποια είναι η δύναμη όταν σε μια από τις κορυφές του δεν υπάρχει φορτίο; Εφαρμογή για $q = 2$ C και πλευρά τετραγώνου $a = 0.2$ cm.



Λύση

Όλα τα φορτία ομώνυμα άρα δυνάμεις απωστικές. Όταν και οι τέσσερις κορυφές έχουν φορτίο, λόγω συμμετρίας, η δύναμη στο κέντρο είναι μηδέν. Όταν μόνο οι τρεις κορυφές έχουν φορτίο, μόνο η μια κορυφή απέναντι της κενής, μετρά. Αν a η πλευρά, $a\sqrt{2}$ η διαγώνιος και $a\sqrt{2}/2$ η ημι-διαγώνιος.

$$\mathbf{r} = (a/2, a/2) \qquad \mathbf{r}_1' = (0, a)$$

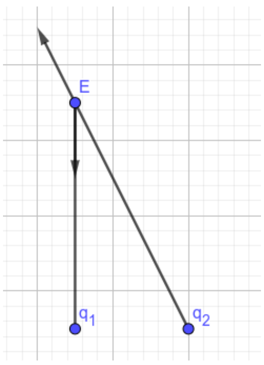
$$\mathbf{F} = K4q^2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1'|^3} = (-5.0912 \times 10^{16}, 5.0912 \times 10^{16}) \text{ N}$$

$$|\mathbf{F}| = 7.2000 \times 10^{16} \text{ N}$$

```
>> a=0.2e-2; r=[a/2 a/2]; r1=[0 a]; K=9e9; q=2;
>> F=K*4*q^2*(r-r1)/(norm(r-r1))^3
F =
  5.0912e+16   -5.0912e+16
>> norm(F)
ans =    7.2000e+16
```

2.4 Άσκηση

Δυο σημειακά φορτία $q_1 = -3$ μC και $q_2 = 12$ μC βρίσκονται στα σημεία $(0, 0)$ και $(30, 0)$. Οι αποστάσεις σε cm. α) Να υπολογιστεί το $\mathbf{E}$ στο σημείο $(0, 60)$. β) Να βρεθεί το σημείο P_0 στο οποίο $\mathbf{E} = 0$.



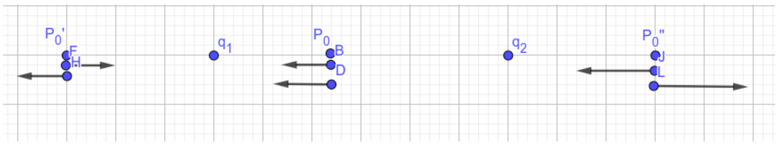
Λύση

$$\mathbf{r} = (0, 0.6) \qquad \mathbf{r}'_1 = (0, 0) \qquad \mathbf{r}'_2 = (0.3, 0)$$

$$\mathbf{E} = Kq_1 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|^3} + Kq_2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|^3} = (-1.073, 1.397) \times 10^5 \text{ N/C}$$

```
>> r=[0 0.6]; r1=[0 0]; r2=[0.3 0]; K=9e9; q1=-3e-6; q2=12e-6;
>> E=K*q1*(r-r1)/(norm(r-r1))^3 + K*q2*(r-r2)/(norm(r-r2))^3
E =
  -107331.26292   139662.52584
```

Για να μηδενιστεί το **E** το σημείο P_0 πρέπει να βρίσκεται στην ευθεία που ενώνει τα φορτία, δηλ. άξονα x και να βρίσκεται είτε αριστερά, είτε ανάμεσα, είτε δεξιά.



Αν είναι ανάμεσα, τα πεδία έχουν ίδια φορά, άρα δεν μηδενίζονται. Αν είναι δεξιά, είναι πιο κοντά στο μεγαλύτερο φορτίο που υπερισχύει, άρα πάλι δεν μηδενίζονται. Επομένως είναι αριστερά, σε απόσταση x από το q_1.

