Ηλεκτρικά Κυκλώματα ΙΙ

Διάλεξη 09

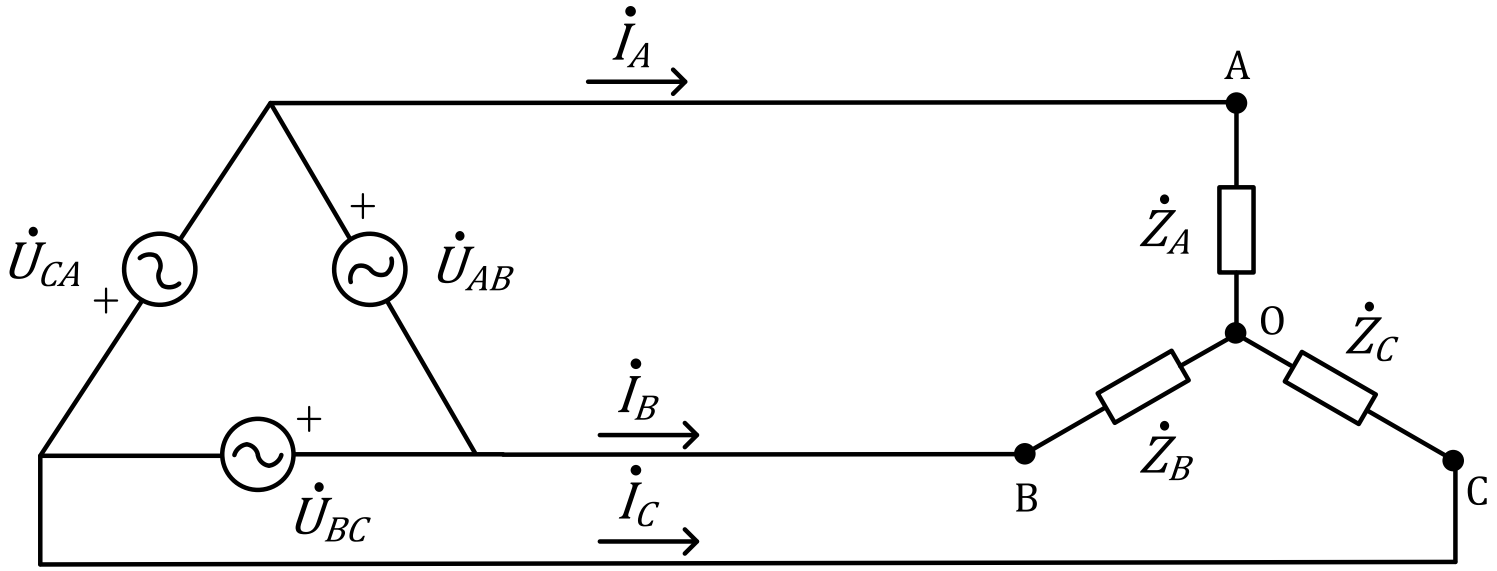
Α. Δροσόπουλος

16-05-2024

Outline

Συνδεσμολογία Δ-Υ

- Θεωρούμε συμμετρική Δ-Υ συνδεσμολογία. (Δεν συνηθίζεται.)



- Η πηγή είναι συνδεδεμένη σε τρίγωνο. Οι τάσεις των επιμέρους πηγών του τριγώνου είναι

$$U_{AB} = U\angle 120° \text{ V}$$
$$U_{BC} = U\angle 0° \text{ V}$$
$$U_{CA} = U\angle(-120°) \text{ V}$$

Παράδειγμα 3

- Ένα συμμετρικό τριφασικό φορτίο συνδεδεμένο σε Υ με σύνθετη αντίσταση $\dot{Z}_{\mathrm{Y}} = 10 + j5\ \Omega$ ανά φάση τροφοδοτείται από τριφασική πηγή συμμετρικού συστήματος τάσεων θετικής ακολουθίας συνδεδεμένη σε Δ με πολική τάση $400\ \mathrm{V}$. Να υπολογίσετε τα ρεύματα των κλάδων του φορτίου.

Απάντηση:

- Η τάση της πηγής είναι

$$\dot{U}_{AB} = 400\angle 120°\ \mathrm{V}$$

- Η ισοδύναμη πηγή τάσης σε σύνδεση Υ θα έχει φασική τάση

$$\dot{U}_A = \frac{\dot{U}_{AB}}{\sqrt{3}}\angle(-30°) = 230.94\angle 90°\ \mathrm{V}$$

- Άρα το ρεύμα γραμμής θα είναι

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\dot{Z}_{\mathrm{Y}}} = 9.238 + j18.475 = 20.656\angle 63.4°\ \mathrm{A}$$

- Επίσης $\dot{I}_B = 20.656\angle(-56.6°)\ \mathrm{A}$, $\dot{I}_C = 20.656\angle(-176.6)\ \mathrm{A}$.

