Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 01

Α. Δροσόπουλος

11-10-2021

Outline

Topic

1. **Προκαταρκτικά**
2. Εισαγωγικά
3. Μαθηματικό υπόβαθρο

Περίγραμμα Μαθήματος ECE-K360

από οδηγό σπουδών

- Προπτυχιακό
- Εξάμηνο σπουδών Γ (2ο έτος)
- Εβδομαδιαίες ώρες διδασκαλίας: 3Θ+1Φ = 4
- ECTS: 5

Περιγραφή

Το μάθημα Ηλεκτρομαγνητισμός διαπραγματεύεται τις θεμελιώδεις γνώσεις Ηλεκτρισμού και Μαγνητισμού πάνω στις οποίες στηρίζεται η ειδικότητα του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού. Χρησιμοποιούνται μαθηματικά καταλλήλου επιπέδου για την υποστήριξη σύνθετων μοντέλων στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων της ειδικότητας.

Με την επιτυχή ολοκλήρωση του μαθήματος ο φοιτητής / τρια είναι σε θέση να:

- Έχει κατανοήσει σε βάθος τις έννοιες του ηλεκτρικού φορτίου και των πεδίων που δημιουργεί.
- Τη σχέση ηλεκτρομαγνητισμού και κυκλωματικής θεωρίας.
- Έχει γνώση της μεθοδολογίας, των εργαλείων και των τεχνικών που χρησιμοποιούνται στην επίλυση απλών και συνθέτων προβλημάτων ηλεκτρομαγνητισμού και εφαρμογών του.

Περιεχόμενο (wip)

Τρόπος διδασκαλίας και αξιολόγηση

- Διαλέξεις
- Υλικό στο eclass

Αξιολόγηση

Ενδιάμεση πρόοδος και τελική γραπτή εξέταση. Ο τελικός βαθμός προκύπτει από τη στάθμιση των βαθμών προόδου (30%) και τελικής εξέτασης (70%).

Τελικός βαθμός = (βαθμός προόδου) x 0.3 + (βαθμός τελικής εξέτασης) x 0.7

Αν ο φοιτητής δεν κατέβει στην πρόοδο τότε:

Τελικός βαθμός = (βαθμός τελικής εξέτασης) x 0.7

Αν ο φοιτητής δεν περάσει το μάθημα στην πρώτη εξεταστική ο επιμέρους βαθμός του στην πρόοδο κρατιέται μόνο μέχρι και τη 2η εξεταστική του Σεπτέμβρη. Αν δεν περάσει και εκεί, γίνεται reset βαθμών για την επόμενη χρονιά όπου επαναλαμβάνει το μάθημα με ότι τυχόν αναπροσαρμογή χρειαστεί.

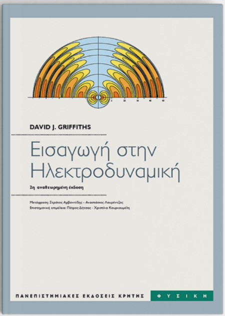
Συγγράμματα

GRIFFITHS DAVID J.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

2η αναθεωρημένη έκδοση

Μετάφραση: Αρβανιτίδης Στράτος, Λαυρέντζος Αναστάσιος



Μετάφραση της 3ης αμερικανικής έκδοσης, το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε φοιτητές που έχουν τελειώσει το μάθημα της Γενικής Φυσικής και αποσκοπεί στην ολοκληρωμένη «μύησή» τους στην Ηλεκτροδυναμική, με έμφαση στην πλήρη αποσαφήνιση της όμορφης αυτής θεωρίας. Χάρις στο ταλέντο του συγγραφέα να επιχειρηματολογεί με ελκυστικό, και ταυτόχρονα ακριβολόγο και απέριττο τρόπο, καθώς και στην ικανότητά του να διεγείρει τη διερευνητική διάθεση και να αναδεικνύει με σαφήνεια τις κεντρικές ιδέες και τα λεπτά σημεία, το βιβλίο θεωρείται από πολλούς καθηγητές και φοιτητές ως το διεθνώς καλύτερο σύγγραμμα για το μάθημα του Ηλεκτρομαγνητισμού στο προπτυχιακό επίπεδο.

Στο βιβλίο αναπτύσσονται κατά σειρά τα μαθηματικά που απαιτούνται για τη διατύπωση της Ηλεκτροδυναμικής και την επίλυση των προβλημάτων της, τα βασικά στατικά ηλεκτρικά και μαγνητικά φαινόμενα στο κενό και την ύλη, τα χρονομεταβαλλόμενα φαινόμενα του ηλεκτρομαγνητισμού, η παραγωγή και διάδοση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, και η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας ως το κατεξοχήν εννοιολογικό πλαίσιο για την ολοκληρωμένη κατανόηση της Ηλεκτροδυναμικής. Η διαυγής ανάπτυξη της θεωρίας συμπληρώνεται από την παιδαγωγική πραγμάτευση επιλεγμένων παραδειγμάτων και ασκήσεων. Ο αναγνώστης επίσης προτρέπεται και καθοδηγείται σε περαιτέρω διερεύνηση πολλών ειδικότερων θεμάτων με πλήθος αναφορών στην ενδεδειγμένη και προσιτή βιβλιογραφία.

Προσθήκη στα αγαπημένα

Για να διαβάσετε μερικές σελίδες από το Κεφάλαιο 1 πατήστε εδώ.

