

Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 03

A. Δροσόπουλος

25-10-2021

1 Από προηγούμενη

2 Ηλεκτροστατική

1 Από προηγούμενη

2 Ηλεκτροστατική

Πρόβλημα 1.43

$$(a) \int_0^6 (3x^2 - 2x - 1)\delta(x - 3)dx = (3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 1) = 20$$

$$(b) \int_0^5 \cos(x)\delta(x - \pi)dx = \cos(\pi) = -1$$

$$(c) \int_0^3 x^3 \delta(x + 1)dx = 0$$

$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} \ln(x + 3)\delta(x + 2)dx = \ln(1) = 0$$

Πρόβλημα 1.44

$$(a) \int_{-2}^2 (2x + 3)\delta(3x)dx = (0 + 3)/3 = 1$$

$$(b) \int_0^2 (x^3 + 3x + 2)\delta(1 - x)dx = 1^3 + 3 \cdot 1 + 2 = 6$$

$$(c) \int_{-1}^1 9x^2\delta(3x + 1)dx = \int_{-1}^1 9x^2\frac{1}{3}\delta(x + \frac{1}{3})dx = 9(-\frac{1}{3})^2\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

(d)

$$\int_{-\infty}^a \delta(x - b)dx = \begin{cases} 1 & \text{για } b < a \\ 0 & \text{για } b > a \end{cases}$$

Πρόβλημα 1.45a

Δείξτε ότι

$$x \frac{d}{dx} \delta(x) = -\delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[x \frac{d}{dx} \delta(x) \right] dx = x f(x) \delta(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (x f(x)) \delta(x) dx$$

Πρώτος όρος μηδέν. Επίσης:

$$\frac{d}{dx} (x f(x)) = x \frac{df(x)}{dx} + f(x)$$

Άρα, ο δεύτερος όρος:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \left[x \frac{df(x)}{dx} + f(x) \right] \delta(x) dx = 0 - f(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx \Rightarrow$$
$$x \frac{d}{dx} \delta(x) = -\delta(x)$$

Πρόβλημα 1.45b

Αν $\theta(x)$ η συνάρτηση βαθμίδας

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } x > 0 \\ 0 & \text{για } x \leq 0 \end{cases}$$

δείξτε ότι $d\theta/dx = \delta(x)$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\frac{d\theta}{dx} \right] dx &= f(x)\theta(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} \theta(x) dx = f(\infty) - \int_0^{\infty} \frac{df}{dx} dx = \\ &= f(\infty) - [f(\infty) - f(0)] = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx \Rightarrow \\ & \quad d\theta/dx = \delta(x) \end{aligned}$$

1 Από προηγούμενη

2 Ηλεκτροστατική

Η μελέτη της αλληλεπίδρασης μεταξύ υλικών σωμάτων οδηγεί στην παραδοχή μιας φυσικής οντότητας, του ηλεκτρικού φορτίου, που η παρουσία του γίνεται αντιληπτή, μεταξύ άλλων, από αναπτυσσόμενες ελκτικές ή απωστικές δυνάμεις μεταξύ φορτισμένων σωμάτων. Την οντότητα του ηλεκτρικού φορτίου την δεχόμαστε αξιωματικά για να εξηγήσουμε τα ηλεκτρικά φαινόμενα που παρατηρούμε γύρω μας. Εντελώς ανάλογα αποδεχόμαστε και την οντότητα της μάζας για υλικά σώματα.

Τα φορτία στη φύση τα διακρίνουμε σε δυο είδη, θετικό και αρνητικό. Η ονομασία είναι αυθαίρετη ([Benjamin Franklin](#)) γιατί δεν υπάρχει ιδιότητα του ηλεκτρικού φορτίου που να δικαιολογεί αυτόν τον χαρακτηρισμό. Εκείνο που χαρακτηρίζει τα φορτία είναι η έλξη μεταξύ αντιθέτων (ετερωνύμων) και η άπωση μεταξύ ομοίων (ομονύμων) φορτίων.

Walter Lewin

- [walt01](#), What holds our world together
- [walt02](#), πρώτο πείραμα στατικού ηλεκτρισμού, επαγωγή, ανταλλαγή φορτίου
- [walt03](#), φόρτιση μονωτή - εισαγωγή
- [walt04](#), φόρτιση μονωτή - πείραμα
- [walt05](#), beating Simon
- [walt06](#), flying hair

Λεπτομέρειες για γεννήτρια [van de Graaff](#).

Ισχύει η αρχή της διατηρήσεως, όπου το ολικό άθροισμα θετικών και αρνητικών φορτίων σε ένα μεμονωμένο σύστημα παραμένει σταθερό με την πάροδο του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε ηλεκτρικό φορτίο από το τίποτα αλλά ούτε και να το καταστρέψουμε. Μεμονωμένο σύστημα θεωρούμε εκείνο στο οποίο δεν γίνεται ανταλλαγή μάζας με το περιβάλλον.

Παραβίαση αυτής της αρχής θα αποτελούσε π.χ. η δημιουργία μεμονωμένα ενός φορτισμένου σωματιδίου, κάτι που δεν έχει παρατηρηθεί ποτέ. Δημιουργία φορτίων παρατηρείται, αλλά πάντα σε ζεύγη αντιθέτως φορτισμένων σωματιδίων με συνολικό αλγεβρικό άθροισμα φορτίου μηδέν. Π.χ. δίδυμη γένεση ([pair production](#)) όπου ένα φωτόνιο κατάλληλης ενέργειας μετατρέπεται σε ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου (ίσο και αντίθετο φορτίο, ίσα ακριβώς μάζα).

Ηλεκτρικό Φορτίο 3

Το ηλεκτρικό φορτίο έχει επίσης την ιδιότητα να παραμένει αναλλοίωτο κατά τους μετασχηματισμούς Lorentz μεταξύ αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα φορτίου σε ένα σώμα είναι ανεξάρτητη από την κινητική κατάσταση του σώματος σε σχέση με παρατηρητή που μετράει. Η ιδιότητα αυτή σχετίζεται με τη μεταβολή της μάζας ενός σώματος σε σχέση με την ταχύτητά του όπως περιγράφεται από τη θεωρία της σχετικότητας. Σε πειράματα, το μετρήσιμο μέγεθος είναι ο λόγος q/m , όπου m η μάζα του σώματος και q είναι το φορτίο που μεταφέρει. Η μεταβολή του λόγου αυτού με την ταχύτητα εξηγείται πλήρως, και μόνο, με τη μεταβολή της μάζας με την ταχύτητα

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

όπου m_0 είναι η μάζα ηρεμίας του σώματος, v είναι η ταχύτητά του και c είναι η ταχύτητα του φωτός. Επομένως δεχόμαστε ότι το φορτίο είναι ανεξάρτητο της ταχύτητας.

Άλλη βασική ιδιότητα είναι η κβάντωση, όπου οποιαδήποτε ποσότητα ηλεκτρικού φορτίου είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του φορτίου e του ηλεκτρονίου (**elementary charge**). Πειράματα ακριβείας μέχρι τα μέσα του περασμένου αιώνα δείχνουν ότι αν υπάρχει διαφορά, θα είναι μικρότερη από $10^{-20} e$. (Σημείωση: Σήμερα γνωρίζουμε ότι υπάρχουν υπο-σωματίδια, τα quarks, με φορτίο $e/3$. Ο χώρος ύπαρξής τους όμως είναι της τάξεως της διαμέτρου των στοιχειωδών σωματιδίων $\sim 10^{-15}$ m και ποτέ δεν εμφανίζονται μεμονωμένα). Η κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου αγνοείται στον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό όπου δεχόμαστε ότι το φορτίο είναι συνεχές με οποιαδήποτε τιμή.