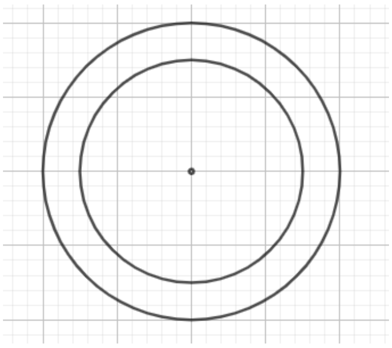
$$K\frac{|q_1|}{x^2} = K\frac{|q_2|}{(x+0.3)^2} \Rightarrow \cdots \Rightarrow x = \frac{0.3\sqrt{|q_1|}}{\sqrt{|q_2|} - \sqrt{|q_1|}} = 0.3 \text{ m}$$

Επομένως $P_0 = (-0.3, 0) \text{ m} = (-30, 0) \text{ cm}$.

```
>> x=(0.3*sqrt(abs(q1)))/(sqrt(abs(q2))-sqrt(abs(q1)))
x =  0.30000
```

2.5 Άσκηση

Φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα εντός σφαίρας με ακτίνα R με πυκνότητα ρ. Να βρεθούν α) η πυκνότητα ρ του φορτίου και β) το φορτίο εντός του εξωτερικού φλοιού με πάχος d. Δίδονται: $Q = 12$ C, $R = 4$ cm, $d = 1$ cm.



Λύση

$$Q = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} = 4.4762 \times 10^4 \text{ C/m}^3$$

Φορτίο q στο φλοιό:

$$q = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 - \rho\frac{4}{3}\pi (R-d)^3 = \frac{4\pi\rho}{3}\left[R^3 - (R-d)^3\right] = 6.9375 \text{ C}$$

```
>> Q=12; R=4e-2; d=1e-2;
>> rho=(3*Q)/(4*pi*R^3)
rho =  44762.32774
>> q=(4*pi*rho/3)*(R^3-(R-d)^3)
q =  6.9375
```

2.6 Άσκηση

Φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα με μορφή λεπτού δακτυλίου ακτίνας a. Υπολογίστε το **E** στον άξονα του δακτυλίου. Σε ποια απόσταση από το κέντρο του δακτυλίου και επί του άξονά του η ένταση του πεδίου **E** γίνεται μέγιστη; (Να εκφραστεί με μονάδα το a). Αντί για δακτύλιο θεωρείστε λεπτό δίσκο ακτίνας r στον οποίο κατανέμεται ομοιόμορφα το φορτίο Q.

Λύση

Από Διάλεξη 3, διαφάνεια 34 έχουμε:

$$\mathbf{E}(0,0,h) = \frac{\rho_L a h}{2\epsilon_0 (h^2 + a^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{z}}$$

Το φορτίο είναι $Q = \rho_L L = \rho_L 2\pi a \Rightarrow \rho_L = Q/(2\pi a)$. Με $h \to z$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \frac{Qaz}{(2\pi a)2\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{z}}$$

Από Διάλεξη 3, διαφάνεια 33 έχουμε μέγιστο πεδίο στην απόσταση

$$h = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Από Διάλεξη 4, διαφάνεια 20, για δίσκο ακτίνας a έχουμε:

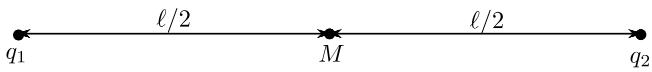
$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Το φορτίο τώρα είναι $Q = \rho_S S = \rho_S \pi a^2 \Rightarrow \rho_S = Q/(\pi a^2)$ και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{2\epsilon_0 \pi a^2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

2.7 Άσκηση

Υπολογίστε το έργο κατά τη μετακίνηση του φορτίου q_2 μέχρι του μέσου M. Δίδονται: $q_1 = 4\ \mu$C, $q_2 = 2\ \mu$C και $\ell = 40$ cm.



