

Ηλεκτρικά Κυκλώματα II

Διάλεξη 08

Α. Δροσόπουλος

08-05-2025

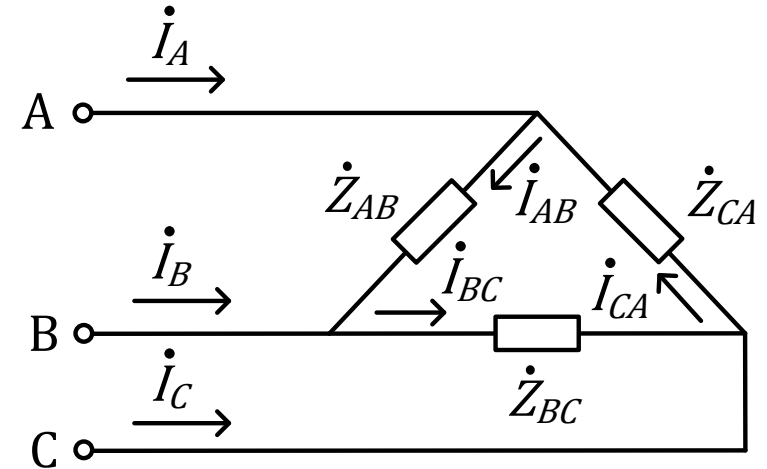
- 1 Ασύμμετρα τριφασικά
- 2 Ισχύς σε τριφασικά

1 Ασύμμετρα τριφασικά

2 Ισχύς σε τριφασικά

Παράδειγμα 6

- Θεωρούμε ότι το φορτίο του σχήματος τροφοδοτείται από τριφασικό συμμετρικό σύστημα τάσεων θετικής ακολουθίας με $U = 400 \text{ V}$ και $\dot{Z}_{AB} = 10 \Omega$, $\dot{Z}_{BC} = 10 \angle 30^\circ \Omega$, $\dot{Z}_{CA} = 15 \angle 30^\circ \Omega$. Να υπολογιστούν τα ρεύματα.



Απάντηση:

- Οι τάσεις στα άκρα των κλάδων του Δ είναι οι πολικές τάσεις της πηγής, αφού οι αγωγοί θεωρούνται ιδανικοί. Επομένως τα ρεύματα των κλάδων είναι

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_{AB}} = \frac{400 \angle 120^\circ}{10} = 40 \angle 120^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{Z}_{BC}} = \frac{400}{10 \angle 30^\circ} = 40 \angle (-30^\circ) \text{ A}$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\dot{Z}_{CA}} = \frac{400 \angle (-120^\circ)}{15 \angle 30^\circ} = 26.7 \angle (-150^\circ) \text{ A}$$

Παράδειγμα 6

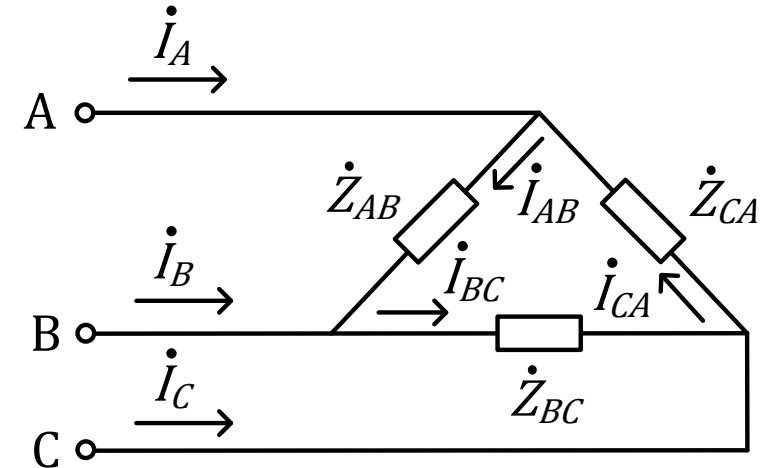
- Τα ρεύματα των γραμμών θα είναι

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 48.1 \angle 86.3^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = 77.3 \angle (-45^\circ) \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = 58.1 \angle 173.4^\circ \text{ A}$$

- Γενικά οι άγνωστοι είναι 6 και επομένως χρειάζονται 6 ανεξάρτητες εξισώσεις για να τους υπολογίσουμε (σύστημα 6 x 6).
- Βέβαια η περίπτωση αυτή είναι σχετικά απλή, γιατί οι τάσεις στις αντιστάσεις είναι γνωστές και οι 3 πρώτες εξισώσεις προέκυψαν με απλή εφαρμογή του νόμου του Ohm, οπότε υπολογίσαμε χωρίς πολύ κόπο τα 3 ρεύματα.



Παράδειγμα 7

- Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $U = 400\text{ V}$, $\dot{Z}_1 = 10 - j5\ \Omega$, $\dot{Z}_2 = 5 + j4\ \Omega$, $\dot{Z}_3 = 12 + j6\ \Omega$.
- Να βρεθούν τα ρεύματα γραμμών. Να θεωρηθεί σύστημα τάσεων θετικής ακολουθίας.

Απάντηση:

- Εφαρμόζεται ανάλυση βρόχων:

$$-\dot{U}_{AB} + \dot{Z}_1(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) = 0 \Rightarrow -\dot{U}_{AB} + \dot{Z}_1\dot{I}_1 - \dot{Z}_1\dot{I}_2 = 0$$

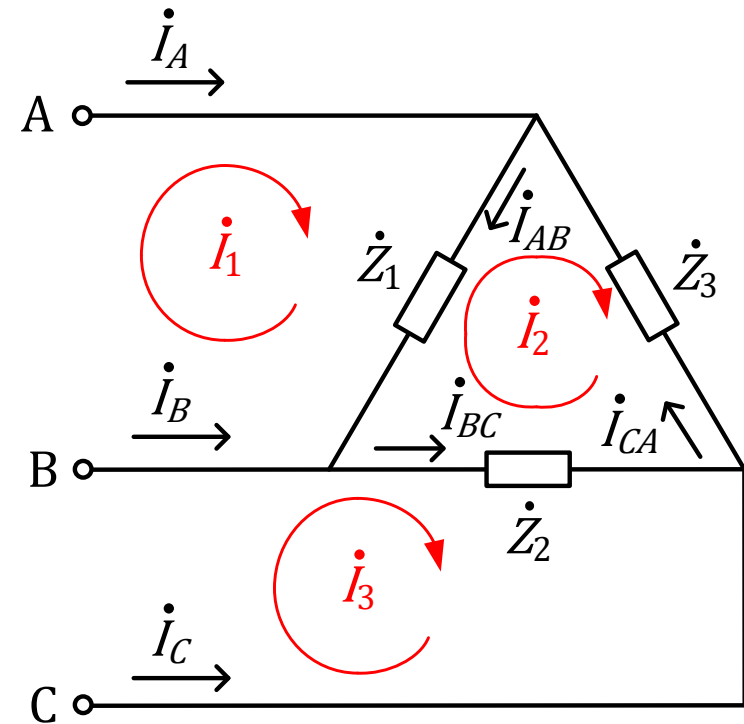
$$-\dot{U}_{BC} + \dot{Z}_2(\dot{I}_3 - \dot{I}_2) = 0 \Rightarrow -\dot{U}_{BC} - \dot{Z}_2\dot{I}_2 + \dot{Z}_2\dot{I}_3 = 0$$

$$\dot{Z}_1(\dot{I}_2 - \dot{I}_1) + \dot{Z}_3\dot{I}_2 + \dot{Z}_2(\dot{I}_2 - \dot{I}_3) = 0 \Rightarrow -\dot{Z}_1\dot{I}_1 + (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3)\dot{I}_2 - \dot{Z}_2\dot{I}_3 = 0$$

- Με αντικατάσταση του $\dot{I}_3$ από τη δεύτερη στην τρίτη:

$$\dot{Z}_1\dot{I}_1 - \dot{Z}_1\dot{I}_2 = \dot{U}_{AB} \Rightarrow (10 - j5)\dot{I}_1 - (10 - j5)\dot{I}_2 = 400\angle 120^\circ$$

$$-\dot{Z}_1\dot{I}_1 + (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3)\dot{I}_2 = \dot{U}_{BC} \Rightarrow -(10 - j5)\dot{I}_1 + (10 - j5 + 12 + j6)\dot{I}_2 = 400$$



Παράδειγμα 7

- Βρίσκουμε τα εξής:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{Z}_1 & -\dot{Z}_1 \\ -\dot{Z}_1 & \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 \end{vmatrix} = 150$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{U}_{AB} & -\dot{Z}_1 \\ \dot{U}_{BC} & \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 \end{vmatrix} = -781 + j6183$$

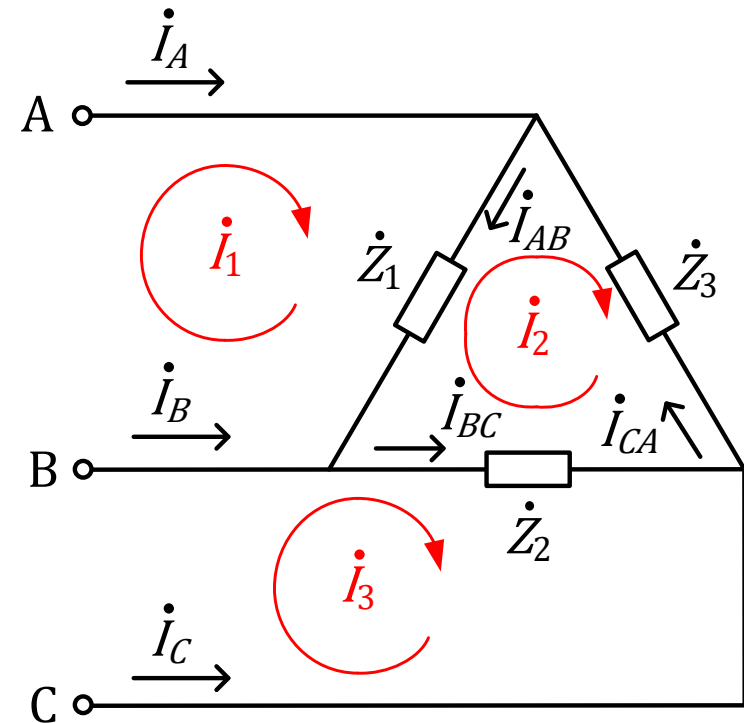
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dot{Z}_1 & \dot{U}_{AB} \\ -\dot{Z}_1 & \dot{U}_{BC} \end{vmatrix} = 3905 + j2811$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 41.548 \angle 97.2^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 32.076 \angle 35.7^\circ \text{ A}$$

- Επίσης

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{BC} + \dot{Z}_2 \dot{I}_2}{\dot{Z}_2} = 77.517 \angle (-15.2^\circ) \text{ A}$$