Νόμος Coulomb

Οι δυνάμεις μεταξύ φορτίων ονομάζονται δυνάμεις **Coulomb** και για δυο φορτισμένα υλικά σημεία με φορτία q_1 , q_2 και απόσταση r μεταξύ τους, ακολουθούν νόμο ανάλογο με τον νόμο της παγκοσμίου έλξεως:

$$\mathbf{F} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

όπου r η απόσταση μεταξύ των φορτίων και $\hat{\mathbf{r}}$ μοναδιαίο διάνυσμα στην ευθεία που τα συνδέει.

Στο σύστημα μονάδων SI τα φορτία έχουν μονάδα το coulomb, C, η απόσταση είναι σε μέτρα, m, η δύναμη είναι σε Newton, N και η σταθερά $K = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ ή m/F. Εναλλακτικά:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{όπου} \quad \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2) \text{ ή F/m}$$

η ηλεκτρική διαπερατότητα του κενού και κατά προσέγγιση του αέρα.

Νόμος Coulomb 2

Για τις δυνάμεις μεταξύ φορτισμένων σωμάτων δεχόμαστε ότι ισχύει η αρχή της επαλληλίας σύμφωνα με την οποία η δύναμη μεταξύ ζεύγους φορτίων είναι ανεξάρτητη από την παρουσία άλλων φορτίων. Η ολική δύναμη θα είναι το διανυσματικό άθροισμα δυνάμεων από όλα τα ζεύγη φορτίων που αλληλεπιδρούν σε ένα σύστημα. Η αρχή αυτή διαπιστώνεται μόνο πειραματικά και δεν είναι καθόλου προφανής.

Για τη δύναμη που εξασκεί ένα στάσιμο φορτίο q στη θέση \mathbf{r}' σε ένα δοκιμαστικό φορτίο Q στη θέση \mathbf{r} ισχύει ο νόμος Coulomb

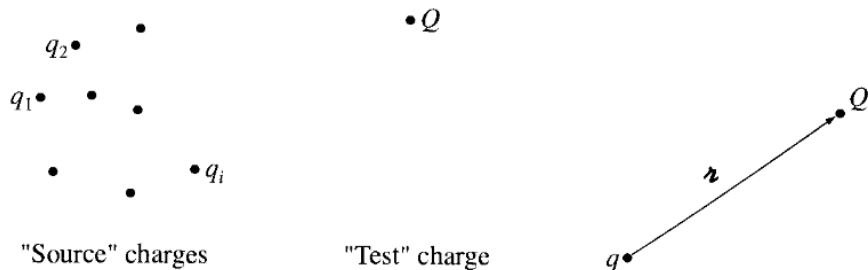
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{z^2} \hat{\mathbf{z}}$$

όπου

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

και η δύναμη έχει φορά από το q στο Q . Απωστική αν τα φορτία είναι ομώνυμα και ελκτική αν είναι ετερόνυμα.

Νόμος Coulomb 3



Σχήμα: Φορτία πηγής, δοκιμαστικό και απόσταση μεταξύ τους

Στην ηλεκτροστατική τα φορτία πηγής είναι στάσιμα και το δοκιμαστικό δύναται να κινείται.

Νόμος Coulomb 4

Γενικεύοντας (αρχή επαλληλίας), για σύστημα N στασίμων φορτίων, q_1, q_2, \dots, q_N σε θέσεις $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_N$, η συνολική δύναμη σε φορτίο Q στη θέση \mathbf{r} είναι:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N = \frac{Qq_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|^3} + \dots + \frac{Qq_N}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_N)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_N|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3}$$

Εναλλακτικά, για $\mathbf{z} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_i$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{z_i^2} \hat{\mathbf{z}}_i = Q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

όπου

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{z_i^2} \hat{\mathbf{z}}_i$$

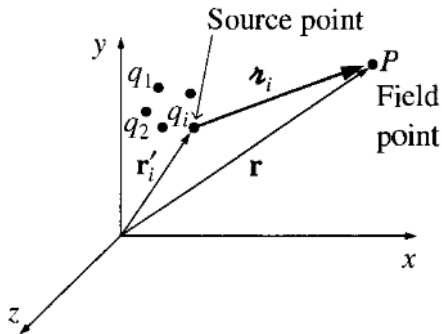
είναι το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν τα φορτία πηγής.

Οι δυνάμεις Coulomb είναι πολύ ισχυρότερες από τις δυνάμεις βαρύτητας. Σε σύστημα π.χ. δυο ηλεκτρονίων με φορτίο $e = 1.60217662 \times 10^{-19}$ C, μάζα $m_e = 9.10938356 \times 10^{-31}$ kg για την ίδια απόσταση r :

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K e^2}{G m_e^2} = \frac{9 \times 10^9}{6.67 \times 10^{-11}} \frac{e^2}{m_e^2} = 4.1741 \times 10^{42}$$

Ηλεκτρικό πεδίο

Ηλεκτροστατικό πεδίο



Σχήμα: Ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P

Ηλεκτρικό πεδίο 2

Όπως έχουμε πει σε προηγούμενο μάθημα το ηλεκτρικό πεδίο έχει τη δική του φυσική οντότητα. Σε χώρο που υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο αν φέρουμε κάποιο άλλο φορτίο (δοκιμαστικό) θα εξασκηθεί δύναμη σε αυτό. Το παραπάνω μοντέλο είναι καλό αν η αλληλεπίδραση μεταξύ του δοκιμαστικού φορτίου Q και των φορτίων πηγής είναι αμελητέα.

$$\mathbf{E} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{Q}$$

Μην ξεχνάμε ότι και το Q δημιουργεί γύρω του το δικό του πεδίο.

Προφανώς το Q δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το φορτίο του ηλεκτρονίου (προσοχή στον υπολογισμό πεδίων σε ατομικές διαστάσεις) αλλά το παραπάνω όριο το ερμηνεύουμε ότι το Q είναι αρκετά μικρό και δεν επηρεάζει τα άλλα στάσιμα φορτία του χώρου που δημιουργούν το πεδίο. Η ακριβής ονομασία του πεδίου είναι τότε *ηλεκτροστατικό πεδίο*.

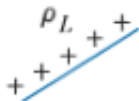
- Ο Maxwell π.χ. πίστευε ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αντιπροσωπεύει πιέσεις και παραμορφώσεις κάποιου αόρατου, αρχέγονου, ζελατινοειδούς μέσου, του αιθέρα.
- Βασίστηκε στην αναλογία ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και κυμάτων σε νερό ή αέρα (ο Maxwell προέβλεψε την ύπαρξη των πρώτων και ο Hertz αργότερα το επαλήθευσε πειραματικά).

Ηλεκτρικό πεδίο 3

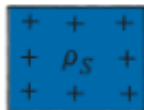
Μπορούμε να γενικεύσουμε την κατανομή των φορτίων που δημιουργούν ένα πεδίο από το σημειακό φορτίο σε ευθύγραμμο αγωγό (γραμμή), σε επιφάνεια και σε όγκο.



Point
charge



Line
charge



Surface
charge



Volume
charge

Σχήμα: Κατανομές φορτίου.

