

Ηλεκτρικά Κυκλώματα II

Διάλεξη 04

Α. Δροσόπουλος

20-03-2025

Outline

1 Ισχύς

2 Τριφασικά

1 Ισχύς

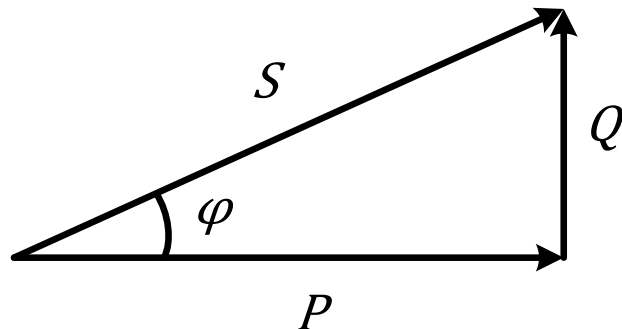
2 Τριφασικά

Τρίγωνο ισχύος

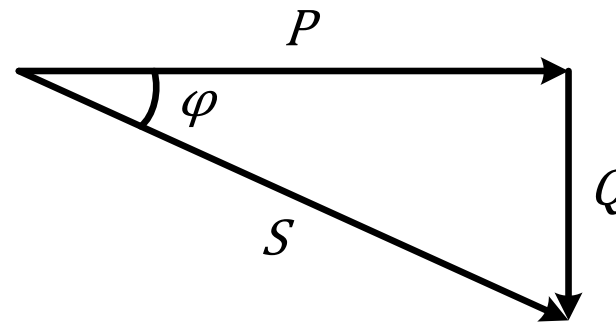
- Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η φαινομένη ισχύς προκύπτει και από τη σχέση

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- Η σχέση αυτή θυμίζει το Πυθαγόρειο Θεώρημα.
- Μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα τρίγωνο με πλευρές ανάλογες της ενεργού, της αέργου και της φαινομένης ισχύος.
- Για RL φορτίο (Q θετική):

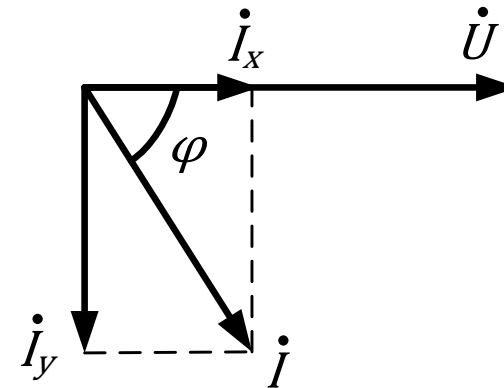
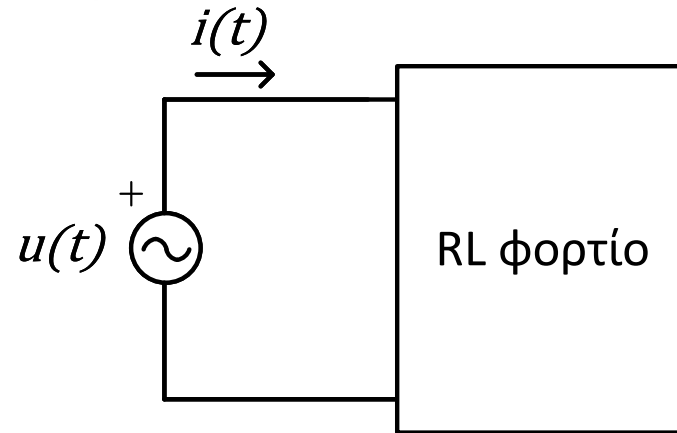


Για RC φορτίο (Q αρνητική):



Ανάλυση του ρεύματος

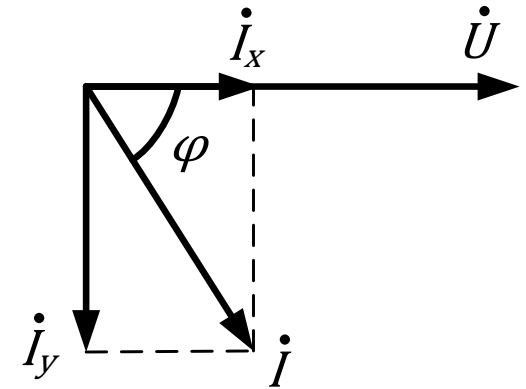
- Ας θεωρήσουμε φορτίο RL.
- Αναλύουμε το ρεύμα σε δύο συνιστώσες, την $\dot{I}_x$ που είναι παράλληλη προς την τάση και την $\dot{I}_y$ που είναι κάθετη στην τάση.
- Παρατηρούμε ότι:
 - Η συνιστώσα $\dot{I}_x = I \cos \varphi$ σχετίζεται με την $P = UI \cos \varphi$.
 - Η συνιστώσα $\dot{I}_y = I \sin \varphi$ σχετίζεται με την $Q = UI \sin \varphi$.
- Για το λόγο αυτό η $\dot{I}_x$ χαρακτηρίζεται και ως ενεργός συνιστώσα του ρεύματος ενώ η $\dot{I}_y$ χαρακτηρίζεται ως άεργος.



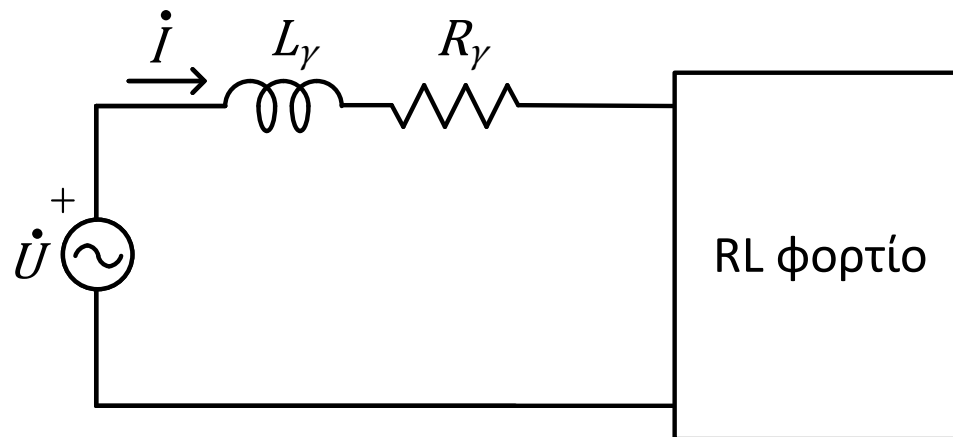
Ανάλυση του ρεύματος

- Το συνολικό ρεύμα έχει rms τιμή:

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$$



- Παρατηρούμε ότι η συνιστώσα του ρεύματος που σχετίζεται με την άεργο ισχύ (την οποία δεν αξιοποιούμε) αποτελεί μέρος του συνολικού ρεύματος που ρέει στο κύκλωμα.
- Στο κύκλωμα που εξετάζουμε θεωρήσαμε ότι οι αγωγοί είναι ιδανικοί. Στην πραγματικότητα αυτό δεν ισχύει. Το παρακάτω κύκλωμα προσεγγίζει λίγο καλύτερα το πραγματικό:



Ανάλυση του ρεύματος

- Το συνολικό ρεύμα I που ρέει στη γραμμή προκαλεί πτώση τάσης στη σύνθετη αντίσταση της γραμμής και θερμικές απώλειες της μορφής $I^2 R_\gamma$.
- Οι διατομές των αγωγών και ο υπόλοιπος εξοπλισμός του συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας υπολογίζονται με βάση αυτό το συνολικό ρεύμα.
- Η ενεργός συνιστώσα του ρεύματος δεν μπορεί να μειωθεί γιατί εξαρτάται από το φορτίο και την τάση που θεωρούνται σταθερά.
- Η άεργος συνιστώσα του ρεύματος καταλαμβάνει πόρους του δικτύου χωρίς να αξιοποιείται. Θα έχουμε κέρδος αν τη μειώσουμε.

Διόρθωση συντελεστού ισχύος σε κάποιο φορτίο είναι η διαδικασία αύξησης του συντελεστή ισχύος χωρίς αλλαγή τάσης ή ρεύματος στο αρχικό φορτίο.

