3 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

3.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω δύο σύνολα $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$. *ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ* του συνόλου A στο B είναι η διμελής σχέση $f \subseteq A \times B$ για την οποία $\forall\ x \in A$ αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα $y \in B$ δηλαδή

$$\boxed{\forall\ x \in A\ \exists\ y \in B : f(x) = \{y\}}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Κάθε απεικόνιση $f: A \rightarrow B$ ονομάζεται και *ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ* με πεδίο ορισμού $D(f) = A$ και πεδίο τιμών $R(f) \subseteq B$.

$R(f) = \{\ y \in B:\ \exists\ x \in A$ με $f(x)=y\}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- $x \in A$: ανεξάρτητη μεταβλητή
- $y \in B$: εξαρτημένη μεταβλητή
- Αν $A, B \subseteq \mathbf{R}$ τότε η f ονομάζεται πραγματική συνάρτηση.

3.2 ΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

3.2.1 ΤΑΥΤΟΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$f: A \rightarrow \mathbf{R} \text{ με } f(x) = x$$

3.2.2 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$f: A \rightarrow \mathbf{R} \text{ με } f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$$

3.2.3 ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ ονομάζεται *συμμετρική ως προς το α (ή την ευθεία y=a)* αν ισχύουν:

(i) $\forall\ \alpha - x \in A \Leftrightarrow \alpha + x \in A$ και

(ii) $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ ονομάζεται *συμμετρική ως προς το σημείο 0 α (ή την ευθεία y=0)*ή *ΑΡΤΙΑ* αν:

(i) $\forall\ -x \in A \Leftrightarrow x \in A$ και

(ii) $f(-x) = f(x)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ ονομάζεται *ΠΕΡΙΤΤΗ* αν:

(i) $\forall\ -x \in A \Leftrightarrow x \in A$ και

(ii) $f(-x) = -f(x)$

3.2.4 ΑΜΦΙΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΗ (1-1)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία συνάρτηση f: $A \to \mathbf{R}$ ονομάζεται *αμφιμονοσήμαντη* ή *ένα προς ένα (1-1)* αν και μόνο αν

$$\boxed{\forall\ y \in R(f)\ \exists \text{ ένα και μόνο ένα } x \in A : f(x) = y}$$

3.2.5 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία συνάρτηση f: $A \to \mathbf{R}$ ονομάζεται:

(α) *αύξουσα* αν $\forall\ x_1, x_2 \in D(f)$: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

(β) *γνησίως αύξουσα* αν $\forall\ x_1, x_2 \in D(f)$: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(γ) *φθίνουσα* αν $\forall\ x_1, x_2 \in D(f)$: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

(δ) *γνησίως φθίνουσα* αν $\forall\ x_1, x_2 \in D(f)$: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Όλες οι παραπάνω συναρτήσεις λέγονται μονότονες.

3.2.6 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Αντίστροφη συνάρτηση* μίας αμφιμονοσήμαντης συνάρτησης f ορίζουμε τη συνάρτηση f^{-1}: $R(f) \to D(f)$ για την οποία

$$\boxed{f^{-1}(y) = x\ \forall\ x \in D(f) \text{ και } y \in R(f) : f(x) = y}$$

3.2.7 ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Σύνθεση δύο πραγματικών συναρτήσεων f και g με $R(f) \cap D(g) \neq \emptyset$ ορίζουμε τη συνάρτηση $g \circ f(x) = g(\ f(x)\ )$ με πεδίο ορισμού

$$D(g \circ f) = \{\ x \in D(f) : f(x) \in D(g)\ \}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν $R(f) \subseteq D(g)$ τότε $D(g \circ f) = D(f)$

3.2.8 ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία συνάρτηση f: $A \to \mathbf{R}$ ονομάζεται *άνω φραγμένη* αν $\boxed{\exists\ M \in \mathbf{R}: f(x) \leq M\ \forall\ x \in D(f)}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία συνάρτηση f: $A \to \mathbf{R}$ ονομάζεται *κάτω φραγμένη* αν $\boxed{\exists\ M \in \mathbf{R}: f(x) \geq M\ \forall\ x \in D(f)}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία συνάρτηση f: $A \to \mathbf{R}$ ονομάζεται *φραγμένη* αν είναι και άνω και κάτω φραγμένη

