

Ηλεκτρικά Κυκλώματα II

Διάλεξη 03

Α. Δροσόπουλος

13-03-2025

- 1 Επανάληψη μεθόδων ανάλυσης κυκλωμάτων
- 2 Ισχύς

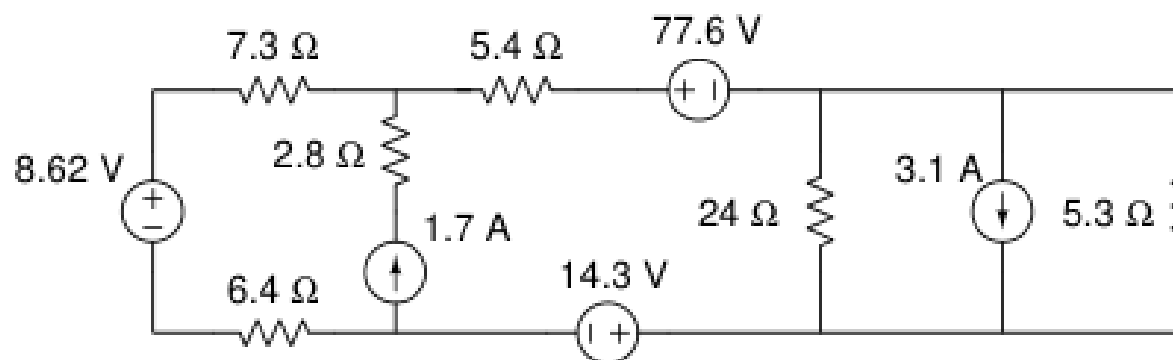
1 Επανάληψη μεθόδων ανάλυσης κυκλωμάτων

2 Ισχύς

- Κανόνες Kirchhoff. Ρεύματος. Τάσης
- Αντιστάσεις. Σειρά. Παράλληλες. Αστέρας-Τρίγωνο.
- Μετασχηματισμοί πηγών.
- Διαιρέτης τάσης. Διαιρέτης ρεύματος.
- Συνδυασμοί πηγών. Τάσεων σε σειρά. Ρευμάτων παράλληλα.
- Υπέρθεση
- Θεωρήματα Thevenin, Norton.
- Φάσορες. Μιγαδικοί.

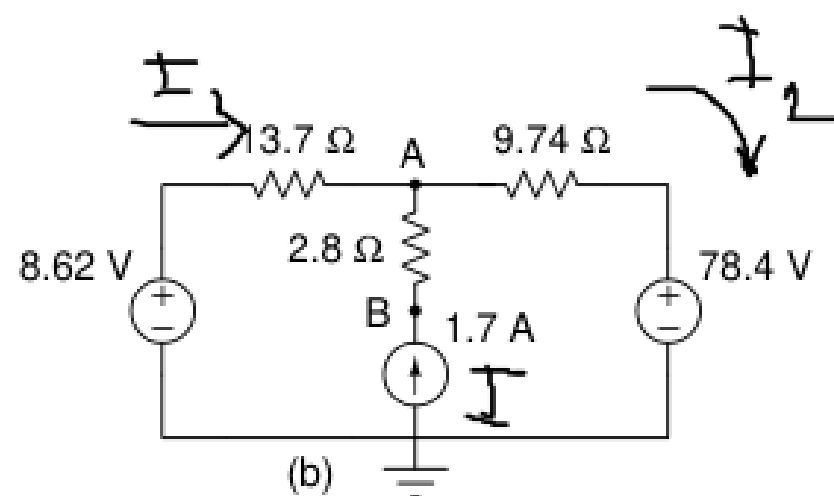
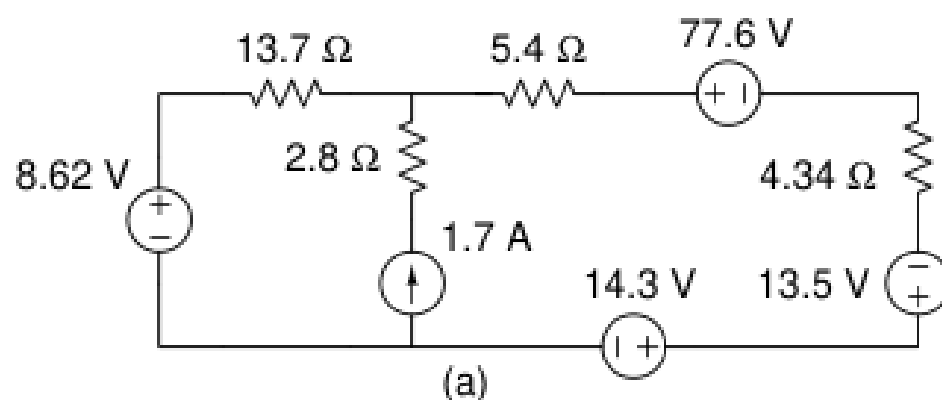
Κλαδικά ρεύματα

Να υπολογιστεί η ισχύς που παράγεται ή καταναλώνεται από την πηγή ρεύματος 1.7 A.



Λύση

Το αρχικό κύκλωμα απλοποιείται στο (a) και μετά στο (b).



Σχήμα: Από θέμα προηγούμενης εξεταστικής

Κλαδικά ρεύματα 2

$$I_1 + I - I_2 = 0$$

$$13.7I_1 + 9.74I_2 + 78.4 - 8.62 = 0$$

```
>> A=[1 -1; 13.7 9.74];  
>> b=[-1.7; -78.4+8.62];  
>> i=inv(A)*b  
i =  
    -3.6834  
    -1.9834  
>> Va = -i(1)*13.7+8.62  
Va = 59.082  
>> Vb = Va + 1.7*2.8  
Vb = 63.842  
>> P=1.7*Vb  
P = 108.53
```

Κλαδικά ρεύματα 3

Λίγο διαφορετικά.

$$13.7I_1 + V_A - 8.62 = 0$$

$$9.74I_2 + 78.4 - V_A = 0$$

$$I_1 + I = I_2$$

```
>> A=[13.7 0 1; 0 9.74 -1; 1 -1 0];
```

```
>> b=[8.62; -78.4; -1.7];
```

```
>> iv = inv(A)*b
```

```
iv =
```

```
1.0e+01 *
```

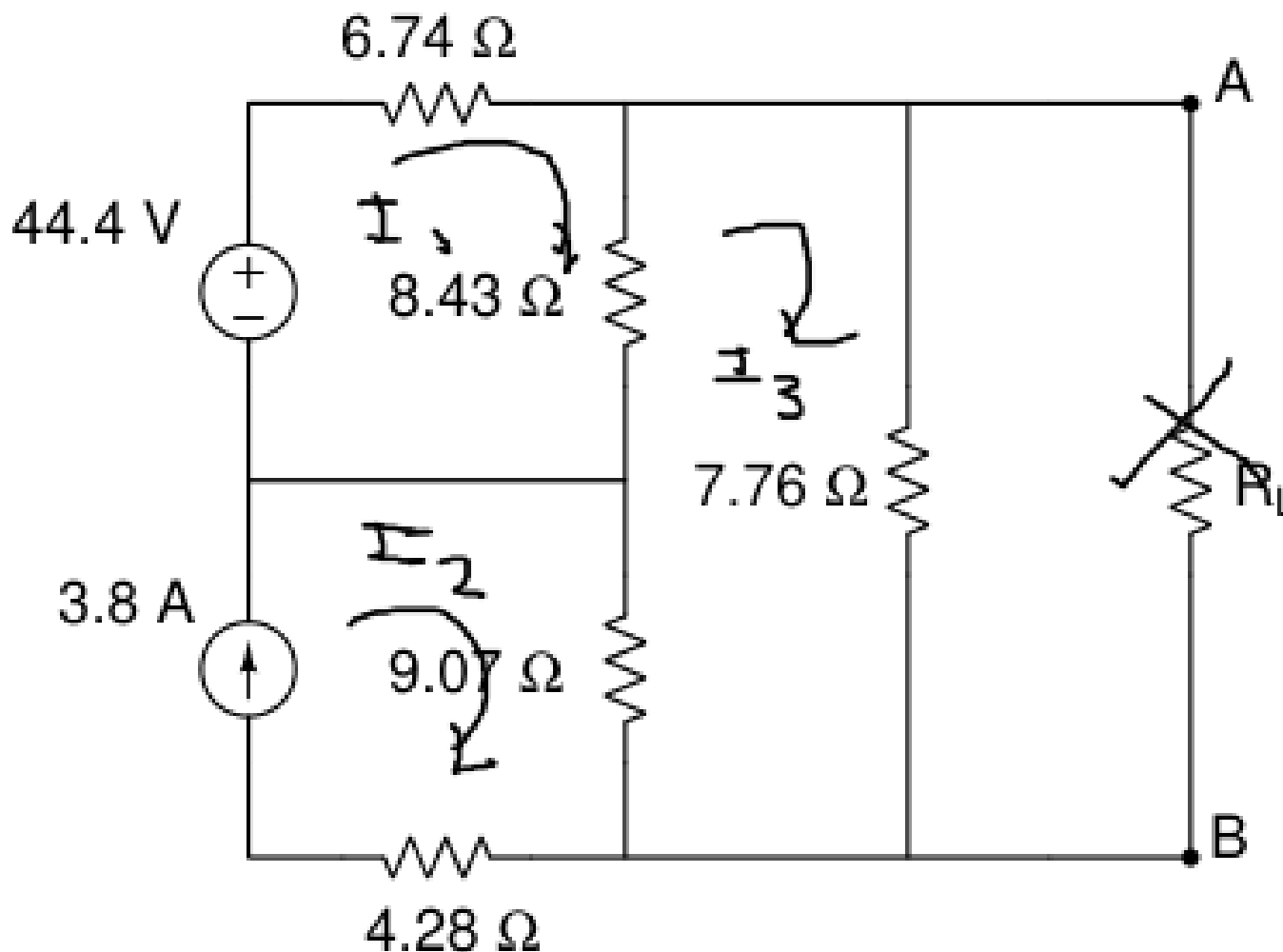
```
-0.3683
```

```
-0.1983
```

```
5.9082
```