Συνδεσμολογία Δ-Υ

- Για να βρούμε τα ρεύματα των γραμμών μπορούμε να εφαρμόσουμε KVL.

$$-\dot{U}_{AB} + \dot{Z}_A \dot{I}_A - \dot{Z}_B \dot{I}_B = 0$$

- Επειδή $\dot{Z}_A = \dot{Z}_B = \dot{Z}_Y$, προκύπτει ότι

$$\dot{I}_A - \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_Y}$$

- Θα μπορούσαμε επίσης να θεωρήσουμε μια ισοδύναμη πηγή σε συνδεσμολογία Υ με φασικές τάσεις

$$U_A = \frac{U}{\sqrt{3}} \angle 90° \text{ V}$$

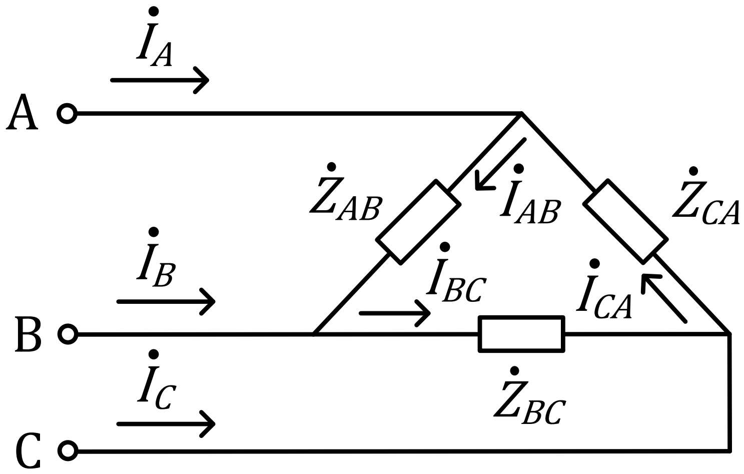
$$U_B = \frac{U}{\sqrt{3}} \angle (-30°) \text{V}$$

$$U_C = \frac{U}{\sqrt{3}} \angle 210° \text{ V}$$

- Δηλαδή μπορούμε να μετατρέψουμε την πηγή από τρίγωνο σε αστέρα και να αναλύσουμε το μονοφασικό ισοδύναμο όπως παραπάνω.

Φορτίο σε συνδεσμολογία Δ

- Θεωρούμε ότι το φορτίο είναι συνδεδεμένο σε τρίγωνο.



- Η τάση στα άκρα κάθε κλάδου του φορτίου είναι ίση με μια πολική τάση της πηγής. Επομένως τα ρεύματα των κλάδων του Δ είναι

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_{AB}}$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{Z}_{BC}}$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\dot{Z}_{CA}}$$

Φορτίο σε συνδεσμολογία Δ

- Τα ρεύματα των γραμμών όμως δεν είναι τα ίδια με τα ρεύματα των κλάδων του φορτίου.
- Αν εφαρμόσουμε KCL στις κορυφές του τριγώνου, προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_{CA} = \dot{I}_{AB} \Rightarrow \dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}$$
$$\dot{I}_B + \dot{I}_{AB} = \dot{I}_{BC} \Rightarrow \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}$$
$$\dot{I}_C + \dot{I}_{BC} = \dot{I}_{CA} \Rightarrow \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}$$

- Για συμμετρικό φορτίο ισχύει ότι $\dot{Z}_{AB} = \dot{Z}_{BC} = \dot{Z}_{CA} = \dot{Z}_\Delta$, επομένως

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_\Delta} = \frac{U}{\dot{Z}_\Delta}\angle 120°$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{Z}_\Delta} = \frac{U}{\dot{Z}_\Delta}\angle 0°$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\dot{Z}_\Delta} = \frac{U}{\dot{Z}_\Delta}\angle(-120°)$$