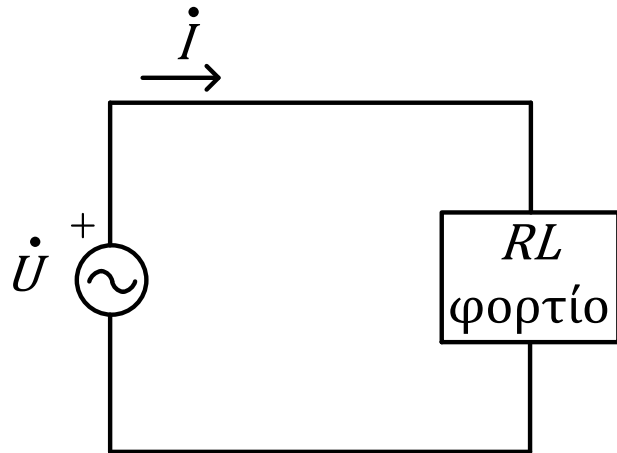
Διόρθωση συντελεστή ισχύος

- Θεωρούμε ότι το φορτίο είναι δεδομένο και δεν μπορούμε να επέμβουμε στο P που απορροφά, ούτε και στην τάση του δικτύου. (Αν μπορούσαμε να αυξήσουμε την τάση θα μειωνόταν το ρεύμα που απαιτείται για την ίδια μεταφορά ενεργού ισχύος.)
- Για να μειώσουμε το ρεύμα πρέπει να βρούμε έναν τρόπο να μειώσουμε την άεργο ισχύ που απορροφά το φορτίο από το δίκτυο, δηλαδή να αυξήσουμε το συντελεστή ισχύος του. Αυτό λέγεται αντιστάθμιση άεργου ισχύος ή διόρθωση του συντελεστή ισχύος.
- Τα περισσότερα οικιακά αλλά και βιομηχανικά φορτία έχουν επαγωγικό χαρακτήρα. Αυτό σημαίνει ότι απορροφούν άεργο από το δίκτυο.
- Ένα RL φορτίο καταναλώνει άεργο ($Q > 0$) ενώ ένας πυκνωτής παράγει ($Q < 0$). Αν συνδέσουμε λοιπόν παράλληλα στο φορτίο πυκνωτή, τότε ο συνδυασμός τους θα απορροφά λιγότερη άεργο ισχύ από το δίκτυο.

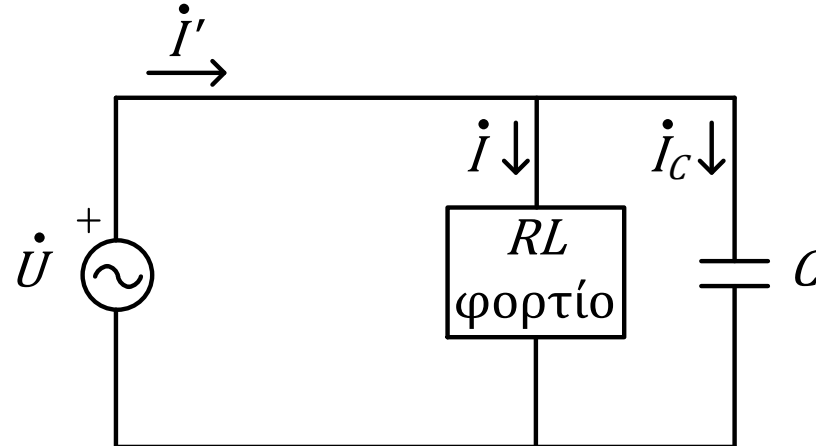
Διόρθωση συντελεστή ισχύος

- Η σύνδεση του πυκνωτή γίνεται ως εξής:

Αρχικό κύκλωμα:



Κύκλωμα με πυκνωτή αντιστάθμισης:

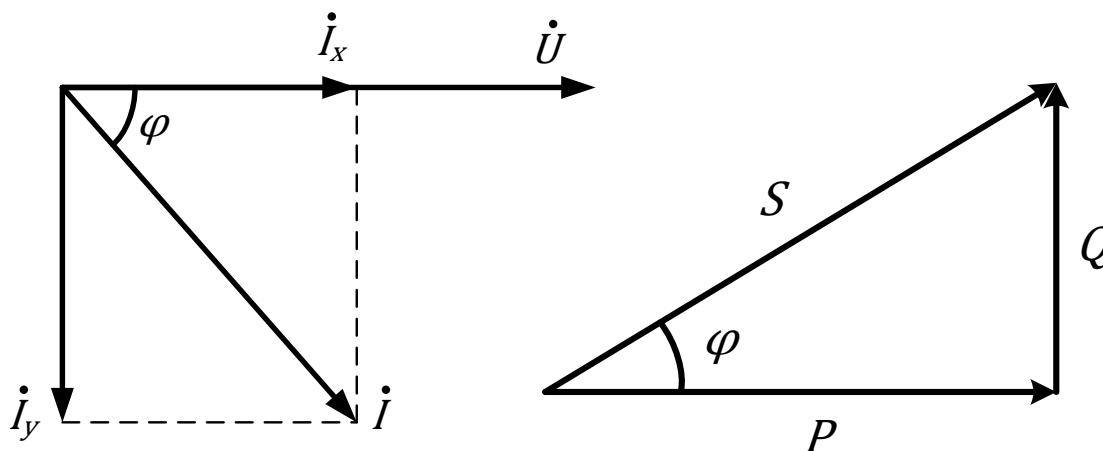
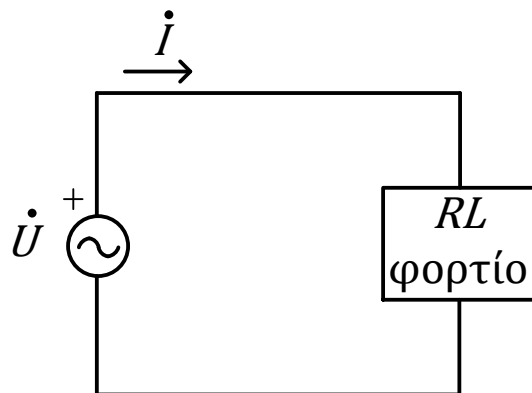


- Αφού η σύνθετη αντίσταση του φορτίου και η τάση στα άκρα του δεν άλλαξαν, το φορτίο εξακολουθεί να διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα $\dot{I}$. (Θεωρούμε ότι οι αγωγοί που συνδέουν το φορτίο με την πηγή δεν έχουν εσωτερική αντίσταση.)
- Η ενεργός ισχύς που απορροφά ο συνδυασμός φορτίου-πυκνωτή οφείλεται μόνο στο RL φορτίο. Αφού η τάση και το ρεύμα στο φορτίο δεν αλλάζουν, η ενεργός ισχύς παραμένει ίδια.