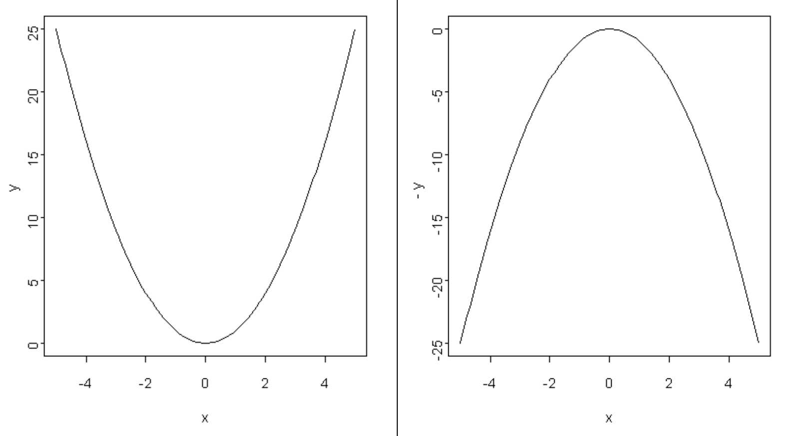
3.2.9 ΚΥΡΤΕΣ & ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία συνάρτηση f: A→**R** ονομάζεται *κυρτή* σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq D(f)$ αν

$$\boxed{\forall\, x_1,x_2 \in \Delta,\ t \in (0,1) \Rightarrow f(\,(1-t)\,x_1 + t\,x_2\,) \leq (1-t)f(x_1) + t\,f(x_2)}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία συνάρτηση f: A→**R** ονομάζεται *κοίλη* σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq D(f)$ αν

$$\boxed{\forall\, x_1,x_2 \in \Delta,\ t \in (0,1) \Rightarrow f(\,(1-t)\,x_1 + t\,x_2\,) \geq (1-t)f(x_1) + t\,f(x_2)}$$



ΚΥΡΤΗ ΚΟΙΛΗ

3.3 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

3.3.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Όριο της f(x) στην τιμή α*

Ο αριθμός L είναι το όριο μιας συνάρτησης f(x) όταν το x προσεγγίζει το α αν και μόνο αν

$$\boxed{\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0:\ |f(x)-L|<\varepsilon\ \forall\ |x-\alpha|<\delta}$$

$$[\ L-\varepsilon<f(x)< L+\varepsilon\ \forall\ \alpha-\delta<x<\alpha+\delta]$$

Με άλλα λόγια: Για οποιοδήποτε θετική ποσότητα ε μπορούμε να βρούμε μια περιοχή (διάστημα) κοντά στο α για το οποίο το $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Πλευρικά Όρια*

Ο αριθμός L είναι το όριο από δεξιά (αριστερά) μιας συνάρτησης f(x) όταν το x προσεγγίζει το α αν και μόνο αν

$$\boxed{\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0:\ |f(x)-L|<\varepsilon\ \forall\ \alpha<x<\alpha+\delta\ (\alpha-\delta<x<\alpha)}$$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ (Αριστερό)

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ (Δεξί)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L \iff \lim_{x\to a} f(x) = L$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Όρια στο Άπειρο*

Ο αριθμός L είναι το όριο μιας συνάρτησης f(x) όταν το x προσεγγίζει το +∞ (-∞) αν και μόνο αν

$$\boxed{\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0:\ |f(x)-L|<\varepsilon\ \forall\ x>\delta\ (x<-\delta)}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Ο αριθμός L είναι το όριο μιας συνάρτησης f(x) όταν το x προσεγγίζει το α αν και μόνο αν

$$\boxed{\forall\ \Pi(L)\ \ \exists\ \Pi(\alpha):\ f(x)\in \Pi(L)\ \forall\ x\in \Pi(\alpha)}$$

Π(L): Περιοχή γύρω από το L και Π(α): Περιοχή γύρω από το α.