Ηλεκτρικό πεδίο 4

Νόημα εδώ έχει η πυκνότητα φορτίου, ρ_L σε (C/m) για γραμμικό φορτίο σε κάποια καμπύλη L , ρ_S σε (C/m²) για επιφανειακό φορτίο σε κάποια επιφάνεια S και ρ_V σε (C/m³) για χώρο όγκου V . Οπότε το ολικό φορτίο q που δημιουργεί πεδίο σε κάθε περίπτωση είναι:

$$q = \int_L \rho_L d\ell \quad q = \int_S \rho_S dS \quad q = \int_V \rho_V dV$$

με αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \int_{\Omega} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2}$$

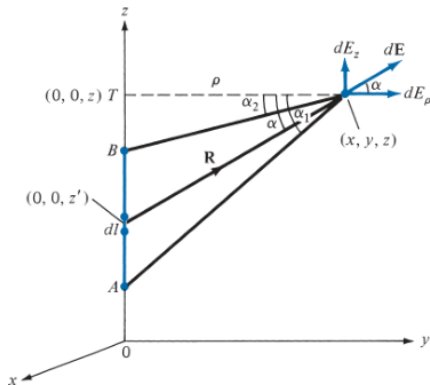
για οποιαδήποτε κατανομή φορτίου στα σημεία \mathbf{r}' στο χώρο Ω .

Στο βιβλίο σας:

$$\begin{array}{lll} \rho_L \rightarrow \lambda & \rho_S \rightarrow \sigma & \rho_V \rightarrow \rho \\ dq = \lambda d\ell' & dq = \sigma da' & dq = \rho d\tau' \end{array}$$

Ηλεκτρικό πεδίο γραμμής

Θεωρούμε ευθύγραμμη και ομοιόμορφα κατανεμημένη κατανομή φορτίου από A έως B και ζητούμε το ηλεκτροστατικό πεδίο σε κάποιο σημείο του χώρου όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα: Ηλεκτρικό πεδίο ευθύγραμμου φορτισμένου τμήματος

Ηλεκτρικό πεδίο γραμμής 2

Το σύστημα έχει κυλινδρική συμμετρία και θεωρούμε την γραμμική κατανομή φορτίου στον άξονα z από A έως B . Έχουμε $dQ = \rho_L dl' = \rho_L dz'$ και το σημείο P που υπολογίζουμε το πεδίο έχει συντεταγμένες (x, y, z) . Οπότε:

$$\mathbf{R} = \mathbf{z} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x, y, z) - (0, 0, z') = \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + (z - z') \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E} = \int_L \frac{\rho_L dl'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{z}}{z^3} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + (z - z') \hat{\mathbf{z}}}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz'$$

$$R = |\mathbf{R}| = \frac{\rho}{\cos \alpha} \quad z - z' = \rho \tan \alpha \Rightarrow z' = z - \rho \tan \alpha \Rightarrow dz' = -\rho \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \tan \alpha \hat{\mathbf{z}}}{(\rho/\cos \alpha)^3} \rho \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\cos \alpha \hat{\boldsymbol{\rho}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}] d\alpha \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \rho} [-(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \hat{\boldsymbol{\rho}} + (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \hat{\mathbf{z}}]$$

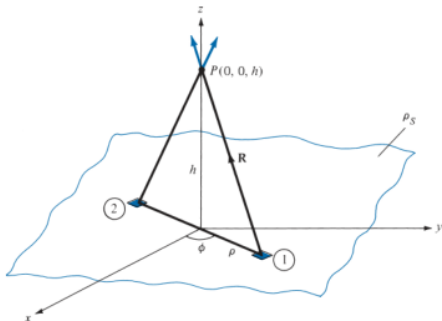
Στην ειδική περίπτωση όπου το φορτισμένο ευθύγραμμο τμήμα εκτείνεται από $-\infty$ έως $+\infty$ έχουμε $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = -\pi/2$, η συνιστώσα z εξαφανίζεται και

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας

Θεωρούμε επίπεδη επιφάνεια, απείρων διαστάσεων, φορτισμένη ομοιόμορφα με πυκνότητα φορτίου ρ_S . Το στοιχειώδες φορτίο dQ μιας στοιχειώδους επιφάνειας dS σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

$$dQ = \rho_S dS = \rho_S \rho d\phi d\rho$$



Σχήμα: Ηλεκτρικό πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας

Πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας 2

Η συνεισφορά του dQ στο ολικό πεδίο \mathbf{E} στο σημείο $P(0, 0, h)$ είναι

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{R}} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

όπου

$$\mathbf{r} = h \hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{r}' = \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + h \hat{\mathbf{z}} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (\rho^2 + h^2)^{1/2}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_S \rho d\phi d\rho [-\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + h \hat{\mathbf{z}}]}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + h^2)^{3/2}}$$

Λόγω συμμετρίας για κάθε στοιχειώδες φορτίο dQ σε γωνία ϕ υπάρχει το συμμετρικό του στη γωνία $\phi + \pi$ που μηδενίζει τη συνιστώσα $\hat{\boldsymbol{\rho}}$. Οπότε

$$\mathbf{E} = \int_S d\mathbf{E}_z = \frac{\rho_S}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{h\rho d\rho d\phi}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\rho_S h 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} (\rho^2 + h^2)^{-3/2} \frac{1}{2} d(\rho^2) \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S h}{2\epsilon_0} \left[-(\rho^2 + h^2)^{-1/2} \right] \Bigg|_0^{\infty} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}$$

Πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας 3

Όπως φαίνεται το πεδίο είναι ανεξάρτητο της απόστασης από το φορτισμένο επίπεδο καθώς και το σημείο παρατήρησης του πεδίου P .

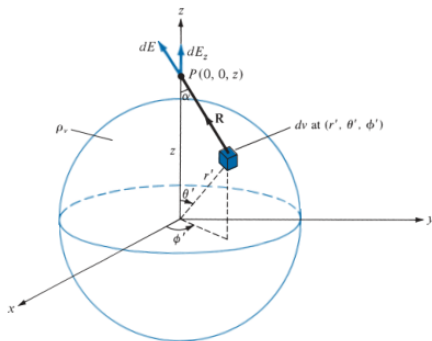
Στην πράξη, σε πυκνωτή με δυο παράλληλες φορτισμένες πλάκες χρησιμοποιούμε τον παραπάνω τύπο κατά προσέγγιση και βλέπουμε ότι το πεδίο που δημιουργείται μεταξύ των πλακών του πυκνωτή είναι:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} + \frac{(-\rho_S)}{2\epsilon_0} (-\hat{\mathbf{z}}) = \frac{\rho_S}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}$$

Ηλεκτρικό πεδίο κατανομής φορτίου στο χώρο

Έστω σφαίρα ακτίνας a γεμάτη με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου πυκνότητας ρ_V . Το στοιχειώδες φορτίο dQ που αντιστοιχεί στον στοιχειώδη όγκο dV στο σημείο (r', θ', ϕ') είναι

$$dQ = \rho_V dV \Rightarrow Q = \int_V \rho_V dV = \rho_V \int_V dV = \rho_V \frac{4\pi a^3}{3}$$



Σχήμα: Ηλεκτρικό πεδίο κατανομής φορτίου στο χώρο

Ηλεκτρικό πεδίο κατανομής φορτίου στο χώρο 2

και Q είναι το ολικό φορτίο της σφαίρας.

Το στοιχειώδες πεδίο εκτός της σφαίρας σε απόσταση r από το κέντρο το υπολογίζουμε για το σημείο $P(0, 0, z)$

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{R}} = \frac{\rho_V dV}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Λόγω συμμετρίας οι συνιστώσες E_x, E_y μηδενίζονται και μένει μόνο η συνιστώσα E_z .

