

4.2. Αναπτύγματα Taylor βασικών (στοιχειωδών) συναρτήσεων.

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε τα αναπτύγματα σε σειρές Taylor των βασικότερων στοιχειωδών συναρτήσεων. Βασιζόμενοι σε αυτά, καθώς και σε τεχνικές που θα αναπτύξουμε στην επόμενη Ενότητα, μπορούμε να επιτύχουμε την ανάπτυξη σε σειρά Taylor μεγάλης κατηγορίας συναρτήσεων.

4.2.1. Η εκθετική συνάρτηση.

Για την συνάρτηση $f(x)=e^x$, $x \in \mathbf{R}$, η οποία, όπως είναι γνωστό, είναι απεριόριστες φορές παραγωγίσιμη, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}f(x) &= e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1 \\f'(x) &= (e^x)' = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1 \\f''(x) &= (f'(x))' = (e^x)' = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1 \\&\dots \\f^{(n)}(x) &= e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στον τύπο (4.1.1), με κέντρο το σημείο $a=0$, παίρνουμε το ανάπτυγμα Maclaurin της εκθετικής συνάρτησης:

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot (x-0)^n \Rightarrow \\e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\end{aligned}$$

4.2.2. Η λογαριθμική συνάρτηση $\ln x$.

Για την συνάρτηση $f(x)=\ln x$ η οποία είναι, επίσης, απεριόριστες φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $(0, +\infty)$, επιλέγουμε ως κέντρο το σημείο $a = 1$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln x \Rightarrow f(1) = \ln 1 = 0 \\f'(x) &= (\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1 \\f''(x) &= (f'(x))' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1 \\f'''(x) &= (f''(x))' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2 \\f^{(4)}(x) &= (f'''(x))' = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(1) = -2 \cdot 3 \\&\dots \\f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση αποδεικνύεται επαγωγικά ως εξής :

$$\text{Για } n=1, \text{ προφανώς ισχύει αφού } f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} = (-1)^{1-1} \cdot \frac{(1-1)!}{x}.$$

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει για $n=k$, δηλαδή ότι $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}$, τότε

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)}(x))' = \left((-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k} \right)' = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot (x^{-k})' = \\ &= (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot (-k) \cdot x^{-k-1} = (-1)^k \cdot \frac{k!}{x^{k+1}} \end{aligned}$$

και η επαγωγική απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στον τύπο (4.1.1), με κέντρο το σημείο $a=1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \ln x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \cdot (x-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{n!} \cdot (x-1)^n \Rightarrow \\ \ln x &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (x-1)^n, \quad |x-1| < 1. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα ο προηγούμενος τύπος μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Η ακτίνα σύγκλισης της υπό μελέτης δυναμοσειράς είναι πράγματι 1 αφού:

$$r := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|(-1)^{n-1} (n-1)!|}{n!}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

4.2.3. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Οι συναρτήσεις του ημιτόνου $f(x)=\sin x$ και του συνημιτόνου $g(x)=\cos x$ είναι παραγωγίσιμες σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών και αναπτύσσονται σε σειρές *Taylor* με κέντρο μηδέν ως εξής:

$$\begin{aligned}
f(x) = \sin x &\Rightarrow f(0) = \sin 0 = 0, & g(x) = \cos x &\Rightarrow g(0) = \cos 0 = 1, \\
f'(x) = (\sin x)' &= \cos x \Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1, & g'(x) = (\cos x)' &= -\sin x \Rightarrow g'(0) = -\sin 0 = 0 \\
f''(x) = (\cos x)' &= -\sin x \Rightarrow f''(0) = -\sin 0 = 0, & g''(x) = (-\sin x)' &= -\cos x \Rightarrow g''(0) = -\cos 0 = -1 \\
f'''(x) = (-\sin x)' &= -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -\cos 0 = -1, & g'''(x) = (-\cos x)' &= \sin x \Rightarrow g'''(0) = \sin 0 = 0 \\
&\dots & & \\
f^{(n)}(0) &= \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases} & g^{(n)}(0) &= \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Έτσι, αντικαθιστώντας στον γενικό τύπο (4.1.1), έχουμε:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.2.4. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Το ανάπτυγμα Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $|x| < 1$, μας δίνει την εναλλάσσοσα γεωμετρική σειρά δυνάμεων του x :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+x} \Rightarrow f(0) = 1 \\
f'(x) &= \left(\frac{1}{1+x} \right)' = \frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(0) = -1 \\
f''(x) &= \left(\frac{-1}{(1+x)^2} \right)' = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f''(0) = 2 \\
f'''(x) &= \left(\frac{2}{(1+x)^3} \right)' = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4} \Rightarrow f'''(0) = -2 \cdot 3 \\
f^{(4)}(x) &= \left(\frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4} \right)' = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \\
&\dots \\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^n n!
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot (x-0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!} \cdot x^n \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad |x| < 1.$$

4.2.5. Η διωνυμική σειρά.

Γενίκευση της προηγούμενης περίπτωσης αποτελεί το ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(x) = (1+x)^a$, $a \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = (1+x)^a \Rightarrow f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \left((1+x)^a \right)' = a \cdot (1+x)^{a-1} \Rightarrow f'(0) = a,$$

$$f''(x) = \left(a \cdot (1+x)^{a-1} \right)' = a \cdot (a-1) \cdot (1+x)^{a-2} \Rightarrow f''(0) = a \cdot (a-1),$$

...

$$f^{(n)}(x) = a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1) \cdot (1+x)^{a-n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1).$$

Επομένως,

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{a}{n} \cdot x^n, \quad |x| < 1.$$

Πρέπει βέβαια εδώ να σημειωθεί ότι τυπικά απαιτείται η απόδειξη της γενικής σχέσης για την $f^{(n)}(x)$ επαγωγικά σε κάθε περίπτωση, όπως έγινε στην 4.2.2, πέρα από την «υπολογιστική» διαπίστωσή της.

4.3. Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor τυχούσας συνάρτησης.

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης Ενότητας θα δώσουμε εδώ δύο παραδείγματα τεχνικών υπολογισμού αναπτυγμάτων Taylor πιο σύνθετων συναρτήσεων. Οι περιπτώσεις αυτές είναι χαρακτηριστικές του τρόπου που εργαζόμαστε για να αναπτύξουμε σε σειρά Taylor οποιαδήποτε συνάρτηση: Προσπαθούμε να τη γράψουμε ως συνδυασμό ή σύνθεση των στοιχειωδών συναρτήσεων που είδαμε παραπάνω ώστε να χρησιμοποιήσουμε τα αναπτύγματά τους. Πολλά ανάλογα επεξεργασμένα παραδείγματα ακολουθούν στο τέλος της παραγράφου.

4.3.1. Υπολογισμός σειράς Taylor με συνδυασμό ή σύνθεση των αναπτυγμάτων των στοιχειωδών συναρτήσεων.

❖ Οι συναρτήσεις υπερβολικού ημιτόνου και συνημιτόνου.

Με την βοήθεια του αναπτύγματος της εκθετικής συνάρτησης (4.2.1) αναπτύσσουμε άμεσα σε σειρές Taylor και τις υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{-x} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot (-x)^n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{2n!} \cdot x^n \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = x + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \dots \end{aligned}$$

κι αυτό γιατί $\frac{(1 - (-1)^n)}{2n!} = \begin{cases} \frac{2}{2n!} = \frac{1}{n!} = \frac{1}{(2k+1)!}, & \text{αν } n = 2k+1 \\ \frac{0}{2n!} = 0, & \text{αν } n = 2k \end{cases}$

Ανάλογα υπολογίζεται και το ανάπτυγμα του υπερβολικού συνημιτόνου:

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^x + \frac{1}{2} \cdot e^{-x} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot (-x)^n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 + (-1)^n)}{2n!} \cdot x^n = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} \cdot x^{2k} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \dots \end{aligned}$$

Τα αναπτύγματα αυτά ισχύουν για κάθε x πραγματικό αριθμό.