Λύση στο eclass για ίδιο θέμα 1 καθώς και θέμα 3

Μέθοδος οφθαλμών / βρόχων



Σχήμα: Από προηγούμενη εξεταστική για εύρεση ισοδυνάμου Thevenin

Μέθοδος οφθαλμών / βρόχων

$$6.74I_1 + 8.43(I_1 - I_3) - 44.4 = 0$$

$$I_2 = I$$

$$7.76I_3 + 9.07(I_3 - I_2) + 8.43(I_3 - I_1) = 0$$

Άγνωστοι I_1, I_3 . Για V_{TH} :

```
>> A=[6.74+8.43 -8.43; -8.43 7.76+9.07+8.43];
```

```
>> b=[44.4; 9.07*3.8];
```

```
>> ii=inv(A)*b
```

```
ii =
```

```
4.5241
```

```
2.8743
```

```
>> Vth = ii(2)*7.76
```

```
Vth = 22.304
```

Μέθοδος οφθαλμών / βρόχων 2

Για I_N και R_{TH} :

```
>> A=[6.74+8.43 -8.43; -8.43 9.07+8.43];  
>> b=[44.4; 9.07*3.8];  
>> ii=inv(A)*b  
ii =  
    5.4912  
    4.6147  
>> In=ii(2)  
In = 4.6147  
>> Rth=Vth/In  
Rth = 4.8333
```

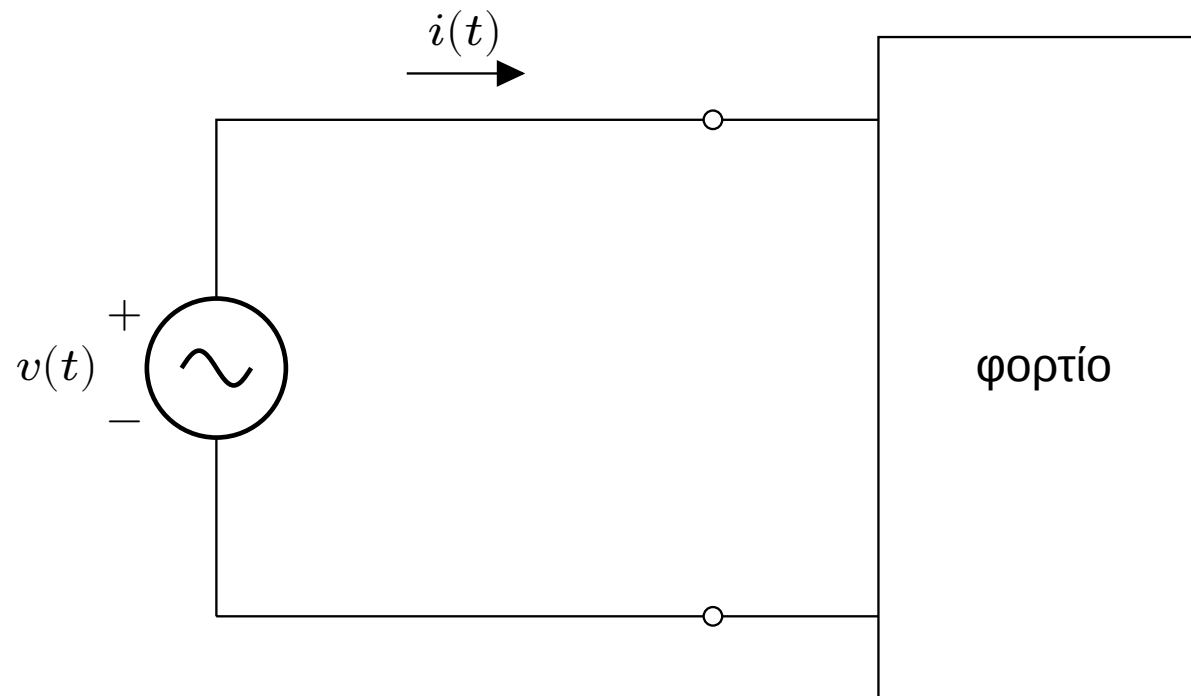
Διαβάστε πάλι τις διαλέξεις που περιγράφουν τις μεθόδους ανάλυσης κυκλωμάτων.

1 Επανάληψη μεθόδων ανάλυσης κυκλωμάτων

2 **Ισχύς**

Ισχύς στο εναλλασσόμενο

Το παρακάτω φορτίο τροφοδοτείται από το δίκτυο με τάση $v(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_v)$ και διαρρέεται από ρεύμα $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_i)$ όπου V και I οι rms τιμές τάσης και ρεύματος αντίστοιχα.



Σχήμα: Φορτίο που τροφοδοτείται από τάση $v(t)$ και διαρρέεται από ρεύμα $i(t)$.

Ισχύς στο εναλλασσόμενο

Η στιγμιαία ισχύς είναι:

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t) \cdot i(t) = 2VI \cos(\omega t + \phi_v) \cos(\omega t + \phi_i) = \\ &= VI \left[\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) \right] \end{aligned}$$

και βλέπουμε ένα τμήμα σταθερό με το χρόνο και ένα δεύτερο που μεταβάλλεται με συχνότητα διπλάσια από αυτή της τάσης ή του ρεύματος. Συνεχίζοντας:

$$\begin{aligned} p(t) &= VI \left[\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) \right] = \\ &= VI \left[\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos \left[2(\omega t + \phi_v) - (\phi_v - \phi_i) \right] \right] = \\ &= VI \left[\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos[2(\omega t + \phi_v)] \cos(\phi_v - \phi_i) + \sin[2(\omega t + \phi_v)] \sin(\phi_v - \phi_i) \right] \end{aligned}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \left[\cos(A - B) + \cos(A + B) \right]$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

Ισχύς στο εναλλασσόμενο

Εάν $\phi = \phi_v - \phi_i$ η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος.

$$p(t) = VI \cos \phi \left[1 + \cos[2(\omega t + \phi_v)] \right] + VI \sin \phi \sin[2(\omega t + \phi_v)]$$

όπου

$$p_R(t) = VI \cos \phi \left[1 + \cos[2(\omega t + \phi_v)] \right]$$

η ροή ενέργειας στο φορτίο και

$$p_X(t) = VI \sin \phi \sin[2(\omega t + \phi_v)]$$

η ροή ενέργειας που δανείζεται το φορτίο και την επιστρέφει στο κύκλωμα.

Βλέπε video `isxis.mpg`

- Εάν $\phi > 0$ το φορτίο είναι επαγωγικό (ρεύμα ακολουθεί την τάση).
- Εάν $\phi < 0$ το φορτίο είναι χωρητικό (ρεύμα προηγείται της τάσης).
- Εάν $\phi = 0$ το φορτίο είναι ωμικό (ρεύμα και τάση συμφασικά).

Ισχύς στο εναλλασσόμενο

Παίρνοντας την μέση τιμή της στιγμιαίας ισχύος σε μια περίοδο T έχουμε την μέση ισχύ ή ενεργό ισχύ ή και πραγματική ισχύ.