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \int_V dE \cos \alpha = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\cos \alpha dV}{R^2}$$

Από νόμο συνημιτόνου

$$R^2 = z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta' \Rightarrow \cos \theta' = \frac{z^2 + r'^2 - R^2}{2zr'}$$

$$r'^2 = z^2 + R^2 - 2zR \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR}$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη ως προς θ' με σταθερά z, r' έχουμε

$$\sin \theta' d\theta' = \frac{RdR}{zr'}$$

Ηλεκτρικό πεδίο κατανομής φορτίου στο χώρο 3

Καθώς το θ' μεταβάλλεται από 0 σε π , το R μεταβάλλεται από $(z - r')$ σε $(z + r')$ για P εκτός της σφαίρας. Οπότε

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\cos \alpha dV}{R^2} = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\cos \alpha r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' dr'}{R^2} = \\ &= \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{r'=0}^a \int_{R=z-r'}^{z+r'} r'^2 \frac{R dR}{zr'} dr' \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR} \frac{1}{R^2} = \\ &= \frac{\rho_V 2\pi}{8\pi\epsilon_0 z^2} \int_{r'=0}^a \int_{R=z-r'}^{z+r'} r'^2 \frac{R dR}{r'} dr' \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{R} \frac{1}{R^2} = \\ &= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2} \int_{r'=0}^a \int_{R=z-r'}^{z+r'} r' dR dr' \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{R^2} = \\ &= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2} \int_{r'=0}^a \int_{R=z-r'}^{z+r'} r' \left[1 + \frac{z^2 - r'^2}{R^2} \right] dR dr' = \\ &= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2} \int_{r'=0}^a r' \left[R - \frac{z^2 - r'^2}{R} \right]_{R=z-r'}^{z+r'} dr' = \\ &= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2} \int_{r'=0}^a 4r'^2 dr' = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \end{aligned}$$

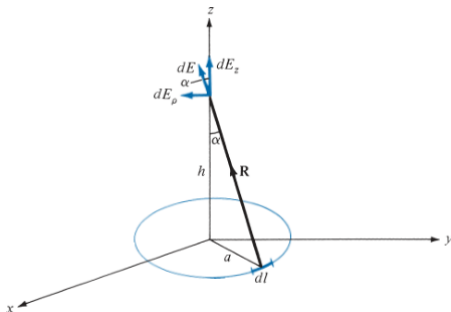
Οπότε

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \hat{\mathbf{z}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

που ταυτίζεται με το πεδίο σημειακού φορτίου Q .

Άσκηση

Κυκλικός δακτύλιος ακτίνας a , ομοιόμορφα φορτισμένος με πυκνότητα φορτίου ρ_L C/m, τοποθετείται στο επίπεδο xy με άξονα δακτυλίου τον άξονα z .



- Δείξτε ότι $\mathbf{E}(0, 0, h) = \frac{\rho_L a h}{2\epsilon_0 (h^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$.
- Ποια τιμή του h μεγιστοποιεί την τιμή του \mathbf{E} και ποια είναι αυτή;
- Εάν το ολικό φορτίο δακτυλίου είναι Q , βρείτε το \mathbf{E} καθώς $a \rightarrow 0$.

Άσκηση 2

Έχουμε κυλινδρική συμμετρία. Οπότε:

$$dl = a d\phi' \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -a \hat{\boldsymbol{\rho}} + h \hat{\mathbf{z}} \quad R = |\mathbf{R}| = (a^2 + h^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{(-a \hat{\boldsymbol{\rho}} + h \hat{\mathbf{z}})}{(a^2 + h^2)^{3/2}} a d\phi'$$

Κάθε τμήμα dQ έχει το συμμετρικό του απέναντι με αντίθετη συνιστώσα $\hat{\boldsymbol{\rho}}$. Οπότε μόνο η $\hat{\mathbf{z}}$ συνιστώσα απομένει.

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L a h \hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + h^2)^{3/2}} \int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' = \frac{\rho_L a h \hat{\mathbf{z}}}{2\epsilon_0 (a^2 + h^2)^{3/2}}$$

Για μέγιστο \mathbf{E} θέλουμε $d|\mathbf{E}|/dh = 0$.

$$\frac{d|\mathbf{E}|}{dh} = \frac{\rho_L a}{2\epsilon_0} \left[\frac{(a^2 + h^2)^{3/2} - 3h^2(a^2 + h^2)^{1/2}}{(a^2 + h^2)^3} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$(h^2 + a^2 - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

και

$$\mathbf{E}_{\max} = \pm \frac{\rho_L}{3\sqrt{3} a \epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}$$

Εφόσον η κατανομή φορτίου είναι ομοιόμορφη, $Q = \rho_L 2\pi a$ και

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L ah\hat{\mathbf{z}}}{2\epsilon_0(a^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0(a^2 + h^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

και καθώς $a \rightarrow 0$

$$\mathbf{E} \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h^2} \hat{\mathbf{z}}$$

όπως και για σημειακό φορτίο Q .

Ηλεκτρική ροή

Μπορούμε να ορίσουμε την ροή του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} όπως ορίσαμε την ροή οποιουδήποτε διανυσματικού πεδίου. Στην πράξη όμως πιο χρήσιμη είναι η ροή του διανυσματικού πεδίου \mathbf{D} που συμπεριλαμβάνει τις επιδράσεις της ύλης στο χώρο που βρίσκονται τα φορτία, στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν. Για το κενό ή αέρα:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

και γενικά, σε υλικά σώματα

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

όπου ϵ τανυστής. Και στις δυο περιπτώσεις η ηλεκτρική ροή είναι:

$$\Psi = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

Φανταζόμαστε εδώ τις γραμμές της ηλεκτρικής ροής να «πηγάζουν» από θετικά φορτία και να «καταλήγουν» σε αρνητικά. Οι μονάδες της ροής Ψ είναι C και του διανύσματος \mathbf{D} , C/m². Το \mathbf{D} ονομάζεται *πυκνότητα ηλεκτρικής ροής* ή ιστορικά, *διηλεκτρική μετατόπιση*.

Ένας από τους θεμελιώδεις νόμους του ηλεκτρομαγνητισμού είναι ο νόμος του Gauss (Gauss's law). Σύμφωνα με αυτόν, η ολική ηλεκτρική ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια ισούται με το ολικό φορτίο που εσωκλείεται από την επιφάνεια. Έχουμε:

$$\Psi = \oint_S d\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} =$$

$$= \text{ολικό φορτίο που εσωκλείεται από την επιφάνεια } Q = \int_V \rho_V dV$$

Με το θεώρημα της απόκλισης:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$$

μια από τις τέσσερις εξισώσεις Maxwell. Η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου είναι ίση με την απόκλιση της πυκνότητας ηλεκτρικής ροής.

Νόμος Gauss 2

Ο νόμος του Gauss βασίζεται:

- στην εξάρτηση της ηλεκτρικής δύναμης από το τετράγωνο της απόστασης των φορτίων
- στην κεντρική φύση των δυνάμεων
- στην αρχή της επαλληλίας

δηλ. με δυο λόγια: νόμο Coulomb και αρχή επαλληλίας.

Προσφέρει έναν απλούστερο τρόπο εύρεσης των πεδίων \mathbf{E} και \mathbf{D} για συμμετρικές κατανομές φορτίων (π.χ. σφαιρική, κυλινδρική, επίπεδη). Ισχύει βέβαια και για μη συμμετρικές κατανομές μόνο που τότε η λύση δεν είναι απλή.