❖ Η συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$.

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα (4.2.4) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \frac{1}{1+(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n} \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

4.4. Εφαρμογές.

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε κάποιες από τις βασικότερες εφαρμογές/δυνατότητες που αποκτάμε με την χρήση των αναπτυγμάτων Taylor.

4.4.1. Υπολογισμός απροσδιόριστων μορφών ορίων.

Οι σειρές Taylor χρησιμοποιούνται συχνά για τον υπολογισμό ορίων απροσδιόριστων μορφών.

Πιο συγκεκριμένα, εάν $P(x)$, $Q(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$, μπορούμε να αναλύσουμε τον αριθμητή και παρανομαστή σε σειρές Taylor κέντρου x_0 και να υπολογίσουμε τα ζητούμενα όρια **μετά από απλοποιήσεις των κοινών παραγόντων που θα εμφανιστούν** οι οποίες θα άρουν την απροσδιοριστία.

Παράδειγμα. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$.

Το ανάπτυγμα Taylor (κέντρου 0) του αριθμητή είναι:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots$$

και άρα το όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \dots) = 1.$$

4.4.2. Προσεγγιστικοί υπολογισμοί.

Η προσέγγιση συναρτήσεων από πολυώνυμα Taylor μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως βάση για τον προσεγγιστικό υπολογισμό παραστάσεων που προκύπτουν από μη πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά την τιμή του e . Είναι προφανές ότι αυτή προκύπτει ως η τιμή της (μη πολυωνυμικής) συνάρτησης $f(x)=e^x$ στην θέση $x=1$. Χρησιμοποιώντας έτσι το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης (βλ. και 4.2.1)

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \dots$$

έχουμε, αντικαθιστώντας όπου $x=1$:

Προσέγγιση με πολυώνυμο 1ης τάξης: $1 + x \rightarrow 1 + 1 = 2$

Προσέγγιση με πολυώνυμο 2ης τάξης: $1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 \rightarrow 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot 1^2 = 2,5$

Προσέγγιση με πολυώνυμο 3ης τάξης: $1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot 1^2 + \frac{1}{3!} \cdot 1^3 = 2.666666$

Προσέγγιση με πολυώνυμο 4ης τάξης: $1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot 1^2 + \frac{1}{3!} \cdot 1^3 + \frac{1}{4!} \cdot 1^4 = 2.70833$

Προσέγγιση με πολυώνυμο 5ης τάξης: $1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot 1^2 + \frac{1}{3!} \cdot 1^3 + \frac{1}{4!} \cdot 1^4 + \frac{1}{5!} \cdot 1^5 = 2.716666$

Προσέγγιση με πολυώνυμο 6ης τάξης: $1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot 1^2 + \frac{1}{3!} \cdot 1^3 + \frac{1}{4!} \cdot 1^4 + \frac{1}{5!} \cdot 1^5 + \frac{1}{6!} \cdot 1^6 = 2.718055$

κλπ.

Αν θέλαμε λοιπόν στον προηγούμενο προσεγγιστικό υπολογισμό μας ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων θα μπορούσαμε να σταματήσουμε στο πολυώνυμο 5^{ης} τάξης αφού αυτό και το επόμενο (6^{ης} τάξης) δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα στα πρώτα 2 δεκαδικά ψηφία.

4.4.3. Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

Αν $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ είναι δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης r , τότε

$$\text{για κάθε } \alpha, \beta \in (x_0 - r, x_0 + r) \text{ ισχύει } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\alpha}^{\beta} a_n (x - x_0)^n dx \right),$$

μπορούμε να υπολογίζουμε ορισμένα ολοκληρώματα μη πολυωνυμικών συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα ανάπτυγματα Taylor.