Παράδειγμα 7

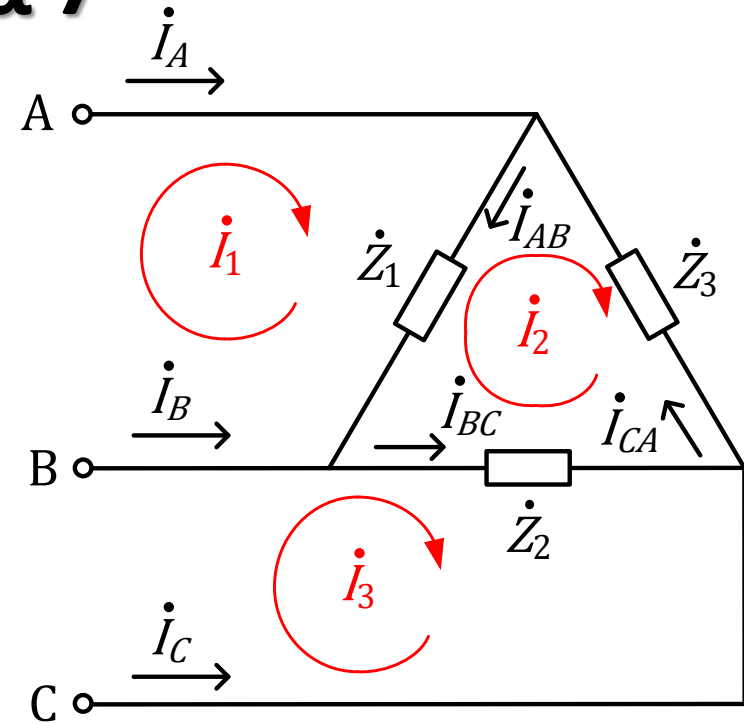
- Οπότε τα ρεύματα γραμμών είναι

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 = 41.548 \angle 97.2^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_3 - \dot{I}_1 = 100.930 \angle (-37.5^\circ) \text{ A}$$

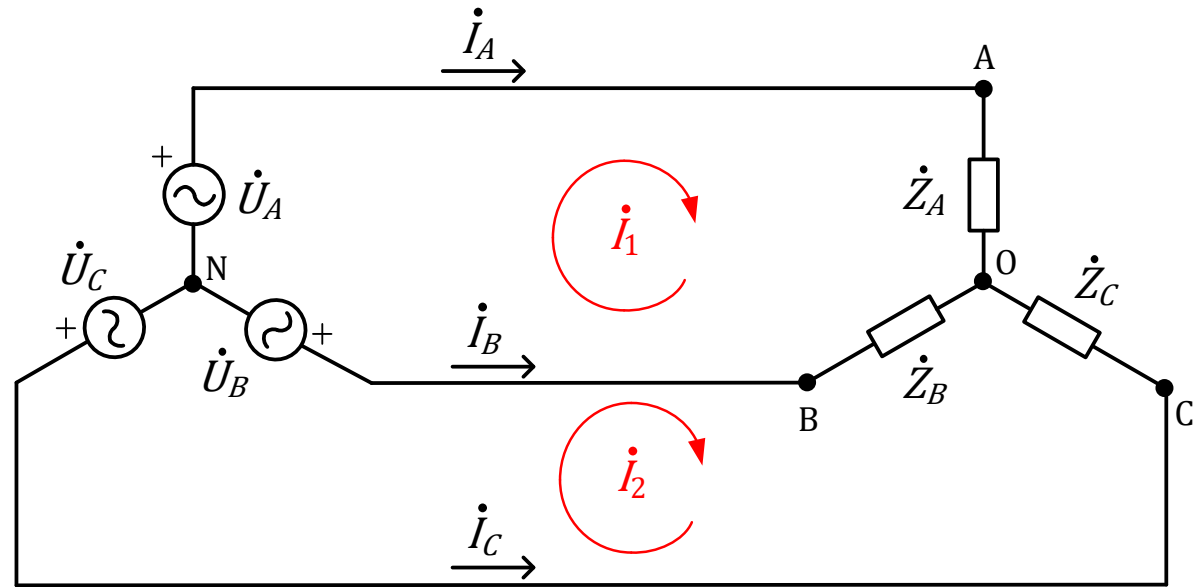
$$\dot{I}_C = -\dot{I}_3 = 77.517 \angle (-15.2^\circ) \text{ A} + 180 \text{ μοίρες}$$

- Σημαντική παρατήρηση: Αν υπήρχε και σύνθετη αντίσταση στις γραμμές (βλ. διαφάνεια 22) μια συστηματική μέθοδος ανάλυσης όπως αυτή που εφαρμόστηκε εδώ θα ήταν σίγουρα προτιμότερη από ένα σύστημα 6 x 6 που προκύπτει με απλή εφαρμογή νόμων Kirchhoff.



Παράδειγμα 8

- Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $U_\phi = 230 \text{ V}$, $\dot{Z}_A = 20 + j15 \Omega$, $\dot{Z}_B = 15 + j10 \Omega$, $\dot{Z}_C = 10 - j18 \Omega$.
- Να βρεθούν τα ρεύματα των γραμμών και οι τάσεις στα φορτία.



- Θεωρούμε θετική ακολουθία φάσεων.

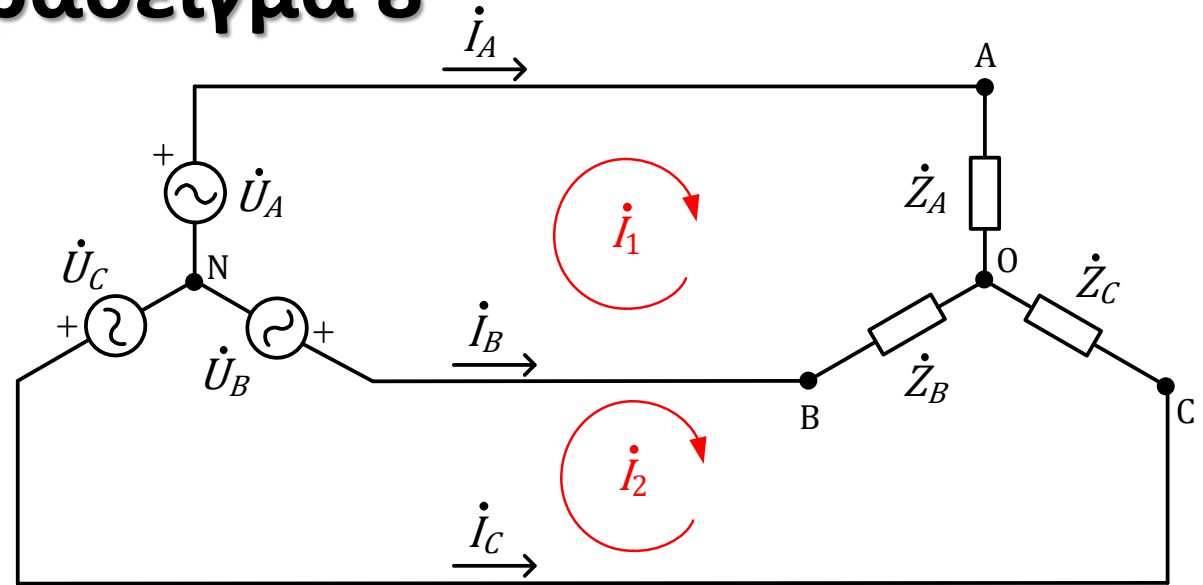
Απάντηση:

- Χρησιμοποιούμε ανάλυση βρόχων. Προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
 -\dot{U}_{AN} + \dot{I}_1 \dot{Z}_A + (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) \dot{Z}_B + \dot{U}_{BN} &= 0 \Rightarrow \dot{I}_1 \dot{Z}_A + (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) \dot{Z}_B = \dot{U}_{AB} \\
 \Rightarrow (\dot{Z}_A + \dot{Z}_B) \dot{I}_1 - \dot{Z}_B \dot{I}_2 &= \dot{U}_{AB} \Rightarrow (35 + j25) \dot{I}_1 - (15 + j10) \dot{I}_2 = 230\sqrt{3} \angle 120^\circ \\
 -\dot{U}_{BN} + (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) \dot{Z}_B + \dot{I}_2 \dot{Z}_C + \dot{U}_{CN} &= 0 \Rightarrow (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) \dot{Z}_B + \dot{I}_2 \dot{Z}_C = \dot{U}_{BC} \\
 \Rightarrow -\dot{Z}_B \dot{I}_1 + (\dot{Z}_B + \dot{Z}_C) \dot{I}_2 &= \dot{U}_{BC} \Rightarrow -(15 + j10) \dot{I}_1 + (25 - j8) \dot{I}_2 = 230\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8

$$\Delta = \begin{vmatrix} 35 + j25 & -(15 + j10) \\ -(15 + j10) & 25 - j8 \end{vmatrix} = 4650 - j5875$$



$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 230\sqrt{3}\angle 120^\circ & -(15 + j10) \\ 230\sqrt{3} & 25 - j8 \end{vmatrix} = 61640 + j43020$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 35 + j25 & 230\sqrt{3}\angle 120^\circ \\ -(15 + j10) & 230\sqrt{3} \end{vmatrix} = 7505 + j13140$$

- Επομένως τα ρεύματα βρόχων είναι

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0.603 + j10.014 \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -0.754 + j1.874 \text{ A}$$

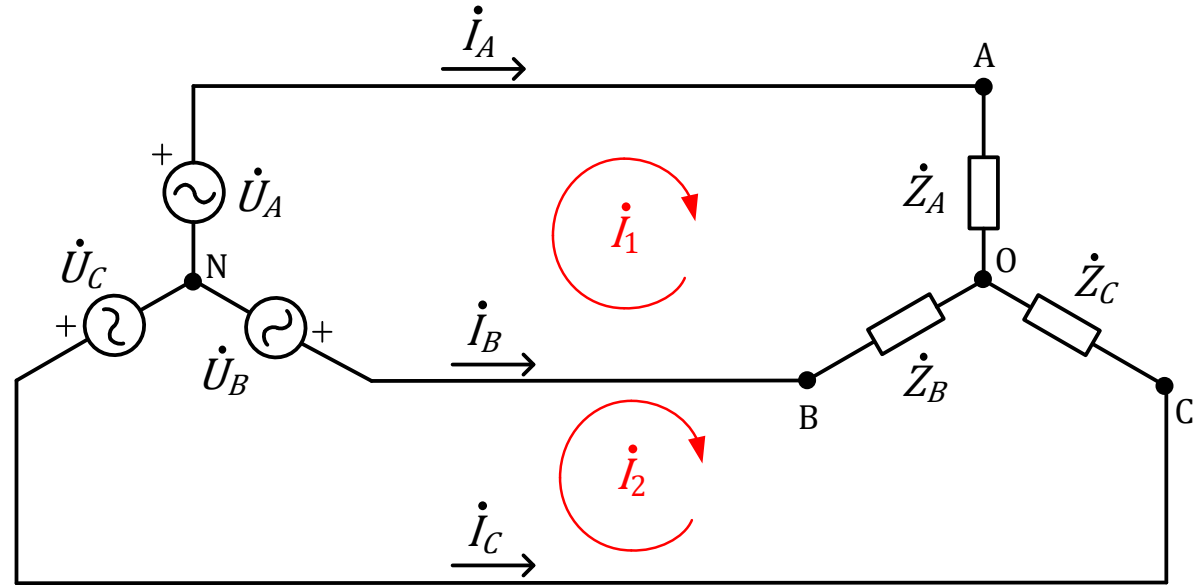
Παράδειγμα 8

- Τα ρεύματα των φάσεων είναι:

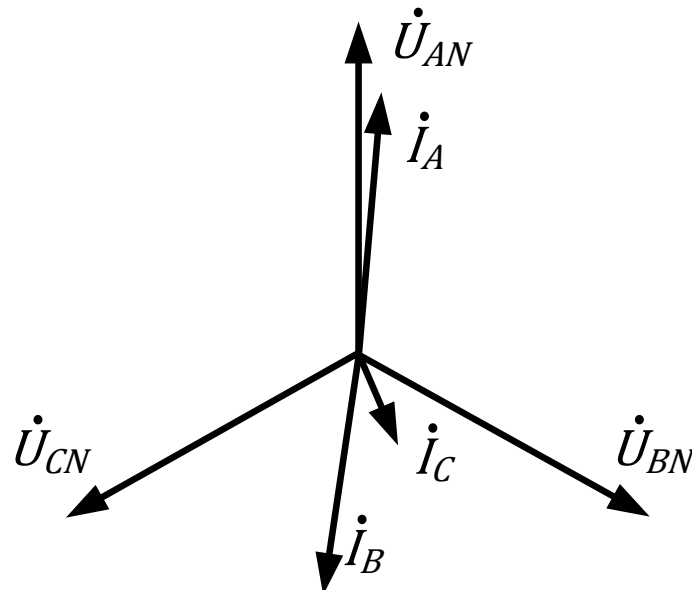
$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 = 10.032 \angle 86.6^\circ \text{ A}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_B &= (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) \\ &= 8.252 \angle (-99.5^\circ) \text{ A} \end{aligned}$$

$$\dot{I}_C = -\dot{I}_2 = 2.02 \angle (-68.1^\circ) \text{ A}$$



- Το διανυσματικό διάγραμμα των ρευμάτων του κυκλώματος μαζί με τις φασικές τάσεις είναι



Παράδειγμα 8

- Οι τάσεις στους κλάδους του αστέρα είναι $\dot{U}_{AO}$, $\dot{U}_{BO}$, $\dot{U}_{CO}$ και εφόσον δεν είναι συνδεδεμένος ο ουδέτερος του φορτίου με τον ουδέτερο της πηγής δεν θα είναι ίσες με τις φασικές τάσεις της πηγής $\dot{U}_{AN}$, $\dot{U}_{BN}$, $\dot{U}_{CN}$. Πράγματι:

$$\dot{U}_{AO} = \dot{I}_A \dot{Z}_A = 250.8 \angle 123.4^\circ \text{ V}$$

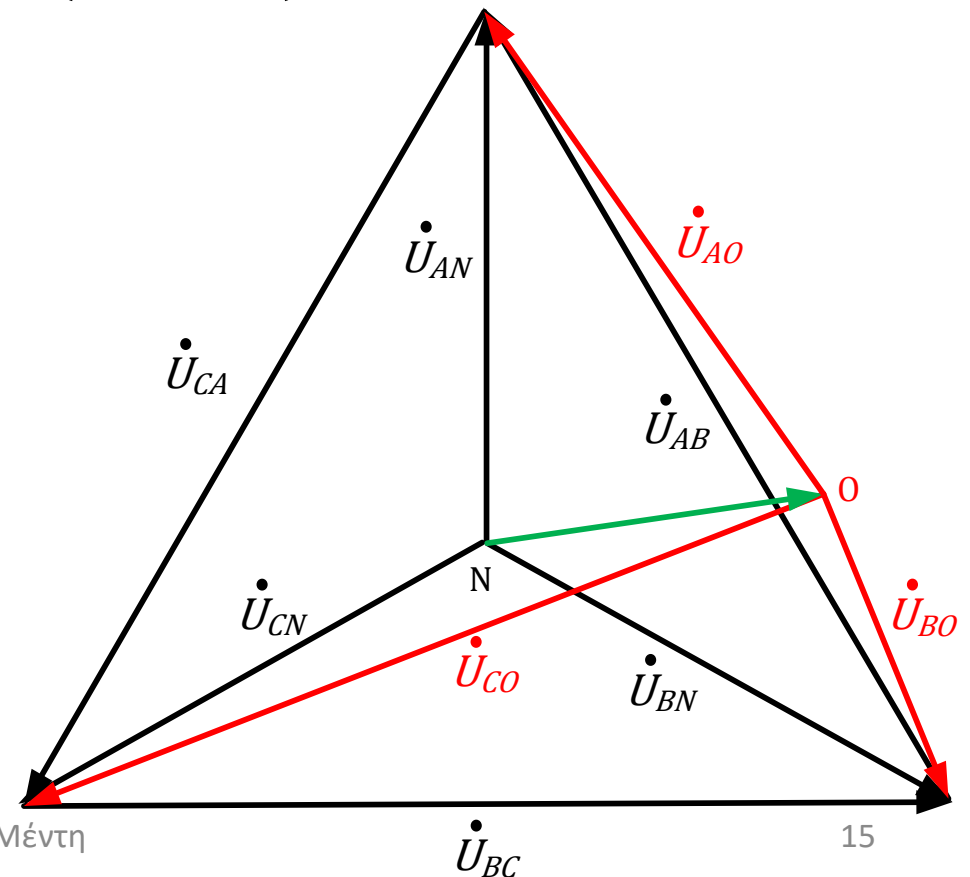
$$\dot{U}_{BO} = \dot{I}_B \dot{Z}_B = 148.8 \angle (-65.8^\circ) \text{ V}$$

$$\dot{U}_{CO} = \dot{I}_C \dot{Z}_C = 363.6 \angle (-158.1^\circ) \text{ V}$$

- Επίσης από το κύκλωμα προκύπτει ότι:

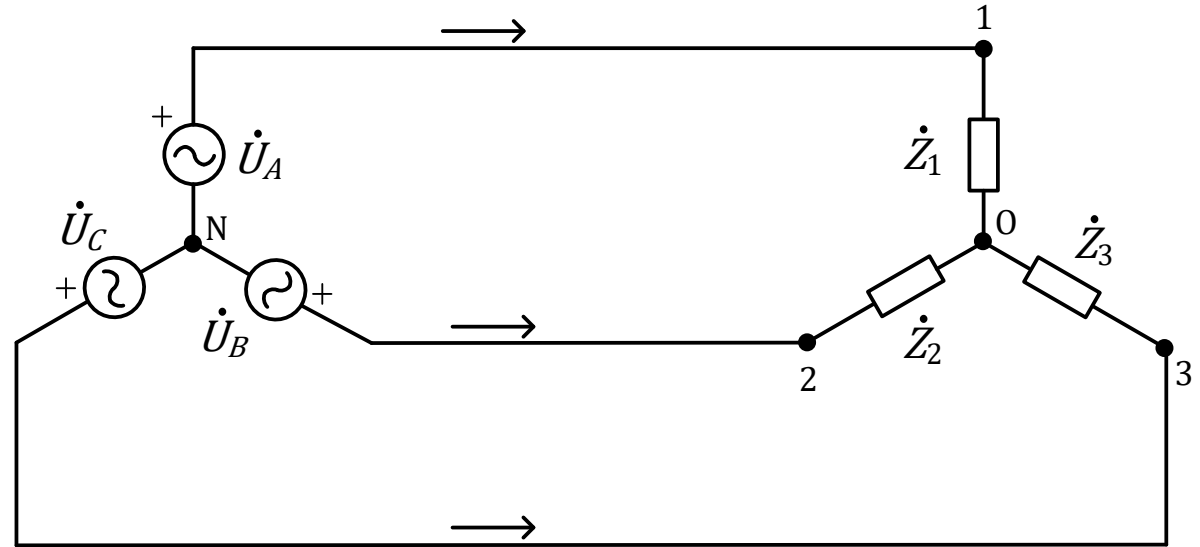
$$\begin{aligned} \dot{U}_{ON} &= \dot{U}_{AN} - \dot{U}_{AO} = 138.1 + j20.7 \\ &= 139.7 \angle 8.5^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

- Το διανυσματικό διάγραμμα φασικών και πολικών τάσεων φαίνεται στο σχήμα.



Παράδειγμα 9

- Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $U = 400\text{ V}$, $\dot{Z}_1 = R$, $\dot{Z}_2 = R$, $\dot{Z}_3 = 1/j\omega C$, όπου $R = 1/\omega C$.
- Να βρεθεί η πτώση τάσης στις δύο ωμικές αντιστάσεις όταν η τάσεις της πηγής είναι θετικής ακολουθίας και όταν είναι αρνητικής ακολουθίας.



Απάντηση:

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ανάλυση κόμβων με κόμβο αναφοράς τον N. Λόγω των πηγών τάσης στους κόμβους 1, 2 και 3 ισχύει ότι:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_A$$

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_B$$

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_C$$

Παράδειγμα 9

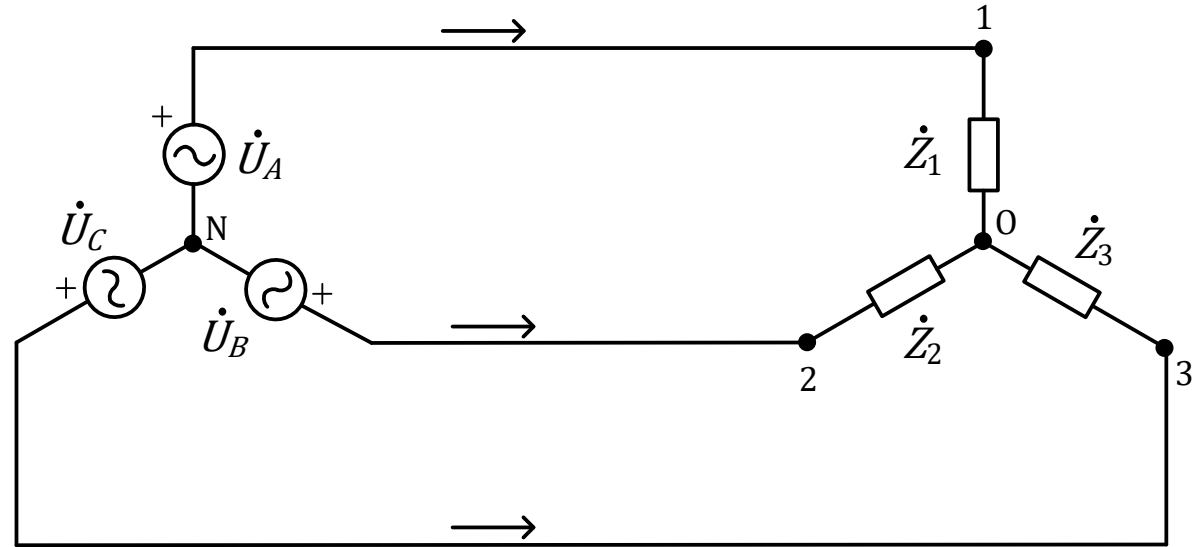
- Στον κόμβο 0 εφαρμόζουμε KCL:

$$\frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_0}{\dot{Z}_1} + \frac{\dot{U}_2 - \dot{U}_0}{\dot{Z}_2} + \frac{\dot{U}_3 - \dot{U}_0}{\dot{Z}_3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{U}_0}{\dot{Z}_1} + \frac{\dot{U}_0}{\dot{Z}_2} + \frac{\dot{U}_0}{\dot{Z}_3} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\dot{U}_3}{\dot{Z}_3}$$

$$\Rightarrow \dot{U}_0 (\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3) = \dot{U}_1 \dot{Y}_1 + \dot{U}_2 \dot{Y}_2 + \dot{U}_3 \dot{Y}_3$$

$$\Rightarrow \dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_1 \dot{Y}_1 + \dot{U}_2 \dot{Y}_2 + \dot{U}_3 \dot{Y}_3}{(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3)}$$



- Παρατήρηση: Υπενθυμίζεται ότι οι τάσεις στις παραπάνω εξισώσεις είναι οι τάσεις των κόμβων ως προς τον κόμβο αναφοράς, δηλαδή τον κόμβο N. Άρα η τάση που υπολογίσαμε είναι η $\dot{U}_{ON}$ που εκφράζει τη μετατόπιση του ουδετέρου λόγω της ασυμμετρίας του φορτίου.