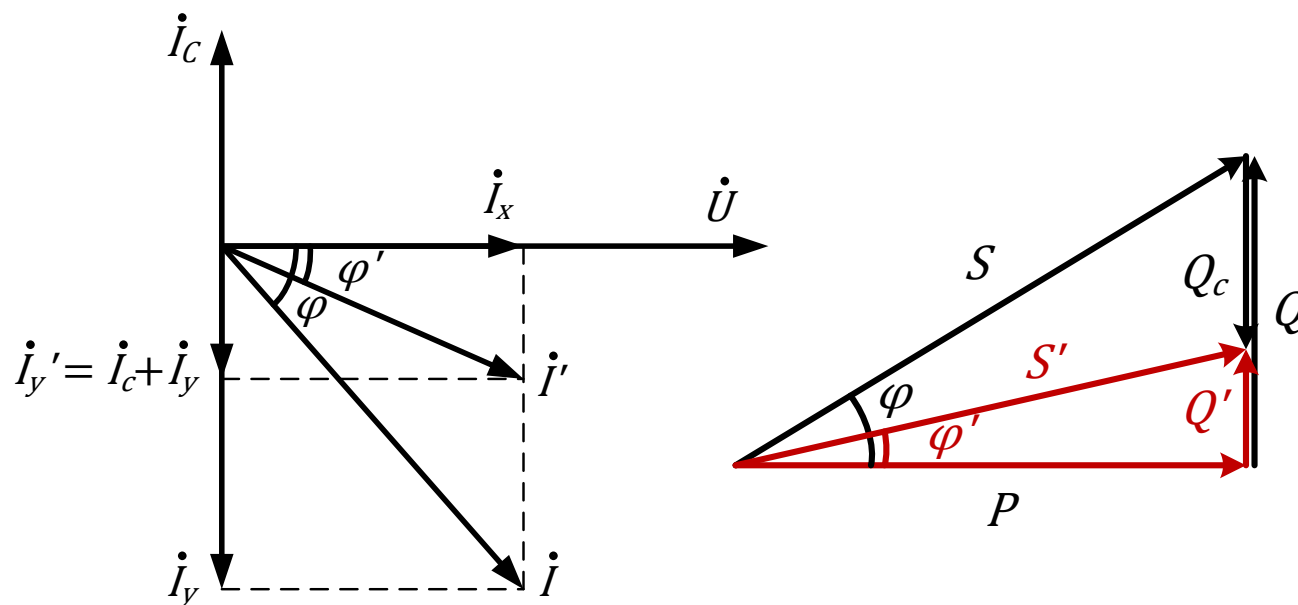
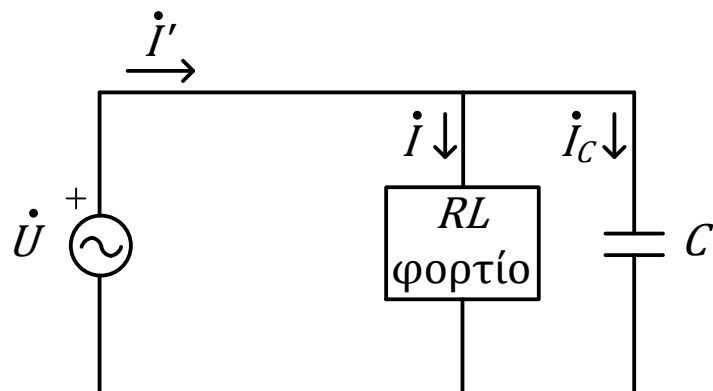
Διόρθωση συντελεστή ισχύος

- Διανυσματικό διάγραμμα και τρίγωνο ισχύος:

Πριν τη διόρθωση:



Μετά τη διόρθωση:



Διόρθωση συντελεστή ισχύος

- Παρατηρούμε ότι ο συνδυασμός φορτίου-πυκνωτή απορροφά λιγότερη άεργο ισχύ από το δίκτυο, η φαινομένη έχει μειωθεί, το ρεύμα έχει μειωθεί, η διαφορά φάσης τάσης ρεύματος φ έχει μειωθεί και επομένως το $\cos \varphi$ (που ισούται με το συντελεστή ισχύος) έχει αυξηθεί.
- Προσοχή: Η άεργος ισχύς που απορροφά το φορτίο δεν μεταβλήθηκε με την τοποθέτηση του πυκνωτή. Απλώς μέρος της παράγεται τοπικά από τον πυκνωτή και δεν χρειάζεται να μεταφέρεται από το δίκτυο.
- Στους αγωγούς από το σημείο της αντιστάθμισης μέχρι το φορτίο εξακολουθεί να ρέει το αρχικό ρεύμα, άρα εξακολουθούν να υπάρχουν τα μειονεκτήματα του χαμηλού συντελεστή ισχύος.

Διόρθωση συντελεστή ισχύος

- Μπορούμε να υπολογίσουμε τον πυκνωτή που χρειάζεται για συγκεκριμένη διόρθωση του συντελεστή ισχύος ως εξής.

- Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις

$$Q = UI \sin \varphi$$

$$P = UI \cos \varphi$$

- Προκύπτει ότι

$$Q = P \tan \varphi$$

- Έστω ότι με την τοποθέτηση του πυκνωτή ο αρχικός συντελεστής ισχύος $\cos \varphi$ αυξάνεται σε $\cos \varphi'$. Η άεργος που απορροφά ο παράλληλος συνδυασμός από το δίκτυο θα μειωθεί από Q σε Q' . Ο πυκνωτής πρέπει να παράγει την άεργο Q_c που απαιτείται έτσι ώστε το φορτίο να εξακολουθήσει να απορροφά άεργο Q .

$$Q = Q' + Q_c \Rightarrow Q_c = Q - Q' = P \tan \varphi - P \tan \varphi'$$

$$\Rightarrow Q_c = P(\tan \varphi - \tan \varphi')$$

Διόρθωση συντελεστή ισχύος

- Αν μας ζητηθεί, μπορούμε από την τιμή αυτή της αέργου Q_c να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή.
- Το ρεύμα του πυκνωτή προκύπτει ως εξής:

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C \dot{U} \Rightarrow I_C = \omega C U$$

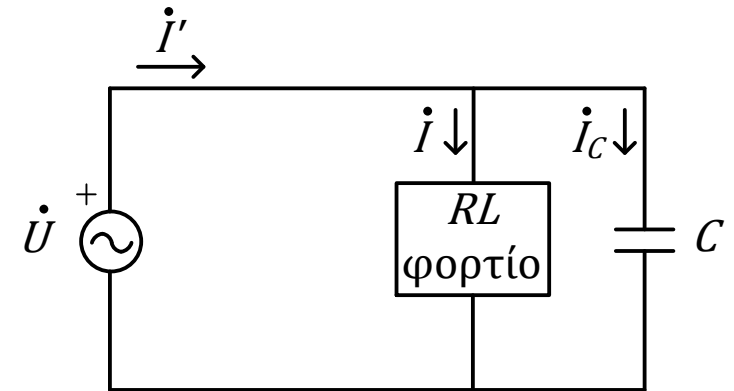
- Η άεργος που παράγει είναι

$$Q_C = UI_C \sin 90^\circ = UI_C = \omega C U^2$$

- Την άεργο όμως την υπολογίσαμε παραπάνω. Επομένως

$$C = \frac{Q_C}{\omega U^2}$$

- Αν το φορτίο είναι RC , τότε η διαδικασία είναι παρόμοια, όμως τότε απαιτείται σύνδεση επαγωγού αντί για πυκνωτή για διόρθωση του συντελεστή ισχύος.



Παράδειγμα 2.3

- Ένα φορτίο που τροφοδοτείται από τάση 230 V, 50 Hz απορροφά ενεργό ισχύ 4 kW με επαγωγικό συντελεστή ισχύος 0.8. Να βρεθεί ο πυκνωτής που απαιτείται ώστε να αυξηθεί ο συντελεστής ισχύος στο 0.95.

Απάντηση:

- Η ενεργός ισχύς του φορτίου δίνεται ότι είναι

$$P = 4 \text{ kW}$$

- Η αρχική γωνία του συντελεστή ισχύος είναι

$$\varphi = \cos^{-1} 0.8 = 36.87^\circ$$

- Ο επιθυμητός συντελεστής ισχύος αντιστοιχεί στη γωνία

$$\varphi' = \cos^{-1} 0.95 = 18.19^\circ$$

- Άρα η άεργος του πυκνωτή που απαιτείται θα είναι

$$Q_c = P(\tan \varphi - \tan \varphi') = 1.686 \text{ kVar}$$

- Η χωρητικότητα του πυκνωτή που παράγει αυτή την άεργο είναι

$$C = \frac{Q_c}{\omega U^2} = \frac{Q_c}{2\pi f U^2} = 0.101 \text{ mF}$$

Παρατηρήσεις

- Θα μπορούσαμε να επιλέξουμε τον πυκνωτή έτσι ώστε να μηδενίζεται τελείως η άεργος. Αποφεύγουμε όμως κάτι τέτοιο γιατί υπάρχει κίνδυνος υπεραντιστάθμισης.
- Τα φορτία συχνά συνδέονται και αποσυνδέονται με τυχαίο τρόπο. Αν η άεργος που απαιτούν μειωθεί ενδέχεται η άεργος του πυκνωτή που συνδέσαμε παράλληλα να έχει μεγαλύτερη τιμή από αυτή.
- Τότε η άεργος του πυκνωτή καλύπτει το φορτίο και η υπόλοιπη ρέει προς το δίκτυο.
- Πάλι εμφανίζεται ροή αέργου στο δίκτυο, απλώς αλλάζει η φορά της. Επομένως πάλι ρέει αυξημένο άεργο ρεύμα στους αγωγούς με όλες τις αρνητικές συνέπειες που προαναφέρθηκαν.

