Αριθμητικά Συστήματα

Σε οποιοδήποτε αριθμητικό σύστημα, με βάση τον αριθμό **Β**, ένας ακέραιος αριθμός με πλήθος ψηφίων ***ν***, εκφράζεται ως ακολούθως:

$$\boldsymbol{\alpha_{\nu-1}\,\alpha_{\nu-2}\ldots\alpha_1\,\alpha_0 = \alpha_{\nu-1}\,B^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}\,B^{\nu-2} + \ldots + \alpha_1\,B^1 + \alpha_0\,B^0}$$

όπου **Β** η βάση του αριθμητικού συστήματος και οι συντελεστές $\boldsymbol{\alpha_i}$ μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα ψηφία του αριθμητικού συστήματος, τα οποία παίρνουν ακέραιες τιμές από **0** μέχρι και **Β – 1**. Οι τιμές του δείκτη ***i*** δίνει την τάξη της θέσης του εκάστοτε συντελεστή και κατά συνέπεια τη δύναμη της βάσης **Β** με την οποία πρέπει να πολλαπλασιαστεί ο συντελεστής αυτός.

Δεκαδικό αριθμητικό σύστημα (Βάση = 10):

$$795_{10} = 7 \times 100 + 9 \times 10 + 5 \times 1 = 7 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

Τα ψηφία του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος είναι οι ακέραιοι αριθμοί από 0 μέχρι και 9 (δηλαδή από 0 μέχρι Βάση – 1).

Τετραδικό αριθμητικό σύστημα (Βάση = 4):

$$132_4 = 1 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 5 \times 4^0 = 1 \times 16 + 3 \times 4 + 2 \times 1 \; (= 30_{10})$$

Τα ψηφία του τετραδικού αριθμητικού συστήματος είναι οι ακέραιοι αριθμοί από 0 μέχρι και 3 (δηλαδή από 0 μέχρι Βάση – 1).

Οκταδικό αριθμητικό σύστημα (Βάση = 8):

$$370_4 = 3 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 0 \times 8^0 = 3 \times 64 + 7 \times 8 + 0 \times 1 \; (= 248_{10})$$

Τα ψηφία του οκταδικού αριθμητικού συστήματος είναι οι ακέραιοι αριθμοί από 0 μέχρι και 7 (δηλαδή από 0 μέχρι Βάση – 1).

Δυαδικό αριθμητικό σύστημα (Βάση = 2):

$$1001_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 \; (= 9_{10})$$

Τα ψηφία του δυαδικού αριθμητικού συστήματος είναι οι ακέραιοι αριθμοί 0 και 1 (δηλαδή από 0 μέχρι Βάση – 1).

Δεκαεξαδικό αριθμητικό σύστημα (Βάση = 16):

$$1AF_{16} = 1 \times 16^2 + A \times 16^1 + F \times 16^0 = 1 \times 256 + 10 \times 16 + 15 \times 1 \; (= 431_{10})$$

Τα ψηφία του δεκαεξαδικού αριθμητικού συστήματος είναι οι ακέραιοι αριθμοί 0 και 15, (δηλαδή από 0 μέχρι Βάση – 1), όμως οι αξίες 10, 11, 12, 13, 14 και 15 εκφράζονται με τους λατινικούς χαρακτήρες A, B, C, D, E και F αντίστοιχα.

Δεκαδικό	Δυαδικό	Τετραδικό	Οκταδικό	Δεκαεξαδικό
0	0000	0	0	0
1	0001	1	1	1
2	0010	2	2	2
3	0011	3	3	3
4	0100	10	4	4
5	0101	11	5	5
6	0110	12	6	6
7	0111	13	7	7
8	1000	20	10	8
9	1001	21	11	9
10	1010	22	12	A
11	1011	23	13	B
12	1100	30	14	C
13	1101	31	15	D
14	1110	32	16	E
15	1111	33	17	F

Δυνάμεις του 2:

v	2^v		v	2^v
0	1		8	256
1	2		9	512
2	4		10	1.024
3	8		11	2.048
4	16		12	4.096
5	32		13	8.192
6	64		14	16.384
7	128		15	32.768

Μετατροπές αριθμών σε συστήματα με άλλη βάση

Η μετατροπή ενός αριθμού από το σύστημα με βάση B, στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, γίνεται αν αναπτύξουμε τον αριθμό σε μία ακολουθία δυνάμεων του B και προσθέσουμε όλους τους όρους, όπως δείξαμε προηγουμένως.