3.3.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ

Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ και $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$

1… $\lim_{x\to a}\left(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)\right) = \lambda_1 \lim_{x\to a} f(x) + \lambda_2 \lim_{x\to a} g(x) =$

$= \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$

2… $\lim_{x\to a}\left(f(x) g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = L_1 L_2$

3… $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = L_1 / L_2$

4… $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = L_1^n$

5… $\lim_{x\to a}|f(x)| = \left|\lim_{x\to a} f(x)\right| = |L_1|$

6… $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = g(L_1)$ αν και μόνο αν $L_1 \in D(g)$

7… Αν $f(x) \le g(x)$ $\forall x$ τότε $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι ιδιότητες 1&2 μπορούν να γενικευτούν για n συναρτήσεις:

8… $\lim_{x\to a}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lim_{x\to a} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$

9 … $\lim_{x\to a}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right) = \prod_{i=1}^{n} \lim_{x\to a} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} L_i$

3.3.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ ΠΟΥ ΤΕΙΝΟΥΝ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

1… $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=$

$= +\infty$ όταν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L \in \mathbf{R}$

$= -\infty$ όταν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L \in \mathbf{R}$

$= +\infty$ όταν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$

$= -\infty$ όταν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$

$=$ απροσδιόριστο όταν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$

2… $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right)=$

$= +\infty$ όταν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L > 0$

$= +\infty$ όταν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L < 0$

$= -\infty$ όταν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L > 0$

$= -\infty$ όταν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L < 0$

$=$ απροσδιόριστο όταν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ και $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

3… $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)$

όπως στο γινόμενο.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0^{+}$ ή 0^{-} τότε $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)=\pm\infty$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=$ απροσδιόριστο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν f(x) και g(x) είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις και $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ τότε (x-α) είναι παράγοντας και των δύο συναρτήσεων οπότε

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{(x-a)f_0(x)}{(x-a)g_0(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f_0(x)}{g_0(x)}\right).$$

3.3.4 ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ

1… $\lim_{x\to a}(\sin(x))=\sin(a)$ $\forall \alpha \in \mathbf{R}$

$\lim_{x\to a}(\cos(x))=\cos(a)$ $\forall \alpha \in \mathbf{R}$

$\lim_{x\to a}(tg(x))=tg(a)$ $\forall \alpha \in \mathbf{R}\setminus\{\kappa\pi+\pi/2,\ \kappa\in \mathbf{Z}\}$

2… $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=1$

3… $\lim_{x\to 1} X^k=1$

4… $\lim_{x\to a} b^x=b^\alpha$

5… $\lim_{x\to +\infty} b^x=+\infty$, b>1

$\lim_{x\to -\infty} b^x=0$, b>1

$\lim_{x\to +\infty} b^x=0$, 0<b<1

$\lim_{x\to -\infty} b^x=+\infty$, 0<b<1

6… $\lim_{x\to \pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

7… $\lim_{x\to a}(\ln(x))=\ln(\alpha)$

$\lim_{x\to +\infty}(\ln(x))=+\infty$, $\lim_{x\to 0^+}(\ln(x))=-\infty$

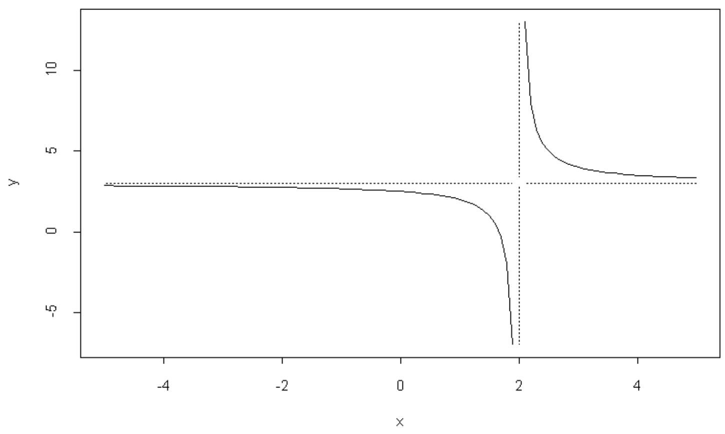
8… $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(x)}{x-1}\right)=1$