Παρατηρήσεις

- Παραπάνω αναφέρθηκε ότι αφού η τάση και το ρεύμα στο φορτίο δεν αλλάζουν, η ενεργός ισχύς παραμένει ίδια. Ωστόσο στην πραγματικότητα οι αγωγοί δεν είναι ιδανικοί, επομένως εμφανίζουν πτώση τάσης. Άρα η τάση στο φορτίο με την τοποθέτηση του πυκνωτή αλλάζει, το ίδιο και η ενεργός ισχύς.

Παράδειγμα 2.4

- Ένα φορτίο με $P = 1 \text{ kW}$ και συντελεστή ισχύος 0.5 επαγωγικό τροφοδοτείται από τάση 230 V. Παράλληλα στο φορτίο τοποθετείται πυκνωτής για διόρθωση του συντελεστή σε 0.8. Να βρεθεί πόσο μεταβλήθηκε το ρεύμα του παράλληλου συνδυασμού φορτίου-πυκνωτή.

Απάντηση:

- Η φαινομένη ισχύς του φορτίου είναι

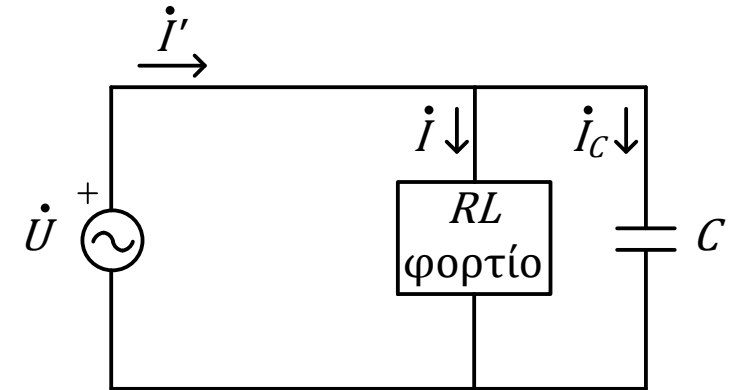
$$S = \frac{P}{\cos \varphi} = 2 \text{ kVA}$$

- Άρα το ρεύμα του φορτίου είναι

$$I = \frac{S}{U} = 8.7 \text{ A}$$

- Η φαινομένη ισχύς του παράλληλου συνδυασμού είναι

$$S' = \frac{P}{\cos \varphi'} = 1.250 \text{ kVA}$$



Παράδειγμα 2.4

- Άρα το ρεύμα του παράλληλου συνδυασμού είναι

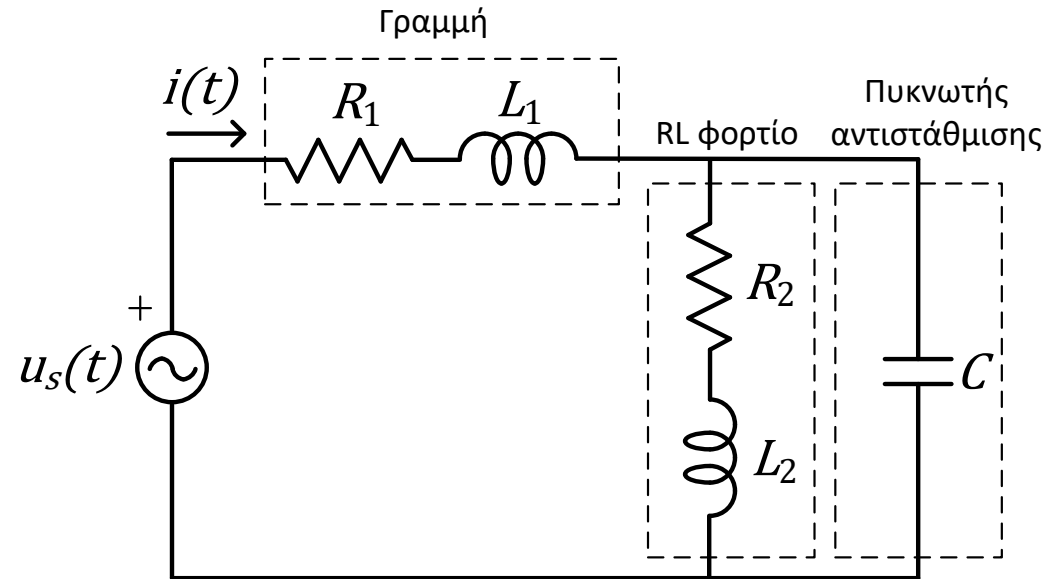
$$I' = \frac{S'}{U} = 5.4 \text{ A}$$

- Μείωση:

$$\frac{8.7 - 5.4}{8.7} 100 = 37.9\%$$

Παράδειγμα 2.5

- Στο κύκλωμα του σχήματος είναι
 $R_1 = 1 \, \Omega$, $L_1 = 0.01 \, \text{H}$, $R_2 = 50 \, \Omega$,
 $L_2 = 0.1 \, \text{H}$, $C = 0.02 \, \text{mF}$, $\dot{U}_s =$
 $230 \angle 0^\circ \, \text{V}$, $\omega = 100\pi \, \text{rad/s}$.
- Να βρεθεί η μιγαδική ισχύς των
στοιχείων.



Απάντηση:

- Το ρεύμα της πηγής είναι

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{(R_1 + j\omega L_1) + \frac{(R_2 + j\omega L_2) \left(-\frac{j}{\omega C} \right)}{R_2 + j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C}}} = 3.19 - j0.75 = 3.28 \angle (-13.1^\circ) \text{A}$$

Παράδειγμα 2.5

- Η τάση $\dot{U}_r$ του κλάδου R_2L_2 και του πυκνωτή είναι

$$\begin{aligned}\dot{U}_r &= \dot{U}_s - \dot{I}(R_1 + j\omega L_1) \\ &= 224.47 - j9.29 \\ &= 224.66 \angle (-2.4^\circ) \text{ V}\end{aligned}$$

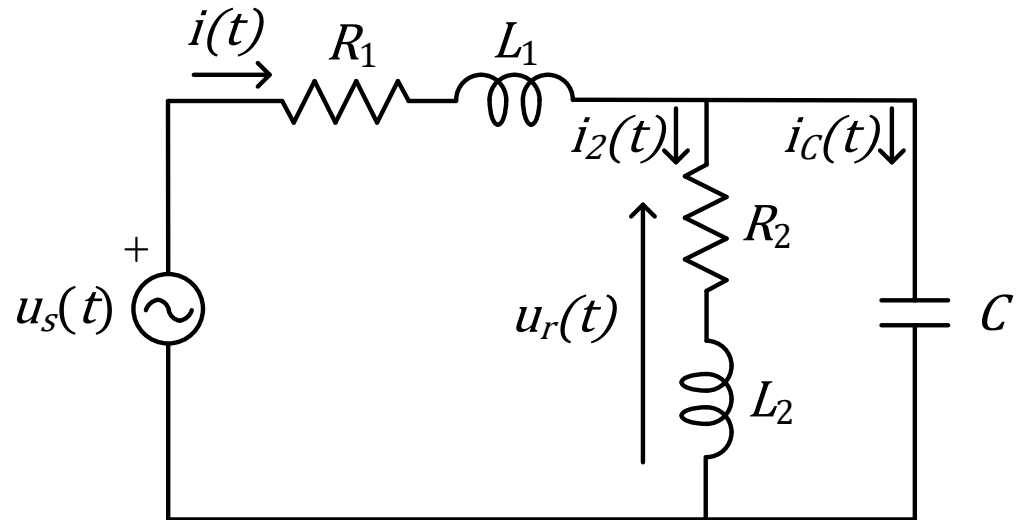
- Τα ρεύματα $\dot{I}_2$ και $\dot{I}_C$ του κλάδου R_2L_2 και του πυκνωτή είναι

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_r}{R_2 + j\omega L_2} = 3.145 - j2.16 = 3.81 \angle (-34.5^\circ) \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_r}{-\frac{j}{\omega C}} = 0.06 + j1.41 = 1.41 \angle 87.6^\circ \text{ A}$$