Η μετατροπή ενός αριθμού από το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα σε οποιοδήποτε άλλο αριθμητικό σύστημα με βάση B γίνεται με επαναλαμβανόμενη διαίρεση του δεκαδικού αριθμού με τη βάση B μέχρι το πηλίκο της διαίρεσης να γίνει 0.
Οι συντελεστές του επιθυμητού αριθμού στο σύστημα με βάση B λαμβάνονται από τα υπόλοιπα των διαιρέσεων, με το υπόλοιπο της πρώτης διαίρεσης να αντιστοιχεί στο ελάχιστο σημαντικό ψηφίο (Least Significant Digit – LSD) και το τελευταίο υπόλοιπο στο μέγιστο σημαντικό ψηφίο (Most Significant Digit – MSD).

Παράδειγμα 1: Να μετατραπεί ο αριθμός 141_{10} στο δυαδικό, τετραδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό σύστημα

Μετατροπή αριθμού στο δυαδικό σύστημα:

	141	2							
LSD	**1**	70	2						
		0	35	2					
			1	17	2				
				1	8	2			
					0	4	2		
						0	2	2	
							0	1	2
							MSD	**1**	0

Επομένως, $\mathbf{141_{10} = 10001101_2}$

Μετατροπή αριθμού στο τετραδικό σύστημα:

	141	4			
LSD	**1**	35	4		
		3	8	4	
			0	2	4
			MSD	**2**	0

Επομένως, $\mathbf{141_{10} = 2031_4}$

Μετατροπή αριθμού στο οκταδικό σύστημα:

	141	8		
LSD	**5**	17	8	
		1	2	8
		MSD	**2**	0

Επομένως, $\mathbf{141_{10} = 215_8}$

Μετατροπή αριθμού στο δεκαεξαδικό σύστημα:

	141	16	
LSD	**13**	8	16
	MSD	**8**	0

Επομένως, $\mathbf{141_{10} = 8D_{16}}$

Η μετατροπή ενός αριθμού μεταξύ αριθμητικών συστημάτων που έχουν βάση Β η οποία μπορεί να εκφραστεί ως δύναμη του 2 (δυαδικό – Β = 2 = 2^1, τετραδικό – Β = 4 = 2^2, οκταδικό – Β = 8 = 2^3, δεκαεξαδικό – Β = 16 = 2^4) γίνεται μέσω του δυαδικού αριθμητικού συστήματος, ως ακολούθως:

Παράδειγμα 2: Να μετατραπεί ο αριθμός $\mathbf{10001101_2}$ στο τετραδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό σύστημα και να επαληθευτεί η μετατροπή (αντίστροφη μετατροπή)

Μετατροπή του δυαδικού αριθμού στο τετραδικό σύστημα:

10	**00**	**11**	**01**	δυαδικό
2	**0**	**3**	**1**	τετραδικό

Επαλήθευση:

2	**0**	**3**	**1**	τετραδικό
10	**00**	**11**	**01**	δυαδικό

Μετατροπή του δυαδικού αριθμού στο οκταδικό σύστημα:

(0)**10**	**001**	**101**	δυαδικό
2	**1**	**5**	οκταδικό

Επαλήθευση:

2	**1**	**5**	οκταδικό
(0)**10**	**001**	**101**	δυαδικό

Μετατροπή του δυαδικού αριθμού στο δεκαεξαδικό σύστημα:

1000	**1101**	δυαδικό
8	**D**	δεκαεξαδικό

Επαλήθευση:

8	**D**	δεκαεξαδικό
1000	**1101**	δυαδικό

Αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα

Πρόσθεση

Ο αλγόριθμος της πρόσθεσης σε όλα τα αριθμητικά συστήματα είναι ο ίδιος. Έστω ότι θέλουμε να προσθέσουμε τους αριθμούς $X = x_3\, x_2\, x_1\, x_0$ και $Y = y_3\, y_2\, y_1\, y_0$. Αθροίζουμε τους συντελεστές κάθε τάξης, ξεκινώντας από το ελάχιστο σημαντικό ψηφίο (μονάδες). Κάθε επιμέρους άθροιση των $\mathbf{x_i}$ και $\mathbf{y_i}$ δίνει ένα άθροισα $\mathbf{s_i}$ και ένα κρατούμενο $\mathbf{c_i}$. Το κρατούμενο $\mathbf{c_i}$ που προκύπτει προστίθεται στους συντελεστές της επόμενης τάξης $\mathbf{x_{i+1}}$ και $\mathbf{y_{i+1}}$.

	c_3	c_2	c_1	c_0	
X =		x_3	x_2	x_1	x_0
+ Y =		y_3	y_2	y_1	y_0
Άθροισμα **S** =	$\mathbf{s_4=c_3}$	$\mathbf{s_3}$	$\mathbf{s_2}$	$\mathbf{s_1}$	$\mathbf{s_0}$
Επιμέρους Κρατούμενα		c_3	c_2	c_1	c_0

Επομένως το άθροισμα που προκύπτει είναι $\mathbf{S = s_4\, s_3\, s_2\, s_1\, s_0}$, όπου $\mathbf{s_4 = c_3}$

Παράδειγμα 3: Να προστεθούν οι δυαδικοί αριθμοί $A = 1101_2$ και $B = 111_2$.
Λαμβάνοντας υπόψη ότι:

	Κρατούμενο **C**	Άθροισμα **S**	
0 + 0	0	0	$(= 0_{10})$
0 + 1 ή 1 + 0	0	1	$(= 1_{10})$
1 + 1	1	0	$(= 2_{10})$
1 + 1 +1	1	1	$(= 3_{10})$

έχουμε:

	1	1	1	1		
A =		1	1	0	1	$(= 13_{10})$
+ B =		(0)	1	1	1	$(= 7_{10})$
Άθροισμα **S** =	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	$\mathbf{(= 20_{10})}$
Επιμέρους Κρατούμενα		1	1	1	1	

Επομένως το άθροισμα που προκύπτει είναι **S = 10100.**

Αφαίρεση

Η αφαίρεση στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα μπορεί να γίνει με το γνωστό αλγόριθμο της αφαίρεσης που εφαρμόζουμε στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα και ισχύει για όλα τα αριθμητικά συστήματα.
Να σημειωθεί ότι κατά την αφαίρεση, προσθέτουμε το Δανεικό από προηγούμενη αφαίρεση στον Αφαιρετέο και το άθροισμά τους αφαιρείται από τον Μειωτέο.

Παράδειγμα 4: Να αφαιρεθούν οι δυαδικοί αριθμοί A = 1101 (μειωτέος) και B = 111 (αφαιρετέος).

Λαμβάνοντας υπόψη ότι:

	Δανεικό **B**	Διαφορά **D**
0 - 0	0	0
1 - 1	0	0
1 - 0	0	1
0 - 1	1	1
0 - 10	1	0
01 - 10	1	1

έχουμε:

(Μειωτέος) A =	1	1	0	1	(= 13_{10})
- (Αφαιρετέος) B =	(0)	1	1	1	(= 7_{10})
	1	1	0		
Διαφορά **D** =	**0**	**1**	**1**	**0**	**(= 6_{10})**
Επιμέρους Δανεικά	0	1	1	0	