Φορτίο σε συνδεσμολογία Δ

- Τότε τα ρεύματα γραμμών είναι

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_\Delta} - \frac{\dot{U}_{CA}}{\dot{Z}_\Delta} = \frac{U\angle 120°}{\dot{Z}_\Delta} - \frac{U\angle(-120°)}{\dot{Z}_\Delta}$$

$$= \frac{U}{\dot{Z}_\Delta}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{U}{\dot{Z}}\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = j\frac{U\sqrt{3}}{\dot{Z}_\Delta} = \frac{U\sqrt{3}}{\dot{Z}_\Delta}\angle 90°$$

$$= \dot{I}_{AB}\sqrt{3}\angle(-30°)$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{Z}_\Delta} - \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_\Delta} = \frac{U\angle 0°}{\dot{Z}_\Delta} - \frac{U\angle 120°}{\dot{Z}_\Delta} = \frac{U}{\dot{Z}_\Delta} - \frac{U}{\dot{Z}_\Delta}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{U\sqrt{3}}{\dot{Z}_\Delta}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) = \frac{U\sqrt{3}}{\dot{Z}_\Delta}\angle(-30°) = \dot{I}_{BC}\sqrt{3}\angle(-30°)$$

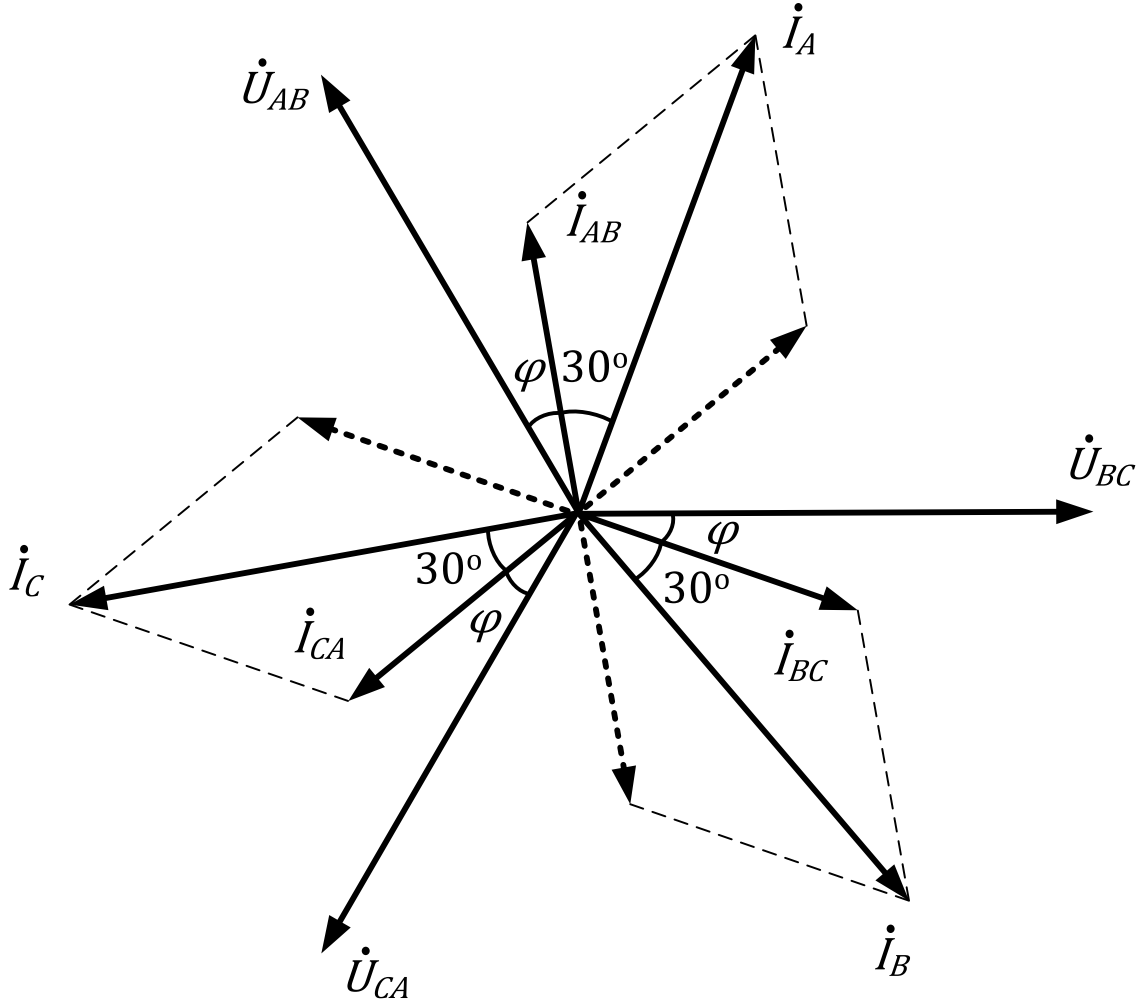
$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\dot{Z}_\Delta} - \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{Z}_\Delta} = \frac{U\angle(-120°)}{\dot{Z}_\Delta} - \frac{U\angle 0°}{\dot{Z}_\Delta} = \frac{U}{\dot{Z}_\Delta}\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{U}{\dot{Z}_\Delta}$$

$$= \frac{U\sqrt{3}}{\dot{Z}_\Delta}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) = \frac{U\sqrt{3}}{\dot{Z}_\Delta}\angle 210° = \dot{I}_{CA}\sqrt{3}\angle(-30°)$$