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} VI \left[\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) \right] dt \Rightarrow$$

$$P = VI \cos(\phi_v - \phi_i) = VI \cos \phi$$

εφόσον το ολοκλήρωμα στο $\cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)$ έχει μέση τιμή μηδέν και μηδενίζεται.

Η ενεργός ισχύς εκφράζει το μέρος εκείνο της ηλεκτρικής ενέργειας που μεταφέρεται από την πηγή στο φορτίο και μετατρέπεται σε άλλη μορφή, όπως θερμότητα, κινητική ενέργεια, φωτεινή ενέργεια κλπ. Συχνά η ενέργεια αυτή χαρακτηρίζεται ως ωφέλιμη αλλά περιλαμβάνει και τις θερμικές απώλειες. Είναι μηδέν στην περίπτωση καθαρά επαγωγικού ή χωρητικού φορτίου, όπως φαίνεται και από τον παραπάνω τύπο αν θέσουμε $\phi = \pm 90^\circ$.

Ισχύς στο εναλλασσόμενο

Στην περίπτωση επαγωγικού ή χωρητικού φορτίου, η ηλεκτρική ενέργεια μεταφέρεται από την πηγή στο φορτίο, όπου αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του επαγωγού ή στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή, και μετά από κάποιο διάστημα επιστρέφει πίσω στην πηγή χωρίς να υπάρξει κάποια μόνιμη μετατροπή σε άλλη μορφή.

Η άεργος ισχύς ορίζεται ως

$$Q = VI \sin \phi$$

και εκφράζει την ενέργεια που ανταλλάσσεται μεταξύ πηγής και μαγνητικού πεδίου επαγωγού ή ηλεκτρικού πεδίου πυκνωτή. Είναι μηδέν στην περίπτωση καθαρά ωμικού φορτίου, δηλαδή όταν $\phi = 0$. Γενικά η ισχύς αυτή προκύπτει όταν η τάση και το ρεύμα του φορτίου έχουν διαφορά φάσης $\phi \neq 0$. Όταν $\phi > 0$, δηλαδή όταν το ρεύμα έπεται της τάσης, η άεργος είναι θετική και το φορτίο λέμε ότι έχει επαγωγικό χαρακτήρα. Τότε θεωρούμε ότι το φορτίο απορροφά άεργο ισχύ από το κύκλωμα (καταναλώνει). Όταν $\phi < 0$, δηλαδή όταν το ρεύμα προηγείται της τάσης, η άεργος είναι αρνητική και το φορτίο λέμε ότι έχει χωρητικό χαρακτήρα. Τότε θεωρούμε ότι το φορτίο δίνει άεργο ισχύ στο κύκλωμα (παράγει). Στη γενική περίπτωση ενός RL ή RC φορτίου προκύπτει και ενεργός και άεργος ισχύς στους ακροδέκτες του φορτίου.

Ισχύς στο εναλλασσόμενο

Στο μιγαδική επίπεδο ορίζουμε την *μιγαδική ισχύ* σαν

$$\dot{S} = \dot{V} \cdot \dot{I}^* = P + jQ$$

όπου το $*$ δηλώνει συζυγή μιγαδικό. Επομένως

$$\dot{S} = V \angle \phi_v \cdot I \angle -\phi_i = VI \angle \phi_v - \phi_i \Rightarrow$$

$$\Re\{\dot{S}\} = VI \cos(\phi_v - \phi_i) = P \quad \text{και} \quad \Im\{\dot{S}\} = VI \sin(\phi_v - \phi_i) = Q$$

και το πραγματικό μέρος P είναι η μέση ισχύς που ορίσαμε παραπάνω ενώ το φανταστικό Q η *άεργος ισχύς*.

Το μέτρο της μιγαδικής ισχύος το ονομάζουμε *φαινομένη ισχύ* και είναι

$$S = |\dot{S}| = |\dot{V}| \cdot |\dot{I}^*| = V \cdot I$$

Για λόγους διαχωρισμού, οι μονάδες της μιγαδικής (και φαινομένης) ισχύος είναι VA, της πραγματικής W και της αέργου VAR.

Ισχύς στο εναλλασσόμενο

Η φαινομένη ισχύς σαν μέτρο της μιγαδικής εκφράζεται επίσης ως:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Η φαινομένη ισχύς δείχνει πόσο επιβαρύνει το φορτίο το δίκτυο, δεδομένου ότι η ποσότητα αυτή περιλαμβάνει ενεργό και άεργο ισχύ, η οποία μπορεί να μην εκφράζει κάποια ωφέλιμη μετατροπή ενέργειας αλλά απαιτεί πόρους του δικτύου για να μεταφερθεί.

Ορίζεται ο συντελεστής ισχύος (Power Factor) ως εξής:

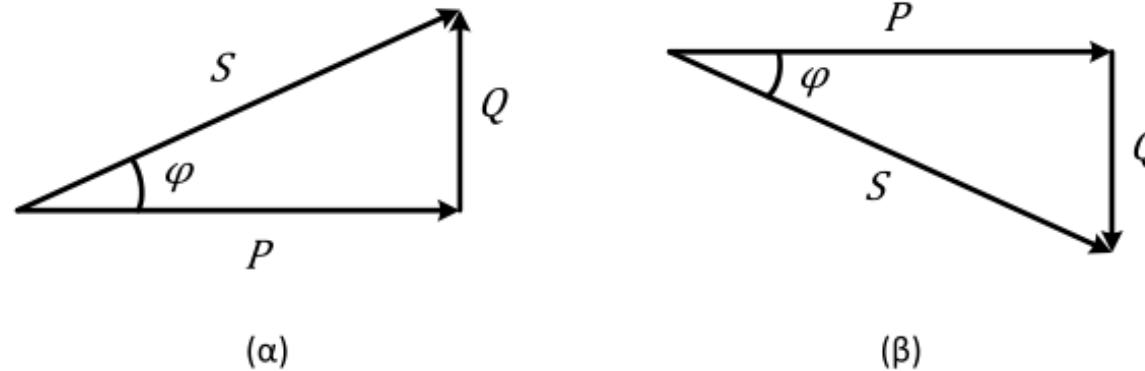
$$\text{pf} = \frac{P}{S}$$

Ο συντελεστής ισχύος εκφράζει το ποσοστό της φαινομένης ισχύος που αντιστοιχεί στην ενεργό ισχύ. Αν θεωρήσουμε την ενεργό ως ωφέλιμη ισχύ, προκύπτει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του συντελεστή αυτού τόσο καλύτερα εκμεταλλευόμαστε τους πόρους του δικτύου. Αν αντικαταστήσουμε την ενεργό και τη φαινομένη ισχύ από προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\text{pf} = \cos \phi$$

Ισχύς στο εναλλασσόμενο

Με βάση τα παραπάνω μπορεί κανείς να παραστήσει τις τρεις συνιστώσες της ισχύος με τη μορφή ενός τριγώνου, όπως φαίνεται στο σχήμα



Σχήμα: Τρίγωνο ισχύος α) για φορτίο RL, β) για φορτίο RC.

Για φορτίο RL η άεργος είναι θετική και γιαυτό σχεδιάζεται με φορά προς τα πάνω. Για φορτίο RC η άεργος είναι αρνητική και γιαυτό σχεδιάζεται με φορά προς τα κάτω.

Η μιγαδική ισχύς σε φορτίο Z .

$$\dot{V} = \dot{I}Z$$

$$\dot{S} = \dot{V}\dot{I}^* = (\dot{I}Z)\dot{I}^* = |\dot{I}|^2 Z$$

$$\dot{S} = \dot{V}\dot{I}^* = \dot{V} \left(\frac{\dot{V}}{Z} \right)^* = \frac{|\dot{V}|^2}{Z^*}$$

$$\dot{S} = \dot{V}\dot{I}^* = |\dot{I}|^2 Z = \frac{|\dot{V}|^2}{Z^*}$$

Παράδειγμα

Φορτίο συνδεδεμένο σε σειρά τραβά ρεύμα $i(t) = 4\sqrt{2} \cos(100\pi t + 10^\circ)$ A όταν η τάση στα άκρα του είναι $v(t) = 220\sqrt{2} \cos(100\pi t - 20^\circ)$ V. Να βρεθούν η φαινομένη ισχύς και ο συντελεστής ισχύος του φορτίου. Από πια πραγματικά στοιχεία μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο φορτίο;

$$\dot{I} = 4/\underline{10^\circ} \text{ A} \quad \dot{V} = 220/\underline{-20^\circ} \text{ V}$$

$$S = VI = 880 \text{ VA}$$

$$\text{pf} = \cos(\phi_v - \phi_i) = \cos(-20^\circ - 10^\circ) = \cos(-30^\circ) = 0.866$$

Το ρεύμα προηγείται της τάσης και το φορτίο είναι χωρητικό. Άρα αποτελείται από R και C σε σειρά.