Συμπληρώματα αριθμών

Συμπλήρωμα ως προς βάση μείον 1 ($\Sigma_{(B-1)}$) ενός αριθμού $X = x_{v-1} x_{v-2} x_{v-3} \ldots x_2 x_1 x_0$ είναι ο αριθμός $Y = y_{v-1} y_{v-2} y_{v-3} \ldots y_2 y_1 y_0$, ο οποίος ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\begin{array}{r} X = x_{v-1} x_{v-2} x_{v-3} \ldots x_2 x_1 x_0 \\ + \; Y = y_{v-1} y_{v-2} y_{v-3} \ldots y_2 y_1 y_0 \\ \hline Z = z_{v-1} z_{v-2} z_{v-3} \ldots z_2 z_1 z_0 \end{array}$$

όπου, $z_{v-1} = z_{v-2} = z_{v-3} = \ldots = z_2 = z_1 = z_0 = B\text{-}1$, δηλαδή, όλα τα ψηφία του Z ισούνται με το μέγιστο ψηφίο του συγκεκριμένου αριθμητικού συστήματος.

Το **Συμπλήρωμα ως προς βάση ($\Sigma_{(B)}$)** ενός αριθμού, σε οποιοδήποτε αριθμητικό σύστημα, προκύπτει αν προσθέσουμε μία μονάδα στο συμπλήρωμα ως προς βάση μείον 1 ($\Sigma_{(B-1)}$), δηλαδή: $\Sigma_{(B)} = 1 + \Sigma_{(B-1)}$

Για παράδειγμα, στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, το συμπλήρωμα του αριθμού 735_{10} ως προς βάση μείον 1, δηλαδή το συμπλήρωμα του αριθμού ως προς 9 (B - 1 = 10 – 1 = 9), είναι ο αριθμός 264_{10}, αφού $735_{10} + 264_{10} = 999_{10}$ και το συμπλήρωμα ως προς βάση ($\Sigma_{(B)}$) είναι $1 + 264_{10} = 265_{10}$.

Ειδικότερα, στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα, η εύρεση του συμπληρώματος ως προς βάση μείον 1, δηλαδή το συμπλήρωμα ως προς 1, είναι πολύ εύκολη, αφού προκύπτει από την αντιστροφή των ψηφίων του δυαδικού αριθμού, δηλαδή όπου 0 θέτουμε 1 και όπου 1 θέτουμε 0.

Για παράδειγμα, το συμπλήρωμα του δυαδικού αριθμού 1001_2 ως προς 1 είναι ο αριθμός 0110_2, αφού $1001_2 + 0110_2 = 1111_2$. Το συμπλήρωμα ως προς 2 αυτού του δυαδικού αριθμού είναι $1 + 0110_2 = 0111_2$.

Αφαίρεση με χρήση Συμπληρωμάτων
Σε όλα τα αριθμητικά συστήματα, αντί του κλασσικού αλγόριθμου της αφαίρεσης, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των συμπληρωμάτων, ειδικότερα μάλιστα στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα, λόγω της ευκολίας εφαρμογής του στο συγκεκριμένο αριθμητικό σύστημα.