- Η μιγαδική ισχύς της πηγής είναι

$$\dot{S} = \dot{U}_s \dot{I}^* = (734.47 + j171.38) \text{ VA}$$



Παράδειγμα 2.5

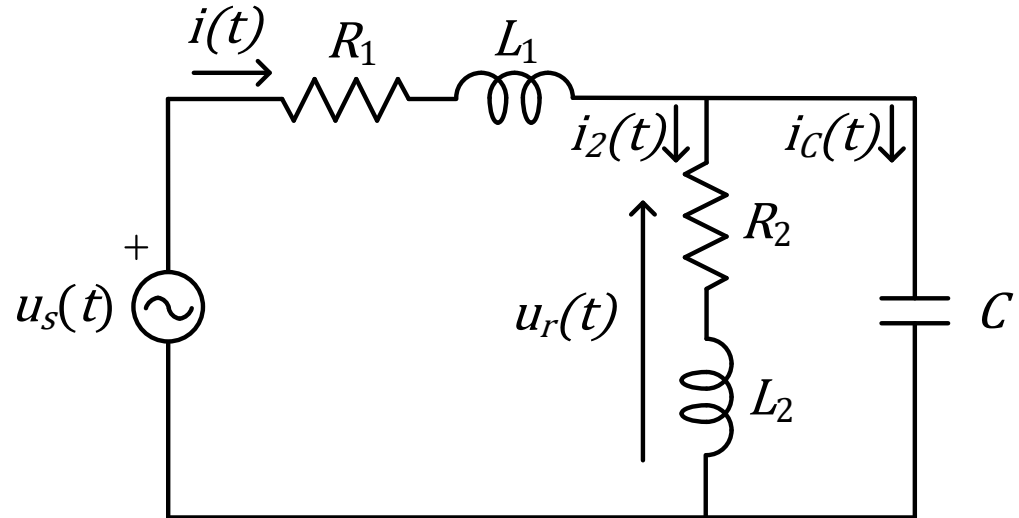
- Η μιγαδική ισχύς του κλάδου

$R_2 L_2$ είναι

$$\dot{S}_2 = \dot{U}_r \dot{I}_2^* = (723.71 + j454.72) \text{ VA}$$

- Η μιγαδική ισχύς του πυκνωτή είναι

$$\dot{S}_C = \dot{U}_r \dot{I}_C^* = -j317.12 \text{ VA}$$



- Επίσης η γραμμή $R_1 L_1$ απορροφά

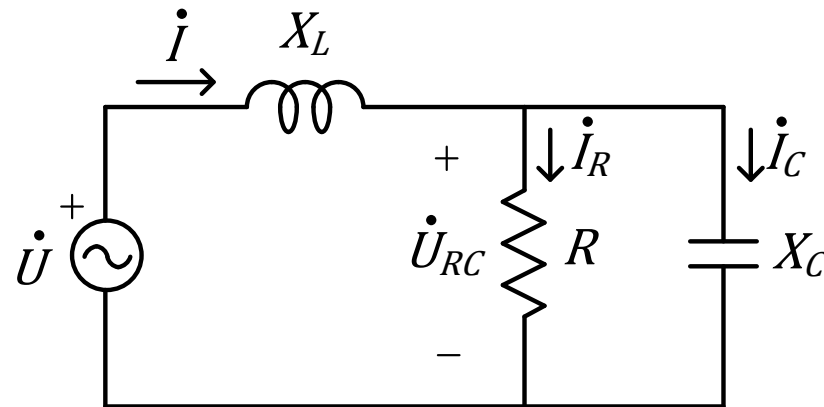
$$\dot{S}_1 = (\dot{U}_s - \dot{U}_r) \dot{I}^* = (10.75 + j33.78) \text{ VA}$$

- Η πηγή παράγει ενεργό ισχύ 734.47 W που απορροφάται στις δύο αντιστάσεις (723.71 W + 10.75 W).
- Η πηγή παράγει άεργο 171.38 Var. Ο πυκνωτής παράγει άεργο 317.12 Var. Η γραμμή $R_1 L_1$ και το φορτίο $R_2 L_2$ καταναλώνουν άεργο 454.72 Var + 33.78 Var. Είναι

$$454.72 + 33.78 = 171.38 + 317.12 = 488.5 \text{ Var}$$

Παράδειγμα 2.6

- Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $X_L = 100 \, \Omega$. Η τάση τροφοδοσίας είναι $\dot{U} = 100 \angle 0^\circ \, \text{V}$ με συχνότητα $f = 50 \, \text{Hz}$. Η τάση στην αντίσταση έχει rms τιμή επίσης $100 \, \text{V}$. Το φορτίο R καταναλώνει ενεργό ισχύ $P_R = 50 \, \text{W}$. Να βρεθεί η άεργος ισχύς του πυκνωτή και η τιμή της χωρητικότητάς του.



Απάντηση:

- Ο φάσοντας της τάσης της πηγής είναι

$$\dot{U} = 100 \angle 0^\circ \, \text{V}$$

- Ο φάσοντας της τάσης στα άκρα του παράλληλου συνδυασμού R, C είναι

$$\dot{U}_{RC} = 100 \angle \alpha = 100(\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

Παράδειγμα 2.6

- Έστω ότι ο φάσορας του ρεύματος της πηγής είναι

$$\dot{I} = I \angle \beta = I(\cos \beta + j \sin \beta)$$

- Επίσης από νόμο τάσεων Kirchhoff στο βρόχο πηγής, X_L , R προκύπτει ότι

$$\dot{U} - \dot{I}jX_L - \dot{U}_{RC} = 0$$

$$\Rightarrow U - jX_L I(\cos \beta + j \sin \beta) - U_{RC}(\cos \alpha + j \sin \alpha) = 0$$

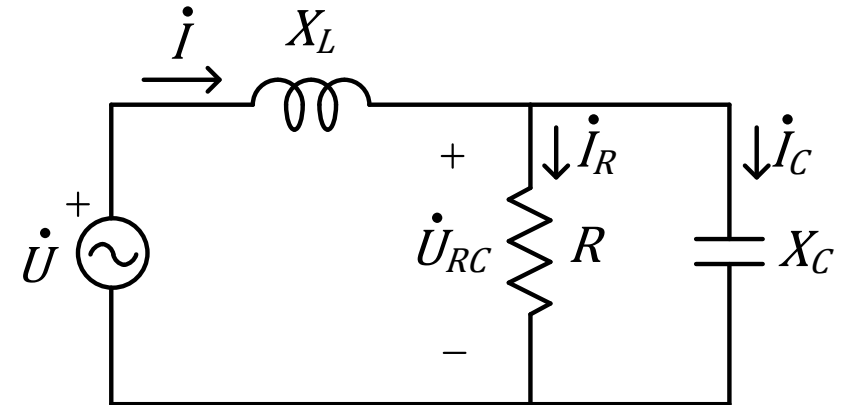
$$\Rightarrow U - jX_L I \cos \beta + X_L I \sin \beta - U_{RC} \cos \alpha - jU_{RC} \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow (U + X_L I \sin \beta - U_{RC} \cos \alpha) - j(X_L I \cos \beta + U_{RC} \sin \alpha) = 0$$

- Γνωστά: X_L , U , U_{RC} , άγνωστα: α , β , I
- Από την τελευταία εξίσωση (μιγαδική) προκύπτει ότι

$$U + X_L I \sin \beta - U_{RC} \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$X_L I \cos \beta + U_{RC} \sin \alpha = 0 \quad (2)$$



Παράδειγμα 2.6

- Η ενεργός ισχύς που απορροφά η αντίσταση είναι ίση με την ενεργό ισχύ που παράγει η πηγή. Επομένως

$$\begin{aligned} P &= P_R \Rightarrow UI \cos(0^\circ - \beta) \\ &= P_R \Rightarrow UI \cos \beta = P_R \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I \cos \beta = \frac{P_R}{U} = 0.5 \text{ A} \quad (3)$$

- Επομένως

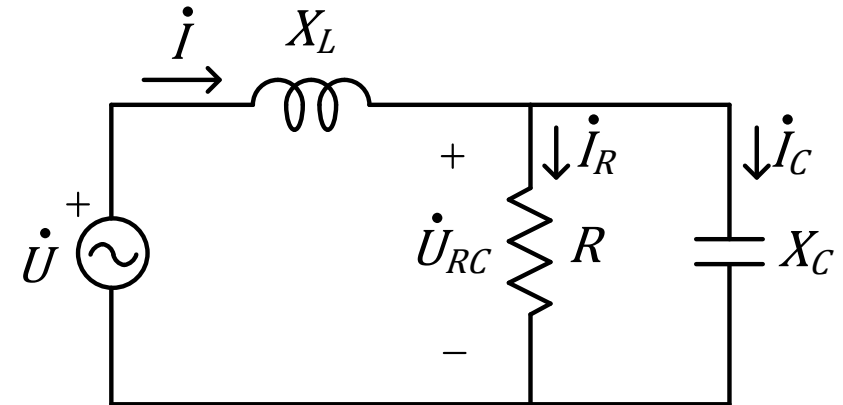
$$(2) \Rightarrow \sin \alpha = -0.5 \Rightarrow \alpha = -30^\circ$$