Σχήμα: Griffiths

Topic

Εισαγωγικά 1

- Κλασσικός Ηλεκτρομαγνητισμός συμπεριλαμβάνει στατικό ηλεκτρομαγνητισμό, χρονικώς σταθερά και μη ρεύματα, χρονικώς μεταβαλλόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, παραγωγή και διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, κυματοδηγούς, μαγνητοϋδροδυναμική, κ.α. Κβάντωση και σταθερά Planck άγνωστα.
- Βασίζεται στις εξισώσεις Maxwell που συνδέουν ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο με πυκνότητες ηλεκτρικού φορτίου και ηλεκτρικού ρεύματος στα οποία οφείλονται. Εμπεριέχεται η αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου καθώς και η ανυπαρξία μεμονομένων μαγνητικών πόλων. Μαζί με την εξίσωση Lorentz η οποία παρέχει τη δύναμη σε φορτίο συναρτήσει των εντάσεων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο χώρο που βρίσκεται το φορτίο και της ταχύτητάς του, αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων βάσει των οποίων μπορούμε κατ' αρχήν να λύσουμε οποιοδήποτε πρόβλημα Κλασσικού Ηλεκτρομαγνητισμού.
- Εάν προσθέσουμε τη θεμελιώδη εξίσωση Μηχανικής (μεταβολή ορμής συναρτήσει δύναμης) και τον νόμο της παγκόσμιας έλξης, έχουμε το σύνολο των νόμων στους οποίους θεμελιώνεται η κλασσική φυσική. Μαζί με τα τρία θερμοδυναμικά αξιώματα αποτελούσαν το φάσμα των γνώσεων της φυσικής μέχρι το τέλος του 19ου αιώνα.

Εισαγωγικά 2

- Το 1905 ο Einstein με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας διεύρυνε την Νευτώνεια Μηχανική προκειμένου να περιγράψει σωματίδια κινούμενα με μεγάλες ταχύτητες. Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell χρησιμοποιήθηκε από τον Einstein στην ανάπτυξη της θεωρίας της Σχετικότητας και δεν τροποποιήθηκε από αυτήν.
- Το 1901 αρχίζει η εποχή της κβαντικής φυσικής με τον Planck (ακτινοβολία μέλανος σώματος, κβάντωση ενέργειας, εισαγωγή έννοιας του φωτονίου). Οι τροποποιήσεις που επιφέρει η κβαντική θεωρία στον ηλεκτρομαγνητισμό είναι επουσιώδεις ακόμα και για αποστάσεις της τάξεως 10^{-12} m (100 φορές μικρότερες των διαστάσεων των ατόμων). Μπορούμε να περιγράψουμε τις δυνάμεις ηλεκτρονίου - πυρήνα στο άτομο με τους ίδιους νόμους που χρησιμοποιούμε στο μακρόκοσμο για φορτισμένα σώματα.
- Ακολουθεί το 1924 το αξίωμα de Broglie περί δυϊσμού σωματιδίου-κύματος που οδηγεί το 1927 στην αρχή αβεβαιότητας Heisenberg και θεμελιώνεται η Κβαντομηχανική. Κλασσικά μεγέθη όπως μήκος, ορμή, ενέργεια αντικαθίστανται από τελεστές με ιδιότητες που είναι μετρήσιμες ποσότητες (πρώτη κβάντωση). Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell παραμένει ως έχει.

Εισαγωγικά 3

- Αναθεώρηση και επέκταση της Κλασσικής Ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας έχουμε με τη δεύτερη κβάντωση (κβάντωση πεδίου) που αποτελεί αντικείμενο της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής. Φαινόμενα όπως σκέδαση φωτονίων, κβαντική διεμπλοκή (quantum entanglement) και αλληλεπιδράσεις φωτονίων με κβαντική ύλη χρειάζονται Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (Quantum Electrodynamics, QED). Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell καθίσταται πια το κλασσικό όριο της QED.
- Θεωρίες ενοποίησης (electroweak, superstring, standard model) κλπ συνεχίζουν να αναπτύσσονται.
- Συμπέρασμα: Διαφορές από τον κλασσικό ηλεκτρομαγνητισμό έχουμε μόνο σε πολύ ισχυρά πεδία ή σε πολύ μικρές αποστάσεις. Η θεωρία «κρατάει» πολύ καλά στο να μπορούμε να περιγράψουμε μακροσκοπικά οτιδήποτε ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα αντιμετωπίζουμε στην καθημερινή μας ζωή και να κατασκευάσουμε ηλεκτρικές συσκευές/στοιχεία/συστήματα με επιθυμητές ιδιότητες.

Τι είναι Ηλεκτρομαγνητισμός

Ηλεκτρομαγνητισμός είναι ο κλάδος της επιστήμης που ασχολείται με τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων και των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων που δημιουργούνται από αυτά. Συνδέει όλα τα αντικείμενα με τα οποία ασχολείται ένας Ηλεκτρολόγος Μηχανικός.

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ ΕΙΝΑΙ:

- Φορτία, μαγνήτες, ηλεκτρικές μηχανές, ηλεκτρική ενέργεια, μετασχηματιστές
- Ηλεκτρομαγνητικά κύματα, ραδιοφωνία, τηλεόραση, επικοινωνίες, κινητή τηλεφωνία, φως
- Βιολογικά ηλεκτρικά σήματα, ηλεκτρικά διαγνωστικά συστήματα

ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ: Ηχητικά κύματα, Ταλαντώσεις, Βαρύτητα

ΕΙΝΑΙ μια από τις 4 θεμελιώδεις δυνάμεις στο σύμπαν. Με σειρά ισχύος:

1. Ισχυρή πυρηνική δύναμη
2. Ηλεκτρομαγνητική
3. Ασθενής πυρηνική δύναμη
4. Βαρύτητα

Τι θα καλύψουμε

- Επισκόπηση διανυσματικού λογισμού. Η διανυσματική ανάλυση είναι το μαθηματικό εργαλείο που εκφράζουμε με τον καλύτερο τρόπο τις έννοιες του ηλεκτρομαγνητισμού. Αποφυγή παρενθέσεων στο μάθημα για γνώσεις υποβάθρου. Πλήρη κατανόηση (όχι αποστήθιση) για αποφυγή προβλημάτων κατόπιν. Λύση ασκήσεων. Διαγράμματα. Λογισμικό.
- Κλασσικός Ηλεκτρομαγνητισμός, ηλεκτροστατικά πεδία, μαγνητοστατικά πεδία, ηλεκτροδυναμική, εφαρμογές.