Φορτίο σε συνδεσμολογία Δ

- Αν λοιπόν συμβολίσουμε με I την rms τιμή των ρευμάτων των γραμμών, η rms τιμή του ρεύματος κάθε κλάδου του τριγώνου I_Δ θα είναι

$$I_\Delta = \frac{I}{\sqrt{3}}$$



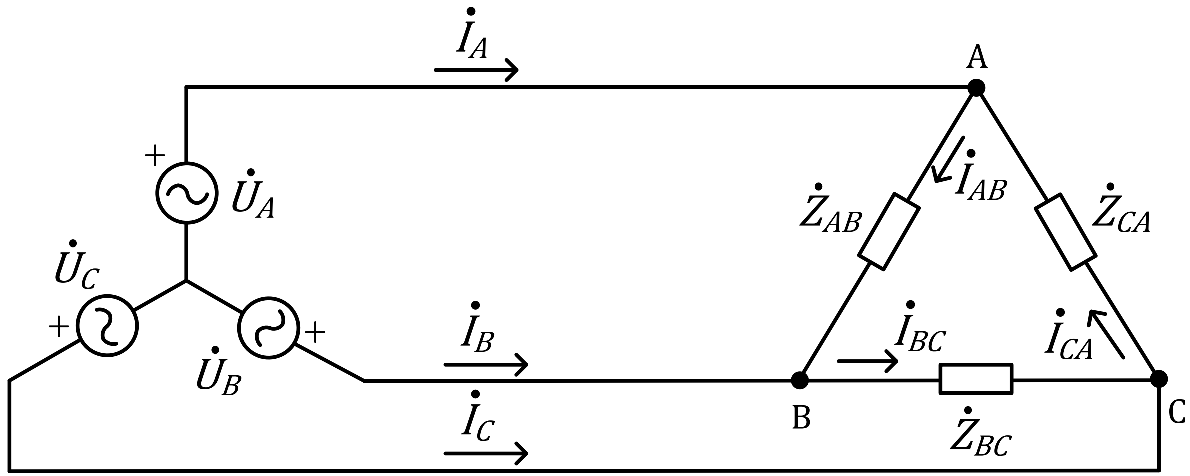
Παράδειγμα 4

- Ένα συμμετρικό τριφασικό φορτίο συνδεδεμένο σε Δ έχει σύνθετη αντίσταση $\dot{Z}_{\Delta} = 10 + j5\ \Omega$ σε κάθε κλάδο και τροφοδοτείται από τριφασική πηγή συμμετρικού συστήματος τάσεων θετικής ακολουθίας συνδεδεμένης σε Υ με $\dot{U}_A = 100\angle 90°$. Να βρεθούν τα ρεύματα των γραμμών και τα ρεύματα των κλάδων του τριγώνου.

Απάντηση:

- Η τάση στα άκρα της $\dot{Z}_{BC}$ είναι η πολική τάση της πηγής $\dot{U}_{BC}$. Άρα

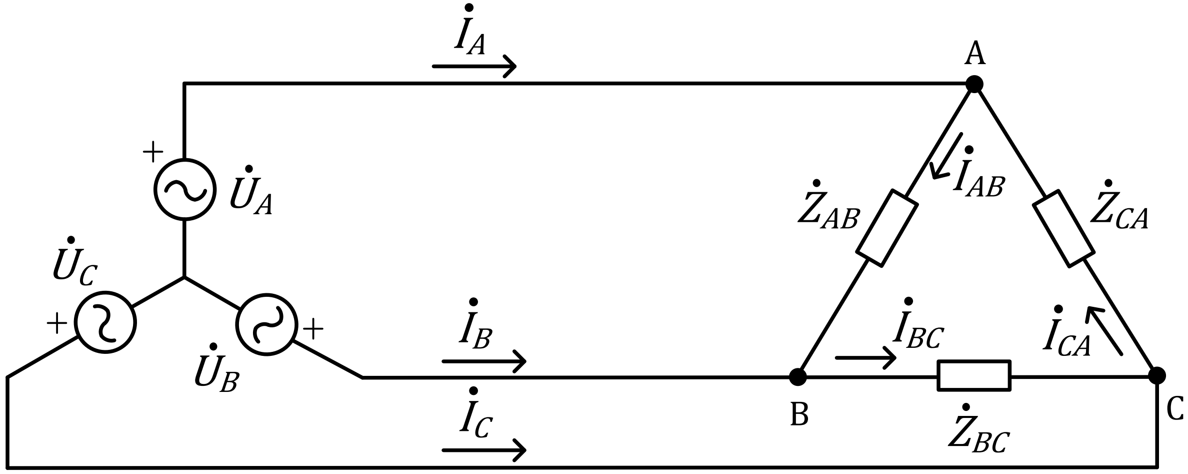
$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{Z}_{BC}} = \frac{100\sqrt{3}\angle 0°}{10 + j5}$$
$$= 13.856 - j6.928$$
$$= 15.492\angle(-26.6°)\ \mathrm{A}$$