Για κενό ή αέρα μπορεί να γραφεί και

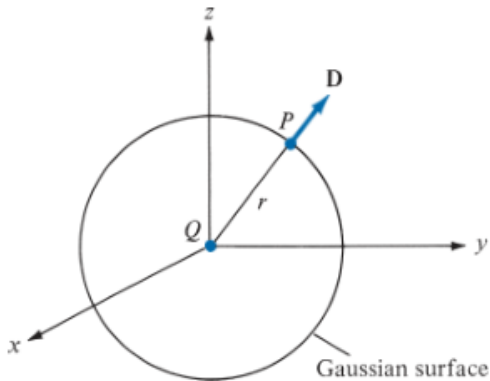
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_V}{\epsilon_0}$$

Η διαδικασία εφαρμογής του νόμου Gauss είναι:

- Διαπιστώνουμε εάν υπάρχει συμμετρία.
- Κατασκευάζουμε κατάλληλη κλειστή επιφάνεια (επιφάνεια Gauss) όπου \mathbf{D} είναι κάθετο ή εφαπτόμενο στην επιφάνεια. Εάν είναι κάθετο, $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = DdS$ και εάν είναι εφαπτόμενο $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$.
- Η επιφάνεια είναι αυθαίρετη αλλά πρέπει να έχει κάποια από τη συμμετρία της κατανομής φορτίου. Η επιλογή της εξαρτάται από τη δική μας διαίσθηση και εμπειρία.

Σημειακό φορτίο

Έστω σημειακό φορτίο στην αρχή των αξόνων κάποιου συστήματος συντεταγμένων. Θέλουμε το πεδίο \mathbf{D} σε κάποιο σημείο στο χώρο. Είναι προφανές ότι έχουμε σφαιρική συμμετρία και επιλέγουμε σαν επιφάνεια Gauss μια κλειστή σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το σημειακό φορτίο.



Εφόσον \mathbf{D} είναι κάθετο στην επιφάνεια και έχει σταθερή τιμή στην επιφάνεια

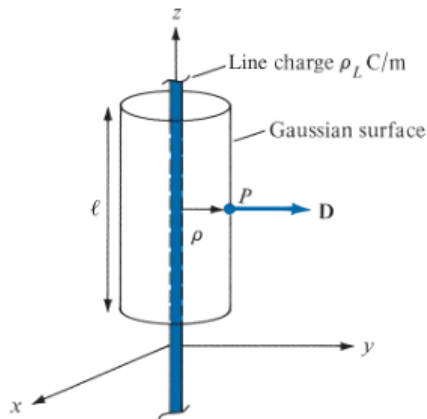
$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S D dS = D \oint_S dS = D 4\pi r^2$$

οπότε

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Φορτισμένη ευθεία

Έστω ευθεία απείρου μήκους, στον άξονα z , φορτισμένη ομοιόμορφα με πυκνότητα ρ_L C/m. Θέλουμε το πεδίο \mathbf{D} στο σημείο P . Η συμμετρία εδώ είναι κυλινδρική και το ζητούμενο πεδίο είναι της μορφής $\mathbf{D} = D \hat{\rho}$ (z συνιστώσα μηδενική). Οπότε:

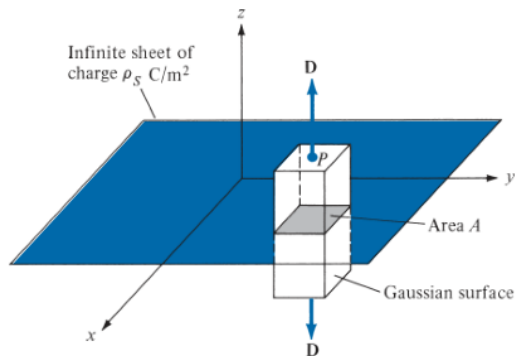


$$\rho_L \ell = Q = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \int_S dS = D 2\pi\rho\ell \Rightarrow$$

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \hat{\mathbf{p}}$$

Φορτισμένη επίπεδη επιφάνεια

Εστω επίπεδη επιφάνεια απείρων διαστάσεων (επίπεδο $z = 0$) φορτισμένη ομοιόμορφα με πυκνότητα $\rho_S \text{ C/m}^2$. Η επιφάνεια Gauss είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που «κόβει» τη φορτισμένη επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα.



Φορτισμένη επίπεδη επιφάνεια 2

Το πεδίο $\mathbf{D} = D \hat{\mathbf{z}}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια και η μη μηδενική συνεισφορά είναι από την επάνω και κάτω πλευρά. Έχουμε

$$\rho_S \int_S dS = \rho_S A = Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \left[\int_{\text{επάνω}} dS + \int_{\text{κάτω}} dS \right] = D[A + A] = 2AD$$

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_S}{2} \hat{\mathbf{z}}$$

Έστω σφαίρα, ακτίνας a , φορτισμένη ομοιόμορφα με πυκνότητα $\rho_o \text{ C/m}^3$. Είναι προφανές ότι έχουμε σφαιρική συμμετρία και επιλέγουμε σαν επιφάνεια Gauss μια κλειστή σφαιρική επιφάνεια, με ίδιο κέντρο και ακτίνα $r \leq a$ ή $r \geq a$ (οι δυο δυνατές περιπτώσεις).

Φορτισμένη σφαίρα 2

Για $r \leq a$ το ολικό φορτίο που εσωκλείει η επιφάνεια Gauss είναι

$$Q = \int_V \rho_o dV = \rho_o \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^r r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \rho_o \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \oint_S dS = D 4\pi r^2 = Q = \rho_o \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow$$

$$\mathbf{D} = \rho_o \frac{r}{3} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{για } r \leq a$$

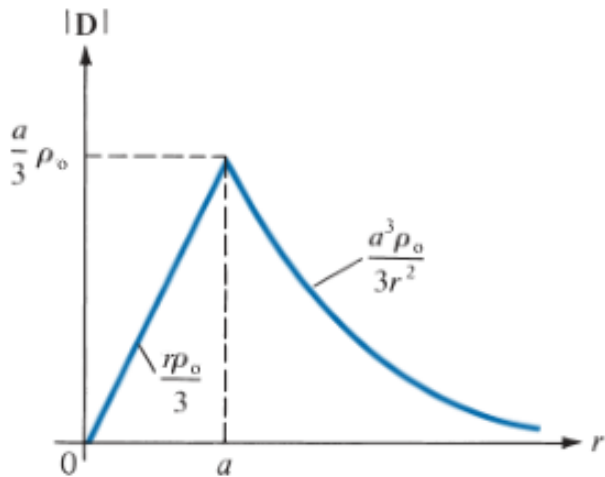
Για $r \geq a$ το ολικό φορτίο που εσωκλείει η επιφάνεια Gauss είναι

$$Q = \int_V \rho_o dV = \rho_o \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \rho_o \frac{4}{3} \pi a^3$$

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D 4\pi r^2 = Q = \rho_o \frac{4}{3} \pi a^3 \Rightarrow$$

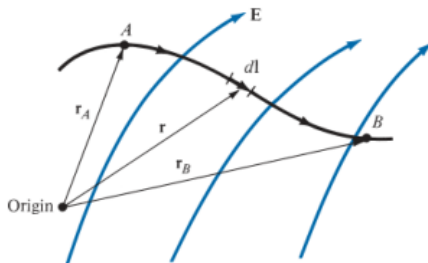
$$\mathbf{D} = \rho_o \frac{a^3}{3r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{για } r \geq a$$

Φορτισμένη σφαίρα 3



Ηλεκτρικό δυναμικό - Τάση

Μέχρι στιγμής είδαμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο \mathbf{E} από το νόμο Coulomb ή, αν η κατανομή φορτίου που δημιουργεί το πεδίο είναι συμμετρική, από τον νόμο Gauss. Υπάρχει άλλος ένας τρόπος, από το βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό V . Μάλιστα αυτός ο τρόπος είναι ευκολότερος εφόσον δουλεύουμε με βαθμωτή αντι για διανυσματική συνάρτηση.