Εξισώσεις Maxwell

	Integral Form	Differential Form	Name
Time-Domain	$Q_e(t)=\oiint_S \vec{D}(t)\bullet d\vec{s}=\iiint_V \rho_v(t)dv$	$\nabla\bullet\vec{D}(t)=\rho_v(t)$	Gauss' Law
	$\oiint_S \vec{B}(t)\bullet d\vec{s}=0$	$\nabla\bullet\vec{B}(t)=0$	No Magnetic Charge
	$V_{emf}(t)=\oint_L \vec{E}(t)\bullet d\vec{\ell}=-\iint_S\left[\frac{\partial\vec{B}(t)}{\partial t}\right]\bullet d\vec{s}$	$\nabla\times\vec{E}(t)=-\frac{\partial\vec{B}(t)}{\partial t}$	Faraday's Law
	$I(t)=\oint_L \vec{H}(t)\bullet d\vec{\ell}=\iint_S\left[\vec{J}(t)+\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t}\right]\bullet d\vec{s}$	$\nabla\times\vec{H}(t)=\vec{J}(t)+\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t}$	Ampere's Circuit Law
	$\oiint_S \vec{J}\bullet d\vec{s}=-\frac{\partial Q_e}{\partial t}$	$\nabla\bullet\vec{J}=-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}$	Continuity of Current
	$\vec{D}(t)=[\varepsilon(t)]*\vec{E}(t)$ $\vec{B}(t)=[\mu(t)]*\vec{H}(t)$	Electric Response Magnetic Response	Constitutive Relations
Frequency-Domain	$Q_e=\oiint_S \vec{D}\bullet d\vec{s}=\iiint_V \rho_v dv$	$\nabla\bullet\vec{D}=\rho_v$	Gauss' Law
	$\oiint_S \vec{B}\bullet d\vec{s}=0$	$\nabla\bullet\vec{B}=0$	No Magnetic Charge
	$V_{emf}=\oint_L \vec{E}\bullet d\vec{\ell}=-\iint_S\left[j\omega\vec{B}\right]\bullet d\vec{s}$	$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\vec{B}$	Faraday's Law
	$I=\oint_L \vec{H}\bullet d\vec{\ell}=\iint_S\left[\vec{J}+j\omega\vec{D}\right]\bullet d\vec{s}$	$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\vec{D}$	Ampere's Circuit Law
	$\oiint_S \vec{J}\bullet d\vec{s}=-j\omega Q_e$	$\nabla\bullet\vec{J}=-j\omega\rho_v$	Continuity of Current
	$\vec{D}=[\varepsilon]\vec{E}$ $\vec{B}=[\mu]\vec{H}$	Electric Response Magnetic Response	Constitutive Relations

Parameter Definitions

Electric Field Intensity, E (V/m)
Electric Flux Density, D (C/m^2)
Magnetic Field Intensity, H (A/m)
Magnetic Flux Density, B (Wb/m^2)
Electric Current Density, J (A/m^2)
Volume Charge Density, ρ_v (C/m^3)
Permittivity, ε (F/m)
Permeability, μ (H/m)
Electrical Conductivity, σ (1/Ω·m)

Constants

Permittivity: $[\varepsilon]=\varepsilon_0[\varepsilon_r]$
$\varepsilon_0=8.8541878176\times10^{-12}$ (F/m)

Permeability: $[\mu]=\mu_0[\mu_r]$
$\mu_0\approx4\pi\times10^{-7}$ (H/m)
$\mu_0=1.2566370614\times10^{-6}$ (H/m)

Impedance: $\eta_0\approx120\pi$ (Ω)
$\eta_0=376.73031346177$ (Ω)

Speed of Light: $c_0=299,792,458$ (m/s)

Lorentz Force Law

$\vec{F}=q\vec{E}+q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$

Sign Convention

e^{-jkz} For propagation in the +z direction.

Έννοια πεδίου

Το θεμελιώδες πρόβλημα που καλείται να λύσει η ηλεκτρομαγνητική θεωρία είναι:

Έχουμε κάποια φορτία ΕΔΩ. Τι γίνεται σε κάποια άλλα φορτία ΕΚΕΙ;

Λέμε ότι ο χώρος γύρω από ένα ηλεκτρικό φορτίο είναι διάχυτος από ηλεκτρομαγνητικό πεδίο («οσμή» φορτίου). Ένα δεύτερο φορτίο στο χώρο αλληλεπίδρασης του παραπάνω πεδίου καταλαβαίνει κάποια δύναμη. Τα πεδία μεταφέρουν αυτή τη δύναμη.

Όταν το φορτίο επιταχύνεται, ένα κομμάτι του πεδίου «ξεκολλά» και ταξιδεύει με τη ταχύτητα του φωτός μεταφέροντας ενέργεια, ορμή και στροφορμή (ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία). Η ύπαρξη αυτής της ακτινοβολίας μας αναγκάζει να αποδεχθούμε την ύπαρξη των πεδίων σαν φυσικές οντότητες εξίσου πραγματικές όπως η γνωστή μας ύλη.

Επομένως πάμε από τη μελέτη δυνάμεων μεταξύ φορτίων στη θεωρία πεδίων και των αλληλεπιδράσεών τους με φορτία. Τα πεδία δημιουργούνται από φορτία και ανιχνεύονται από φορτία.

Έννοια φορτίου

Φορτίο είναι η φυσική οντότητα που αποδεχόμαστε για να εξηγήσουμε τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα.

- Δυο ειδών φορτία. Θετικά και αρνητικά. Αντιστοίχιση αυθαίρετη. Ομώνυμα απωθούνται ετερώνυμα έλκονται. Στη φύση τα φορτία εμφανίζονται σε δομές όπου σχεδόν αντισταθμίζονται πλήρως τα θετικά και αρνητικά φορτία. (Σχόλια).
- Διατήρηση. Ολική διατήρηση (global conservation) - τοπική διατήρηση (local conservation). Η ολική επιτρέπει εξαφάνιση φορτίου (π.χ. Ελλάδα) και ταυτόχρονη εμφάνιση αλλού (π.χ. Αμερική). Τοπική επιβάλει την ύπαρξη κάποιας συνεχούς διαδρομής εδώ και αλλού (εξίσωση συνεχείας).
- Κβάντωση. Δεν είναι συνεχές ρευστό. Υπάρχει διακριτή ελάχιστη ποσότητα, το θεμελιώδες φορτίο. Ηλεκτρόνιο $-e$, πρωτόνιο $+e$. (Σχόλια βιβλίου). Σε κανονικές συνθήκες όμως εργαζόμαστε με μεγάλο αριθμό φορτίων και μπορούμε να το θεωρήσουμε συνεχές ρευστό.
- Αναλλοίωτο. Δεν μεταβάλλεται με την ταχύτητα όπως η μάζα.