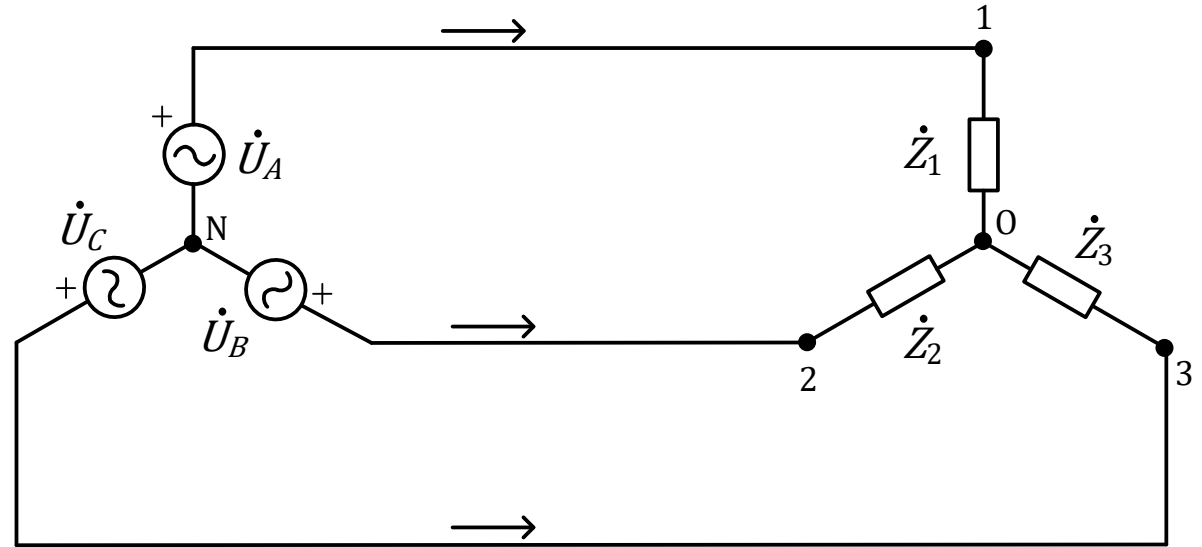
Παράδειγμα 9

- Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης ισχύει ότι:

$$\dot{Y}_1 = \dot{Y}_2 = \frac{1}{R}$$

Και

$$\dot{Y}_3 = j\omega C = \frac{j}{R}$$



- Επομένως

$$\dot{U}_O = \frac{\dot{U}_1 \dot{Y}_1 + \dot{U}_2 \dot{Y}_2 + \dot{U}_3 \dot{Y}_3}{(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3)} = \frac{(\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + j\dot{U}_3) \frac{1}{R}}{(1 + 1 + j) \frac{1}{R}} = \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + j\dot{U}_3}{2 + j}$$

- Οι τάσεις που ζητούνται είναι οι

$$\dot{U}_{R1} = \dot{U}_1 - \dot{U}_O$$

$$\dot{U}_{R2} = \dot{U}_2 - \dot{U}_O$$

Παράδειγμα 9

- Επομένως

$$\dot{U}_{R1} = \dot{U}_1 - \dot{U}_O = \dot{U}_1 - \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + j\dot{U}_3}{2 + j} = \frac{(1 + j)\dot{U}_1 - \dot{U}_2 - j\dot{U}_3}{2 + j}$$

$$= \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2 + j(\dot{U}_1 - \dot{U}_3)}{2 + j} = \frac{\dot{U}_{12} + j\dot{U}_{13}}{2 + j}$$

$$\dot{U}_{R2} = \dot{U}_2 - \dot{U}_O = \dot{U}_2 - \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + j\dot{U}_3}{2 + j} = \frac{(1 + j)\dot{U}_2 - \dot{U}_1 - j\dot{U}_3}{2 + j}$$

$$= \frac{-\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + j(\dot{U}_2 - \dot{U}_3)}{2 + j} = \frac{-\dot{U}_{12} + j\dot{U}_{23}}{2 + j}$$

- Όμως

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = \dot{U}_A - \dot{U}_B = \dot{U}_{AB}$$

$$\dot{U}_{13} = \dot{U}_1 - \dot{U}_3 = \dot{U}_A - \dot{U}_C = \dot{U}_{AC}$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{U}_2 - \dot{U}_3 = \dot{U}_B - \dot{U}_C = \dot{U}_{BC}$$

Παράδειγμα 9

- Επομένως

$$\dot{U}_{R1} = \frac{\dot{U}_{12} + j\dot{U}_{13}}{2 + j} = \frac{\dot{U}_{AB} + j\dot{U}_{AC}}{2 + j}$$

$$\dot{U}_{R2} = \frac{-\dot{U}_{12} + j\dot{U}_{23}}{2 + j} = \frac{-\dot{U}_{AB} + j\dot{U}_{BC}}{2 + j}$$

- Αν η ακολουθία φάσεων της πηγής είναι θετική τότε

$$\dot{U}_{R1} = \frac{\dot{U}_{AB} + j\dot{U}_{AC}}{2 + j} = \frac{U\angle 120^\circ + jU\angle(-120^\circ + 180^\circ)}{2 + j} = 0.864U\angle 108.4^\circ$$

$$\dot{U}_{R2} = \frac{-\dot{U}_{AB} + j\dot{U}_{BC}}{2 + j} = \frac{-U\angle 120^\circ + jU}{2 + j} = 0.231U\angle(-11.6^\circ)$$

- Δηλαδή η πτώση τάσης στην αντίσταση που συνδέεται στο άκρο 1 του φορτίου είναι μεγαλύτερη από την πτώση τάσης στην αντίσταση που συνδέεται στο άκρο 2. Αν αντί για αντιστάσεις είχαμε λαμπτήρες πυρακτώσεως στην περίπτωση αυτή (θετική ακολουθία φάσεων) θα φωτοβολούσε ο 1.

Παράδειγμα 9

- Αν η ακολουθία φάσεων της πηγής είναι αρνητική τότε

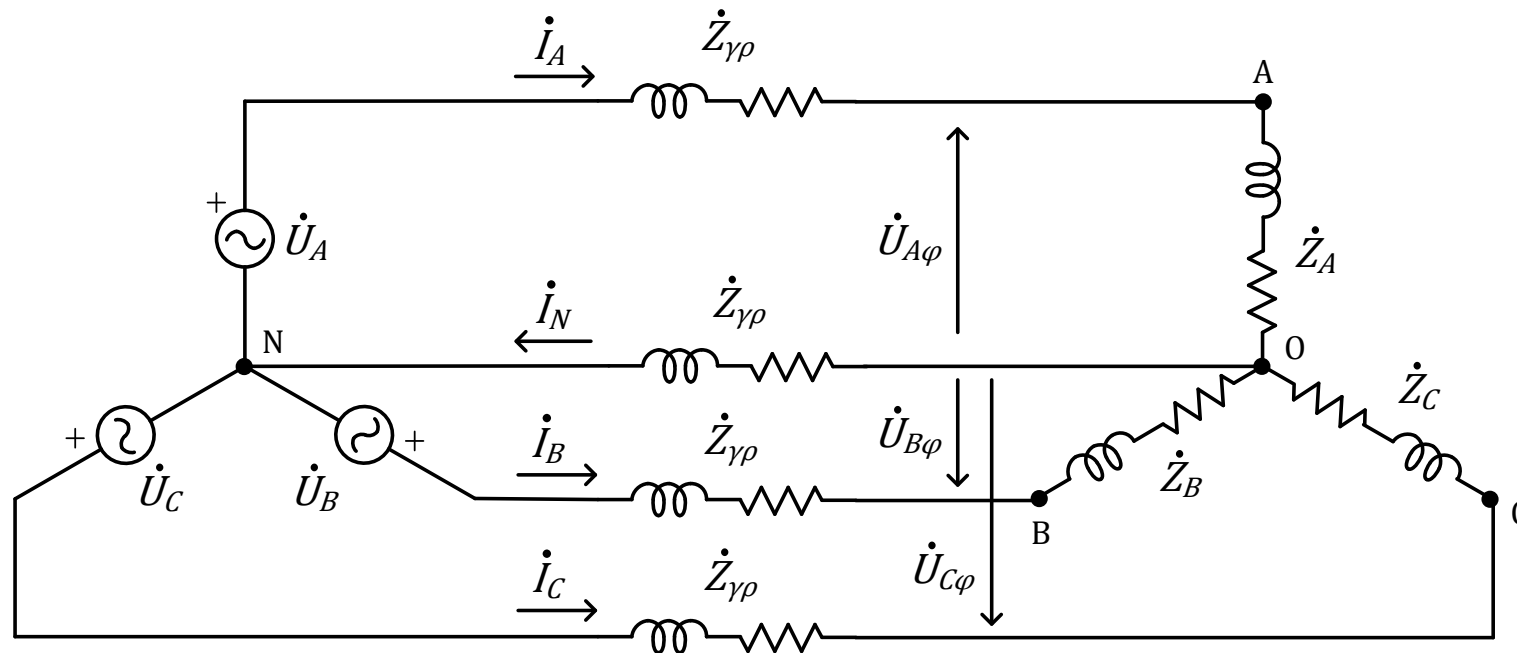
$$\dot{U}_{R1} = \frac{\dot{U}_{AB} + j\dot{U}_{AC}}{2 + j} = \frac{U\angle(-120^\circ) + jU\angle(120^\circ + 180^\circ)}{2 + j} = 0.231U\angle(-71.6^\circ)$$

$$\dot{U}_{R2} = \frac{-\dot{U}_{AB} + j\dot{U}_{BC}}{2 + j} = \frac{-U\angle(-120^\circ) + jU}{2 + j} = 0.864U\angle 48.4^\circ$$

- Δηλαδή η πτώση τάσης στην αντίσταση που συνδέεται στο άκρο 2 του φορτίου είναι μεγαλύτερη από την πτώση τάσης στην αντίσταση που συνδέεται στο άκρο 1. Αν αντί για αντιστάσεις είχαμε λαμπτήρες πυρακτώσεως στην περίπτωση αυτή (αρνητική ακολουθία φάσεων) θα φωτοβολούσε ο 2.
- Ο λαμπτήρας που φωτοβολεί δείχνει ότι η φάση που συνδέεται στο άκρο του προηγείται της φάσης που συνδέεται στο άκρο του άλλου λαμπτήρα.
- Παρατήρηση: Το παραπάνω κύκλωμα περιλαμβάνεται σε έναν **ενδείκτη διαδοχής φάσεων**.

Τριφασικά κυκλώματα – Ασύμμετρο φορτίο– Μη ιδανικοί αγωγοί γραμμής

- Οι τάσεις στα άκρα του φορτίου είναι διαφορετικές από τις τάσεις της πηγής όταν οι αγωγοί του κυκλώματος δεν είναι ιδανικοί λόγω της πτώσης τάσης στις γραμμές. Παράδειγμα:



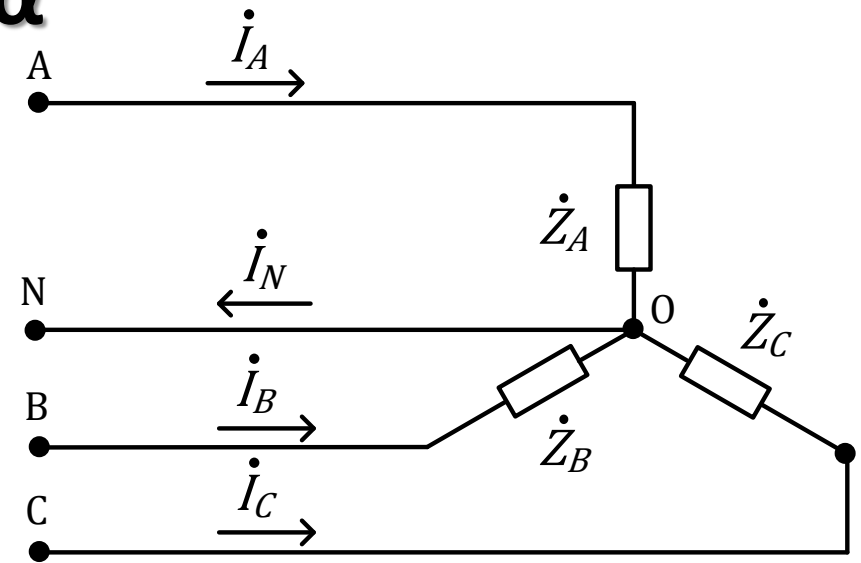
- Και στην περίπτωση αυτή χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε κάποια τεχνική ανάλυσης κυκλωμάτων.