Σχήμα: Μεταφορά φορτίου q σε ηλεκτροστατικό πεδίο \mathbf{E}

Ηλεκτρικό δυναμικό - Τάση 2

Έστω ότι θέλουμε να μετακινήσουμε ένα σημειακό φορτίο q από το A στο B σε χώρο που υπάρχει ηλεκτροστατικό πεδίο \mathbf{E} . Από τον νόμο Coulomb, η δύναμη από το πεδίο στο q είναι $\mathbf{F}_\pi = q\mathbf{E}$ οπότε η εξωτερική δύναμη που χρειάζεται για να γίνει η μετακίνηση πρέπει να είναι $\mathbf{F}_\varepsilon = -q\mathbf{E}$. Η δύναμη $-q\mathbf{E}$ πρέπει να είναι απειροστά μεγαλύτερη από την $q\mathbf{E}$ ώστε η μετακίνηση από το A στο B να πραγματοποιείται χωρίς το φορτίο q να αποκτά επιτάχυνση και επομένως κινητική ενέργεια. Τέτοια μετακίνηση απαιτεί άπειρο χρόνο. Δεν υπάρχει πρόβλημα, δεδομένου ότι η μετακίνηση δεν υλοποιείται αλλά θεωρείται.

Το στοιχειώδες έργο που καταναλώνει η εξωτερική δύναμη κατά τη στοιχειώδη μετατόπιση $d\ell$ είναι:

$$dW = -q\mathbf{E} \cdot d\ell$$

Το αρνητικό πρόσημο εκφράζει το γεγονός ότι το έργο παράγεται από εξωτερική δύναμη που αντιτίθεται στη δύναμη του πεδίου. Επομένως, το συνολικό έργο που καταναλώνεται ή αλλιώς, η δυναμική ενέργεια που απαιτείται για τη μετακίνηση του φορτίου q από το A στο B είναι:

$$W = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\ell$$

Ηλεκτρικό δυναμικό - Τάση 3

Διαιρώντας με το φορτίο έχουμε το μέγεθος

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\ell$$

γνωστό σαν *διαφορά δυναμικού* μεταξύ A και B ή *ηλεκτρική τάση*, μιας και φανερώνει πόσο μεγάλη είναι η τάση αλληλοεξουδετέρωσης των συγκεκριμένων φορτίων.

- Για τη διαφορά δυναμικού V_{AB} το A είναι το αρχικό σημείο και το B το τελικό.
- Εάν V_{AB} αρνητική, υπάρχει έλλειμα δυναμικής ενέργειας στη μετακίνηση του φορτίου q από το A στο B που σημαίνει ότι το έργο το κάνει το πεδίο. Εάν V_{AB} θετική, υπάρχει κέρδος δυναμικής ενέργειας, που σημαίνει ότι το έργο το κάνει η εξωτερική δύναμη και η ενέργεια αποθηκεύεται στο πεδίο.
- Η διαφορά δυναμικού V_{AB} είναι ανεξάρτητη από τη διαδρομή και εξαρτάται μόνο από αρχικό και τελικό σημείο.
- Μονάδες της V_{AB} είναι joule/coulomb (J/C) ή volt (V).

Ηλεκτρικό δυναμικό - Τάση 4

Αν το πεδίο \mathbf{E} οφείλεται σε σημειακό φορτίο Q , τότε

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$V_{AB} = - \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}\hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

ή

$$V_{AB} = V_B - V_A$$

όπου V_A , V_B τα δυναμικά ή απόλυτα δυναμικά στα A και B αντίστοιχα. Άρα η διαφορά δυναμικού V_{AB} μπορεί να ερμηνευτεί σαν το δυναμικό στο B με αναφορά το A .

Συνηθίζεται να παίρνουμε σαν σημείο αναφοράς το ∞ και το δυναμικό εκεί να είναι 0.

Οπότε $r_A \rightarrow \infty$, $V_A \rightarrow 0$ και το δυναμικό στο χώρο, σημειακού φορτίου Q τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων είναι:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Αν το Q δεν είναι στην αρχή των αξόνων αλλά στο σημείο \mathbf{r}' τότε το δυναμικό στο \mathbf{r} είναι:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Από τα παραπάνω φαίνεται να ισχύει ο ισχυρισμός ότι η διαφορά δυναμικού V_{AB} είναι ανεξάρτητη από τη διαδρομή και εξαρτάται μόνο από αρχικό και τελικό σημείο. Στην ουσία αυτό είναι απόρροια του ότι η δύναμις Coulomb είναι αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης. Τέτοια πεδία ονομάζονται *συντηρητικά* (**conservative**).

Ηλεκτρικό δυναμικό - Τάση 6

Μπορούμε να γενικεύσουμε χρησιμοποιώντας την αρχή επαλληλίας για το δυναμικό στο \mathbf{r} , N σημειακών φορτίων Q_1, Q_2, \dots, Q_N , τοποθετημένων στα $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_N$:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_2|} + \dots + \frac{Q_N}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_N|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_i|}$$

Ομοίως και για τις άλλες κατανομές φορτίων:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\rho_L(\mathbf{r}')d\ell'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \text{γραμμική}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}')dS'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \text{επιφανειακή}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_V(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \text{στο χώρο}$$

Οι παραπάνω σχέσεις έχουν βγει με την παραδοχή ότι το δυναμικό στο ∞ είναι 0. Αν δεν ισχύει αυτή η παραδοχή, θα πρέπει να προστεθεί στις παραπάνω σχέσεις μια σταθερά που να προσδιορίζει το συγκεκριμένο σημείο αναφοράς.

Έστω δυο σημειακά φορτία $Q_1 = -4 \mu\text{C}$, $Q_2 = 5 \mu\text{C}$ τοποθετημένα στα σημεία $(2, -1, 3)$ και $(0, 4, -2)$ αντίστοιχα. Με την παραδοχή ότι το δυναμικό στο ∞ είναι 0, ποιο είναι το δυναμικό στο $(1, 0, 1)$;

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1| = |(1, 0, 1) - (2, -1, 3)| = 2.4495$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2| = |(1, 0, 1) - (0, 4, -2)| = 5.0990$$

$$V(1, 0, 1) = -5871.7 \text{ V}$$

Παράδειγμα

Έστω σημειακό φορτίο $Q = 5 \text{ nC}$ στο $(-3, 4, 0)$ και γραμμή $y = 1, z = 1$ με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου πυκνότητας $\rho_L = 2 \text{ nC/m}$. Να βρεθούν:

- Το δυναμικό V στο $A(5, 0, 1)$ αν $V = 0 \text{ V}$ στο $O(0, 0, 0)$.
- Το δυναμικό V στο $B(-2, 5, 3)$ αν $V = 100 \text{ V}$ στο $C(1, 2, 1)$.
- Αν $V = -5 \text{ V}$ στο $O(0, 0, 0)$ ποια η διαφορά δυναμικού V_{CB} ;

Το δυναμικό σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου αναλύεται σε $V = V_Q + V_L$ όπου V_Q η συνεισφορά από το σημειακό φορτίο και V_L η συνεισφορά από το γραμμικό. Για το σημειακό:

$$V_Q = - \int \mathbf{E} \cdot d\ell = - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1$$

Για τη φορτισμένη γραμμή:

$$V_L = - \int \mathbf{E} \cdot d\ell = - \int \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{\mathbf{\rho}} \cdot d\rho \hat{\mathbf{\rho}} = - \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + C_2$$

και

$$V = - \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C$$

όπου $C = C_1 + C_2$, σταθερά, ρ η απόσταση από τη γραμμή $y = 1, z = 1$ στο σημείο που υπολογίζεται το δυναμικό και r η απόσταση από το Q στο ίδιο σημείο.