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{220/\underline{-20^\circ}}{4/\underline{10^\circ}} = 55/\underline{-30^\circ} = 47.63 - j27.5$$

Επομένως για $Z = R - jX_C$

$$R = 47.63 \, \Omega$$

$$X_C = 27.5 = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} = 3.6364 \times 10^{-4} \text{ F} = 363.64 \, \mu\text{F}$$

Στιγμιαία ισχύς

- Μέχρι εδώ ασχοληθήκαμε με υπολογισμούς τάσεων και ρευμάτων. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με ανάλυση ισχύος.
- Η ισχύς είναι η πιο σημαντική ποσότητα στα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας, στα ηλεκτρονικά συστήματα και στα συστήματα τηλεπικοινωνιών, γιατί σε κάθε περίπτωση υπάρχει μεταφορά ενέργειας.
- Η στιγμιαία ισχύς $p(t)$ είναι ο ρυθμός μεταφοράς ή μετατροπής της ηλεκτρικής ενέργειας σε ένα κύκλωμα.

- Ισχύει ότι

$$p(t) = u(t)i(t)$$

- Μονάδα μέτρησης το Watt (W).

Στιγμιαία ισχύς

- Έστω ότι η τάση και το ρεύμα στο κύκλωμα του σχήματος έχουν τη μορφή

$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha)$$

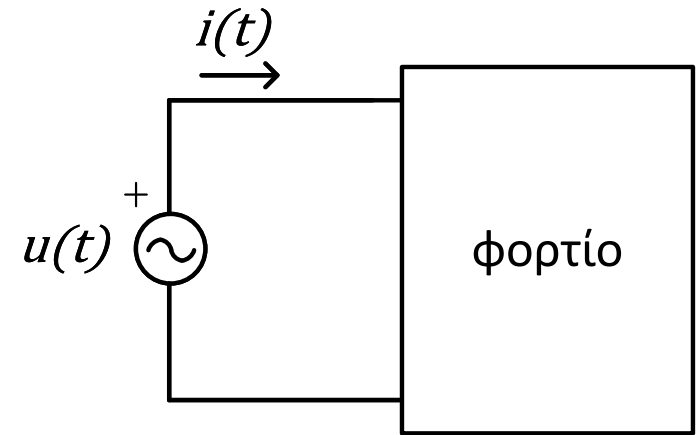
$$i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \beta)$$

και $\varphi = \alpha - \beta$ είναι η διαφορά φάσης τους.

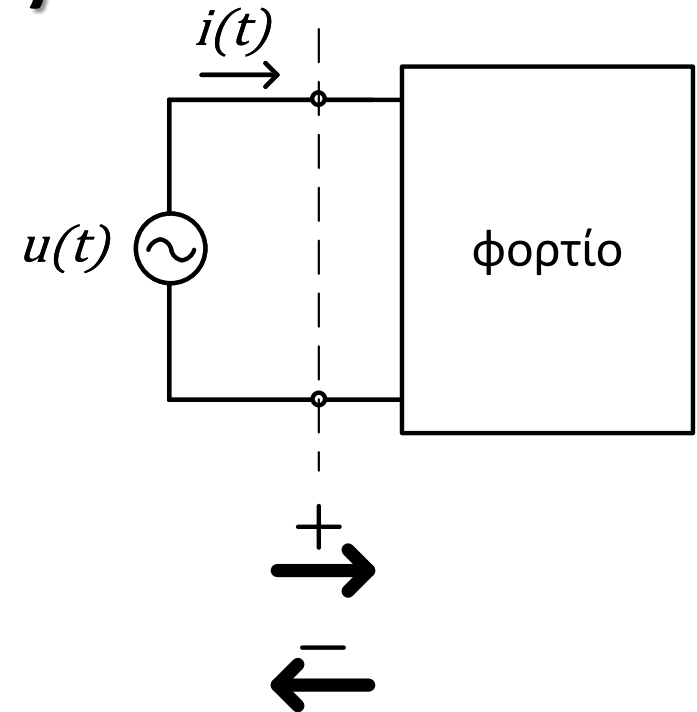
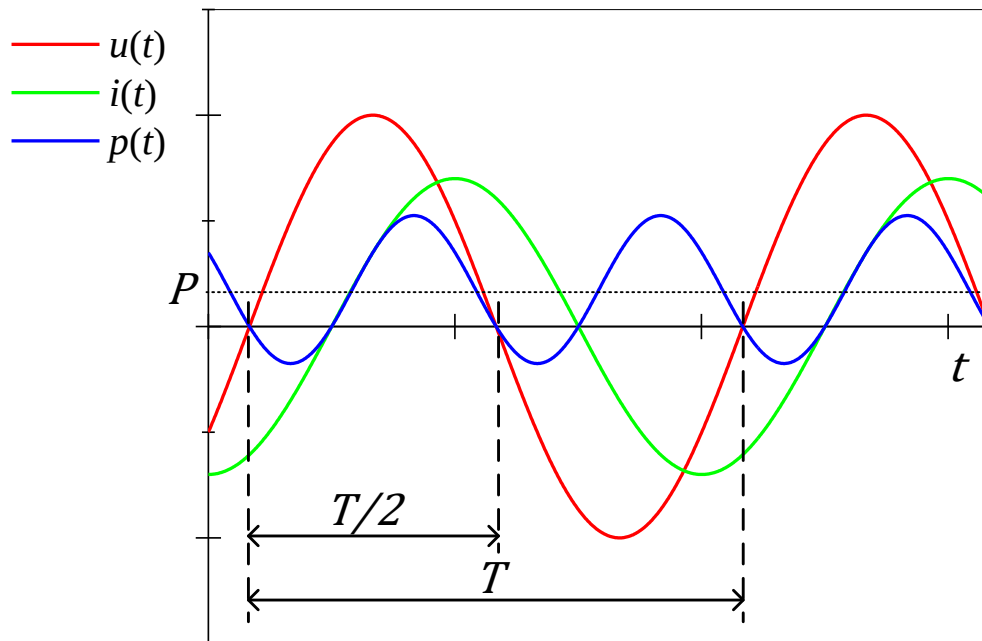
- Τότε η στιγμιαία ισχύς στους ακροδέκτες του φορτίου θα είναι

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = 2UI \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta) \\ &= UI \cos(\omega t + \alpha - \omega t - \beta) + UI \cos(\omega t + \alpha + \omega t + \beta) \\ &= UI \cos(\alpha - \beta) + UI \cos(2\omega t + \alpha + \beta) \\ &= UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \alpha + \alpha - \varphi) \\ &= UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + 2\alpha - \varphi) \\ &= UI \cos \varphi + UI \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\alpha) + UI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\alpha) \end{aligned}$$

- Περιλαμβάνει ένα σταθερό όρο που εξαρτάται από τη διαφορά φάσης φ μεταξύ τάσης-ρεύματος και έναν ταλαντευόμενο όρο με συχνότητα 2ω .



Στιγμιαία ισχύς

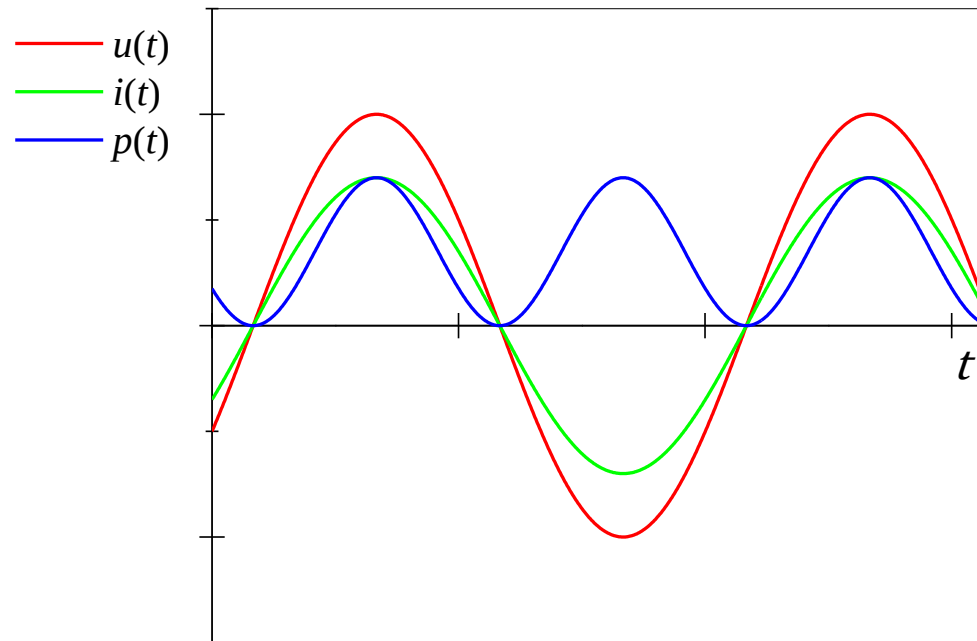


- Η στιγμιαία ισχύς είναι περιοδικό μέγεθος με περίοδο $T/2$.
- Γενικά είναι θετική για ένα μέρος του κύκλου και αρνητική για το υπόλοιπο. Όταν είναι θετική απορροφάται ισχύς από το κύκλωμα και όταν είναι αρνητική απορροφάται από την πηγή.
- Αυτή η αμφίδρομη ροή ενέργειας είναι δυνατή όταν υπάρχουν στοιχεία στο κύκλωμα που αποθηκεύουν ενέργεια (πυκνωτές και επαγωγείς).