1 Ασύμμετρα τριφασικά

2 **Ισχύς σε τριφασικά**

Στιγμιαία ισχύς σε συμμετρικά τριφασικά κυκλώματα

- Έστω ότι το φορτίο είναι συμμετρικό και είναι συνδεδεμένο σε Υ.
- Οι συναρτήσεις των τάσεων των τριών φάσεων είναι



$$u_A(t) = U_\varphi \sqrt{2} \cos(\omega t + 90^\circ)$$

$$u_B(t) = U_\varphi \sqrt{2} \cos(\omega t - 30^\circ)$$

$$u_C(t) = U_\varphi \sqrt{2} \cos(\omega t - 150^\circ) = U_\varphi \sqrt{2} \cos(\omega t + 210^\circ)$$

- Τότε τα ρεύματα που παράγονται από την τριφασική πηγή είναι

$$i_A(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + 90^\circ - \varphi)$$

$$i_B(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - 30^\circ - \varphi)$$

$$i_C(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + 210^\circ - \varphi)$$

Στιγμιαία ισχύς σε συμμετρικά τριφασικά κυκλώματα

- Η στιγμιαία ισχύς που παράγεται από την πηγή είναι

$$\begin{aligned} p(t) &= p_A(t) + p_B(t) + p_C(t) = u_A(t)i_A(t) + u_B(t)i_B(t) + u_C(t)i_C(t) \\ &= 2U_\varphi I [\cos(\omega t + 90^\circ) \cos(\omega t + 90^\circ - \varphi) \\ &\quad + \cos(\omega t - 30^\circ) \cos(\omega t - 30^\circ - \varphi) \\ &\quad + \cos(\omega t + 210^\circ) \cos(\omega t + 210^\circ - \varphi)] \end{aligned}$$

- Επειδή όμως $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} p(t) &= U_\varphi I [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \theta + 180^\circ) + \cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi - 60^\circ) \\ &\quad + \cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi + 60^\circ)] = 3U_\varphi I \cos \varphi \end{aligned}$$

- Δηλαδή η συνολική στιγμιαία ισχύς είναι σταθερή και όχι μεταβαλλόμενη όπως είναι η στιγμιαία ισχύς της κάθε φάσης. Αυτό ισχύει είτε το φορτίο είναι συνδεδεμένο σε Υ είτε σε Δ.

Ενεργός ισχύς

- Έστω ότι το φορτίο είναι συνδεδεμένο σε Υ.
- Η ενεργός ισχύς γενικά είναι

$$P = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C$$

όπου $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ οι γωνίες μεταξύ φασικών τάσεων και των αντίστοιχων ρευμάτων των κλάδων του αστέρα, που είναι ίδια με τα ρεύματα των γραμμών. Είναι επίσης οι γωνίες των συνθέτων αντιστάσεων $\dot{Z}_A, \dot{Z}_B$ και $\dot{Z}_C$.

- Η πηγή θεωρείται συμμετρική, επομένως

$$U_A = U_B = U_C = U_\varphi = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

- Αν το φορτίο είναι επίσης συμμετρικό, τότε

$$I_A = I_B = I_C = I$$
$$\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi$$

- Επομένως

$$P = 3U_\varphi I \cos \varphi = 3 \frac{U}{\sqrt{3}} I \cos \varphi = \sqrt{3} U I \cos \varphi$$

Ενεργός ισχύς

- Έστω τώρα ότι το φορτίο είναι συνδεδεμένο σε Δ.
- Η ενεργός ισχύς γενικά είναι

$$P = U_{AB}I_{AB} \cos \varphi_{AB} + U_{BC}I_{BC} \cos \varphi_{BC} + U_{CA}I_{CA} \cos \varphi_{CA}$$

όπου $\varphi_{AB}, \varphi_{BC}, \varphi_{CA}$ οι γωνίες μεταξύ πολικών τάσεων και των αντίστοιχων ρευμάτων των κλάδων του Δ, που είναι οι γωνίες των $\dot{Z}_{AB}, \dot{Z}_{BC}$ και $\dot{Z}_{CA}$.

- Η πηγή θεωρείται συμμετρική, επομένως

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U$$

- Αν το φορτίο είναι επίσης συμμετρικό, τότε

$$I_{AB} = I_{BC} = I_{CA} = I_{\Delta} = \frac{I}{\sqrt{3}}$$

$$\varphi_{AB} = \varphi_{BC} = \varphi_{CA} = \varphi$$

- Επομένως

$$P = 3UI_{\Delta} \cos \varphi = 3U \frac{I}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3}UI \cos \varphi$$

Άεργος, φαινομένη, μιγαδική ισχύς

- Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι στην περίπτωση του συμμετρικού Υ η άεργος είναι

$$Q = 3U_{\varphi}I \sin \varphi = \sqrt{3}UI \sin \varphi$$

- Η φαινομένη ισχύς είναι

$$S = 3U_{\varphi}I = \sqrt{3}UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- Η μιγαδική ισχύς είναι

$$\dot{S} = 3\dot{U}_A \dot{I}_A^* = P + jQ = 3U_{\varphi}I \angle \varphi = \sqrt{3}UI \angle \varphi$$

- Στην περίπτωση του συμμετρικού Δ η άεργος είναι

$$Q = 3UI_{\Delta} \sin \varphi = \sqrt{3}UI \sin \varphi$$

- Η φαινομένη ισχύς είναι

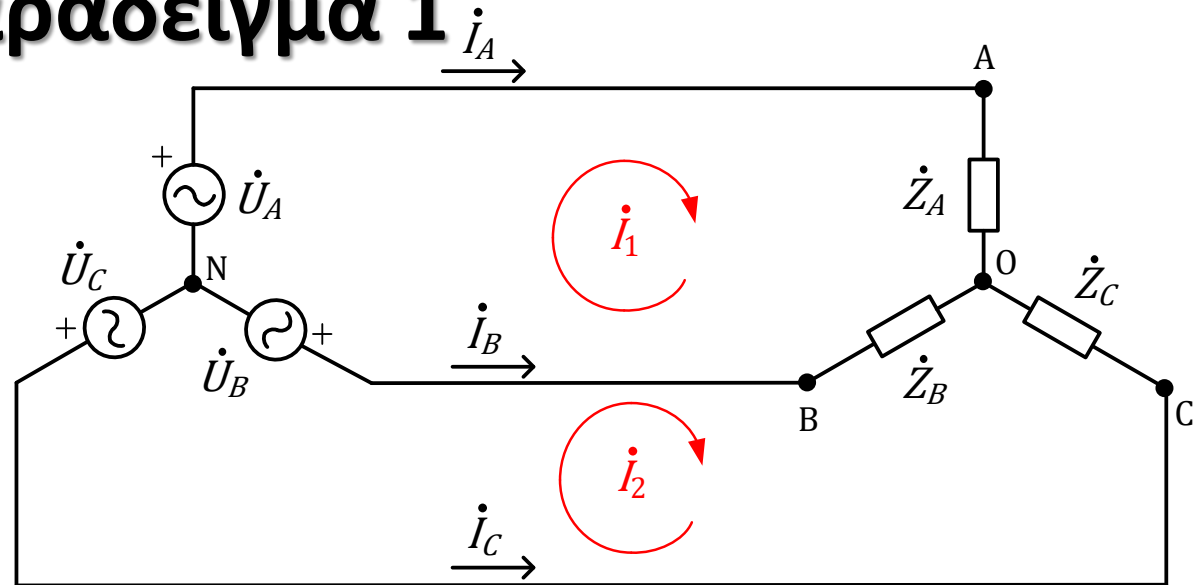
$$S = 3I_{\Delta}I = \sqrt{3}UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- Η μιγαδική ισχύς είναι

$$\dot{S} = 3\dot{U}_{AB} \dot{I}_{AB}^* = P + jQ = 3UI_{\Delta} \angle \varphi = \sqrt{3}UI \angle \varphi$$

Παράδειγμα 1

- Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $U_\phi = 230 \text{ V}$, $\dot{Z}_A = 20 + j15 \Omega$, $\dot{Z}_B = 15 + j10 \Omega$, $\dot{Z}_C = 10 - j18 \Omega$.
- Να βρεθεί η μιγαδική ισχύς που απορροφά το φορτίο.
- Θεωρούμε θετική ακολουθία φάσεων.



Απάντηση:

- Έχουν υπολογιστεί τα εξής (Παράδειγμα 7 μαθήματος 7):

$$\dot{U}_{AO} = \dot{I}_A \dot{Z}_A = 250.8 \angle 123.4^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{BO} = \dot{I}_B \dot{Z}_B = 148.8 \angle (-65.8^\circ) \text{ V}$$

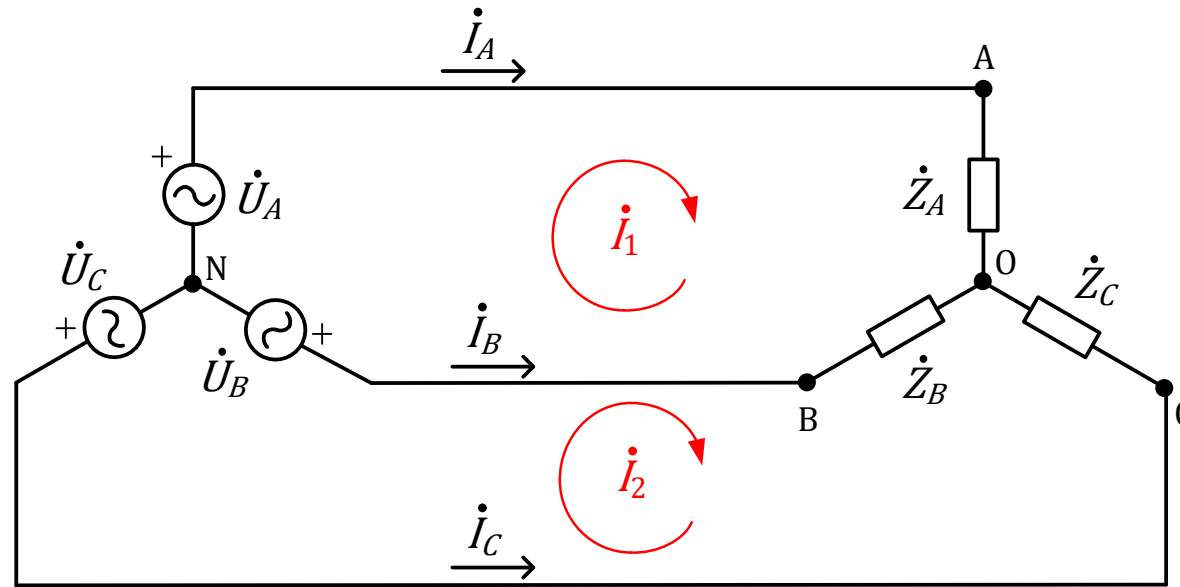
$$\dot{U}_{CO} = \dot{I}_C \dot{Z}_C = 363.6 \angle (-158.1^\circ) \text{ V}$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 = 10.032 \angle 86.6^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) = 8.252 \angle (-99.5^\circ) \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = -\dot{I}_2 = 2.02 \angle (-68.1^\circ) \text{ A}$$