Λύση

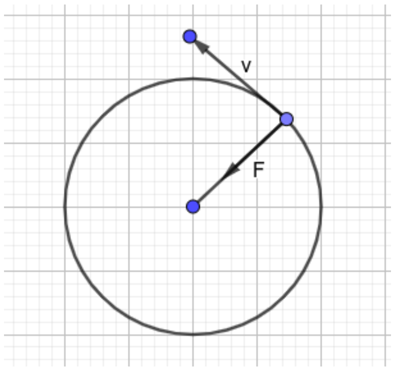
Από Διάλεξη 3, διαφάνεια 51 έχουμε:

$$W = q_2 V_{AB} = q_2\left(\frac{Kq_1}{r_B} - \frac{Kq_1}{r_A}\right) = Kq_2 q_1\left(\frac{2}{\ell} - \frac{1}{\ell}\right) = 0.18 \text{ J}$$

```
>> q1=4e-6; q2=2e-6; ell=0.4; K=9e9;
>> W=q2*K*q1*(1/(ell/2)-1/ell)
W =  0.18000
```

2.8 Άσκηση

Υπολογίστε κλασσικά τη συχνότητα περιστροφής, τη γραμμική ταχύτητα και τη στροφορμή του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου ($R = 0.53$ Å, $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C).



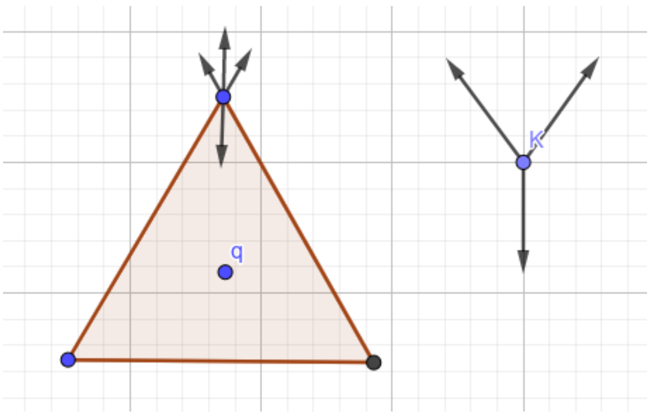
Λύση

$$F = \frac{mv^2}{R} = K\frac{e^2}{R^2} \Rightarrow v = e\sqrt{\frac{K}{mR}} = 2.187 \times 10^6 \text{ m/s}$$
$$\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 6.568 \times 10^{15} \text{ Hz}$$
$$L = mvR = 1.056 \times 10^{-34} \text{ kgm}^2/\text{s}$$

```
>> K=9e9; e=1.602e-19; m=9.11e-31; R=0.53e-10;
>> v=e*sqrt(K/(m*R))
v =  2187190.66266
>> printf("v = %g\n",v)
v = 2.18719e+06
>> w=v/R
w =    4.1268e+16
>> f=w/(2*pi)
f =  6567966140516086
>> printf("f = %g\n",f)
f = 6.56797e+15
>> L=m*v*R
L =    1.0560e-34
```

2.9 Άσκηση

Θεωρείστε ένα ηλεκτρόνιο σε κάθε κορυφή ισοπλεύρου τριγώνου και φορτίο $q > 0$ στο κέντρο βάρους αυτού. Να βρεθεί το φορτίο q για το οποίο μηδενίζεται η δύναμη σε κάθε ηλεκτρόνιο.



Λύση

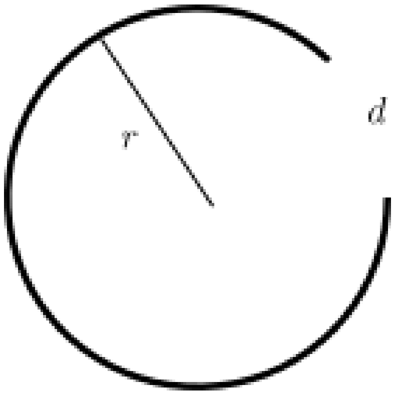
Πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου a. Ύψος $v = a\sqrt{3}/2$. Απόσταση κορυφής από κέντρο βάρους $(2/3)v = a\sqrt{3}/3$.

$$F_e = K\frac{e^2}{a^2} \qquad F_q = K\frac{qe}{a^2/3}$$

$$2F_e\cos(30^\circ) = F_q \Rightarrow 2K\frac{e^2}{a^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = K\frac{3qe}{a^2} \Rightarrow q = e\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2.10 Άσκηση

Δακτύλιος με ακτίνα r έχει διάκενο d και είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με φορτίο Q. Να βρεθεί το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο του δακτυλίου. Δίδονται: $Q = 2\ \mu$C, $r = 1$ m, $d = 2$ cm.