Παράδειγμα 4

- Επίσης λόγω συμμετρίας και επειδή έχουμε θετική ακολουθία φάσεων:

$$\dot{I}_{AB} = 15.492\angle(-26.6° + 120°)$$
$$= 15.492\angle 93.4° \mathrm{A}$$
$$\dot{I}_{CA} = 15.492\angle(-26.6° - 120°)$$
$$= 15.492\angle(-146.6°)\mathrm{A}$$



- Τα ρεύματα γραμμών θα είναι:

$$\dot{I}_A = 15.492\sqrt{3}\angle(93.4° - 30°) = 26.833\angle 63.4° \mathrm{~A}$$
$$\dot{I}_B = 15.492\sqrt{3}\angle(-26.6° - 30°) = 26.833\angle(-56.6°)\mathrm{A}$$
$$\dot{I}_C = 15.492\sqrt{3}\angle(-146.6° - 30°) = 26.833\angle(-176.6°) \mathrm{~A}$$

- Τα ρεύματα γραμμών θα μπορούσαν να είχαν βρεθεί και από το μονοφασικό ισοδύναμο με $\dot{Z}_{\mathrm{Y}} = \dot{Z}_{\Delta}/3 = (10 + j5)/3 = 3.727\angle 26.6° \ \Omega$. Πράγματι:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\dot{Z}_{\mathrm{Y}}} = 12 + j24 = 26.833\angle 63.4° \mathrm{~A}$$