και

$$\dot{U}_{RC} = 100 \angle (-30^\circ) \text{ V}$$

- Επίσης

$$(1) \Rightarrow I \sin \beta = -0.134 \text{ A} \quad (4)$$



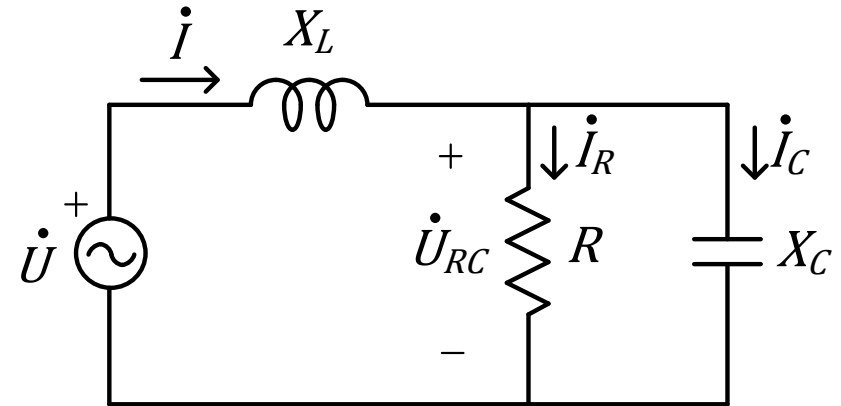
Παράδειγμα 2.6

- Διαιρώντας (4) και (3) κατά μέλη

βρίσκουμε

$$\tan \beta = -0.268 \Rightarrow \beta = \tan^{-1}(-0.268) = -15^\circ$$

$$(4) \Rightarrow I = 0.518 \text{ A}$$

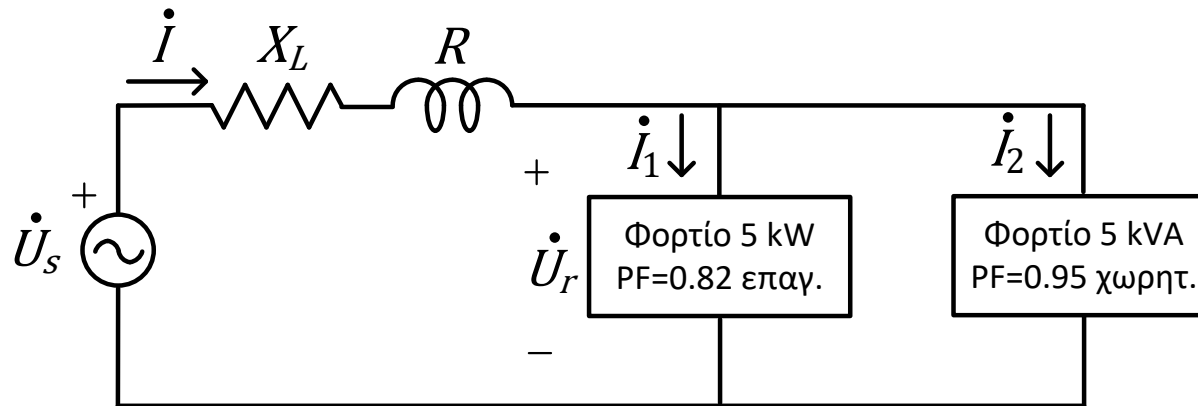


- Επομένως
- Η άεργος που απορροφά ο παράλληλος συνδυασμός R, C είναι
$$Q_C = U_{RC} I \sin(\alpha - \beta) = 100 \cdot 0.518 \sin(-30^\circ + 15^\circ) = -13.4 \text{ Var}$$
- Το ωμικό φορτίο δεν έχει σχέση με την άεργο, άρα αυτή είναι η άεργος του πυκνωτή.
- Η άεργος είναι αρνητική, όπως ήταν αναμενόμενο για πυκνωτή.
- Η χωρητικότητα του πυκνωτή θα είναι

$$C = \frac{Q_c}{\omega U_{RC}^2} = 4.3 \text{ } \mu\text{F}$$

Παράδειγμα 2.7

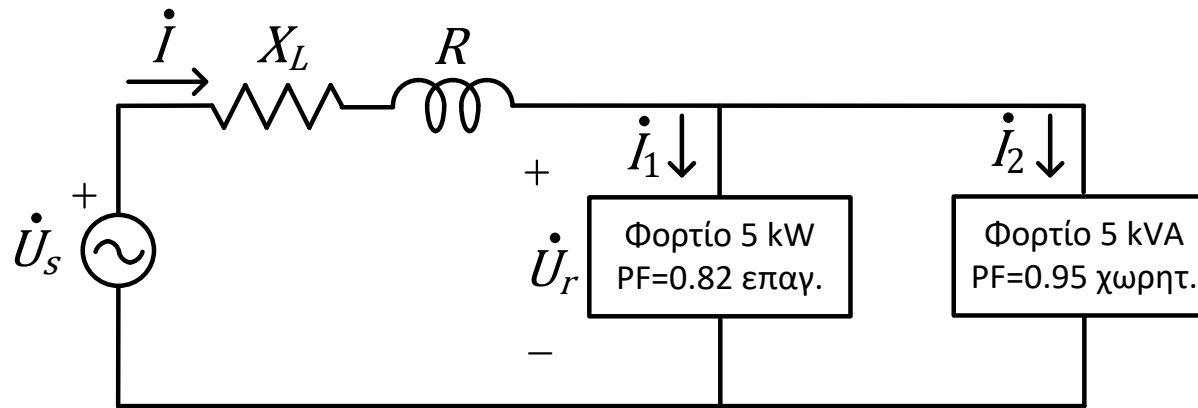
- Στο παρακάτω κύκλωμα η τάση στα φορτία είναι $\dot{U}_r = 230 \angle 0^\circ \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$. Για τη γραμμή θεωρούμε ότι $R = 0.2 \, \Omega$, $L = 1.3 \text{ mH}$. Να βρεθεί η τάση της πηγής $\dot{U}_s$.



Απάντηση:

- Πρέπει να βρούμε τα ρεύματα των φορτίων. Έστω $\dot{I}_1 = I_1 \angle \beta_1$ το ρεύμα στο φορτίο 5 kW.
- Ο συντελεστής ισχύος είναι
$$\cos(0^\circ - \beta_1) = PF_1 = 0.82 \text{ επαγωγικός}$$
- Άρα $\beta_1 = -34.9^\circ$.

Παράδειγμα 2.7



- Επίσης

$$P_1 = U_r I_1 \cos(0^\circ - \beta_1) \Rightarrow I_1 = 26.5 \text{ A}$$

- Έστω $\dot{I}_2 = I_2 \angle \beta_2$ το ρεύμα στο φορτίο 5 kVA.

- Ο συντελεστής ισχύος είναι

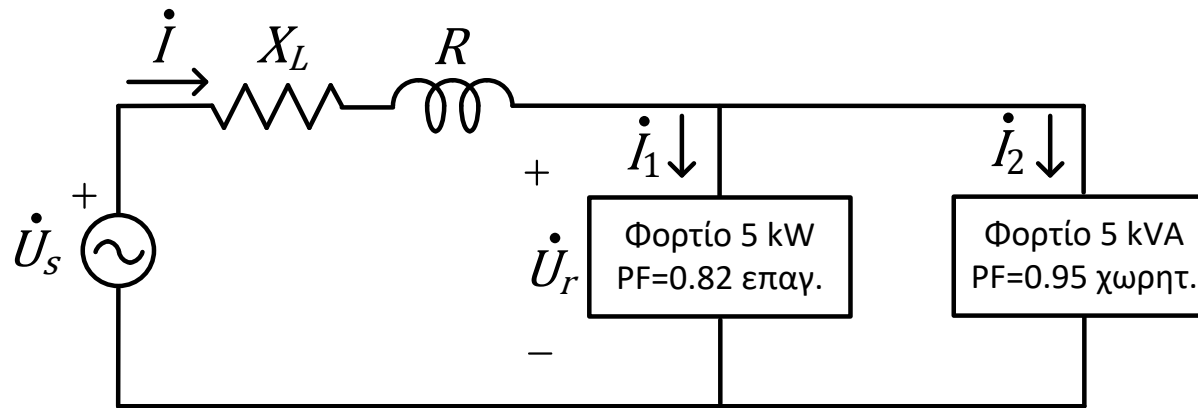
$$\cos(0^\circ - \beta_2) = PF_2 = 0.95 \text{ χωρητικός}$$

- Άρα $\beta_2 = 18.2^\circ$.