Λύση

Αν δεν υπήρχε διάκενο, το πεδίο λόγω συμμετρίας θα ήταν μηδέν. Εφόσον υπάρχει διάκενο, το πεδίο είναι μη μηδενικό και οφείλεται αποκλειστικά στο κομμάτι φορτίου απέναντι από το διάκενο.

Από Διάλεξη 3, διαφάνεια 33 έχουμε:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\int_{\phi'=0}^{2\pi}\frac{(-a\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + h\,\hat{\mathbf{z}})}{(a^2+h^2)^{3/2}}\,a\,d\phi'$$

Στην περίπτωσή μας γίνεται

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\int_{\phi'=\phi_1}^{\phi_2}\frac{(-r\,\hat{\boldsymbol{\rho}})}{(r^2)^{3/2}}\,r\,d\phi' = -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 r}\int_{\phi'=\phi_1}^{\phi_2}d\phi'\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\rho_L d}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Υπενθυμίζεται ότι το μήκος τόξου d σε κύκλο ακτίνας r που αντιστοιχεί σε γωνία ϕ είναι $d = r\phi$. Το φορτίο $Q = \rho_L(2\pi r - d) \Rightarrow \rho_L = Q/(2\pi r - d)$ και

$$E = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^2(2\pi r - d)} = 57.479\ \mathrm{V/m}$$

```
>> K=9e9; Q=2e-6; r=1; d=2e-2;
>> E=K*Q*d/(r^2*(2*pi*r-d))
E =  57.479
```

2.11 Άσκηση 1

Δείξτε ότι

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{και} \quad \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)$$

όπου $\mathbf{r} = (x, y, z)$ και $\mathbf{r}' = (x', y', z')$.

Λύση

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{y}} - \frac{1}{2}\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{z}} = -\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{2(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{2(y-y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{2(z-z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{z}}=-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x'}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial}{\partial y'}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial}{\partial z'}\hat{\mathbf{z}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{(-2)(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(-2)(y-y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(-2)(z-z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{z}}=\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

2.12 Άσκηση 6

Υπολογίστε την απόκλιση του πεδίου σημειακού φορτίου.

Λύση

Ηλεκτροστατικό πεδίο από σημειακό φορτίο Q:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

όπου $\mathbf{r}$ η θέση που υπολογίζουμε το πεδίο και $\mathbf{r}'=0$ (επιλογή για δική μας ευκολία) η θέση που είναι στερεωμένο το Q. Η απόκλιση του πεδίου είναι $\nabla\cdot\mathbf{E}$. Προφανώς βολεύουν σφαιρικές συντεταγμένες.

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right]=0\quad\text{για}\quad r\neq 0$$

Αν πάρουμε το όριο για $r\to 0$ τότε $\nabla\cdot\mathbf{E}\to\infty$.

Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσω μιας σφαιρικής επιφάνειας με κέντρο το φορτίο είναι

$$\oint_S\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\oint_S\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dS=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}(4\pi r^2)=\frac{Q}{\epsilon_0}$$

σε συμφωνία με το νόμο του Gauss. Σύμφωνα με το θεώρημα απόκλισης:

$$\int_v\nabla\cdot\mathbf{E}\,dv=\oint_S\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\frac{Q}{\epsilon_0}$$

κάτι πεπερασμενο. Το κλειδί είναι το $r=0$. Ο νόμος Gauss σε διαφορική μορφή είναι $\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho/\epsilon_0$ όπου ρ η πυκνότητα του φορτίου. Θέλουμε λοιπόν κάτι που να απειρίζεται στο μηδέν αλλά όταν ολοκληρώνουμε σε μια απειροστή περιοχή γύρω του να έχουμε κάτι πεπερασμένο. Αυτός είναι και ο ορισμός της συνάρτησης δ του Dirac. Επομένως η απόκλιση για όλα τα r συμπεριλαμβανομένου και του $r=0$ είναι:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r})$$

και για φορτίο στη θέση $\mathbf{r}'$ γενικεύεται:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

2.13 Άσκηση 12

Το ηλεκτρικό πεδίο γραμμικής κατανομής φορτίου είναι

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

όπου λ σταθερά. Δείξτε ότι το **E** είναι σωληνοειδές και συντηρητικό.