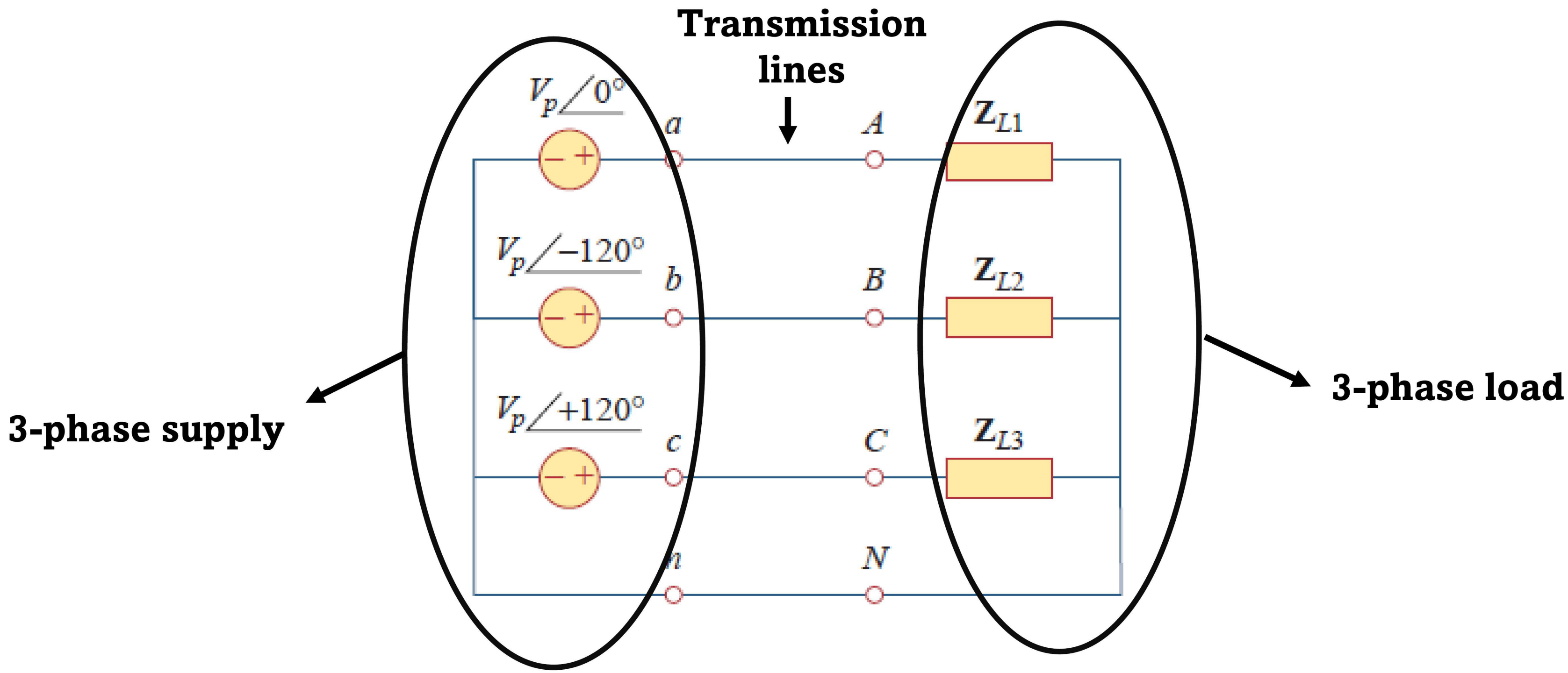
youtube και άλλες πηγές

3 Phase Balanced vs 3 Phase unbalanced

https://www.youtube.com/watch?v=nRzsH0plXIc

Three-Phase Circuits

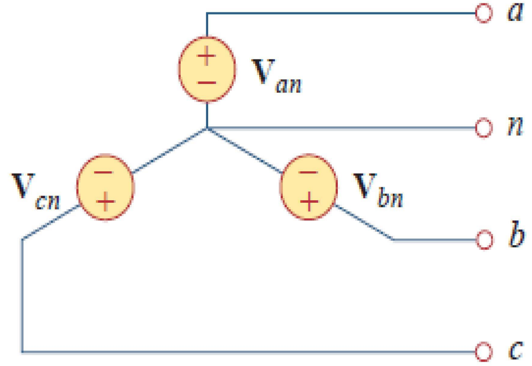
Three-phase system is produced by a generator consisting of three sources having the same amplitude and frequency but out of phase with each other by 120 degrees



Three-Phase Circuits

- **Balanced three phase supply**

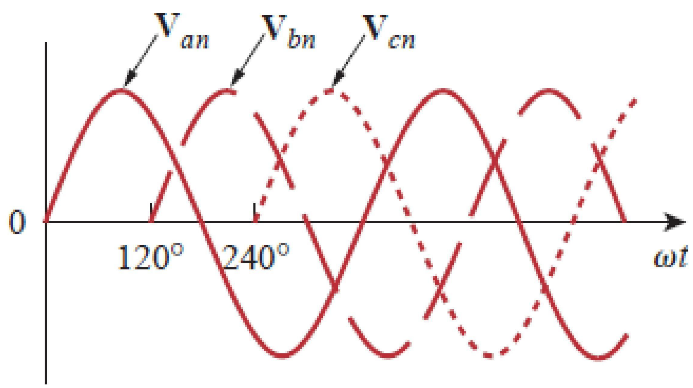
It consists of **three** sinusoidal voltage sources that have **identical amplitudes** and frequencies, but are **out of phase** with each others by exactly **120 degrees**