Στιγμιαία ισχύς

- Αν $\varphi = 0$, δηλαδή η τάση και το ρεύμα δεν παρουσιάζουν διαφορά φάσης, τότε το φορτίο είναι καθαρά ωμικό.
- Η στιγμιαία ισχύς τότε γίνεται

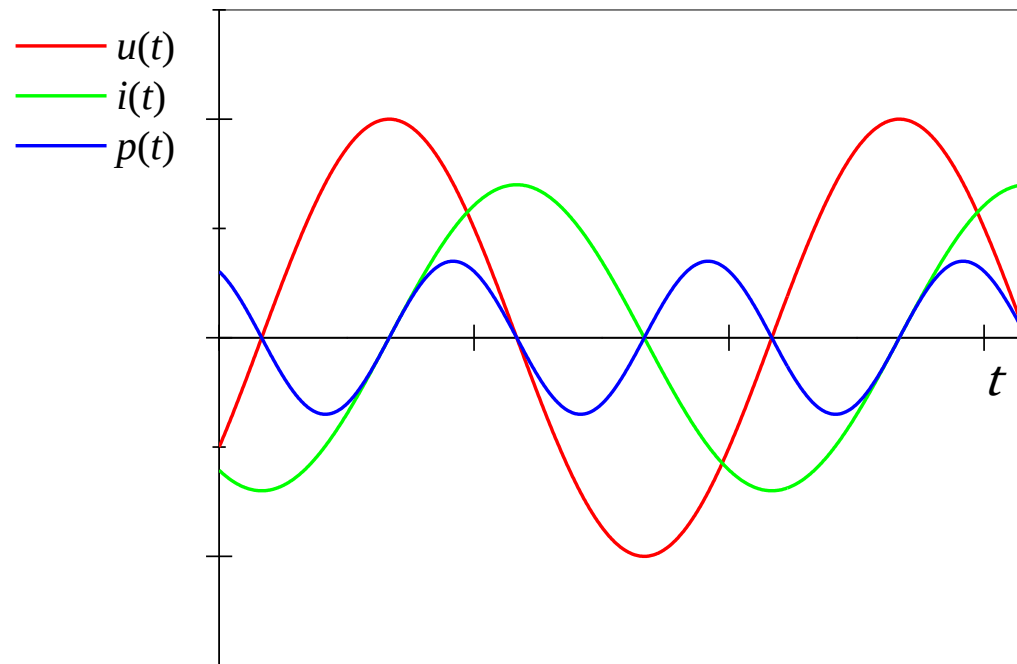
$$p(t) = UI[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)]$$



Στιγμιαία ισχύς

- Αν $\varphi = \pi/2$, τότε το φορτίο είναι καθαρά επαγωγικό.
- Η στιγμιαία ισχύς γίνεται

$$p(t) = UI \sin(2\omega t + 2\alpha)$$



- Ένα ωμικό φορτίο απορροφά ισχύ συνεχώς, ενώ ένα επαγωγικό (ή χωρητικό) φορτίο κατά το ένα μέρος του κύκλου αποθηκεύει και κατά το υπόλοιπο επιστρέφει ενέργεια στην πηγή, επομένως απορροφά κατά μέσο όρο μηδέν.

Ενεργός ισχύς

- Η στιγμιαία ισχύς μεταβάλλεται με το χρόνο. Η μέση ισχύς είναι πιο εύκολο να μετρηθεί (με το βαττόμετρο).
- Η μέση ισχύς είναι

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi$$

- Η μέση ισχύς P ονομάζεται και ενεργός ισχύς. Δεν εξαρτάται από το χρόνο.
- Μονάδα μέτρησης το Watt (W).
- Όταν $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ η ενεργός είναι μηδέν. Δηλαδή σε ιδανικό επαγωγό και πυκνωτή είναι μηδέν.
- Εκφράζει ηλεκτρική ενέργεια που μεταφέρεται στο φορτίο και μετατρέπεται σε κάποια άλλη μορφή (θερμική, φωτεινή, μηχανική ενέργεια κλπ).
- Πρόκειται για ενέργεια που αξιοποιείται με κάποιο τρόπο, αλλά και για θερμικές απώλειες πχ σε αντιστάσεις αγωγών μεταφοράς.

Άεργος ισχύς

- Ορίζεται επίσης η άεργος ισχύς ως

$$Q = UI \sin \varphi$$

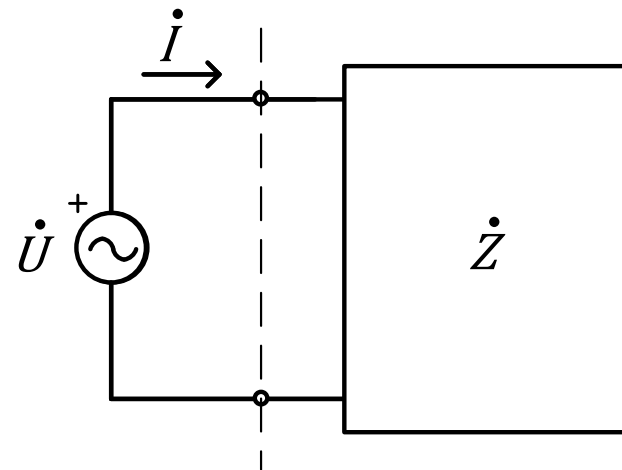
- Μονάδα μέτρησης το Volt-ampere reactive (Var).
- Προκύπτει όταν σε ένα κύκλωμα υπάρχουν επαγωγοί και/ή πυκνωτές. Αν $\varphi = 0$ δεν υπάρχει άεργος.
- Ηλεκτρική ενέργεια από την πηγή για ένα χρονικό διάστημα αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο των επαγωγών ή το ηλεκτρικό πεδίο των πυκνωτών και κατά το υπόλοιπο μέρος του κύκλου επιστρέφει στην πηγή.
- Ένας γενικός ορισμός είναι ότι άεργος ισχύς προκύπτει όταν η τάση και το ρεύμα έχουν διαφορά φάσης.
- Τυχαίνει να είναι ίση με το πλάτος ενός από τους ταλαντευόμενους όρους της στιγμιαίας ισχύος.
- Συχνά λέμε ότι δεν σχετίζεται με «ωφέλιμη» ενέργεια (αν και σε αυτή βασίζεται η παραγωγή και η μεταφορά της ηλεκτρικής ενέργειας). Γενικά στόχος είναι η μείωσή της σε ένα δίκτυο.

Έργο ισχύς

- Η άεργος ισχύς ενός φορτίου είναι μηδέν όταν η τάση στα άκρα του και το ρεύμα που το διαρρέει είναι συμφασικά, δηλαδή $\varphi = 0$. Αυτό ισχύει για καθαρά ωμικό φορτίο.
- Όταν $\varphi > 0$, δηλαδή όταν το ρεύμα έπεται της τάσης, η άεργος είναι θετική και το φορτίο λέμε ότι έχει επαγωγικό χαρακτήρα. Θεωρούμε ότι το φορτίο απορροφά άεργο ισχύ από το κύκλωμα (καταναλώνει).
- Όταν $\varphi < 0$, δηλαδή όταν το ρεύμα προηγείται της τάσης, η άεργος είναι αρνητική και το φορτίο λέμε ότι έχει χωρητικό χαρακτήρα. Θεωρούμε ότι το φορτίο δίνει άεργο ισχύ στο κύκλωμα (παράγει).
- Ως προς την πηγή, όταν η άεργος είναι θετική τότε η πηγή παράγει άεργο ενώ όταν είναι αρνητική απορροφά.