Λύση

Σωληνοειδές όταν $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$. Συντηρητικό όταν $\nabla\times\mathbf{E}=0$.

Το **E** είναι σε κυλινδρικές συντεταγμένες με $\mathbf{E}=E_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}$ όπου $E_\rho=\lambda/(2\pi\epsilon\rho)$. Επομένως:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho E_\rho\Big) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho E_\rho\Big) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\right) = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho E_\rho\Big) - \frac{\partial E_\rho}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{z}} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho E_\rho\Big)\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\Big)\hat{\mathbf{z}} = 0$$

2.14 Άσκηση 16

Το πεδίο ηλεκτρικού διπόλου δίδεται από

$$\mathbf{E} = k\frac{(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})}{r^3}$$

όπου k σταθερά. Δείξτε ότι το **E** είναι συντηρητικό.

Λύση

Πρέπει $\nabla\times\mathbf{E}=0$. Οπότε, σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\nabla\times\mathbf{E} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(E_\phi\sin\theta\Big) - \frac{\partial E_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\Big(rE_\phi\Big)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\Big(rE_\theta\Big) - \frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} =$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{k\sin\theta}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{2k\cos\theta}{r^3}\right)\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{1}{r}\left[-\frac{2k\sin\theta}{r^3} + \frac{2k\sin\theta}{r^3}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} = 0$$

2.15 Άσκηση 2

Δώστε την αναλυτική έκφραση του **E** στις περιπτώσεις: $V_1 = x^3+2x^2y+3y^2z$ και $V_2=(x-2)(y-4)+8$. Προσδιορίστε τα σημεία στα οποία η ένταση του πεδίου είναι μηδέν.

Λύση

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla V_1 = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\Big(x^3+2x^2y+3y^2z\Big) = -(3x^2+4xy)\,\hat{\mathbf{x}} - (2x^2+6yz)\,\hat{\mathbf{y}} - 3y^2\,\hat{\mathbf{z}}$$

Για $\mathbf{E}_1=0$ πρέπει οι τρεις συνιστώσες να μηδενίζονται και αυτό γίνεται για $x=0$, $y=0$, z οτιδήποτε, δηλ. άξονας z.

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla V_2 = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\Big((x-2)(y-4)+8\Big) = -(y-4)\,\hat{\mathbf{x}} - (x-2)\,\hat{\mathbf{y}}$$

Για $\mathbf{E}_2=0$ πρέπει οι τρεις συνιστώσες να μηδενίζονται και αυτό γίνεται για $x=2$, $y=4$, z οτιδήποτε, δηλ. τομή επιπέδων $x=2$, $y=4$, γραμμή παράλληλη στον άξονα z.

2.16 Άσκηση 3

Ποια από τα παρακάτω ηλεκτρικά πεδία είναι ηλεκτροστατικά; Ποια ικανοποιούν την εξίσωση Laplace; Οι ποσότητες c_1, c_2, c_3 είναι σταθερές.

$$\mathbf{E}_1 = (c_1 x, c_2 x, c_3 z) \quad \mathbf{E}_2 = (c_1 yz, c_2 zx, c_3 xy) \quad \mathbf{E}_3 = (c_1 x, c_2 y, c_3 z) \quad \mathbf{E}_4 = (c_1 xy, c_2 yz, c_3 zx)$$

Λύση

Για ένα ηλεκτροστατικό πεδίο ισχύει $\mathbf{E} = -\nabla V$ και ισχύει $\nabla \times (\nabla V) = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0$. Η τελευταία σχέση μάλιστα βγαίνει κατευθείαν από τον νόμο Faraday (εξίσωση Maxwell): $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$, επειδή στα ηλεκτροστατικά πεδία δεν έχουμε μεταβολές στο χρόνο και επομένως $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$.