- Επίσης

$$S_2 = U_r I_2 \Rightarrow I_2 = 21.7 \text{ A}$$

Παράδειγμα 2.7



- Το συνολικό ρεύμα στη γραμμή θα είναι:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 26.5 \angle (-34.9^\circ) + 21.7 \angle 18.2^\circ = 43.2 \angle (-11.2^\circ) \text{ A}$$

- Από νόμο τάσεων Kirchhoff:

$$-\dot{U}_s + \dot{I}(R + j\omega L) + \dot{U}_r = 0$$

$$\dot{U}_s = \dot{I}(R + j\omega L) + \dot{U}_r = (42.4 - j8.4)(0.2 + j0.4) + 230 = 242.3 \angle 3.6^\circ \text{ V}$$

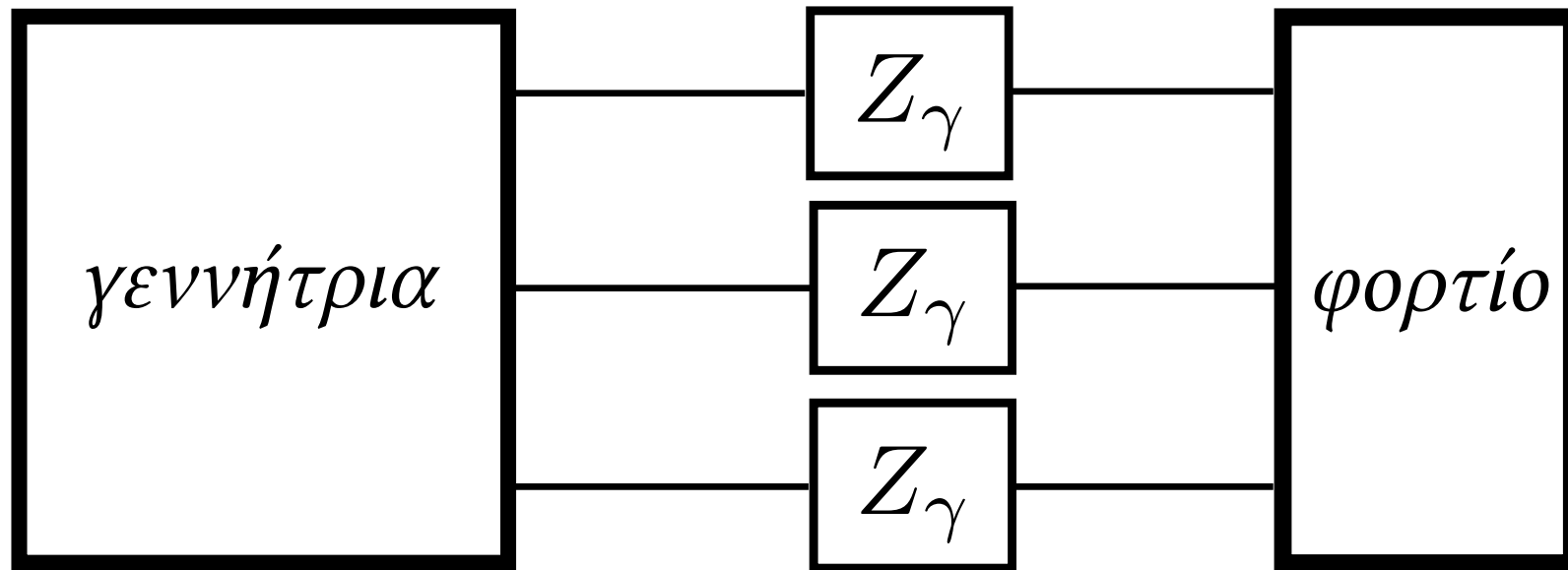
- Πτώση τάσης στη γραμμή:

$$\dot{I}(R + j\omega L) = \dot{U}_s - \dot{U}_r = 19.3 \angle 52.2^\circ \text{ V}$$

1 Ισχύς

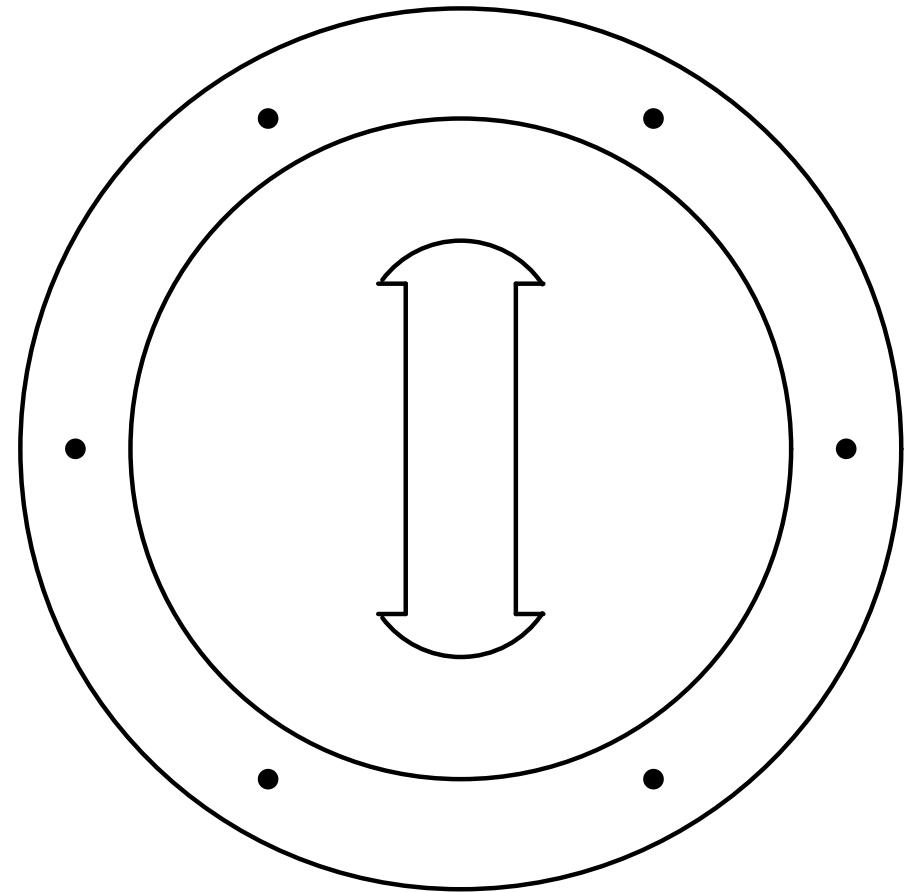
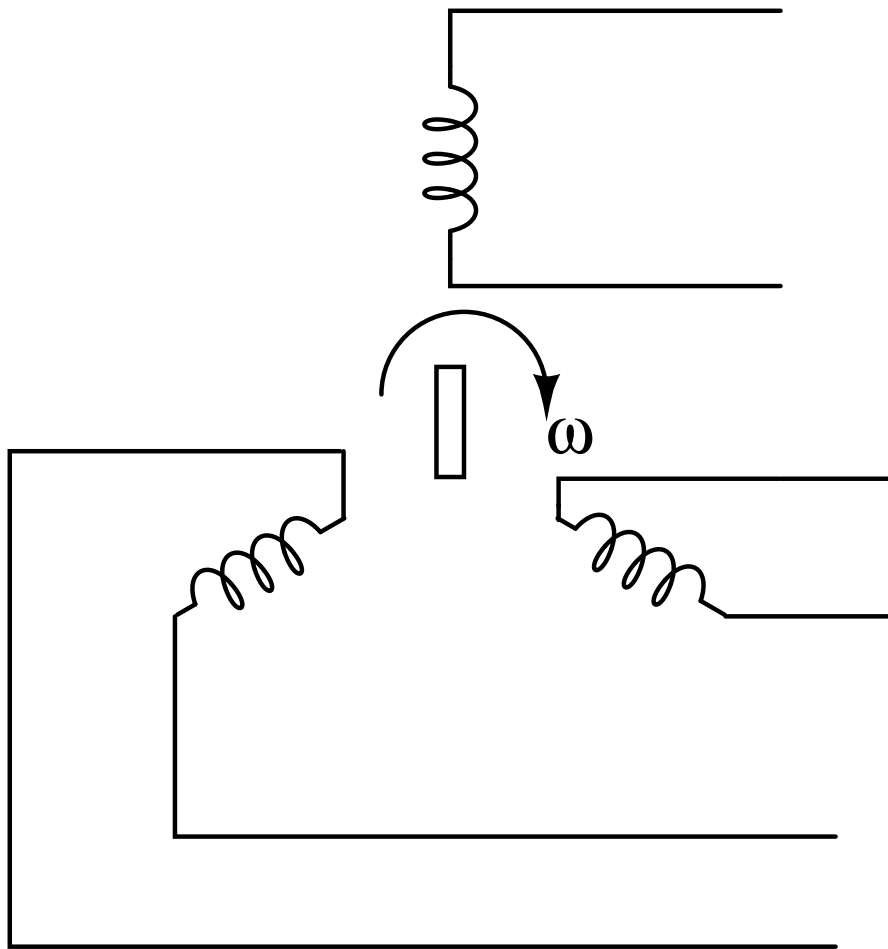
2 Τριφασικά