3.3.5 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

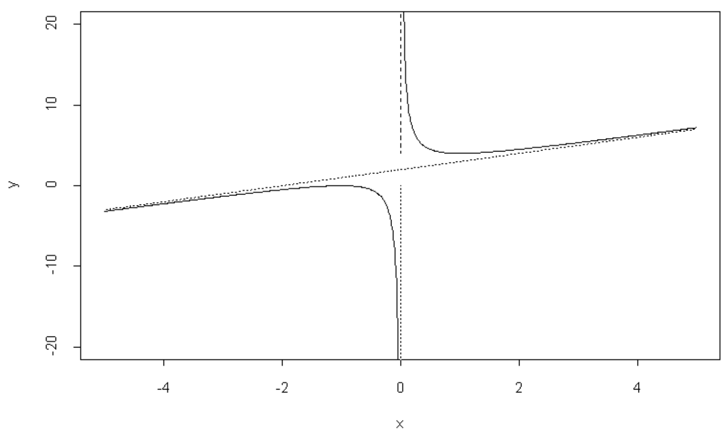
ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ευθεία D: y=αx+β είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης f(x) αν $\lim_{x\to +\infty}(f(x)-ax)=\beta$ ή $\lim_{x\to -\infty}(f(x)-ax)=\beta$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ευθεία D: x=γ είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης f(x) αν $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ ή $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: f(x)=3+1/(x-2)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: f(x)=x+2+1/x



3.4 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

3.4.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο $\alpha \in D(f)$ αν και μόνο αν $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Μία συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα διάστημα $A \subseteq D(f)$ αν και μόνο αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια μόνο τότε έχουμε συνέχεια από δεξιά ή αριστερά.

3.4.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1… Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ και f(x), g(x) συνεχείς συναρτήσεις. Τότε και οι συναρτήσεις:

$$\lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x)\ ,\ \ f(x)g(x) \text{ και } f(x)/g(x)$$

είναι συνεχείς.

2… Όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν f(x) είναι συνεχής στο [α,β] τότε η συνάρτηση αυτή παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ f(α) και f(β), δηλαδή

$$\forall\ M \in (\min\{f(\alpha),f(\beta)\}, \max\{ f(\alpha),f(\beta) \})$$

$$\exists\ \gamma \in (\alpha,\beta):\ f(\gamma)=M$$

ή

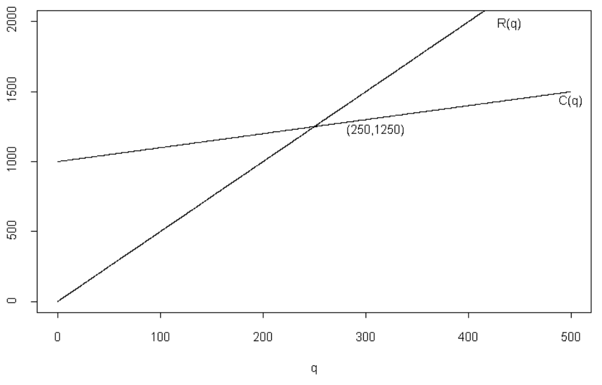
$$\boxed{(\min\{ f(\alpha),f(\beta)\}, \max\{ f(\alpha),f(\beta) \}) \subseteq R(f)}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν f(x) είναι συνεχής και μονότονη στο D(f)=[α,β] τότε

$$\boxed{R(f) = [\min\{ f(\alpha),f(\beta) \}, \max\{ f(\alpha),f(\beta) \}]}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν f(x) είναι ορισμένη και συνεχής στο D(f)=[α,β] με f(α)f(β)<0 τότε $\exists\ \gamma \in (\alpha,\beta)$: f(γ)=0.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν f(x) είναι ορισμένη και συνεχής στο D(f)=[α,β] τότε είναι και φραγμένη.