Μονάδες: Θα δουλέψουμε στο σύστημα μονάδων SI.

Topic

Φάσορες

Μια αρμονική (ημιτονοειδής) συνάρτηση μπορεί να γραφτεί σαν

$$y(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

Με την ταυτότητα Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

μπορούμε να γράψουμε την αρμονική συνάρτηση σαν

$$y(t) = \Re e\big[Ae^{j(\omega t+\theta)}\big] = \Re e\big[Ae^{j\omega t}e^{j\theta}\big]$$

Σε γραμμικά προβλήματα η συχνότητα ω είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει σταθερό όρο $e^{j\omega t}$ που παραλείπεται όταν έχουμε αρμονικές συναρτήσεις. Οπότε:

$$y(t) = A\cos(\omega t + \theta) \longleftrightarrow Y = Ae^{j\theta} = A\underline{/\theta}$$

Μια χρήσιμη επισκόπηση έννοιας φάσορα βρίσκεται στο link phasor.

Πολική και καρτεσιανή μορφή

$$Y = a + jb = A\underline{/\theta}$$

όπου

καρτεσιανή σε πολική	πολική σε καρτεσιανή
$A = \sqrt{a^2 + b^2}$	$a = A\cos\theta$
$\theta = \tan^{-1}(b/a)$	$b = A\sin\theta$

Άλγεβρα φασόρων

$$F_1 = a_1 + jb_1 = A_1\underline{/\theta_1}$$

$$F_2 = a_2 + jb_2 = A_2\underline{/\theta_2}$$

πρόσθεση: $F_1 + F_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$

αφαίρεση: $F_1 - F_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$

πολλαπλασιασμός: $F_1 \cdot F_2 = (A_1 \cdot A_2)\underline{/\theta_1 + \theta_2}$

διαίρεση: $F_1/F_2 = (A_1/A_2)\underline{/\theta_1 - \theta_2}$

παραγώγιση: $\dfrac{dF}{dt} = j\omega F$

ολοκλήρωση: $\displaystyle\int F dt = \frac{1}{j\omega}F = -(j/\omega)F$

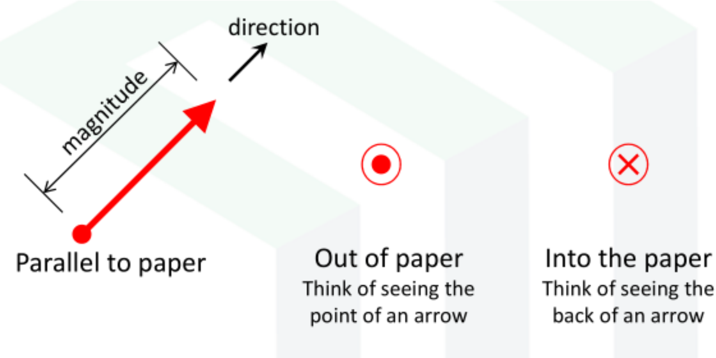
Βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη

Ένα βαθμωτό (μονόμετρο) μέγεθος χαρακτηρίζεται πλήρως μόνο από το μέτρο του, κάποια τιμή που μπορεί να είναι πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός. Οι φάσορες είναι βαθμωτά μεγέθη. Παραδείγματα: 7, π, -1.345, $98.2 + j4.6$. Μάζα, απόσταση, θερμοκρασία, τάση, κ.α.

Ένα διανυσματικό μέγεθος εκτός από το μέτρο του διαθέτει και κατεύθυνση. Παραδείγματα: ταχύτητα, δύναμη, ηλεκτρομαγνητικά πεδία, ορμή, μετατόπιση.

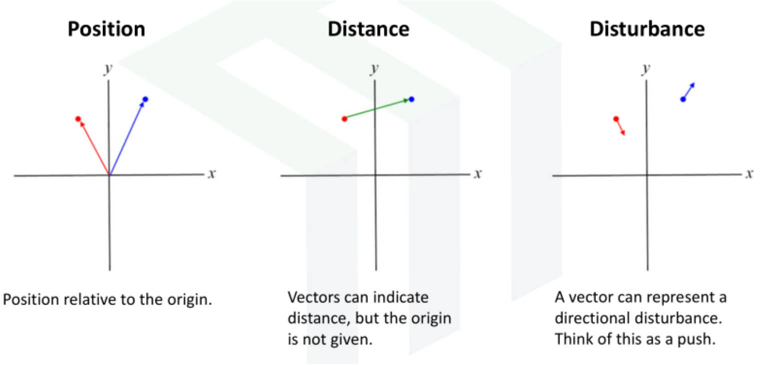
Υπάρχουν και άλλα φυσικά μεγέθη, οι τανυστές (tensors). Τα βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη είναι υποπερίπτωσή τους.

Σκίτσο διανύσματος



Σχήμα: Σκίτσο διανύσματος. Προσοχή. Παρόλο που φαίνεται ότι το διάνυσμα δείχνει κάτι μακριά από το αρχικό σημείο, αυτό που περιγράφει αναφέρεται στο συγκεκριμένο αρχικό σημείο και μόνο σε αυτό.

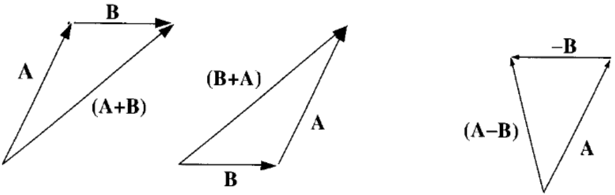
Πληροφορία που παρέχει ένα διάνυσμα



Σχήμα: Πληροφορία που παρέχει ένα διάνυσμα. Θέση, σχετικά με κάποιο σημείο αναφοράς. Απόσταση, ανεξάρτητα από σημείο αναφοράς. Κατευθυνόμενη διαταραχή.