Παράδειγμα. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x} dx$, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη δυναμοσειρά για

το $\cos x$ με κέντρο $x_0 = 0$. Μέχρι ποιας τάξης όρους πρέπει να κρατήσουμε για να μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι βρήκαμε το αποτέλεσμα με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων;

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του συνημιτόνου $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$, υπολογίζουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} \dots \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} - \frac{x^7}{8!} \dots \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \int_0^1 x^{2n-1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n)!} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{96} + \frac{1}{4320} - \frac{1}{322560} + \dots \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα, κρατώντας στο ανάπτυγμα του συνημιτόνου όρους μέχρι και 8^{ης} τάξης, είναι:

$$I_8 = 0.239811714$$

Αν σταματούσαμε όμως σε όρους 6^{ης} τάξης θα παίρναμε την εκτίμηση $I_6 = 0.2398148$, η οποία είναι ακριβής όσον αφορά στα 5 πρώτα δεκαδικά ψηφία αφού ο όρος 8^{ης} τάξης αφαιρεί ποσότητα που είναι περίπου .000003.

Άλλα Παραδείγματα – Λυμένες Ασκήσεις.

1. Δώστε το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor για την συνάρτηση $\frac{1}{1-x^2}$ γύρω από το 0.

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

1. Να υπολογίσετε προσεγγιστικά την ποσότητα $\sqrt{1.01}$ με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων.

Η ζητούμενη ποσότητα είναι ίση με την τιμή της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x+1}$ στο σημείο $x=0.01$.

Αναπτύσσουμε, επομένως, πρώτα την $f(x)$ σε σειρά Taylor με κέντρο το σημείο $x_0=0$:

$$f(x) = \sqrt{x+1} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x+1}^3} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x+1}^5} \qquad f'''(0) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16\sqrt{x+1}^7} \qquad f^{(4)}(0) = -\frac{15}{16}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3!} - \frac{15}{16} \cdot \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Αντικαθιστώντας $x=0.01$ στην προηγούμενη σχέση βρίσκουμε τις εξής προσεγγίσεις για την τετραγωνική ρίζα του 1.01:

$$\text{Προσέγγιση με πολυώνυμο 1ης τάξης: } 1 + \frac{x}{2} = 1 + \frac{0,01}{2} = 1,005$$

$$\text{Προσέγγιση με πολυώνυμο 2ης τάξης: } 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} = 1 + \frac{0,01}{2} - \frac{0,01^2}{8} = 1,0049875$$

$$\text{Προσέγγιση με πολυώνυμο 3ης τάξης: } 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{48} = 1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{8} + \frac{3(0,01)^3}{48} = 1,004987562$$

κλπ.

Είναι φανερό επίσης ότι ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων επιτυγχάνουμε αν σταματήσουμε στο πολυώνυμο $2^{\text{ης}}$ τάξης αφού αυτό και το επόμενο ($3^{\text{ης}}$ τάξης) δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα στα πρώτα 6 δεκαδικά ψηφία.

3. (α) Αναπτύξτε σε σειρά Taylor την συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ με κέντρο το 0, μέχρι και τον όρο x^5 . Στη συνέχεια, μετατρέψτε τις 46° σε ακτίνια και υπολογίστε την ποσότητα $\sin(46^\circ)$, χρησιμοποιώντας $\pi = 3.14159$.