Παράδειγμα 1



- Η μιγαδική ισχύς του φορτίου είναι

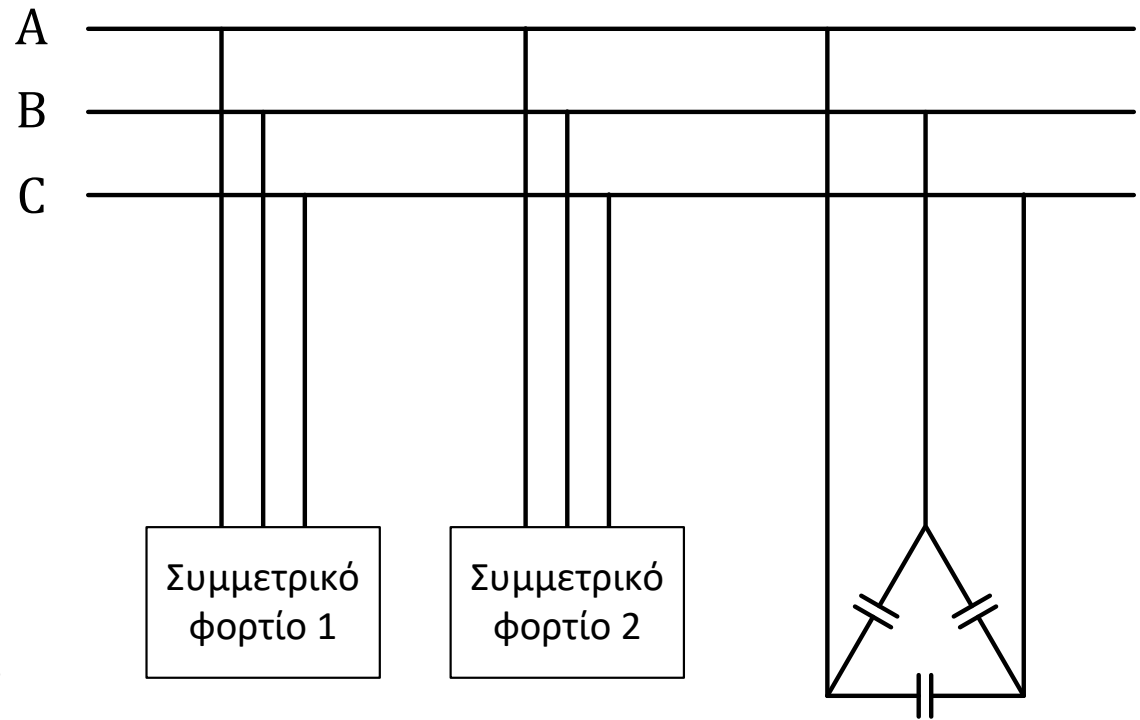
$$\dot{S} = \dot{S}_A + \dot{S}_B + \dot{S}_C = \dot{U}_{AO} \dot{I}_A^* + \dot{U}_{BO} \dot{I}_B^* + \dot{U}_{CO} \dot{I}_C^* = 3034 + j1456 \text{ VA}$$

- Η μιγαδική ισχύς της πηγής είναι

$$\dot{S}' = \dot{S}_A' + \dot{S}_B' + \dot{S}_C' = \dot{U}_{AN} \dot{I}_A^* + \dot{U}_{BN} \dot{I}_B^* + \dot{U}_{CN} \dot{I}_C^* = 3034 + j1456 \text{ VA}$$

Παράδειγμα 2

- Δύο συμμετρικά τριφασικά φορτία συνδέονται σε γραμμή 400 V, 50 Hz όπως φαίνεται στο σχήμα. Το φορτίο 1 απορροφά 9 kW με συντελεστή ισχύος 0.8 επαγωγικό και το φορτίο 2 απορροφά 15 kVar με συντελεστή ισχύος 0.7 επαγωγικό.



- Παράλληλα στα φορτία συνδέεται συστοιχία πυκνωτών συνδεδεμένων σε Δ για αύξηση του συνολικού συντελεστή ισχύος σε 0.93 επαγωγικό.
- Να βρεθεί το ρεύμα γραμμής, η συνολική ενεργός και άεργος ισχύς του φορτίου και η τιμή της χωρητικότητας κάθε πυκνωτή της συστοιχίας. Θεωρούμε θετική ακολουθία φάσεων.

Παράδειγμα 2

Απάντηση:

- Όταν δίνεται τιμή τάσης χωρίς να διευκρινίζεται αν είναι πολική ή φασική τότε θεωρούμε ότι είναι πολική.
- Για το φορτίο 1 η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης – ρεύματος σε κάθε κλάδο είναι

$$\varphi_1 = \cos^{-1} 0.8 = 36.9^\circ$$

- Η φαινομένη ισχύς είναι

$$S_1 = \frac{P_1}{\cos \varphi_1} = 11.3 \text{ kVA}$$

- Η μιγαδική ισχύς είναι

$$\dot{S}_1 = 11.3 \angle 36.9^\circ = 9 + j6.8 \text{ kVA}$$

- Το ρεύμα είναι

$$I_1 = \frac{S_1}{\sqrt{3}U} = 16.2 \text{ A}$$

$$\dot{I}_1 = 16.2 \angle (-36.9^\circ) \text{ A}$$

Παράδειγμα 2

- Για το φορτίο 2:

$$\varphi_2 = \cos^{-1} 0.7 = 45.6^\circ$$

$$S_2 = \frac{Q_2}{\sin \varphi_2} = 21 \text{ kVA}$$

$$\dot{S}_2 = 21 \angle 45.6^\circ = 14.7 + j15 \text{ kVA}$$

$$I_2 = \frac{S_2}{\sqrt{3}U} = 30.3 \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = 30.3 \angle (-45.6^\circ) \text{ A}$$

- Το συνολικό ρεύμα γραμμής θα είναι

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 34.2 - j31.4 = 46.4 \angle (-42.5^\circ) \text{ A}$$

- Η συνολική μιγαδική ισχύς είναι

$$\dot{S} = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 = 23.7 + j21.8 = 32.2 \angle 42.5^\circ \text{ kVA}$$

- Επομένως η διαφορά φάσης για το **συνολικό φορτίο** είναι 42.5° .

- Η συνολική ενεργός ισχύς είναι

$$P = 23.7 \text{ kW}$$

Δρ. Ανθούλα Μέντη

Παράδειγμα 2

- Η γωνία του διορθωμένου συντελεστή ισχύος του συνολικού φορτίου πρέπει να είναι

$$\varphi' = \cos^{-1}(0.93) = 21.6^\circ$$

- Άρα οι πυκνωτές πρέπει να παράγουν

$$Q_C = P(\tan \varphi - \tan \varphi') = 23.7(\tan 42.5^\circ - \tan 21.6^\circ) = 12.4 \text{ kVar}$$

- Ο κάθε πυκνωτής πρέπει να παράγει

$$Q_{C1} = \frac{Q_C}{3} = 4.13 \text{ kVar}$$

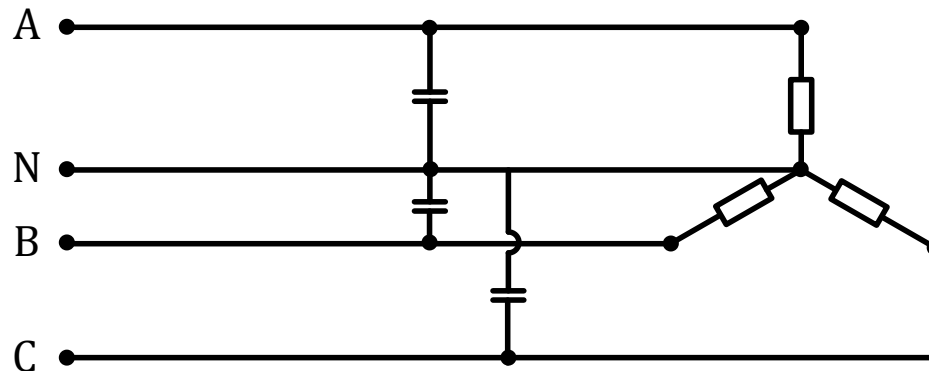
- Και επειδή η τάση στα άκρα του κάθε πυκνωτή είναι η πολική τάση της πηγής U πρέπει ο κάθε πυκνωτής να έχει χωρητικότητα

$$C = \frac{Q_{C1}}{2\pi f U^2} = 82 \text{ }\mu\text{F}$$

- Παρατήρηση: Είναι σημαντικό να μπορείτε να υπολογίσετε το συνολικό ρεύμα γραμμής στην περίπτωση αυτή. Προσοχή: Δεν προστίθενται αλγεβρικά τα επιμέρους ρεύματα.

Παράδειγμα 3

- Ένα συμμετρικό τριφασικό φορτίο συνδεσμολογίας Υ 4 αγωγών τροφοδοτείται από πηγή $U = 40 \text{ kV}$, 50 Hz . Η φαινομένη ισχύς του φορτίου είναι 3.5 kVA και ο συντελεστής ισχύος του 0.72 επαγωγικός. Να βρεθεί η χωρητικότητα των πυκνωτών που πρέπει να συνδεθούν παράλληλα στο φορτίο ώστε ο συντελεστής ισχύος να γίνει 0.94 επαγωγικός. Να θεωρήσετε ότι οι πυκνωτές συνδέονται επίσης σε Υ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

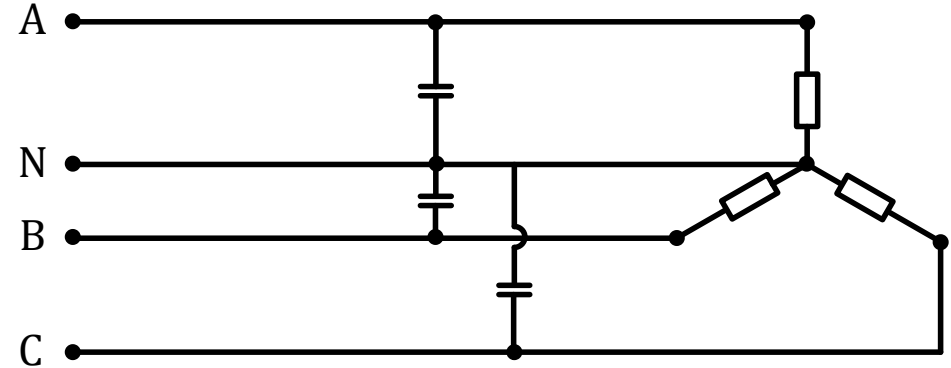


Απάντηση:

- Η γωνία του αρχικού συντελεστή ισχύος είναι
$$\varphi = \cos^{-1} 0.72 = 43.9^\circ$$
- Η γωνία του διορθωμένου συντελεστή ισχύος είναι
$$\varphi' = \cos^{-1} 0.94 = 19.9^\circ$$

Παράδειγμα 3

- Η ενεργός ισχύς του φορτίου είναι
 $P = 0.72 \cdot 3500 = 2520 \text{ W}$
- Η άεργος της συστοιχίας των πυκνωτών πρέπει να είναι
 $Q_C = P(\tan \varphi - \tan \varphi') = 1514 \text{ Var}$



- Ο κάθε πυκνωτής της συστοιχίας θα παράγει

$$Q_{C1} = \frac{Q_C}{3} = 504.8 \text{ Var}$$

- Η τάση στα άκρα του κάθε πυκνωτή είναι ίση με τη φασική τάση της πηγής. Άρα η χωρητικότητα του κάθε πυκνωτή πρέπει να είναι

$$C = \frac{Q_{C1}}{2\pi f \left(\frac{U}{\sqrt{3}} \right)^2} = 30.1 \text{ }\mu\text{F}$$

Μέτρηση ισχύος σε τριφασικά κυκλώματα

- Η ενεργός ισχύς φορτίου σε συνδεσμολογία Υ 4 αγωγών είναι

$$\begin{aligned} P &= P_A + P_B + P_C \\ &= U_{AN} I_A \cos \varphi_A + U_{BN} I_B \cos \varphi_B \\ &\quad + U_{CN} I_C \cos \varphi_C \end{aligned}$$

- Αρκεί λοιπόν να συνδέσουμε 3 μονοφασικά βαττόμετρα όπως φαίνεται στο κύκλωμα.