3.6 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

3.6.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Παράγωγος μίας συνάρτησης f(x) στο σημείο $x_0 \in D(f)$ ονομάζεται το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \in \mathbf{R}.$$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $f'(x)$ ή $\dfrac{df(x)}{dx}$.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ: αν $\delta x = x - x_0$ τότε

$$f'(x_0) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x}$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ

- $f(x_0+\delta x)-f(x_0)$: Μεταβολή της f όταν το x_0 αυξάνει κατά δx.
- $\dfrac{f(x_0+\delta x)-f(x_0)}{\delta x}$: Μέση μεταβολή της f όταν το x_0 αυξάνει κατά δx.
- $\lim\limits_{\delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\delta x)-f(x_0)}{\delta x}$: Μέση μεταβολή της f όταν το x_0 αυξάνει απειροελάχιστα.

$f'(x)$ ονομάζεται και οριακός ή στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Παράγωγος συνάρτηση $f'(x)$ μίας συνάρτησης f(x) ονομάζεται η συνάρτηση

$$f'(x)=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} \quad \forall x\in D(f')$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (Ι): Η παράγωγος $f'(x)$ μας δίνει την κλίση της εφαπτομένη στο σημείο (x,f(x)).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (ΙΙ): Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι και συνεχής.

3.6.3 ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

1… f(x)=c $\forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f'(x)=0$

2… f(x)=αx+β $\Leftrightarrow f'(x)=\alpha$

3… $f(x)=x^k \Leftrightarrow f'(x)=kx^{k-1}$

4… $f(x)=e^x \Leftrightarrow f'(x)= e^x$

5… f(x)=sin(x) $\Leftrightarrow f'(x)=\cos(x)$

3.6.4 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1… $[\lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x)]' = \lambda_1 f'(x)+\lambda_2 g'(x)$

2… $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+ f(x)g'(x)$

3… $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

4… $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$ [Από (3) για f(x)=1]

5… $[g \circ f(x)]' = g'(f(x))\, f'(x)$

6… $[f^{-1}(x)]' = 1/ f'(f^{-1}(x))$

3.7 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εάν f′(x) είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε η παράγωγος της λέγεται παράγωγος δευτέρας τάξης.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $f''(x)$ ή $f^{(2)}(x)$ ή $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Με όμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και της παραγώγους 3^{ης}, 4^{ης} , …, n τάξης.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $f^{(n)}(x)$ ή $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1… $[\lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x)]^{(n)} = \lambda_1 f^{(n)}(x)+\lambda_2 g^{(n)}(x)$

2… $[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$

όπου $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

3.8 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΟΡΙΩΝ ΚΑΙ Ο ΚΑΝΟΝΑΣ L'HOPITAL

ΚΑΝΟΝΑΣ L'HOPITAL: Έστω f(x) και g(x) συνεχείς στο διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμες στο (α,β) και $x_0 \in [\alpha,\beta]$: αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ και υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (Ι): Ο κανόνας ισχύει και για $x\to\pm\infty$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (ΙΙ): Αν έχουμε απροσδιόριστη μορφή του $\lim\{f(x)+g(x)\}$, δηλαδή $\lim f(x) = +\infty$ και $\lim g(x) = -\infty$ τότε μετασχηματίζουμε το παραπάνω όριο σε μορφή 0/0 θέτοντας F(x)=1/f(x) και G(x)=1/g(x) έτσι ώστε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L'Hopital. Δηλαδή

$$\lim\{f(x)+g(x)\} = \lim \frac{F(x)+G(x)}{F(x)G(x)}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (ΙΙΙ): Αν έχουμε απροσδιόριστη μορφή του $\lim\{f(x)g(x)\}$, δηλαδή $\lim f(x) = 0$ και $\lim g(x) = \pm\infty$ τότε μετασχηματίζουμε το παραπάνω όριο σε μορφή ∞/∞ θέτοντας F(x)=1/f(x) έτσι ώστε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L'Hopital. Δηλαδή $\lim\{f(x)+g(x)\} = \lim \frac{g(x)}{F(x)}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (IV): Αν έχουμε απροσδιόριστη μορφή του $\lim f(x)^{g(x)}$, δηλαδή $\lim f(x) = \alpha$ και $\lim g(x) = \beta$ με

- (i) α=β=0
- (ii) α=1 και β=±∞
- (iii) α=0 και β=±∞
- (iv) α=±∞ και β=0

τότε μετασχηματίζουμε το παραπάνω όριο σε

$$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim\{g(x)\ln f(x)\}}$$

έτσι ώστε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L'Hopital.