Για $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ έχουμε

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 : &\quad \nabla \times \mathbf{E}_1 = (0, 0, c_2) \neq 0 \\ \mathbf{E}_2 : &\quad \nabla \times \mathbf{E}_2 = (c_3 x - c_2 x, c_1 y - c_3 y, c_2 z - c_1 z) \neq 0 \\ \mathbf{E}_3 : &\quad \nabla \times \mathbf{E}_3 = (0, 0, 0) = 0 \\ \mathbf{E}_4 : &\quad \nabla \times \mathbf{E}_4 = (-c_2 y, -c_3 z, -c_1 x) \neq 0 \end{aligned}$$

Μόνο το $\mathbf{E}_3$ είναι ηλεκτροστατικό.

Η εξίσωση Laplace είναι $\nabla^2 V = 0$. Από $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = 0$ βγαίνει ότι θέλουμε $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 : &\quad \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = c_1 \neq 0 \\ \mathbf{E}_2 : &\quad \nabla \cdot \mathbf{E}_2 = 0 \\ \mathbf{E}_3 : &\quad \nabla \cdot \mathbf{E}_3 = c_3 + c_2 + c_1 \neq 0 \\ \mathbf{E}_4 : &\quad \nabla \cdot \mathbf{E}_4 = c_2 z + c_3 x + c_1 y \neq 0 \end{aligned}$$

Μόνο το $\mathbf{E}_2$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

2.17 Άσκηση 4

Να βρεθεί η συνάρτηση $q(r)$ για την οποία $\nabla \cdot [q(r)\mathbf{r}] = 0$.

Λύση

Έχουμε $\nabla \cdot [q(r)\mathbf{r}] = \nabla \cdot [q(r)\, r\, \hat{\mathbf{r}}]$ με την συνάρτηση που θέλουμε να υπολογίσουμε την απόκλιση να είναι συνάρτηση μόνο του r. Επιλέγουμε σφαιρικές συντεταγμένες και έχουμε:

$$\nabla \cdot [q(r)\, r\, \hat{\mathbf{r}}] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 q(r) r] = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^3 q(r)] = \frac{1}{r^2} \Big(3r^2 q + r^3 q' \Big) = 3q + rq' = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{q'}{q} = -\frac{3}{r} \Rightarrow \ln q = -3 \ln r = \ln r^{-3} \Rightarrow q(r) = c r^{-3}$$

2.18 Άσκηση 5

Να υπολογιστούν οι συνιστώσες E_x, E_y και η πυκνότητα του φορτίου ρ ηλεκτρικού πεδίου με δυναμικό $V = cx/y$, όπου c σταθερή ποσότητα.

Λύση

$$V = c\frac{x}{y} \qquad \nabla V = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(c\frac{x}{y} \right) = c \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}, 0 \right)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \left(-\frac{c}{y}, \frac{cx}{y^2}, 0\right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(-\frac{c}{y}, \frac{cx}{y^2}, 0\right) = -\frac{2\epsilon_0 cx}{y^3}$$

2.19 Άσκηση 7

Δυο ομόκεντροι μεταλλικοί φλοιοί έχουν φορτίο μηδέν ο εσωτερικός και q ο εξωτερικός. Να υπολογιστούν τα V και E συναρτήσει του r. Να υπολογιστεί η ενέργεια του πεδίου και να συγκριθεί με το έργο που καταναλώνεται για τη δημιουργία του συστήματος φορτίων που δημιουργούν το πεδίο.

Λύση

Νόμος Gauss για σφαιρικές επιφάνειες με κέντρο το κέντρο των φλοιών δίνει $E = 0$ για $r < r_{\varepsilon\xi}$ και πεδίο σημειακού φορτίου Kq/r^2 για $r > r_{\varepsilon\xi}$. Το δυναμικό στην επιφάνεια του εξωτερικού φλοιού είναι λοιπόν

$$V_{\varepsilon\xi} = K\frac{q}{r_{\varepsilon\xi}}$$

Η ενέργεια του πεδίου για $r = r_{\varepsilon\xi}$ είναι

$$\frac{1}{2}\int_v \epsilon_0 E^2 \, dv = \frac{\epsilon_0}{2}\left(K\frac{q}{r^2}\right)^2 \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Kq^2}{2r} = \frac{Kq^2}{2r_{\varepsilon\xi}}$$

και το έργο που καταναλώνεται για τη δημιουργία αυτού του συστήματος φορτίων

$$\frac{1}{2}qV_{\varepsilon\xi} = \frac{1}{2}qK\frac{q}{r_{\varepsilon\xi}} = \frac{Kq^2}{2r_{\varepsilon\xi}}$$

ίσο με την ενέργεια.