Πράξεις με διανύσματα 1

Πρόσθεση και αφαίρεση



Σχήμα: Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \qquad \text{αντιμεταθετική}$$

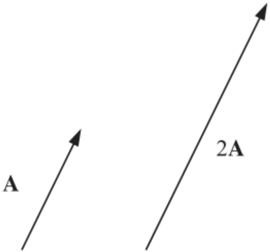
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \qquad \text{προσεταιριστική}$$

Αφαίρεση: Πρόσθεση αντιθέτου

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Πράξεις με διανύσματα 2

Πολ/σμός με βαθμωτό μέγεθος

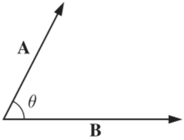


Σχήμα: Πολ/σμός με βαθμωτό μέγεθος

Πολ/σμός με θετικό αριθμό πολ/ζει μέτρο, δεν πειράζει κατεύθυνση. Πολ/σμός με αρνητικό αριθμό πολ/ζει μέτρο και αντιστρέφει κατεύθυνση.

$$a(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B} \quad \text{επιμεριστική}$$

Πράξεις με διανύσματα 3
Εσωτερικό γινόμενο



Σχήμα: Εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta$$

Εσωτερικό γινόμενο είναι βαθμωτό μέγεθος. Ισχύουν:

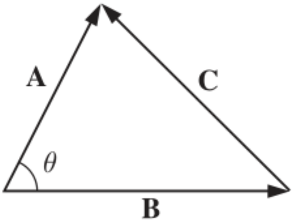
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \qquad \text{αντιμεταθετική}$$
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \qquad \text{επιμεριστική}$$

Γεωμετρικά: Προβολή του ενός στο άλλο επί το μέτρο του άλλου.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \qquad \text{παράλληλα}$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{κάθετα}$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}$.



Έχουμε $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$.

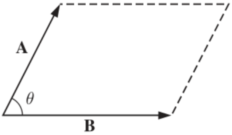
$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$$

Νόμος συνημιτόνων.

Πράξεις με διανύσματα 4

Εξωτερικό γινόμενο



Σχήμα: Εξωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin\theta \, \hat{\mathbf{n}}$$

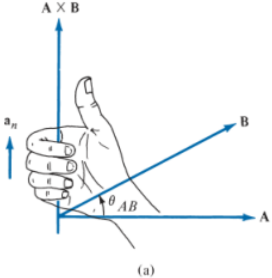
όπου $\hat{\mathbf{n}}$ μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ και με κατεύθυνση που ακολουθεί τον κανόνα του δεξιού χεριού. Δάκτυλα δεξιού χεριού στο πρώτο διάνυσμα. Τα περιστρέφουμε μέσω της μικρότερης γωνίας στο δεύτερο και ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του $\hat{\mathbf{n}}$.

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} && \text{όχι αντιμεταθετική} \\ &\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} && \text{επιμεριστική} \end{aligned}$$

Γεωμετρικά: $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$.

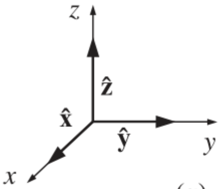
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \qquad \text{παράλληλα}$$

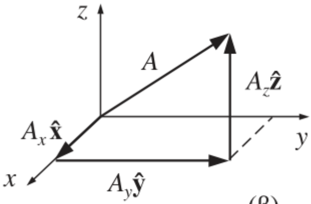
Εξωτερικό γινόμενο 2



Σχήμα: Εξωτερικό γινόμενο. Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.

Καρτεσιανές συντεταγμένες





$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) + (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) =$$

$$(A_x + B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{z}}$$

$$a\mathbf{A} = (aA_x)\hat{\mathbf{x}} + (aA_y)\hat{\mathbf{y}} + (aA_z)\hat{\mathbf{z}}$$

και επειδή: $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 1,\ \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = 0$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}})\cdot(B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Καρτεσιανές συντεταγμένες 2

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{z}} = 0\\
&\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{z}}\\
&\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}}\\
&\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}})\times(B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) =$$

$$(A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{x}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{y}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα 1a

Εάν $\mathbf{A} = (10, -4, 6)$ και $\mathbf{B} = (2, 1, 0)$ υπολογίστε:

- την συνιστώσα του $\mathbf{A}$ στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{y}}$
- το μέτρο του διανύσματος $3\mathbf{A} - \mathbf{B}$
- ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$

Προφανώς, $A_y = -4$.

$3\mathbf{A} - \mathbf{B} = 3(10, -4, 6) - (2, 1, 0) = (30, -12, 18) - (2, 1, 0) = (28, -13, 18)$ και
$|3\mathbf{A} - \mathbf{B}| = \sqrt{28^2 + (-13)^2 + 18^2} = \sqrt{1277} = 35.74$

Εάν $\mathbf{C} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ τότε ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{C}$ είναι:

$$\hat{\mathbf{a}}_C = \frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|} = \frac{(14, -2, 6)}{\sqrt{14^2 + (-2)^2 + 6^2}} = (0.91132, -0.13019, 0.39057)$$

Παρατηρείστε ότι $|\hat{\mathbf{a}}_C| = 1$ όπως θα περιμέναμε.

Παράδειγμα 1b

```
>> A=[10 -4 6]; B=[2 1 0];
>> 3*A-B
ans =
   28  -13   18
>> norm(3*A-B)
ans = 35.735
>> C=A+2*B
C =
   14   -2    6
>> ac = C/norm(C)
ac =
   0.9113  -0.1302   0.3906
>> norm(ac)
>> ans = 1
```

Παράδειγμα 2

Έστω σημεία P, Q τοποθετημένα στα $(0, 2, 4)$ και $(-3, 1, 5)$ αντίστοιχα. Υπολογίστε:

- την θέση του διανύσματος $\mathbf{r}_P$
- το διάνυσμα μετατόπισης από το P στο Q
- την απόσταση μεταξύ P και Q
- διάνυσμα παράλληλο στο PQ με μέτρο 10

$\mathbf{r}_P = (0, 2, 4) = 2\hat{\mathbf{a}}_y + 4\hat{\mathbf{a}}_z$

$\mathbf{r}_{PQ} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P = (-3, 1, 5) - (0, 2, 4) = (-3, -1, 1)$ ή $\mathbf{r}_{PQ} = -3\hat{\mathbf{a}}_x - \hat{\mathbf{a}}_y + \hat{\mathbf{a}}_z$

