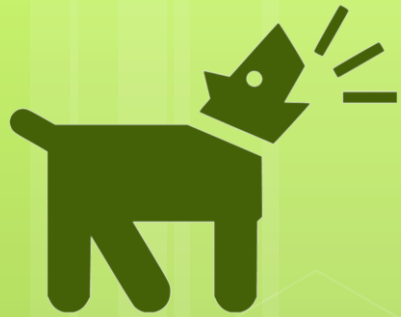




ΓΑΒ LAB

22
Οκτωβρίου
2025

Λογική Σχεδίαση

Άλγεβρα Boole

Χρήσιμες μαθηματικές έννοιες

- Αριθμήσιμο σύνολο
- Δυαδικός τελεστής
- Αξίωμα
- Θεώρημα

Αξιώματα

- ο Κλειστότητα
- ο Προσεταιρισμός
- ο Αντιμεταθετικότητα
- ο Ουδέτερο στοιχείο
- ο Αντίστροφο
- ο Επιμεριστικός κανόνας

Άλγεβρα Boole

- ο Κλειστότητα ως προς $+$
- ο Κλειστότητα ως προς $*$
- ο 0 ουδέτερο για $+$
- ο 1 ουδέτερο για $*$
- ο $+$ αντιμεταθετική
- ο $*$ αντιμεταθετική
- ο $*$ επιμεριστική ως προς $+$
- ο $+$ επιμεριστική ως προς $*$
- ο Υπάρχει συμπλήρωμα
- ο 2 το λιγότερο διακριτά στοιχεία



Διαφορές με κοινή άλγεβρα

- Υπάρχει συμπλήρωμα
- $+$ επιμεριστική ως προς $*$
- Η προσεταιριστικότητα δεν είναι αξιωματική
- Δεν υπάρχουν αντίστροφοι των $+$, $*$
- Δεν απαιτεί άπειρους αριθμούς



Προσδιορισμός...

- ο ... άλγεβρας Boole
- ο Σύνολο στοιχείων
- ο Κανόνες τελεστών
- ο Ικανοποίηση αξιωμάτων

Δίτιμη άλγεβρα Boole

- Στοιχεία
 - $\{0, 1\}$
- Κανόνας +
 - OR
- Κανόνας *
 - AND
- Συμπλήρωμα
 - NOT
- Ικανοποίηση αξιωμάτων



Βασικές ιδιότητες (1)

- Ταυτότητα (ουδέτερο στοιχείο)
 - $x + 0 = x$
 - $x * 1 = x$
- Συμπλήρωμα
 - $x + x' = 1$
 - $x * x' = 0$

Βασικές ιδιότητες (2)

- ο Αυτοδυναμία

- ο $x + x = x$
- ο $x * x = x$

- ο Αφανισμός

- ο $x + 1 = 1$
- ο $x * 0 = 0$



Βασικές ιδιότητες (3)

- Διπλή άρνηση
 - $(x')' = x$
- Αντιμεταθετική
 - $x + y = y + x$
 - $x * y = y * x$



Βασικές ιδιότητες (4)

- Επιμεριστική

- $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$
- $x + (y * z) = (x + y) * (x + z)$

- Προσεταιριστική

- $x + (y + z) = (x + y) + z$
- $x * (y * z) = (x * y) * z$



Βασικές Ιδιότητες (5)

- De Morgan

- $(x + y)' = x' * y'$
- $(x * y)' = x' + y'$

- Απορρόφηση

- $x + (x * y) = x$
- $x * (x + y) = x$



Δυϊσμός

- Σχέση μεταξύ ιδιοτήτων
 - $+$ / $*$
 - 0 / 1
- Παράδειγμα
 - $(x*y) + (x*y') = x$
 - $(x+y) * (x+y') = x$

Προτεραιότητα τελεστών

- Όπως στη συμβατική άλγεβρα
 - $*$, $+$
- Απαλοιφή $*$ και παρανθέσεων
 - $(x*y)+(x*y')=x$
 - $xy+xy'=x$