Παράδειγμα 2

Για την περίπτωση (1) θέλουμε r και ρ για τα σημεία O και A . Η απόσταση ρ από οποιοδήποτε σημείο (x, y, z) στη γραμμή $y = 1, z = 1$ που είναι παράλληλη στον άξονα x είναι η απόσταση μεταξύ (x, y, z) και $(x, 1, 1)$. Οπότε

$$\rho = |(x, y, z) - (x, 1, 1)| = \sqrt{(y-1)^2 + (z-1)^2}$$

και

$$\begin{aligned}\rho_O &= |(0, 0, 0) - (0, 1, 1)| = \sqrt{2} & r_O &= |(0, 0, 0) - (-3, 4, 0)| = 5 \\ \rho_A &= |(5, 0, 1) - (5, 1, 1)| = 1 & r_A &= |(5, 0, 1) - (-3, 4, 0)| = 9\end{aligned}$$

Επομένως:

$$V_A - V_O = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_O}{\rho_A} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_O} \right) = V_A = 8.4766 \text{ V}$$

Με την παραπάνω αφαίρεση αποφύγαμε τον υπολογισμό της σταθεράς C .

Παράδειγμα 3

Για την περίπτωση (2) θέλουμε r και ρ για τα σημεία B και C .

$$\rho_B = |(-2, 5, 3) - (-2, 1, 1)| = \sqrt{20} \quad r_B = |(-2, 5, 3) - (-3, 4, 0)| = \sqrt{11}$$

$$\rho_C = |(1, 2, 1) - (1, 1, 1)| = 1 \quad r_C = |(1, 2, 1) - (-3, 4, 0)| = \sqrt{21}$$

$$V_B - V_C = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_C}{\rho_B} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C} \right) = -50.175 \text{ V} \Rightarrow V_B = 49.825 \text{ V}$$

Για την περίπτωση (3) τα πράγματα είναι πιο απλά. Δεν χρειαζόμαστε την αναφορά που δίδεται και την διαφορά την έχουμε ήδη υπολογίσει.

$$V_{CB} = V_B - V_C = -50.175 \text{ V}$$

Σχέση μεταξύ \mathbf{E} και V

Όπως είδαμε στα προηγούμενα η διαφορά δυναμικού είναι ανεξάρτητη από τη διαδρομή και εξαρτάται μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο. Π.χ. $V_{AB} = -V_{BA}$ και σε μια κλειστή διαδρομή η ολική διαφορά δυναμικού μηδενίζεται. Επομένως:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\ell = 0$$

και με το θεώρημα Stoke's

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\ell = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

δηλαδή το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι συντηρητικό ή αστρόβιλο. Έχουμε

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

όπου το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι η αρνητική βάρθρωση της διαφοράς δυναμικού. Το πρόσημο μείον δείχνει ότι η κατεύθυνση του \mathbf{E} είναι αντίθετη με την κατεύθυνση αύξησης της V . Η κατεύθυνση του \mathbf{E} είναι από ψηλό σε χαμηλό δυναμικό.

Αργότερα θα δούμε ότι η παραπάνω σχέση που ισχύει μόνο για το ηλεκτροστατικό, όταν συμπεριληφθεί και το μαγνητικό πεδίο θα μας δώσει τον νόμο του Faraday (μια από τις εξισώσεις Maxwell).

Παράδειγμα

Δοθέντος του δυναμικού $V = (10/r^2) \sin \theta \cos \phi$ υπολογίστε:

- την πυκνότητα ηλεκτρικής ροής \mathbf{D} στο $(2, \pi/2, 0)$
- το έργο που απαιτείται για μεταφορά φορτίου $10 \mu\text{C}$ από το $A(1, 30^\circ, 120^\circ)$ στο $B(4, 90^\circ, 60^\circ)$.

Έχουμε $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ και

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}\right) = \\ &= \frac{20}{r^3} \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} - \frac{10}{r^3} \cos \theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{10}{r^3} \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned}$$

Στο $(2, \pi/2, 0)$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = 2.5 \epsilon_0 \hat{\mathbf{r}} = 22.1 \hat{\mathbf{r}} \text{ pC/m}^2$$

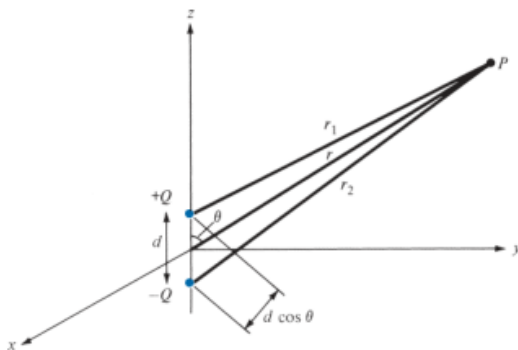
Εφόσον έχουμε την διαφορά δυναμικού το έργο που απαιτείται είναι:

$$W = qV_{AB} = q(V_B - V_A) = 10 \cdot 10^{-6} \left(\frac{10}{16} \sin 90^\circ \cos 60^\circ - \frac{10}{1} \sin 30^\circ \cos 120^\circ \right) = 28.125 \mu\text{J}$$

Το ηλεκτρικό δίπολο είναι ένα σύστημα δυο ίσων και ετεροσήμων σημειακών φορτίων με σταθερή απόσταση d μεταξύ τους. Μας ενδιαφέρει το πεδίο που δημιουργεί το δίπολο στο χώρο με την παραδοχή ότι τα σημεία του πεδίου είναι σε αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες από την απόσταση d .

Θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς πως είναι δυνατόν να έχουμε αντίθετα φορτία σε μικρή απόσταση και να μην αλληλοεξουδετερώνονται. Υπάρχουν και άλλες δυνάμεις σε ατομικά/μοριακά συστήματα που αντισταθμίζουν τις ηλεκτρομαγνητικές. Το ηλεκτρικό δίπολο είναι εξιδανίκευση πραγματικών συστημάτων φορτίων που υπάρχουν σε υλικά σώματα και αποτελούν τη βάση για τη μελέτη της συμπεριφοράς υλικών σωμάτων όταν αλληλεπιδρούν με ηλεκτρικό πεδίο.

Ηλεκτρικό δίπολο 2



Σχήμα: Ηλεκτρικό δίπολο

Ηλεκτρικό δίπολο 3

Το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο $P(r, \theta, \phi)$ δίδεται από:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right]$$

όπου r_1, r_2 είναι οι αποστάσεις μεταξύ P και $+Q$ και P και $-Q$ αντίστοιχα. Από νόμο συνημιτόνου και $r \gg d$:

$$r_1^2 = r^2 + (d/2)^2 - 2r(d/2) \cos \theta \quad r_2^2 = r^2 + (d/2)^2 - 2r(d/2) \cos(\pi - \theta) \Rightarrow$$
$$r_2^2 - r_1^2 = 2rd \cos \theta \Rightarrow r_2 - r_1 = d \cos \theta$$

και

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

Εφόσον $d \cos \theta = \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ όπου $\mathbf{d} = d\hat{\mathbf{z}}$, ορίζουμε την ηλεκτρική διπολική ροπή (dipole moment) $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$ με φορά από το $-Q$ στο $+Q$. Με κέντρο διπόλου στην αρχή των αξόνων:

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

και με κέντρο διπόλου στο \mathbf{r}' :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο για κέντρο διπόλου στην αρχή των αξόνων:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla V = -\left[\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}\right] = \frac{Qd \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \hat{\mathbf{r}} + \frac{Qd \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})\end{aligned}$$

Παρατηρούμε εδώ ότι το σημειακό ηλεκτρικό φορτίο, μόνο του, αποτελεί *μονόπολο* και το ηλεκτρικό πεδίο του μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με r^2 ενώ το δυναμικό του αντιστρόφως ανάλογα με r . Για το δίπολο οι μεταβολές είναι r^3 και r^2 αντίστοιχα. Οι δομές αυτές επεκτείνονται και σε μεγαλύτερης τάξης πολύπολα με αντίστοιχες μεταβολές σε πεδίο και δυναμικό.