Παράδειγμα 2.1(α)

- Να υπολογιστεί η ενεργός ισχύς που απορροφάται από μια σύνθετη αντίσταση $\dot{Z} = 50 - j20 \Omega$ αν στα άκρα της εφαρμόζεται τάση $\dot{U} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$.



Απάντηση:

- Το ρεύμα που διαρρέει τη σύνθετη αντίσταση είναι

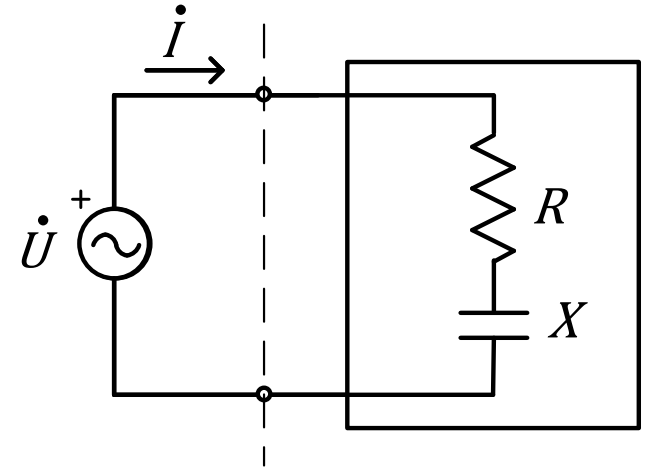
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \frac{100 \angle 0^\circ}{53.9 \angle (-22^\circ)} = 1.86 \angle 22^\circ \text{ A}$$

- Άρα

$$P = UI \cos \varphi = 100 \cdot 1.86 \cos(-22^\circ) = 172.5 \text{ W}$$

Παρατήρηση

- Δεν γνωρίζουμε τι ακριβώς υπάρχει μέσα στο κουτί και πώς είναι συνδεδεμένο, όμως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ισοδύναμο με μια ωμική αντίσταση $R = 50 \Omega$ σε σειρά με μια χωρητική αντίδραση $X = 20 \Omega$.



- Μόνο το ωμικό μέρος απορροφά ενεργό ισχύ. Η συνολική ενεργός ισχύς λοιπόν είναι ίση με αυτή που απορροφά η αντίσταση. Πράγματι

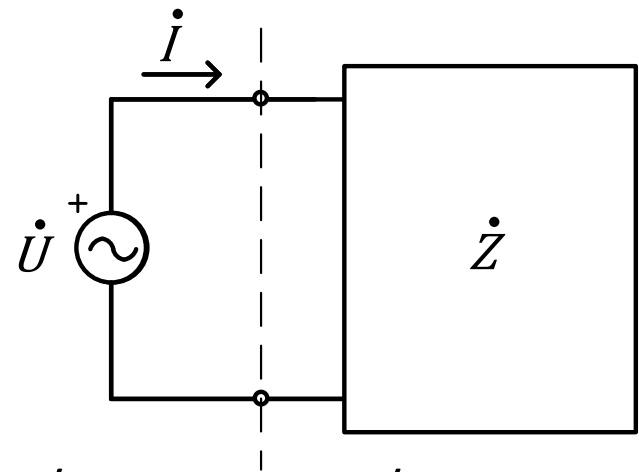
$$P = U_R I \cos 0 = U_R I = I^2 R = 172.5 \text{ W}$$

όπου U_R η τάση στα άκρα της αντίστασης.

- Συνηθισμένο λάθος: Θα μπορούσε να βρεθεί η ενεργός ισχύς και ως $\frac{U^2}{R}$.
- Όχι, δεν ισχύει αυτό.** Η τάση $\dot{U}$ εφαρμόζεται στην αντίσταση και τον πυκνωτή μαζί. Για να εφαρμόσουμε αυτόν τον τύπο πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την τάση στην αντίσταση U_R (που βρίσκεται πχ με διαιρέτη τάσης).

Παράδειγμα 2.1(β)

- Να υπολογιστεί η άεργος ισχύς που απορροφάται από τη σύνθετη αντίσταση $\dot{Z} = 50 - j20 \Omega$ αν στα άκρα της εφαρμόζεται τάση $\dot{U} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$.



Απάντηση:

- Το ρεύμα που διαρρέει τη σύνθετη αντίσταση υπολογίστηκε παραπάνω και είναι

$$\dot{I} = 1.86 \angle 22^\circ \text{ A}$$

- Άρα

$$Q = UI \sin \varphi = 100 \cdot 1.86 \sin(-22) = -69.6 \text{ Var}$$

- Το πρόσημο δείχνει ότι το φορτίο δεν απορροφά αλλά παράγει άεργο. Αυτό προκύπτει σε κάθε περίπτωση που το ρεύμα προηγείται της τάσης, δηλαδή το φορτίο έχει χωρητικό χαρακτήρα.

Παράδειγμα 2.2

- Να υπολογιστεί η ενεργός ισχύς που απορροφάται από την κάθε αντίσταση του κυκλώματος και η ενεργός και η άεργος ισχύς που παράγει η πηγή.
- Δίνονται: $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $X_C = 4 \Omega$, $\dot{U} = 10 \angle 30^\circ \text{ V}$.

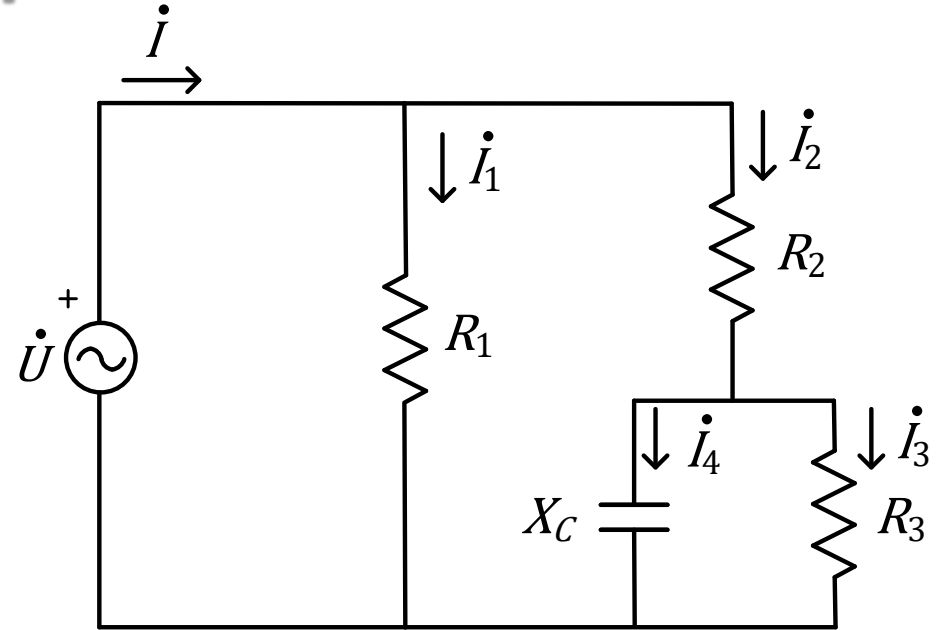
Απάντηση:

- Το ρεύμα του πρώτου κλάδου είναι

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R_1} = \frac{10 \angle 30^\circ}{5} = 2 \angle 30^\circ \text{ A}$$

- Η σύνθετη αντίσταση του δεύτερου κλάδου είναι

$$\dot{Z}_2 = R_2 + \frac{R_3(-jX_C)}{R_3 - jX_C} = 6 - \frac{j16}{4 - j4} = 8 - j2 \Omega$$



Παράδειγμα 2.2

- Άρα το ρεύμα του είναι

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_2} = \frac{10\angle 30^\circ}{8 - j2} = 1.213\angle 44^\circ \text{ A}$$