3.9 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Διαφορικό μιας συνάρτησης f(x) και για απόκλιση από το x ίση με dx ορίζεται η συνάρτηση $df(x) = f'(x)dx$.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ: Το διαφορικό εκφράζει μια προσέγγιση της μεταβολής της f όταν το x αυξηθεί κατά dx (δηλαδή γίνει x+dx). Η προσέγγιση βασίζεται στην εφαπτομένη στο σημείο (x, f(x)).

Όσο πιο μικρό είναι το dx τόσο πιο καλή είναι η προσέγγιση.

Στην πράξη αν ζητηθεί το διαφορικό της f(x) υπολογίζουμε την παράγωγο της.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $df(x)=f'(x)dx \Leftrightarrow f'(x)= df(x)/dx$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η εξίσωση της εφαπτομένης της f(x) στο σημείο (x_0, $f(x_0)$) δίδεται ως εξής:

$$L(x): y=f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Διαφορικό n τάξης μιας συνάρτησης f(x) και για απόκλιση από το x ίση με dx ορίζεται η συνάρτηση $d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n$.

3.12 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω f(x) είναι συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν f(x) είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο διάστημα (α,β) τότε $f'(x)\geq 0$ ή $f'(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Για τις γνησίως αύξουσες ή φθίνουσες στο διάστημα (α,β) τότε $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

3.13 ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια συνάρτηση f(x) παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο για $x=x_0\in D(f)$ αν μπορούμε να ορίσουμε μια περιοχή $\Pi(x_0)$ γύρω από το x_0 τέτοια ώστε:

$$f(x_0)\leq f(x) \text{ ή } f(x_0)\geq f(x) \text{ για κάθε } x\in\Pi(x_0)$$

Συνήθως $\Pi(x_0)=(x_0-\varepsilon,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\varepsilon)$ για $\varepsilon>0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια συνάρτηση f(x) παρουσιάζει ολικό ελάχιστο ή μέγιστο για $x=x_0 \in D(f)$ αν:

$f(x_0) \leq f(x)$ ή $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in D(f)$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat): Έστω f(x) παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D(f)$ και η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο για $x=x_0$ τότε $f'(x)=0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω f(x) παραγωγίσιμη στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$:

(α) αν $f'(x)<0$ για $x<x_0$ και $f'(x)>0$ για $x>x_0$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=x_0$.

(β) αν $f'(x)>0$ για $x<x_0$ και $f'(x)<0$ για $x>x_0$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=x_0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω f(x) δύο φορές παραγωγίσιμη $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)\neq 0$ τότε

(α) αν $f''(x_0)<0$ τότε τοπικό μέγιστο στο $x=x_0$.

(β) αν $f''(x_0)>0$ τότε τοπικό ελάχιστο στο $x=x_0$.

3.14 ΚΥΡΤΕΣ & ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω f(x) συνεχής στο [α,β] και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) τότε f(x) είναι κυρτή (ή κοίλη) στο [α,β] αν $f''(x)\geq 0$ (ή $f''(x)\leq 0$) για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το σημείο ($x_0,f(x_0)$) λέγεται σημείο καμπής μιας συνεχούς στο [α,β] συνάρτησης f(x) αν υπάρχει ε>0 τέτοιο ώστε η f(x) είναι κυρτή στο $(x_0-\varepsilon,x_0)$ και κοίλη $(x_0, x_0-\varepsilon)$ ή αντίστροφα.
[δηλαδή είναι το σημείο που αλλάζει η κυρτότητα].

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν f(x) δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0\in D(f)$ το οποίο είναι θέση σημείου καμπής τότε $f''(x_0)=0$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω f(x) τρεις φορές παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0\in D(f)$. Το x_0 είναι θέση σημείου καμπής αν $f''(x_0)=0$ και $f'''(x_0)\neq 0$.