Η απόσταση μεταξύ P και Q είναι: $d = |\mathbf{r}_{PQ}| = \sqrt{9 + 1 + 1} = 3.3166$

Διάνυσμα παράλληλο στο PQ με μέτρο 10 είναι:

$$\pm 10 \frac{\mathbf{r}_{PQ}}{|\mathbf{r}_{PQ}|} = \pm 10 \frac{(-3, -1, 1)}{3.3166} = \pm(-9.0453, -3.0151, 3.0151)$$

Παράδειγμα 2b

```
>> p=[0 2 4]; q=[-3 1 5];
>> r=q-p
r =
  -3  -1   1
>> d=norm(r)
d = 3.3166
>> 10*r/norm(r)
ans =
  -9.0453  -3.0151   3.0151
```

Τεστ εσωτερικού γινομένου

Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να δείξει αν δυο διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους. Αν ναι, η προβολή του ενός στο άλλο είναι μηδενική, άρα το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{A} \perp \mathbf{B}$$

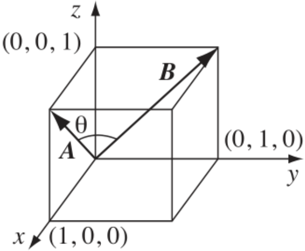
Τεστ εξωτερικού γινομένου

Το εξωτερικό γινόμενο μπορεί να δείξει αν δυο διανύσματα είναι παράλληλα μεταξύ τους. Αν ναι, η γωνία μεταξύ τους είναι μηδέν άρα και το εξωτερικό γινόμενο είναι μηδέν.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$$

Παράδειγμα

Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν δύο διαγώνιοι διαδοχικών εδρών ενός κύβου.



$$\mathbf{A} = (1, 0, 1) \qquad \mathbf{B} = (0, 1, 1)$$

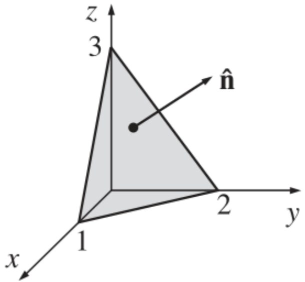
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta = \sqrt{2}\sqrt{2}\cos\theta = 2\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^{\circ}$$

Άσκηση 1

Χρησιμοποιήστε το εξωτερικό γινόμενο για να βρείτε τις συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}$ που είναι κάθετο στο επίπεδο του σχήματος.



Το εξωτερικό γινόμενο δυο οποιονδήποτε διανυσμάτων στο επίπεδο θα μας δώσει το κάθετο. Έστω

$$\mathbf{A} = (0,2,0) - (1,0,0) = (-1,2,0) \qquad \mathbf{B} = (0,0,3) - (1,0,0) = (-1,0,3)$$

Άσκηση 1a

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

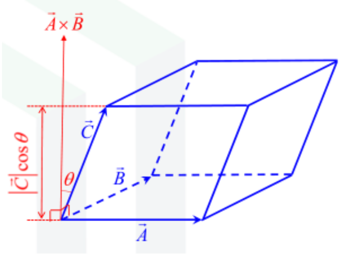
$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|}$$

```
>> A=[-1 2 0]; B=[-1 0 3];
>> C=cross(A,B)
C =
   6   3   2
>> n=C/norm(C)
n =
   0.8571   0.4286   0.2857
```

Τριπλά γινόμενα

Βαθμωτό τριπλό γινόμενο:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$



Σχήμα: Βαθμωτό τριπλό γινόμενο ο όγκος του σχηματιζόμενου παραλληλεπιπέδου.

Διανυσματικό τριπλό γινόμενο:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

Παράδειγμα

Δοθέντων δυο διανυσμάτων $\mathbf{A} = (3, 4, 1)$ και $\mathbf{B} = (0, 2, -5)$ ποια η γωνία μεταξύ τους;

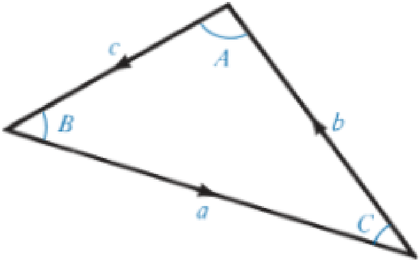
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3 \qquad |\mathbf{A}| = \sqrt{26} \qquad |\mathbf{B}| = \sqrt{29}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\|} = 0.10925 \qquad \theta = 83.728^\circ$$

```
>> A=[3 4 1]; B=[0 2 -5];
>> dot(A,B)
ans = 3
>> norm(A)
>> ans = 5.0990
>> norm(B)
ans = 5.3852
>> dot(A,B)/(norm(A)*norm(B))
ans = 0.1093
>> theta = acos(dot(A,B)/(norm(A)*norm(B)))*180/pi
theta = 83.728
```

Παράδειγμα

Δοθέντος τριγώνου με πλευρές a, b, c υπολογίστε τους κανόνες συνημιτόνου και ημιτόνου.



Παράδειγμα (συν)

Κανόνας συνημιτόνου

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{b} + \mathbf{c} = -\mathbf{a}$$

$$a^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

όπου $(\pi - A)$ η γωνία μεταξύ $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$.

Κανόνας ημιτόνου

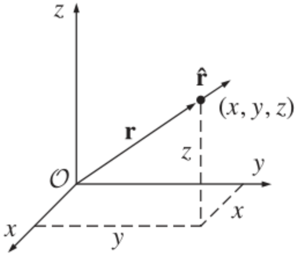
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

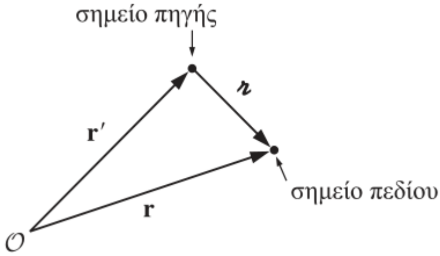
Το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

$$\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \frac{1}{2}|\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = \frac{1}{2}|\mathbf{c}\times\mathbf{a}| \Rightarrow$$

$$ab\sin C = bc\sin A = ca\sin B \Rightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Διάνυσμα θέσης





Η θέση ενός σημείου (x, y, z) προσδιορίζεται από το διάνυσμα θέσης με αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το συγκεκριμένο σημείο.