- Η τάση στην αντίσταση R_3 είναι

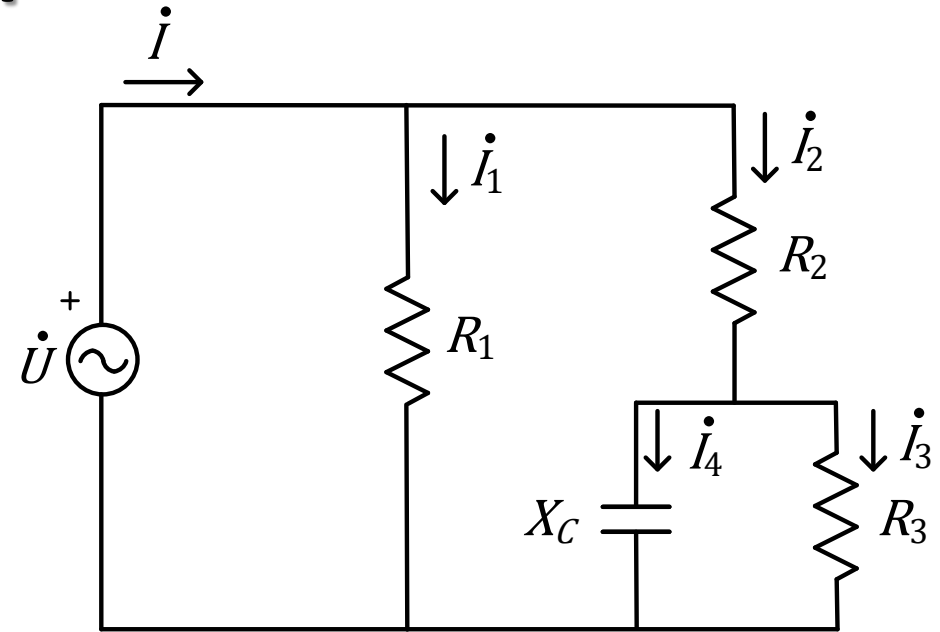
$$\begin{aligned}\dot{U}_3 &= \dot{U} \frac{R_3(-jX_C)}{\dot{Z}_2} = \frac{2 - j2}{8 - j2} 10\angle 30^\circ \\ &= 3.430\angle(-1^\circ) \text{ V}\end{aligned}$$

- Η τάση στην αντίσταση R_2 είναι

$$\dot{U}_2 = \dot{U} - \dot{U}_3 = 7.276\angle 44^\circ \text{ V}$$

- Το ρεύμα στην αντίσταση R_3 είναι

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_3}{R_3} = 0.857\angle(-1^\circ) \text{ A}$$



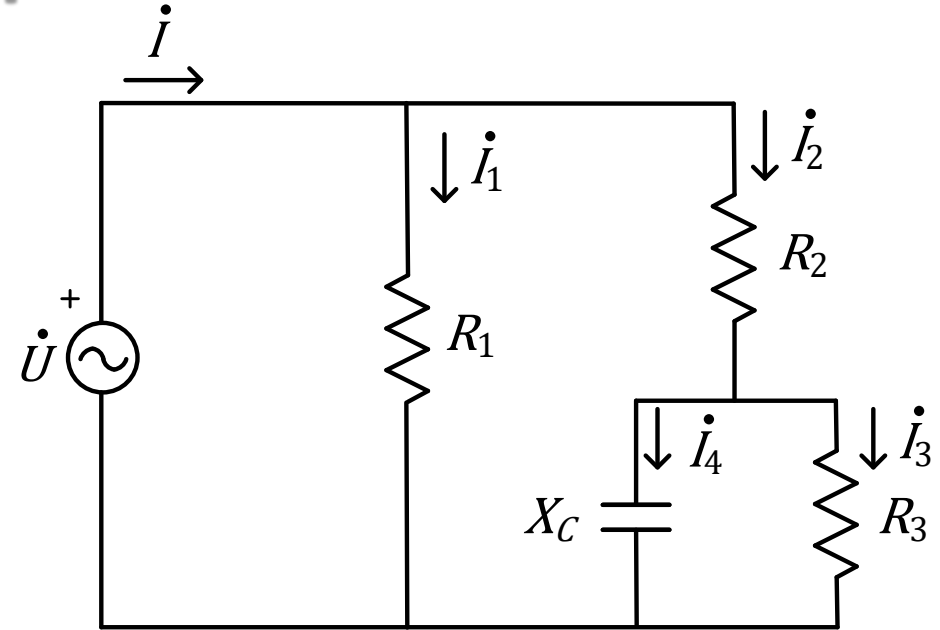
Παράδειγμα 2.2

- Το ρεύμα στον πυκνωτή είναι

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_3}{-jX_C} = 0.857 \angle 89^\circ \text{ A}$$

- Το συνολικό ρεύμα είναι

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 2.604 + j1.843 \\ &= 3.19 \angle 35.3^\circ \text{ A}\end{aligned}$$



- Η ενεργός ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση R_1 είναι

$$P_{R1} = UI_1 \cos(\varphi_u - \varphi_{i1})$$

όπου με φ_x συμβολίζεται η γωνία φάσης κυματομορφής $x(t)$.

- Παρατηρούμε ότι

$$P_{R1} = UI_1 = \frac{U^2}{R_1} = I_1^2 R_1 = 20 \text{ W}$$

Παράδειγμα 2.2

- Ομοίως η ενεργός ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση R_2 είναι

$$P_{R2} = U_2 I_2 \cos(\varphi_{u2} - \varphi_{i2}) = U_2 I_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = I_2^2 R_2 = 8.824 \text{ W}$$

- Η ενεργός ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση R_3 είναι

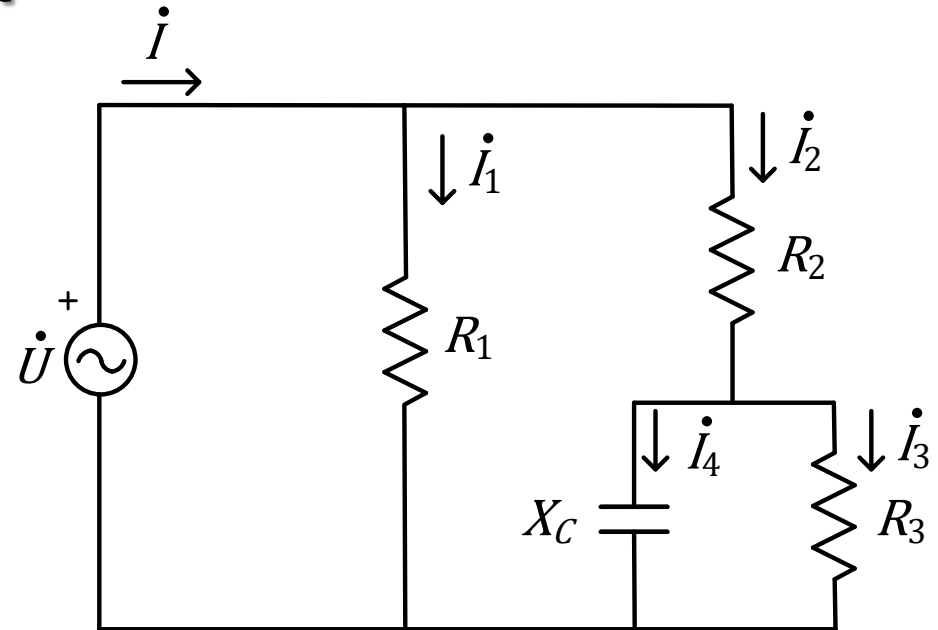
$$P_{R3} = U_3 I_3 \cos(\varphi_{u3} - \varphi_{i3}) = U_3 I_3 = \frac{U_3^2}{R_3} = I_3^2 R_3 = 2.941 \text{ W}$$

- Η ενεργός ισχύς που παράγει η πηγή είναι:

$$P = UI \cos(\varphi_u - \varphi_i) = 10 \cdot 3.19 \cos(30^\circ - 35.3^\circ) = 31.765 \text{ W}$$

- Παρατηρούμε ότι

$$P = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3}$$

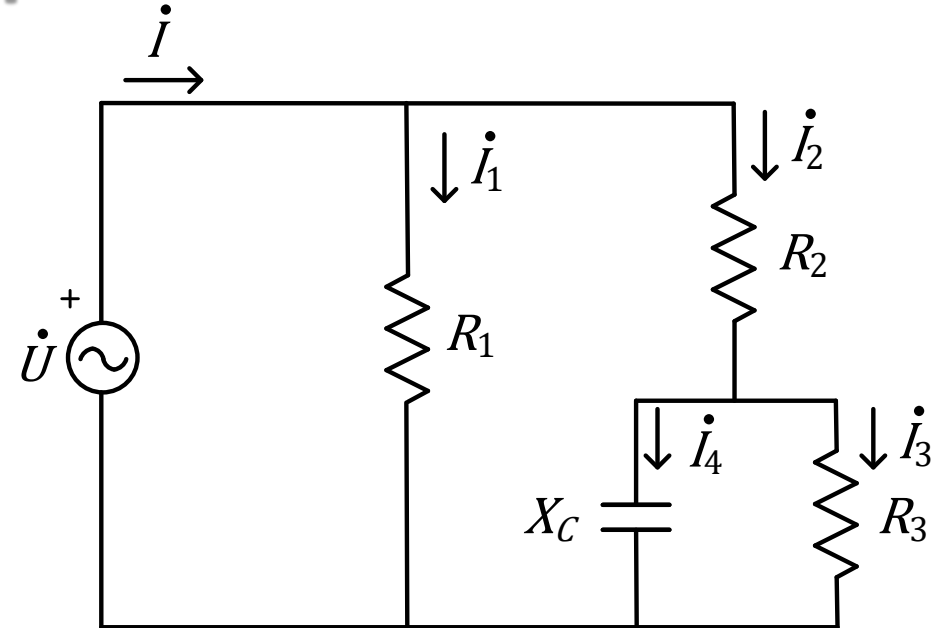


Παράδειγμα 2.2

- Η άεργος ισχύς που παράγει η πηγή είναι:

$$\begin{aligned} Q &= UI \sin(\varphi_u - \varphi_i) \\ &= 10 \cdot 3.19 \sin(30^\circ - 35.3^\circ) = \\ &= -2.941 \text{ Var} \end{aligned}$$

- Το πρόσημο αυτό για την πηγή δείχνει ότι απορροφά άεργο ισχύ.