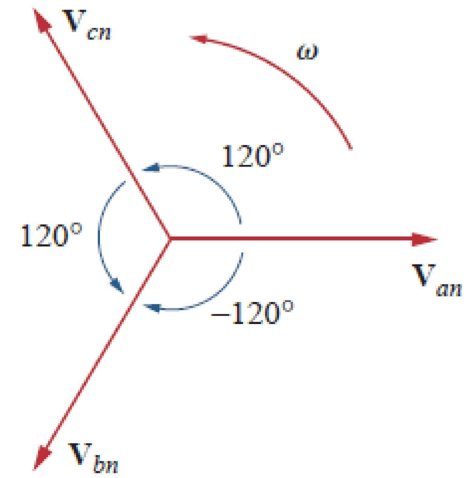


$V_{an} = V\angle 0$

$V_{bn} = V\angle -120$

$V_{cn} = V\angle +120 = V\angle -240$





$$\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0$$

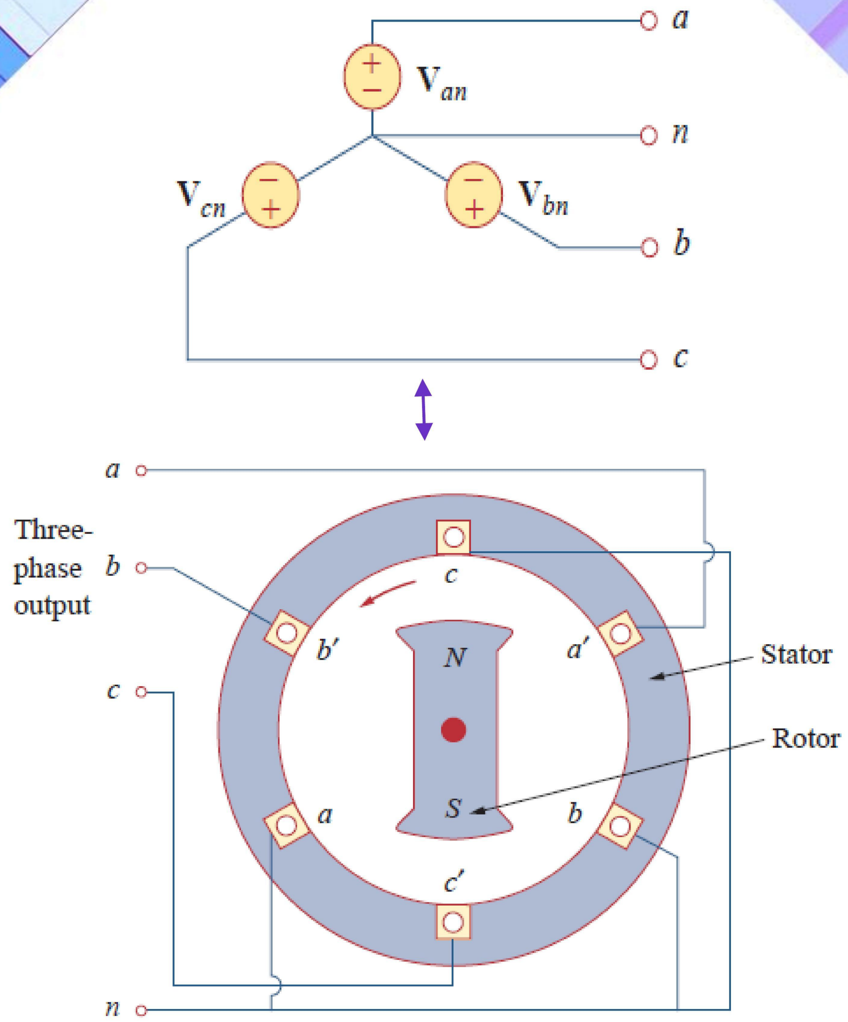
$$|\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}|$$

Three-Phase Circuits

❑ Balanced three phase supply

Three-phase voltages are often produced with a **three-phase ac generator** (or alternator)

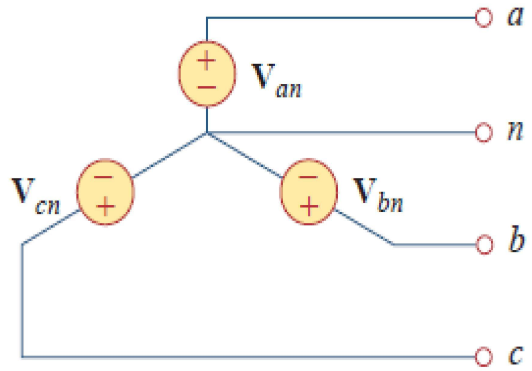
- The generator basically consists of a rotating magnet (called the rotor)
- Stationary part (called stator) carries three separate windings (coils)
- The three coils with terminals (a-a') – (b-b') – (c-c') are physically placed 120 degrees apart around the stator