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} = (x, y, z)$$

$$\text{μέτρο: } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

και το μοναδιαίο διάνυσμα θέσης

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Διάνυσμα μετατόπισης και διάνυσμα απόστασης

Απειροστό διάνυσμα μετατόπισης από το (x, y, z) στο $(x + dx, y + dy, z + dz)$:

$$d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$$

Συχνά έχουμε προβλήματα που αφορούν δυο σημεία. Σημείο πηγής, $\mathbf{r}'$, που βρίσκεται ένα ηλεκτρικό φορτίο και σημείο πεδίου, $\mathbf{r}$, εκεί που υπολογίζουμε το πεδίο.

Το διάνυσμα απόστασης από το σημείο πηγής μέχρι το σημείο πεδίου είναι:

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

το μέτρο του:

$$\mathscr{r} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

και μοναδιαίο διάνυσμα από $\mathbf{r}'$ σε $\mathbf{r}$:

$$\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = \frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Διάνυσμα απόστασης

σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathscr{r} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = \frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} = \frac{(x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

Χρήσιμη συντομογραφία.

Άσκηση

Υπολογίστε το διάνυσμα απόστασης $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ από το σημείο πηγής $(2, 8, 7)$ μέχρι το σημείο πεδίου $(4, 6, 8)$. Υπολογίστε κατόπιν τα $\mathscr{r}$ και $\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$.

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = (4, 6, 8) - (2, 8, 7) = (2, -2, 1)$$

$$\mathscr{r} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

$$\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = \frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Διαφορικός λογισμός

Έστω συνάρτηση $f(x)$. Η παράγωγος df/dx μας δίνει το ρυθμό μεταβολής, πόσο γρήγορα αλλάζει η $f(x)$ όταν αλλάζει η μεταβλητή x.

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$$

Έστω συνάρτηση $T(x, y, z)$. Ο ρυθμός μεταβολής είναι πιο σύνθετος εδώ γιατί εξαρτάται από την κατεύθυνση. Από λογισμό συναρτήσεων πολλών μεταβλητών:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz =$$

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot (dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}) = \nabla T \cdot d\mathbf{l}$$

$$\text{όπου} \qquad \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

η κλίση ή βάθμωση (gradient, grad) της συνάρτησης T.

Βάθμωση

Η βάθμωση μιας βαθμωτής συνάρτησης (βαθμωτό πεδίο) στον τρισδιάστατο χώρο είναι διανυσματικό πεδίο όπου σε κάθε σημείο του χώρου μας δείχνει μέτρο και κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής (μέγιστη αύξηση) της αρχικής συνάρτησης.

Ο τελεστής ανάδελτα (del operator) σε καρτεσιανές:

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}$$

Είναι διανυσματικός τελεστής που δρα στην συνάρτηση που ακολουθεί. Αν η συνάρτηση είναι βαθμωτή, έχουμε την βάθμωση που είδαμε.

Αν είναι διανυσματική, έχουμε δυο ειδών αποτελέσματα.

1. $\nabla \cdot \mathbf{A}$ Απόκλιση (divergence, div) που είναι βαθμωτή συνάρτηση.
2. $\nabla \times \mathbf{A}$ Στροβιλισμός (curl) που είναι διανυσματική συνάρτηση.

Παράδειγμα

Υπολογίστε τη βάθμωση του μέτρου του διανύσματος θέσης $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Έχουμε:

$$\nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{z}} =$$

$$= \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$$

Νόημα;

Άσκηση

Υπολογίστε τη βάθμωση των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$
2. $f(x,y,z) = x^2 y^3 z^4$
3. $f(x,y,z) = e^x \sin(y) \ln(z)$

Απαντήσεις:

$$\nabla f = 2\,x\hat{\mathbf{x}} + 3\,y^2\hat{\mathbf{y}} + 4\,z^3\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla f = 2\,xy^3z^4\hat{\mathbf{x}} + 3\,x^2y^2z^4\hat{\mathbf{y}} + 4\,x^2y^3z^3\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla f = e^x \ln(z) \sin(y)\,\hat{\mathbf{x}} + \cos(y)\, e^x \ln(z)\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{e^x \sin(y)}{z}\hat{\mathbf{z}}$$

Άσκηση

Το ύψος κάποιου λόφου (σε m) δίδεται από:

$$h(x,y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12)$$

όπου x και y οι αποστάσεις αντίστοιχα (σε km) ανατολικά και βόρεια κάποιας πόλης που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.

- Σε ποιο σημείο βρίσκεται η κορυφή του λόφου;
- Πόσο είναι το ύψος του;
- Πόσο απότομη είναι η κλίση του λόφου (σε m/km) σε σημείο που βρίσκεται $1\ \mathrm{km}$ ανατολικά και $1\ \mathrm{km}$ βόρεια της πόλης. Προς ποια κατεύθυνση στο σημείο αυτό η κλίση γίνεται πιο απότομη;

Κορυφή του λόφου $\nabla h = 0$. Οπότε:

$$\nabla h = (-60\,x + 20\,y - 180)\,\hat{\mathbf{x}} + (20\,x - 80\,y + 280)\,\hat{\mathbf{y}}$$

Άσκηση (συν)

$$\left.\begin{array}{rcl} -60\,x + 20\,y - 180 & = & 0 \\ 20\,x - 80\,y + 280 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x = -2 \\ y = 3 \end{array}$$

που σημαίνει $2\ \mathrm{km}$ δυτικά και $3\ \mathrm{km}$ βόρεια της πόλης.

Το ύψος του λόφου είναι $h(-2,3) = 720\ \mathrm{m}$.

Κλίση του λόφου στο σημείο $(1,1)$ είναι: $\nabla h(1,1) = 220(-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$.

Μέτρο της κλίσης: $|\nabla h| = 220\sqrt{2} \sim 311.1\ \mathrm{m/km}$

Κατεύθυνση: βορειοδυτική.