Για το δυναμικό, εφόσον το πεδίο είναι μηδέν στο εσωτερικό του εξωτερικού φλοιού το δυναμικό είναι σταθερό και ίσο με το δυναμικό στην επιφάνεια του εξωτερικού φλοιού. Για $r > r_{\varepsilon\xi}$ είναι ίσο με το δυναμικό σημειακού φορτίου q στο κέντρο του φλοιού.

2.20 Άσκηση 8

Φορτίο κατανέμεται εντός σφαίρας με ακτίνα r_0 και πυκνότητα $\rho = a/r$ όπου a σταθερά. Να υπολογιστούν **E** και V εντός και εκτός της σφαίρας. Να υπολογιστεί η τιμή του a συναρτήσει του ολικού φορτίου q και της ακτίνας r_0.

Λύση

$$\text{ολικό φορτίο} \quad q = \int_v \rho dv = \int_{r=0}^{r_0} \frac{a}{r} r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = \frac{ar_0^2}{2} \times 2 \times 2\pi = 2\pi a r_0^2 \Rightarrow a = \frac{q}{2\pi r_0^2}$$

Εντός σφαίρας όπου $r < r_0$

$$\epsilon_0 \int EdS = \int \rho dv \Rightarrow \epsilon_0 E 4\pi r^2 = 2\pi a r^2 \Rightarrow E = \frac{a}{2\epsilon_0} \quad \text{και} \quad \mathbf{E} = \frac{a}{2\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Στην επιφάνεια της σφαίρας το δυναμικό είναι σαν σημειακού φορτίου:

$$V(r = r_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{2\pi a r_0^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{ar_0}{2\epsilon_0}$$

$$V = -\int Edr = -\frac{a}{2\epsilon_0}r + A \Rightarrow \frac{ar_0}{2\epsilon_0} = -\frac{a}{2\epsilon_0}r_0 + A \Rightarrow A = \frac{ar_0}{\epsilon_0} \Rightarrow V = -\frac{a}{2\epsilon_0}r + \frac{ar_0}{\epsilon_0} = \frac{a}{\epsilon_0}\left(r_0 - \frac{r}{2}\right)$$

Εκτός σφαίρας όπου $r > r_0$ όλα είναι σαν σημειακού φορτίου:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{2\pi a r_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{ar_0^2}{2\epsilon_0 r^2} \qquad \mathbf{E} = \frac{ar_0^2}{2\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{ar_0^2}{2\epsilon_0 r}$$

2.21 Άσκηση 15

Το πεδίο $\mathbf{D} = (3\rho + 1)\sin\phi\,\hat{\mathbf{z}}$ είναι σωληνοειδές. Ναι ή όχι;

Λύση

Πρέπει $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$. Έχουμε, σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho D_\rho\Big) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\partial[(3\rho+1)\sin\phi]}{\partial z} = 0$$

2.22 Άσκηση 17

Αν $V = (5\cos\phi)/r^2$ βρείτε ∇V, $\nabla \cdot \nabla V$, $\nabla \times \nabla V$.

Λύση

Έχουμε σφαιρικές συντεταγμένες.

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\frac{10\cos\phi}{r^3}\,\hat{\mathbf{r}} - \frac{5\sin\phi}{r^3\sin\theta}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{A} = A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 A_r\Big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(A_\theta\sin\theta\Big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} = \frac{10\cos\phi}{r^4} - \frac{5\cos\phi}{r^4\sin^2\theta} = \frac{5\cos\phi}{r^4}\left(2 - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(A_\phi\sin\theta\Big) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\Big(rA_\phi\Big)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\Big(rA_\theta\Big) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} =$$

$$= -\frac{5\cos\phi}{r^4\sin\theta}\,\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{10\sin\phi}{r^4\sin\theta} + \frac{10\sin\phi}{r^4\sin\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{5\cos\phi}{r^4\sin\theta}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{20\sin\phi}{r^4\sin\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$