Για την αφαίρεση $\boldsymbol{X - Y}$ δύο μη προσημασμένων ακέραιων αριθμών, $\boldsymbol{X = x_{v-1} x_{v-2} x_{v-3} \dots x_2 x_1 x_0}$ και $\boldsymbol{Y = y_{v-1} y_{v-2} y_{v-3} \dots y_2 y_1 y_0}$, με $\boldsymbol{v}$ ψηφία ο καθένας, στο σύστημα με βάση το Β ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Εκφράζουμε τους αριθμούς με το ίδιο πλήθος ψηφίων. Σε περίπτωση που οι αριθμοί δεν έχουν το ίδιο πλήθος ψηφίων, προσθέτουμε στον αριθμό με το μικρότερο πλήθος ψηφίων τον αναγκαίο αριθμό μηδενικών αριστερά από το μέγιστο σημαντικό ψηφίο του.
2. Προσδιορίζουμε το συμπλήρωμα ως προς βάση **($\Sigma_{(B)}$)** του αφαιρετέου.
3. Προσθέτουμε στον μειωτέο $\boldsymbol{X}$ το συμπλήρωμα ως προς βάση **($\Sigma_{(B)}$)** του αφαιρετέου $\boldsymbol{Y}$, δηλαδή υπολογίζουμε το $\boldsymbol{X + (B^v - Y) = X - Y + B^v}$, όπου $\boldsymbol{\Sigma_{(B)}(Y) = B^v - Y}$.
4. Αν $\boldsymbol{X>Y}$, τότε προκύπτει τελικό κρατούμενο 1 (ένα επιπλέον ψηφίο, που είναι ο συντελεστής της τάξης $\mathbf{B^v}$), το οποίο ονομάζεται **ψηφίο υπερχείλισης** και μπορεί να παραληφθεί. Ο αριθμός που απομένει είναι η διαφορά $\boldsymbol{X - Y}$.
5. Αν $\boldsymbol{X<Y}$, τότε το άθροισμα που προκύπτει έχει μηδενικό τελικό κρατούμενο (δεν έχει κρατούμενο) και ισούται με $\boldsymbol{B^v - (Y - X)}$, το οποίο είναι το συμπλήρωμα ως προς βάση του $\boldsymbol{Y - X}$. Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης είναι προφανώς ένας αρνητικός αριθμός, αφού ο μειωτέος είναι μικρότερος από τον αφαιρετέο. Για να πάρουμε το αποτέλεσμα σε πιο οικεία μορφή, υπολογίζουμε το συμπλήρωμα ως προς βάση του αθροίσματος που προκύπτει και τοποθετούμε στην αρχή ένα αρνητικό πρόσημο.

Παράδειγμα 5: Με χρήση συμπληρωμάτων να γίνει η αφαίρεση $619573_{10} - 4237_{10}$.

Ο αφαιρετέος έχει δύο λιγότερα ψηφία από τον μειωτέο, άρα συμπληρώνουμε δύο μηδενικά αριστερά από το μέγιστο σημαντικό ψηφίο: $4237_{10} = 004237_{10}$.

$\Sigma_9(004237_{10}) = 995762$

$\Sigma_{10}(004237_{10}) = 1 + 995762 = 995763$

Μειωτέος	619573
+ Συμπλήρωμα ως προς 10 του αφαιρετέου	995763
Άθροισμα με ψηφίο υπερχείλισης	1615336
Διαφορά	**615336**

Παράδειγμα 6: Με χρήση συμπληρωμάτων να γίνει η αφαίρεση 9573_{10} - 14237_{10}.

$\Sigma_9(14237) = 85762$

$\Sigma_{10}(14237) = 1 + 85762 = 85763$

Μειωτέος	09573
+ Συμπλήρωμα ως προς 10 του αφαιρετέου	85763
Άθροισμα με ψηφίο υπερχείλισης	095336
$\Sigma_9(95336)$	04663
$\Sigma_{10}(95336) = 1 + \Sigma_9(95336) = 1 + 4663$	4664
Διαφορά	**- 4664**

Παράδειγμα 7: Με χρήση συμπληρωμάτων να γίνει η αφαίρεση 10101_2 - 1101_2.

Ο αφαιρετέος έχει ένα λιγότερο ψηφίο από τον μειωτέο, άρα συμπληρώνουμε ένα μηδενικό αριστερά από το μέγιστο σημαντικό ψηφίο: $1101_2 = 01101_2$.

$\Sigma_1(01101_2) = 10010$

$\Sigma_2(01101_2) = 1 + 10010 = 10011$

Μειωτέος	10101
+ Συμπλήρωμα ως προς 10 του αφαιρετέου	10011
Άθροισμα με ψηφίο υπερχείλισης	111000
Διαφορά	**11000**

Παράδειγμα 8: Με χρήση συμπληρωμάτων να γίνει η αφαίρεση 1111_2 - 10101_2

$\Sigma_1(10101_2) = 01010$

$\Sigma_2(10101_2) = 1 + 01010 = 01011$

Μειωτέος	01111
+ Συμπλήρωμα ως προς 10 του αφαιρετέου	01011
Άθροισμα με ψηφίο υπερχείλισης	011010
$\Sigma_1(11010_2)$	00101
$\Sigma_2(11010_2) = 1 + 101$	110
Διαφορά	**- 110**