- Οι ενδείξεις τους θα είναι

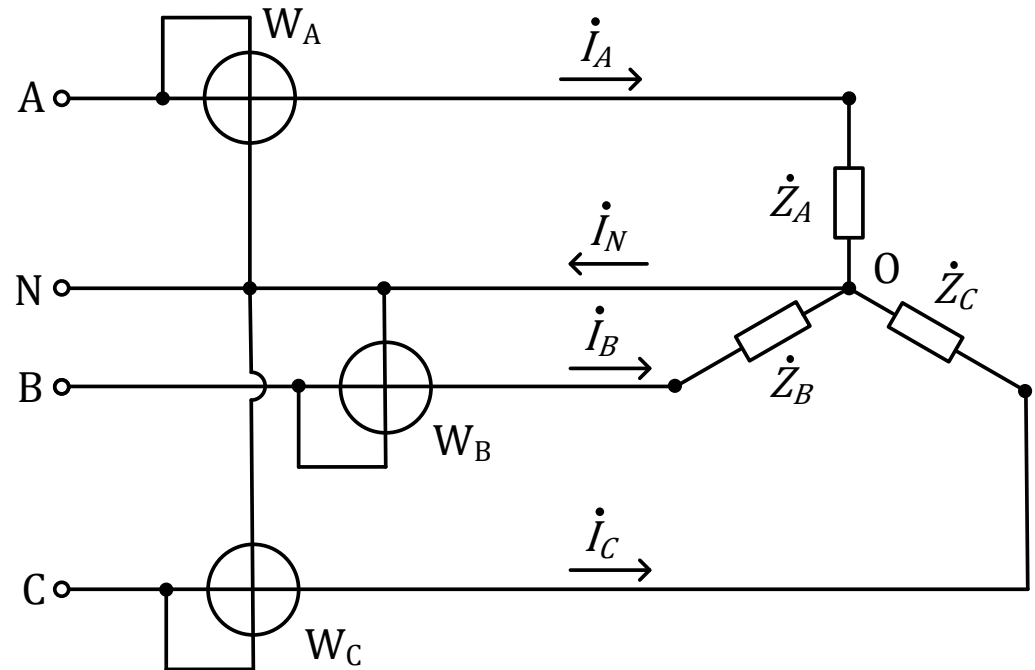
$$W_A = U_{AN} I_A \cos \varphi_A$$

$$W_B = U_{BN} I_B \cos \varphi_B$$

$$W_C = U_{CN} I_C \cos \varphi_C$$

- Άρα

$$P = W_A + W_B + W_C$$



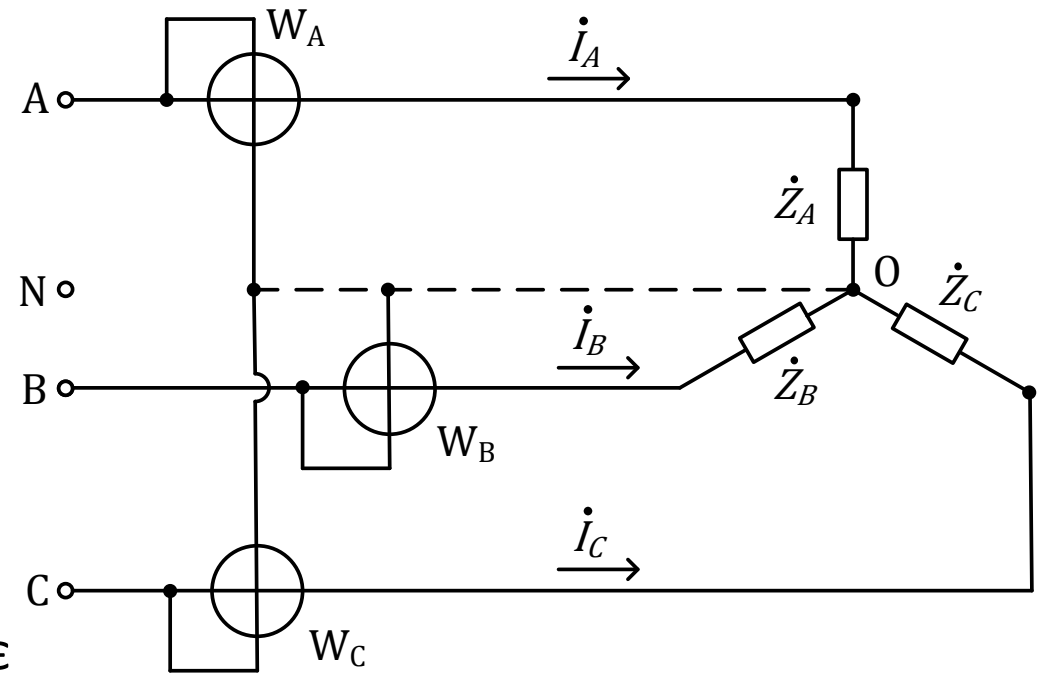
Μέτρηση ισχύος σε τριφασικά κυκλώματα

- Η ενεργός ισχύς φορτίου σε συνδεσμολογία Υ 3 αγωγών είναι

$$P = P_A + P_B + P_C$$

$$= U_{AO} I_A \cos \varphi_A + U_{BO} I_B \cos \varphi_B + U_{CO} I_C \cos \varphi_C$$

- Αρκεί λοιπόν να συνδέσουμε 3 μονοφασικά βαττόμετρα όπως φαίνεται στο κύκλωμα. Δημιουργούμε έτσι εικονικό ουδέτερο.



- Οι ενδείξεις των βαττομέτρων θα είναι

$$W_A = U_{AO} I_A \cos \varphi_A$$

$$W_B = U_{BO} I_B \cos \varphi_B$$

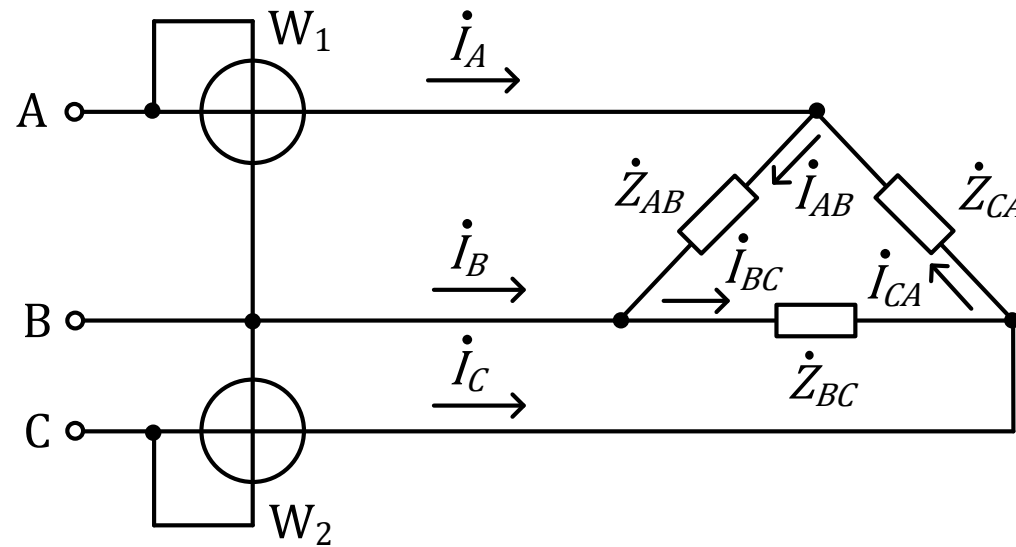
$$W_C = U_{CO} I_C \cos \varphi_C$$

- Άρα

$$P = W_A + W_B + W_C$$

Μέθοδος 2 βαττομέτρων

- Υπάρχει όμως περίπτωση να μην έχουμε πρόσβαση στον ουδέτερο ή να μην υπάρχει ουδέτερος όπως συμβαίνει στην περίπτωση Δ.
- Δύο βαττόμετρα συνδεδεμένα σε οποιεσδήποτε δύο γραμμές ενός τριφασικού συστήματος 3 αγωγών, συμμετρικού ή ασύμμετρου, δίνουν τη συνολική τριφασική ισχύ αν αθροίσουμε τις ενδείξεις τους W_1 και W_2 . Παράδειγμα:



- Στο κύκλωμα αυτό η συνολική ενεργός ισχύς είναι

$$P = P_{AB} + P_{CA} + P_{BC}$$

- Αποδεικνύεται ότι η συνολική ενεργός ισχύς που απορροφά το φορτίο θα είναι

$$P = W_1 + W_2$$

Μέθοδος 2 βαττομέτρων

- Πράγματι, οι ενδείξεις των βαττομέτρων στο παραπάνω κύκλωμα θα είναι

$$W_1 = \operatorname{Re}(\dot{U}_{AB} \dot{I}_A^*)$$

$$W_2 = \operatorname{Re}(\dot{U}_{CB} \dot{I}_C^*)$$

- Όμως

$$\dot{U}_{AB} \dot{I}_A^* = \dot{U}_{AB} (\dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA})^* = \dot{U}_{AB} \dot{I}_{AB}^* - \dot{U}_{AB} \dot{I}_{CA}^*$$

$$\dot{U}_{CB} \dot{I}_C^* = \dot{U}_{CB} (\dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC})^* = \dot{U}_{CB} \dot{I}_{CA}^* - \dot{U}_{CB} \dot{I}_{BC}^* = -\dot{U}_{BC} \dot{I}_{CA}^* + \dot{U}_{BC} \dot{I}_{BC}^*$$

- Άρα

$$W_1 + W_2 = \operatorname{Re}(\dot{U}_{AB} \dot{I}_{AB}^*) - \operatorname{Re}(\dot{U}_{AB} \dot{I}_{CA}^*) - \operatorname{Re}(\dot{U}_{BC} \dot{I}_{CA}^*) + \operatorname{Re}(\dot{U}_{BC} \dot{I}_{BC}^*)$$

$$= P_{AB} + \operatorname{Re}[(-\dot{U}_{AB} - \dot{U}_{BC}) \dot{I}_{CA}^*] + P_{BC}$$