(β) Επαναλάβετε τα παραπάνω, αναπτύσσοντας την ίδια συνάρτηση σε σειρά με κέντρο το $\frac{\pi}{4}$, μέχρι και τον όρο $(x - \frac{\pi}{4})^2$. Ποιός από τους δύο τρόπους υπολογισμού είναι ακριβέστερος και ταχύτερος, αν συγκριθεί με την «ακριβή» τιμή που σας δίνει ένας απλός υπολογιστής «τσέπης»;

(α) Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην παράγραφο 4.2.3, το ανάπτυγμα Taylor της $f(x) = \sin x$ με κέντρο το μηδέν είναι $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$. Έτσι, αν κρατήσουμε όρους μέχρι και τάξεως 5, έχουμε την προσέγγιση:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

Αντικαθιστώντας τώρα, όπου x την ποσότητα $46^\circ = \frac{46\pi}{180} \cong 0,80285$, και χρησιμοποιώντας την τιμή του π , που μας δίνει η άσκηση βρίσκουμε:

$$\sin 46^\circ = 0.719382.$$

(β) Ο τύπος της σειράς με κέντρο το $x_0 = \pi/4$ είναι $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\pi/4)}{n!} (x - \frac{\pi}{4})^n$. Υπολογίζουμε τις επιμέρους ποσότητες:

$$f(\frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f'(\frac{\pi}{4}) = (\sin x)'_{x=\frac{\pi}{4}} = (\cos x)_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f''(\frac{\pi}{4}) = (\cos x)'_{x=\frac{\pi}{4}} = -(\sin x)_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Επομένως, η σειρά γίνεται

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \dots$$

Αντικαθιστώντας τώρα, όπου x την ποσότητα $46^\circ = \frac{46\pi}{180}$ και χρησιμοποιώντας την τιμή του π , που μας

δίνει η άσκηση βρίσκουμε: $\sin 46^\circ = 0.71934$. Η ακριβής τιμή, που δίνει ένας υπολογιστής τσέπης είναι: $\sin 46^\circ = 0.71934$, συνεπώς η δεύτερη μέθοδος είναι ακριβέστερη και γρηγορότερη.

4. Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα των εμπλεκόμενων συναρτήσεων σε σειρές Maclaurin, υπολογίστε το

$$\text{όριο } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

Το ανάπτυγμα Maclaurin του αριθμητή και του παρονομαστή είναι:

$$e^x - e^{-x} = 2x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

και το όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + \dots}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{60} + \dots}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots} = \frac{2 + 0 + 0 + \dots}{1 - 0 + 0 + \dots} = 2$$

5. Αναλύστε την συνάρτηση $y(x) = e^{-x}$ σε σειρά Taylor με κέντρο $x_0 = 1$, μέχρι και τον $(x-1)^3$ όρο και υπολογίστε προσεγγιστικά το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx$. Πόσο διαφορετικό θα ήταν το αποτέλεσμα αν είχατε κρατήσει και όρους 4ου βαθμού; Θεωρείτε επιτυχή τη προσέγγιση μέχρι τον όρο $(x-1)^3$;

Το ζητούμενο ανάπτυγμα γράφεται:

$$e^{-x} = e^{-1} - e^{-1}(x-1) + \frac{1}{2!} e^{-1}(x-1)^2 - \frac{1}{3!} e^{-1}(x-1)^3 + \frac{1}{4!} e^{-1}(x-1)^4 \dots$$

Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα και κάνοντας τις πράξεις έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_1^2 \frac{e^{-1}}{x} \left(1 - (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!} \right) dx \\ &= \int_1^2 dx e^{-1} \left(\frac{-5}{2} + \frac{8}{3x} + x - \frac{x^2}{6} + \left[\frac{x^3}{24} - \frac{4x^2}{24} + \frac{6x}{24} - \frac{4}{24} + \frac{1}{24x} \right] \right), \end{aligned}$$

όπου σε τετράγωνα παρενθέσεις έχουμε συμπεριλάβει τους όρους 4^{ης} τάξης του αναπτύγματος.

Υπολογίζοντας τα επί μέρους ολοκληρώματα μέχρι όρους 3^{ης} τάξης βρίσκουμε το αποτέλεσμα:

$$I_3 = e^{-1} \left(\frac{-5}{2} + \frac{8}{3} \ln 2 + \frac{3}{2} - \frac{7}{18} \right) = .4595 e^{-1} \cong 0.16904$$

Αν συμπεριλαμβάναμε και τους όρους 4^{ης} τάξης θα βρίσκαμε:

$$I_4 = e^{-1} \left(\frac{-16}{6} + \frac{65}{24} \ln 2 + \frac{15}{8} - \frac{7}{9} + \frac{15}{96} \right) = .4641 e^{-1} \cong 0.17073$$

Από το γεγονός ότι τα 2 αυτά αποτελέσματα έχουν μικρή διαφορά, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι βρίσκονται κοντά στη σωστή απάντηση.