Τριφασικό σύστημα

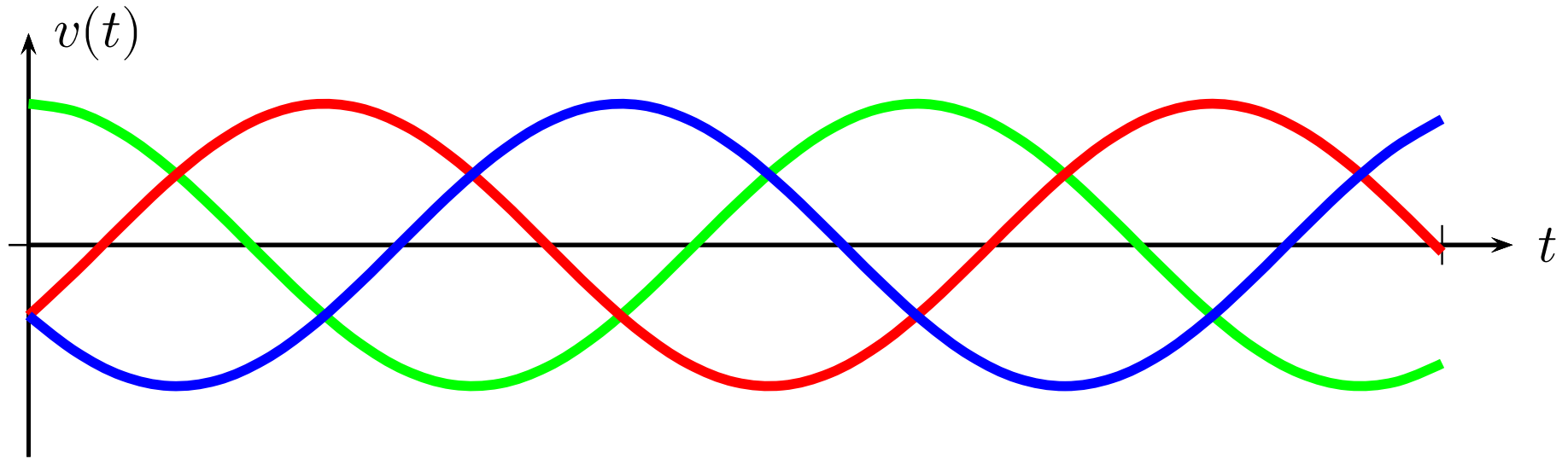


Σχήμα: Τμήματα τριφασικού συστήματος

Αρχή τριφασικής γεννήτριας

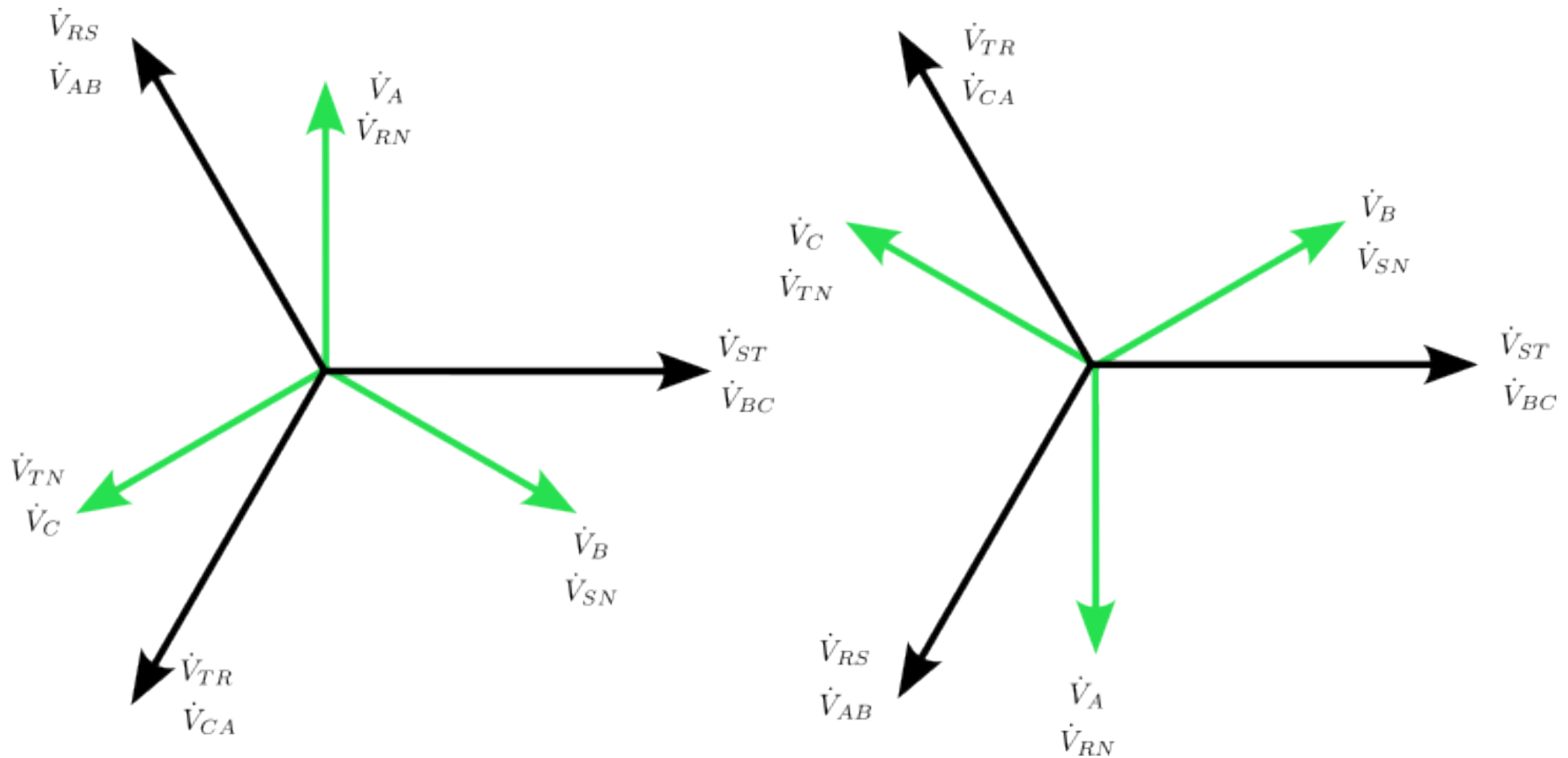


Κυματομορφές τάσεων



Σχήμα: Τρεις τάσεις με ίδιο μέτρο και διαφορά φάσης 120° μεταξύ τους.

Διάγραμμα τάσεων (SOS)



Σχήμα: Διάγραμμα φασικών και πολικών τάσεων σε ορθή (αριστερά) και ανάστροφη (δεξιά) διαδοχή φάσεων.