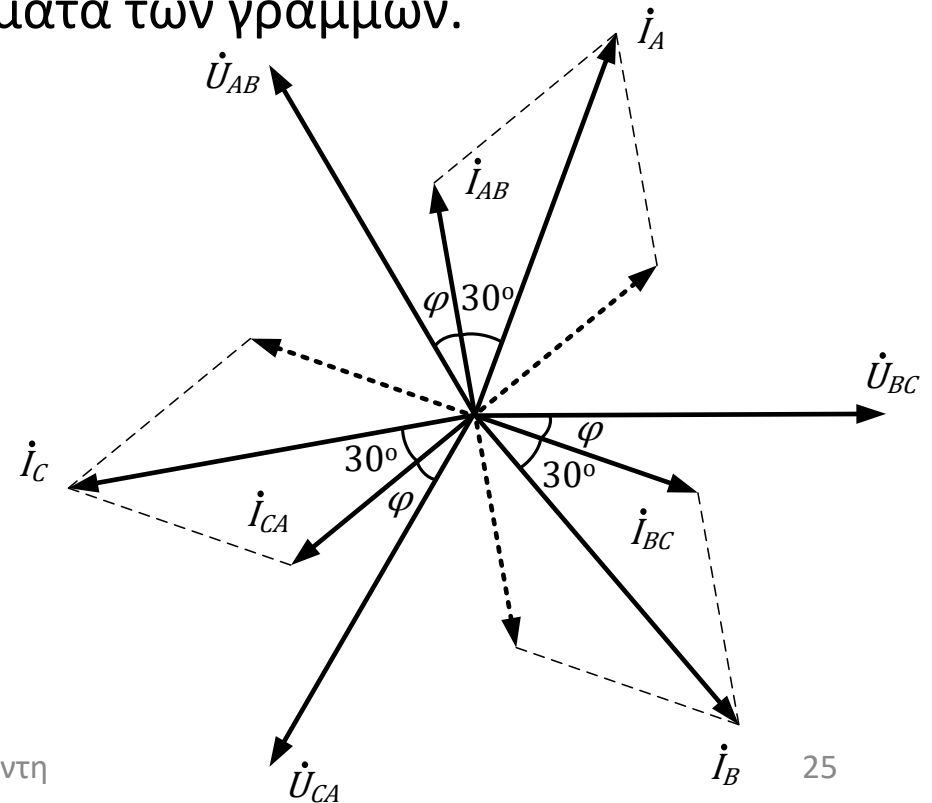
$$= P_{AB} + \operatorname{Re}[(-\dot{U}_A + \dot{U}_B - \dot{U}_B + \dot{U}_C) \dot{I}_{CA}^*] + P_{BC}$$

$$= P_{AB} + \operatorname{Re}[\dot{U}_{CA} \dot{I}_{CA}^*] + P_{BC} = P_{AB} + P_{CA} + P_{BC}$$

- Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται η σχέση για φορτίο σε Υ 3 αγωγών.

Μέθοδος 2 βαττομέτρων

- Αν η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος σε ένα από τα βαττόμετρα είναι πάνω από 90° τότε η βελόνα του βαττομέτρου τείνει να στραφεί προς αρνητικές τιμές. Τότε αρκεί να αντιστρέψουμε τη σύνδεση του πηνίου ρεύματος, οπότε η βελόνα θα δείξει θετική τιμή, την οποία πρέπει να λάβουμε υπόψη με αρνητικό πρόσημο κατά την άθροιση των τιμών.
- Στην περίπτωση συμμετρικού φορτίου συνδεσμολογίας Δ τα ρεύματα των κλάδων σχηματίζουν γωνίες 30° με τα ρεύματα των γραμμών.
- Από το διάγραμμα προκύπτει ότι στην περίπτωση αυτή η τάση $\dot{U}_{AB}$ παρουσιάζει διαφορά φάσης με το $\dot{I}_A$ ίση με $\varphi + 30^\circ$ ενώ η $\dot{U}_{CB}$ παρουσιάζει διαφορά φάσης με το $\dot{I}_C$ ίση με $180^\circ - (-\varphi - 120^\circ - 30^\circ) = \varphi - 30^\circ$.



Μέθοδος 2 βαττομέτρων

- Επομένως

$$W_1 = U_{AB} I_A \cos(\varphi + 30^\circ)$$

$$W_2 = U_{CB} I_C \cos(\varphi - 30^\circ)$$

- Γενικότερα για τις ενδείξεις των δύο βαττομέτρων προκύπτει σε κάθε περίπτωση συμμετρικού φορτίου (και σε Υ) ότι

$$W_1 = UI \cos(\varphi + 30^\circ)$$

$$W_2 = UI \cos(\varphi - 30^\circ)$$

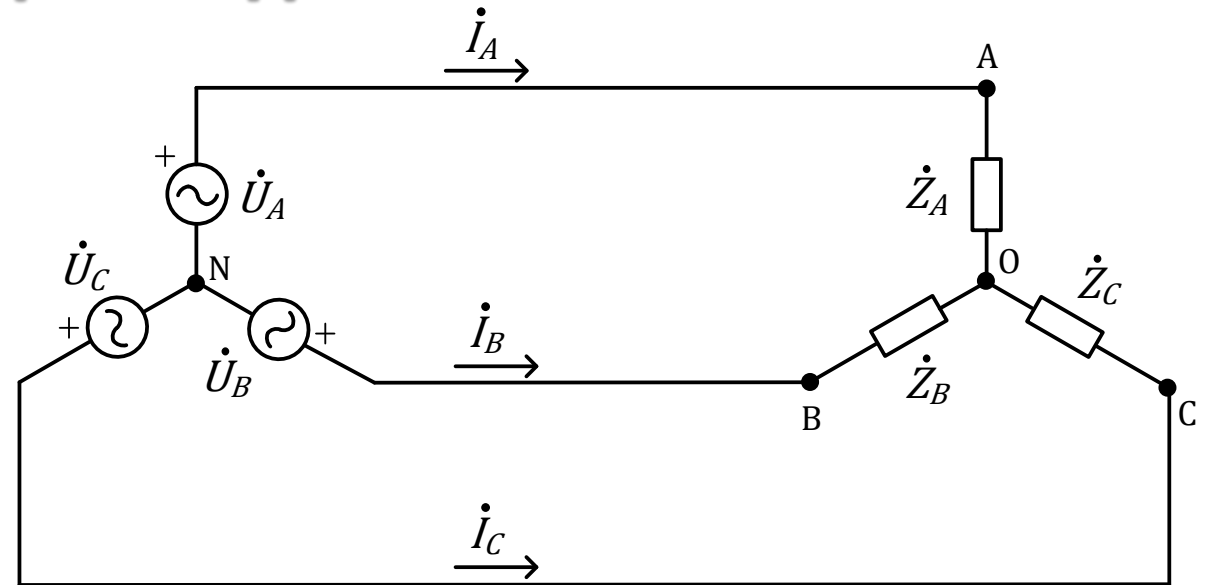
- Προκύπτει έτσι ότι

$$\tan \varphi = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} \right)$$

- Από τη σχέση αυτή μπορεί να προκύψει η απόλυτη τιμή της γωνίας φ . Το πρόσημο που προκύπτει δεν έχει νόημα γιατί οι σειρά των μετρήσεων είναι τυχαία.

Παράδειγμα 7

- Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $U_\phi = 230 \text{ V}$, $\dot{Z}_A = 20 + j15 \Omega$, $\dot{Z}_B = 15 + j10 \Omega$, $\dot{Z}_C = 10 - j18 \Omega$.



- Θεωρούμε θετική ακολουθία φάσεων.
- Αν χρησιμοποιήσουμε για τη μέτρηση της ενεργού ισχύος τη μέθοδο των 3 βαττομέτρων να βρεθούν οι ενδείξεις των οργάνων και η συνολική ενεργός ισχύς.
- Αν χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των δύο βαττομέτρων και συνδέσουμε τα πηνία έντασης των δύο βαττομέτρων στις φάσεις A και B να βρεθούν οι ενδείξεις των βαττομέτρων και η συνολική ενεργός ισχύς του φορτίου

Απάντηση:

- Τα ρεύματα και οι τάσεις στο φορτίο έχουν υπολογιστεί (παράδειγμα 1 μαθήματος 8).

Παράδειγμα 7

- Οι τιμές τους είναι

$$\dot{I}_A = 10.032 \angle 86.6^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = 8.252 \angle (-99.5^\circ) \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = 2.02 \angle (-68.1^\circ) \text{ A}$$

$$\dot{U}_{AO} = \dot{I}_A \dot{Z}_A = 250.8 \angle 123.4^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{BO} = \dot{I}_B \dot{Z}_B = 148.8 \angle (-65.8^\circ) \text{ V}$$

$$\dot{U}_{CO} = \dot{I}_C \dot{Z}_C = 363.6 \angle (-158.1^\circ) \text{ V}$$

- Έστω ότι χρησιμοποιούμε 3 βαττόμετρα. Οι ενδείξεις τους θα είναι

$$\begin{aligned} W_A &= U_{AO} I_A \cos(\varphi_{U_{AO}} - \varphi_{i_A}) = 250.8 \cdot 10.032 \cdot \cos(123.4^\circ - 86.6^\circ) \\ &= 2012.9 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_B &= U_{BO} I_B \cos(\varphi_{U_{BO}} - \varphi_{i_B}) = 148.8 \cdot 8.252 \cdot \cos(-65.8^\circ + 99.5^\circ) \\ &= 1021.5 \text{ W} \end{aligned}$$

$$W_C = U_{CO} I_C \cos(\varphi_{U_{CO}} - \varphi_{i_C}) = 363.6 \cdot 2.02 \cos(-158.1^\circ + 68.1^\circ) = 0$$

- Η συνολική ενεργός ισχύς θα είναι

$$P = W_A + W_B + W_C = 3034 \text{ W}$$

Παράδειγμα 7

- Έστω τώρα ότι χρησιμοποιούμε δύο βαττόμετρα και τα συνδέουμε στις φάσεις A, B.

- Οι πολικές τάσεις στο φορτίο είναι

$$\dot{U}_{AB} = 230\sqrt{3}\angle 120^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{BC} = 230\sqrt{3}\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{CA} = 230\sqrt{3}\angle (-120^\circ) \text{ V}$$

- Η ένδειξη του ενός βαττομέτρου θα είναι

$$W_1 = \operatorname{Re}(\dot{U}_{AC} \dot{I}_A^*) = U_{AC} I_A \cos(\varphi_{u_{AC}} - \varphi_{i_A})$$

- Η τάση που χρειάζεται είναι η $\dot{U}_{AC}$, δηλαδή η αντίθετη της $\dot{U}_{CA}$. Το διάνυσμα της τάσης αυτής έχει ίδιο μέτρο με τη $\dot{U}_{CA}$ αλλά αντίθετη φορά. Επομένως η γωνία της θα είναι

$$\varphi_{u_{AC}} = \varphi_{u_{CA}} + 180^\circ = -120^\circ + 180^\circ = 60^\circ$$

- Άρα

$$W_1 = 230\sqrt{3} \cdot 10.032 \cos(60^\circ - 86.6^\circ) = 3575 \text{ W}$$

Παράδειγμα 7

- Επίσης

$$\begin{aligned} W_2 &= \operatorname{Re}(\dot{U}_{BC} \dot{I}_B^*) = U_{BC} I_B \cos(\varphi_{u_{BC}} - \varphi_{i_B}) \\ &= 230\sqrt{3} \cdot 8.252 \cos(0^\circ + 99.5^\circ) = -540.6 \text{ W} \end{aligned}$$

- Η συνολική ενεργός ισχύς είναι

$$P = W_1 + W_2 = 3034 \text{ W}$$