6. Έστω ότι για μία συνάρτηση $y = f(x)$ δίνεται ότι:

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = \frac{1}{2}, \quad f''(1) = \frac{1}{2}, \quad f'''(1) = \frac{3}{4}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(1) = \frac{n!}{2^n}.$$

Να γραφεί η σειρά Taylor της συνάρτησης αυτής γύρω από το $x = 1$. Για ποιές τιμές του x συγκλίνει αυτή η σειρά; Ποιά είναι η τιμή της f στο μηδέν;

Χρησιμοποιώντας τον γενικό τύπο $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ στην θέση $a=1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(1)}{0!} \cdot (x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1!} \cdot (x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \cdot (x-1)^n + \dots = \\ &= \frac{1}{1} \cdot (x-1)^0 + \frac{1/2}{1!} \cdot (x-1)^1 + \frac{1/2}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{3/4}{3!} \cdot (x-1)^3 + \dots + \frac{n!/2^n}{n!} \cdot (x-1)^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!/2^n}{n!} \cdot (x-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot (x-1)^n. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο της ρίζας μπορούμε να προσδιορίσουμε το διάστημα σύγκλισης της σειράς αυτής. Συγκεκριμένα, για να συγκλίνει η σειρά αρκεί να ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\left| \frac{1}{2^n} \cdot (x-1)^n \right|} \right) < 1 &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} \right) \cdot |x-1| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |x-1| < 1 \Leftrightarrow |x-1| < 2 \\ &\Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3. \end{aligned}$$

Εκτός του διαστήματος $(-1,3)$ η σειρά δεν συγκλίνει, αφού τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\left| \frac{1}{2^n} \cdot (x-1)^n \right|} \right) > 1$, όπως δεν

συγκλίνει και στα άκρα του διαστήματος αφού :

$$\text{Για } x=3 \text{ η σειρά γίνεται } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot (3-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$$

$$\text{ενώ για } x=-1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot (-1-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \text{ η οποία κυμαίνεται.}$$

Τέλος, δεδομένου ότι το σημείο $x=0$ περιλαμβάνεται στο διάστημα σύγκλισης της σειράς, η ζητούμενη τιμή $f(0)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot (0-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}.$$

Ασκήσεις.

1. Αναπτύξτε σε σειρά Taylor με κέντρο μηδέν την συνάρτηση $f(x) = (x^2+x)e^x$ και αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e.$$

2. Υπολογίστε προσεγγιστικά τις τιμές:

- i. $1/e$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων (Απάντηση: 0.36788)
- ii. $\sin 62^\circ$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων (Απάντηση: 0.88295)
- iii. $\ln(0.97)$ με ακρίβεια 7 δεκαδικών ψηφίων (Απάντηση: -0.0304592)
- iv. $\tan 31^\circ$ με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων (Απάντηση: 0.6009)

3. Πόσους όρους από το ανάπτυγμα Taylor, κέντρου 0, του $\ln(1+x)$ πρέπει να κρατήσουμε ώστε να υπολογίσουμε το $\ln(1.02)$ με σφάλμα μικρότερο του 0.00000005;

4. Χρησιμοποιώντας δυναμοσειρές δείξτε ότι:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} = \frac{1}{6} \qquad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{\sinh x - \sin x} = +\infty$$

5. Δείξτε ότι:

i. $\int_0^1 \cos(\sqrt{x}) dx \cong 0.76355$

ii. $\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4} dx \cong 0.4940$

iii. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \cong 0.946083$