Άσκηση

Έστω $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ το διάνυσμα απόστασης από κάποιο σταθερό σημείο (x', y', z') στο μεταβλητό σημείο (x, y, z) και έστω $\mathscr{r}$ το μήκος του. Δείξτε ότι:

- $\nabla(\mathscr{r}^2) = 2\boldsymbol{\mathscr{r}}$
- $\nabla(1/\mathscr{r}) = -\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}/\mathscr{r}^2$
- Ποια είναι η γενική σχέση για $\nabla(\mathscr{r}^n)$;

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}} \qquad \mathscr{r} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\nabla(\mathscr{r}^2) = \frac{\partial}{\partial x}[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}()\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}()\hat{\mathbf{z}} =$$
$$= 2(x - x')\hat{\mathbf{x}} + 2(y - y')\hat{\mathbf{y}} + 2(z - z')\hat{\mathbf{z}} = 2\boldsymbol{\mathscr{r}}$$

Άσκηση (συν)

$$\nabla(1/\mathscr{r}) = \frac{\partial}{\partial x}[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-1/2}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}()^{-1/2}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}()^{-1/2}\,\hat{\mathbf{z}} =$$

$$= -\frac{1}{2}()^{-3/2}2(x-x')\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}()^{-3/2}2(y-y')\,\hat{\mathbf{y}} - \frac{1}{2}()^{-3/2}2(z-z')\,\hat{\mathbf{z}} =$$

$$= -()^{-3/2}[(x-x')\,\hat{\mathbf{x}} + (y-y')\,\hat{\mathbf{y}} + (z-z')\,\hat{\mathbf{z}}] = -\frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^3} = -\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}$$

$$\nabla(\mathscr{r}^n) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathscr{r}^n)\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathscr{r}^n)\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}(\mathscr{r}^n)\,\hat{\mathbf{z}} = n\,\mathscr{r}^{n-1}\frac{\partial \mathscr{r}}{\partial x}\,\hat{\mathbf{x}} + \cdots =$$

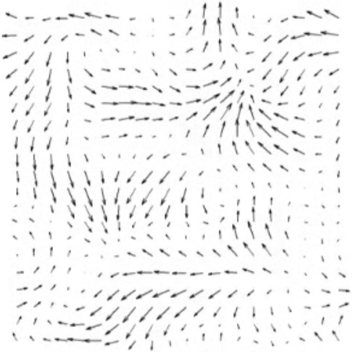
$$= n\,\mathscr{r}^{n-1}\frac{2(x-x')}{2\,\mathscr{r}}\,\hat{\mathbf{x}} + \cdots = n\,\mathscr{r}^{n-1}\frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} = n\,\mathscr{r}^{n-1}\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$$

Πεδία

Ένα πεδίο είναι μια συνάρτηση που περιγράφει κάποιο μέγεθος σε κάποια σημείο του χώρου. Το μέγεθος μπορεί να είναι βαθμωτό ή διανυσματικό και να μεταβάλλεται ή όχι και στο χώρο και στο χρόνο.

Scalar Field, $f(x,y)$

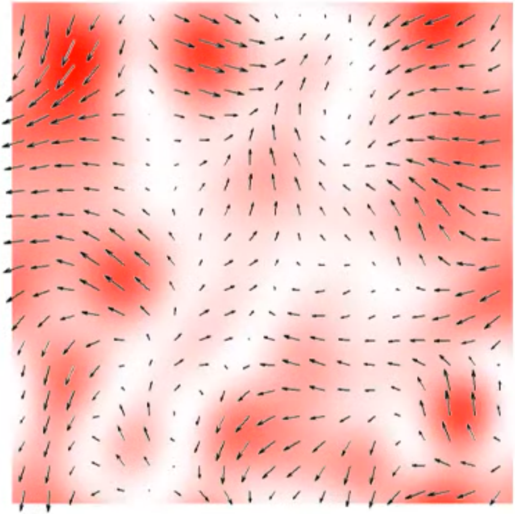
magnitude(x,y,z)



Vector Field, $\vec{v}(x,y)$

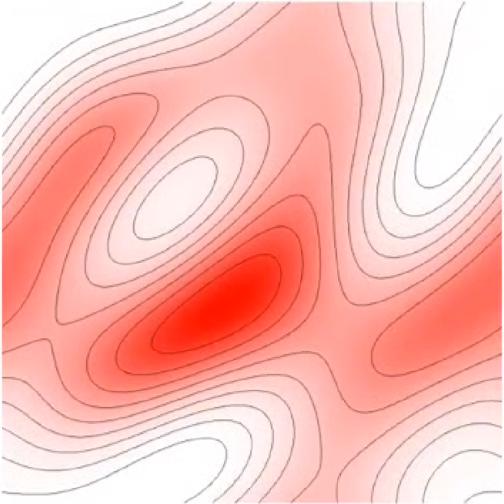
magnitude(x,y,z)
$+$direction(x,y,z)

Πεδία 2



Σχήμα: Εναλλακτική μορφή διανυσματικού πεδίου

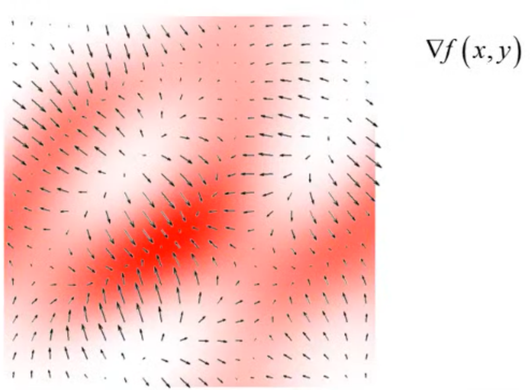
Πεδία 3



Σχήμα: Υψομετρικά περιγράμματα - isocontour lines σε βαθμωτά πεδία

Βαθμίδα ή βάθμωση (grad) βαθμωτού πεδίου

Γενίκευση της παραγώγου σε περισσότερες διαστάσεις. Χαρακτηρίζει τον ρυθμό μεταβολής της τιμής ενός βαθμωτού πεδίου στην κατεύθυνση που είναι μέγιστος. Η βάθμωση (grad, gradient) παράγει ένα διανυσματικό πεδίο.



Σχήμα: Βαθμίδα βαθμωτού πεδίου