- Παρατηρούμε επίσης ότι η άεργος του πυκνωτή είναι
$$Q_C = U_3 I_4 \sin(\varphi_{u3} - \varphi_{i4}) = 3.430 \cdot 0.857 \sin(-1^\circ - 89^\circ) = -2.941 \text{ Var}$$
- Δηλαδή όπως ήταν αναμενόμενο ο πυκνωτής παράγει άεργο ισχύ και η πηγή απορροφά.

Φαινομένη και μιγαδική ισχύς

- Ορίζεται η φαινομένη ισχύς ως εξής:

$$S = UI$$

- Μονάδα μέτρησης το Volt-ampere (VA).
- Η μιγαδική ισχύς ορίζεται ως

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^*$$

- Μονάδα μέτρησης το VA.
- Έστω ότι οι φάσορες της τάσης και του ρεύματος στο φορτίο είναι

$$\dot{U} = U\angle\alpha$$

$$\dot{I} = I\angle\beta$$

- Τότε

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^* = Ue^{j\alpha}Ie^{-j\beta} = UIe^{j(\alpha-\beta)} = UIe^{j\varphi} = UI\angle\varphi$$

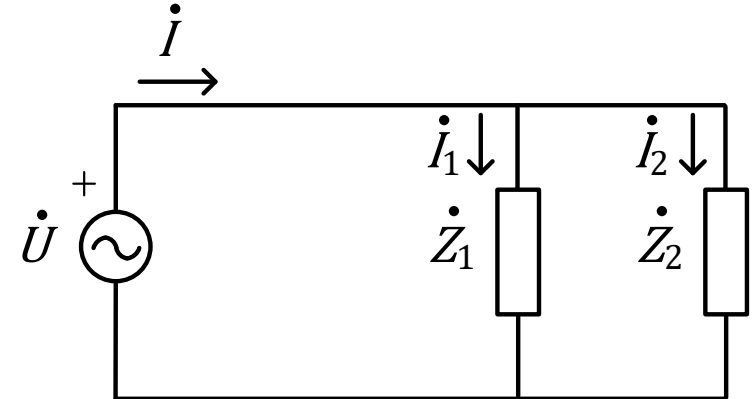
$$\dot{S} = UIe^{j\varphi} = UI(\cos\varphi + j\sin\varphi) = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ$$

- Η φαινομένη ισχύς είναι ίση με το μέτρο της μιγαδικής ισχύος, δηλαδή

$$S = UI = |\dot{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Διατήρηση ισχύος

- Ας θεωρήσουμε δύο φορτία με σύνθετες αντιστάσεις $\dot{Z}_1$ και $\dot{Z}_2$. Έστω ότι συνδέονται παράλληλα και ότι εφαρμόζεται σε αυτά τάση $\dot{U}$.



- Σύμφωνα με τον KCL το συνολικό ρεύμα θα είναι

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

- Η μιγαδική ισχύς είναι

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^* = \dot{U}(\dot{I}_1^* + \dot{I}_2^*) = \dot{U}\dot{I}_1^* + \dot{U}\dot{I}_2^* = \dot{S}_1 + \dot{S}_2$$

όπου $\dot{S}_1, \dot{S}_2$ οι τιμές της μιγαδικής ισχύος των στοιχείων 1 και 2 αντίστοιχα.

$$\begin{aligned}\dot{S} = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 &\Rightarrow P + jQ = (P_1 + jQ_1) + (P_2 + jQ_2) \\ &\Rightarrow P + jQ = (P_1 + P_2) + j(Q_1 + Q_2)\end{aligned}$$

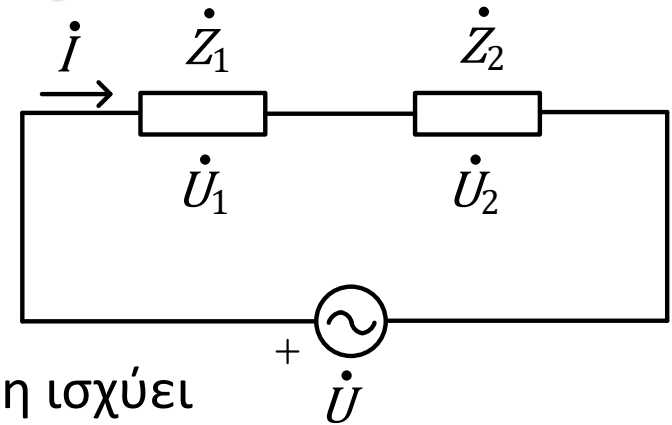
- Δηλαδή ισχύει και ότι

$$P = P_1 + P_2$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Διατήρηση ισχύος

- Έστω ότι τα φορτία συνδέονται σε σειρά και ότι εφαρμόζεται στον εν σειρά συνδυασμό τους τάση $\dot{U}$.



- Σύμφωνα με το νόμο τάσεων Kirchhoff για την τάση ισχύει

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

- Η μιγαδική ισχύς είναι

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^* = (\dot{U}_1 + \dot{U}_2)\dot{I}^* = \dot{U}_1\dot{I}^* + \dot{U}_2\dot{I}^* = \dot{S}_1 + \dot{S}_2$$

- Για την ενεργό και την άεργο προκύπτει ότι και στο προηγούμενο κύκλωμα.
- Συμπέρασμα:** Όπως και να είναι συνδεδεμένα τα στοιχεία, η συνολική ισχύς που παρέχουν οι πηγές ισούται με την συνολική ισχύ που λαμβάνουν τα φορτία. Αυτό ισχύει επίσης για την ενεργό και την άεργο. **Δεν ισχύει** για τη φαινομένη.

Συντελεστής ισχύος

- Ορίζεται ο συντελεστής ισχύος ως

$$PF = \frac{P}{S}$$

- Είναι αδιάστατο μέγεθος.
- Έχει μέγιστη τιμή τη μονάδα.
- Δείχνει τι ποσοστό της φαινομένης είναι η ενεργός ισχύς.
- Για κυκλώματα με ημιτονοειδείς κυματομορφές, όπως είναι αυτά που εξετάζουμε, προκύπτει ότι

$$PF = \frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi$$

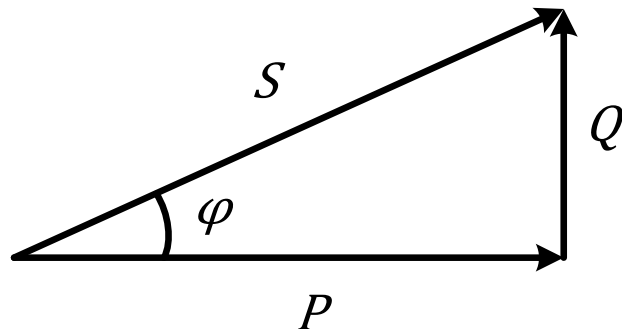
- Είναι πάντα θετικός. Όταν το ρεύμα έπεται της τάσης χαρακτηρίζεται ως επαγωγικός, ενώ όταν προηγείται ως χωρητικός.
- Όσο μικρότερη είναι η άεργος του φορτίου τόσο υψηλότερος είναι ο συντελεστής ισχύος του.

Τρίγωνο ισχύος

- Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η φαινομένη ισχύς προκύπτει και από τη σχέση

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- Η σχέση αυτή θυμίζει το Πυθαγόρειο Θεώρημα.
- Μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα τρίγωνο με πλευρές ανάλογες της ενεργού, της αέργου και της φαινομένης ισχύος.
- Για RL φορτίο (Q θετική):



Για RC φορτίο (Q αρνητική):