Απεικόνιση ηλεκτρικής ροής

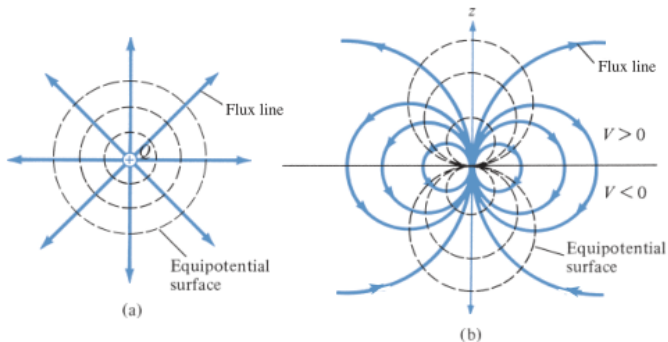
Η ηλεκτρική ροή ή ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές είναι φανταστικές γραμμές στο χώρο με κατεύθυνση σε κάθε σημείο του χώρου την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου σε εκείνο το σημείο. Με άλλα λόγια είναι οι γραμμές όπου το διάνυσμα της πυκνότητας ηλεκτρικής ροής \mathbf{D} είναι παντού εφαπτόμενο. Την έννοια αυτή την εισήγαγε ο Faraday σαν τρόπο απεικόνισης του ηλεκτρικού πεδίου.

Κάθε επιφάνεια όπου όλα τα σημεία της έχουν ίδιο δυναμικό ονομάζεται *ισοδυναμική επιφάνεια*. Το έργο που καταναλώνεται για μετακίνηση φορτίων σε ισοδυναμική επιφάνεια είναι μηδέν ($V_A - V_B = 0$) επομένως

$$\int_L \mathbf{E} \cdot d\ell = 0$$

σε αυτές τις επιφάνειες. Αυτό σημαίνει ότι οι γραμμές ροής είναι πάντοτε κάθετες σε ισοδυναμικές επιφάνειες.

Απεικόνιση ηλεκτρικής ροής 2



Σχήμα: Παραδείγματα ροής και ισοδυναμικών επιφανειών για σημειακό φορτίο και δίπολο

Η σημασία θα φανεί στη μελέτη ηλεκτρικών αγωγών όπου η εξωτερική τους επιφάνεια είναι ισοδυναμική.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα τυπική εφαρμογή είναι η απεικόνιση της ανθρώπινης καρδιάς. Η καρδιά κτυπά σαν απόκριση στην ηλεκτρική τάση που αναπτύσσεται στα άκρα της και μπορεί να χαρακτηριστεί σαν ηλεκτρικό δίπολο με παρόμοιες γραμμές ροής και ισοδυναμικές επιφάνειες. Τέτοιου είδους απεικονίσεις βοηθούν στην ανίχνευση καρδιακών προβλημάτων.

Από διαλέξεις Ηλεκτρομαγνητισμού Walter Lewin

- [walt07](#), dipole probe, grass seeds, bouncing balloon

Δυναμική ενέργεια

Για να προσδιορίσουμε την ενέργεια που έχει ένα σύμπλεγμα φορτίων θα πρέπει να δούμε πόσο έργο χρειάζεται να καταναλώσουμε για να το δημιουργήσουμε. Έστω ότι θέλουμε να φτιάξουμε ένα σύμπλεγμα τριών φορτίων Q_1, Q_2, Q_3 σε αρχικά κενό χώρο. Φέρνουμε το φορτίο Q_1 από το άπειρο στο P_1 . Δεν καταναλώνουμε έργο γιατί ο χώρος είναι κενός και δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο. Η μεταφορά του Q_2 από το άπειρο στο P_2 καταναλώνει έργο $Q_2 V_{21}$ όπου V_{21} το δυναμικό στο P_2 από το φορτίο Q_1 στο P_1 . Ομοίως και για τη μεταφορά του Q_3 στο P_3 καταναλώνεται έργο $Q_3 (V_{32} + V_{31})$. Το ολικό έργο είναι:

$$W_E = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + Q_2 V_{21} + Q_3 (V_{32} + V_{31})$$

Αν σχηματίσουμε το σύμπλεγμα με ανάστροφη φορά φορτίων:

$$W_E = W_3 + W_2 + W_1 = 0 + Q_2 V_{23} + Q_1 (V_{12} + V_{13})$$

Αθροισμα

$$2W_E = Q_1 (V_{12} + V_{13}) + Q_2 (V_{21} + V_{23}) + Q_3 (V_{31} + V_{32}) = Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 \Rightarrow$$

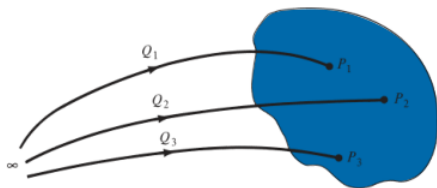
$$W_E = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3)$$

Δυναμική ενέργεια 2

Η παραπάνω σχέση γενικεύεται για N φορτία:

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i$$

Τονίζεται εδώ ότι το V_i είναι το συνολικό δυναμικό από όλα τα φορτία που δημιουργούν πεδίο στο χώρο πλην του Q_i στο σημείο που βρίσκεται το Q_i . Μονάδα W_E είναι το joule (J).



Σχήμα: Δημιουργία συμπλέγματος φορτίων

Δυναμική ενέργεια 3

Για συνεχή κατανομή φορτίων στο χώρο όπου η πυκνότητα είναι $\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D}$:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_v \rho_v V dv = \frac{1}{2} \int_v (\nabla \cdot \mathbf{D}) V dv$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla V + V(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad \text{ή} \quad (\nabla \cdot \mathbf{A})V = \nabla \cdot (V\mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot \nabla V$$

για οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο \mathbf{A} και βαθμωτό πεδίο V , έχουμε

$$W_E = \frac{1}{2} \int_v (\nabla \cdot \mathbf{D}) V dv = \frac{1}{2} \int_v (\nabla \cdot (V\mathbf{D})) dv - \frac{1}{2} \int_v (\mathbf{D} \cdot \nabla V) dv$$

Με θεώρημα απόκλισης στον πρώτο όρο δεξιά

$$W_E = \frac{1}{2} \oint_S (V\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2} \int_v (\mathbf{D} \cdot \nabla V) dv$$

Δυναμική ενέργεια 4

Συμπλέγματα πολυπόλων έχουν πεδίο και δυναμικό που τείνουν γρήγορα στο μηδέν και το επιφανειακό ολοκλήρωμα θεωρείται αμελητέο όσο μεγαλώνει η επιφάνεια. Άρα:

$$W_E = -\frac{1}{2} \int_v (\mathbf{D} \cdot \nabla V) dv = \frac{1}{2} \int_v (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dv$$

και εφόσον $\mathbf{E} = -\nabla V$ και $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ η ηλεκτροστατική ενέργεια είναι

$$W_E = \frac{1}{2} \int_v (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dv = \frac{1}{2} \int_v \epsilon_0 E^2 dv$$

Άρα, ορίζουμε πυκνότητα ηλεκτροστατικής ενέργειας w_E σε J/m^3 το μέγεθος

$$w_E = \frac{dW_E}{dv} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon_0}$$