Απόδειξη ιδιοτήτων

$$x + x = x$$



Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

Αναλυτική απόδειξη

$x + x$

Ουδέτερο στοιχείο



Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$a * 1 = a$$

Ουδέτερο στοιχείο

Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

Ουδέτερο στοιχείο

$$a * 1 = a \quad \text{όπου } a = x + x$$



Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

Ουδέτερο στοιχείο

$$a * 1 = a \quad \text{όπου } a = x + x$$

$$x + x = (x + x) * 1$$



Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

Ουδέτερο στοιχείο

Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

Ουδέτερο στοιχείο
Συμπλήρωμα



Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$a + a' = 1$$

Ουδέτερο στοιχείο
Συμπλήρωμα

Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

Ουδέτερο στοιχείο
Συμπλήρωμα

$$a + a' = 1 \quad \text{όπου } a = x$$

Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

Ουδέτερο στοιχείο
Συμπλήρωμα

$$a + a' = 1 \quad \text{όπου } a = x$$

$$x + x' = 1$$

Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

Ουδέτερο στοιχείο
Συμπλήρωμα

Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

$$a + b * c = (a + b) * (a + c)$$

$$\text{όπου } a = x, b = x, c = x'$$

$$x + x * x' = (x + x) * (x + x')$$

Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

$$a + b * c = (a + b) * (a + c)$$

Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

$$a + b * c = (a + b) * (a + c)$$

$$\text{όπου } a = x, b = x, c = x'$$

Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

$$a + b * c = (a + b) * (a + c)$$

$$\text{όπου } a = x, b = x, c = x'$$

$$x + x * x' = (x + x) * (x + x')$$

Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

$$= x + x * x'$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική



Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

$$= x + x * x'$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

Συμπλήρωμα



Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

$$= x + x * x'$$

$$a * a' = 0$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

Συμπλήρωμα



Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

$$= x + x * x'$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

Συμπλήρωμα

$$a * a' = 0 \quad \text{όπου } x = a$$

Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

$$= x + x * x'$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

Συμπλήρωμα

$$a * a' = 0 \quad \text{όπου } x = a$$

$$x * x' = 0$$

Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

$$= x + x * x'$$

$$= x + 0$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

Συμπλήρωμα



Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

$$= x + x * x'$$

$$= x + 0$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

Συμπλήρωμα

Ουδέτερο στοιχείο



Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

$$= x + x * x'$$

$$= x + 0$$

$$a + 0 = a$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

Συμπλήρωμα

Ουδέτερο στοιχείο



Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

$$= x + x * x'$$

$$= x + 0$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

Συμπλήρωμα

Ουδέτερο στοιχείο

$$a + 0 = a \quad \text{όπου } a = x$$

Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

$$= x + x * x'$$

$$= x + 0$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

Συμπλήρωμα

Ουδέτερο στοιχείο

$$a + 0 = a \quad \text{όπου } a = x$$

$$x + 0 = x$$



Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

$$= x + x * x'$$

$$= x + 0$$

$$= x$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

Συμπλήρωμα

Ουδέτερο στοιχείο

Αναλυτική απόδειξη

$$x + x$$

$$= (x + x) * 1$$

$$= (x + x) * (x + x')$$

$$= x + x * x'$$

$$= x + 0$$

$$= x$$

Ουδέτερο στοιχείο

Συμπλήρωμα

Επιμεριστική

Συμπλήρωμα

Ουδέτερο στοιχείο



Αναλυτική απόδειξη

- ο Απαραίτητη η λεπτομερής **τεκμηρίωση**
- ο Προσεκτική εφαρμογή
- ο Μη διαισθητική
 - ο Οι κανόνες της συμβατικής άλγεβρας οδηγούν σε λάθη
- ο Θέμα **έμπνευσης!!!**
 - ο Μπορεί να «ξεστρατίσουμε»



Απόδειξη με πίνακα αληθείας

 x $x + x$ 

Απόδειξη με πίνακα αληθείας

x	$x + x$
0	
1	

Απόδειξη με πίνακα αληθείας

x	$x + x$
0	0
1	1

Απόδειξη με πίνακα αληθείας

x	$x + x$
0	0
1	1



Αναλυτική με πίνακα

- Χωρίς ανάγκη για τεκμηρίωση
- Απλή
- Γρήγορη
- **Τυφλοσούρτης!!!**
 - Χωρίς κίνδυνο να πάρουμε άλλο δρόμο