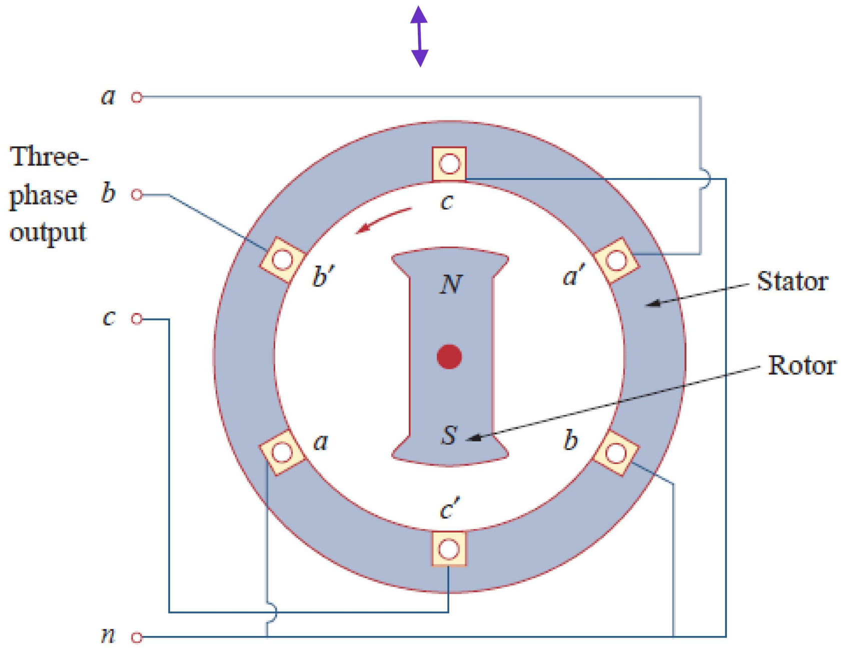
Three-Phase Circuits

❑ Balanced three phase supply

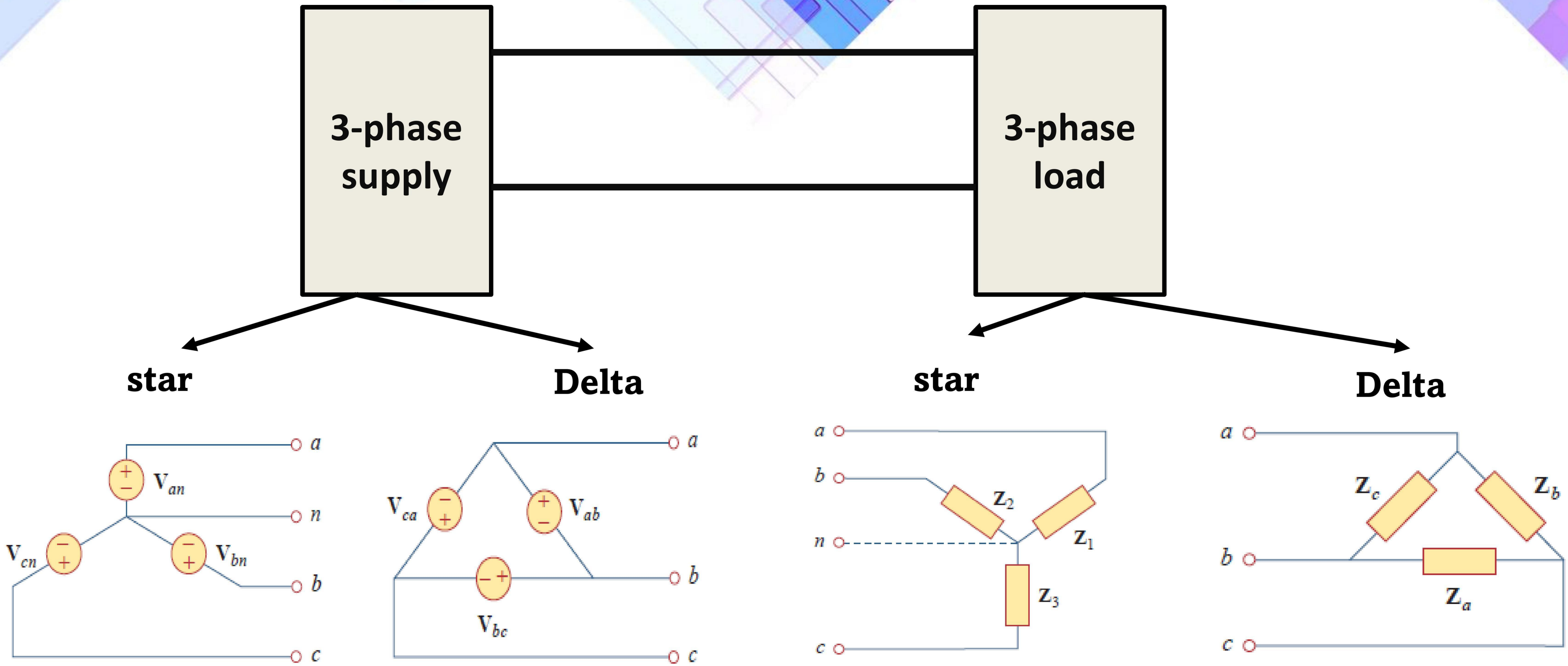
Three-phase voltages are often produced with a **three-phase ac generator** (or alternator)



- Terminals (a-a’) for example, stand for one of the ends of coils going into and the other end coming out of the page.
- As the rotor rotates, its magnetic field “cuts” the three coils and induces voltages in the coils
- Because the coils are placed 120 apart, the induced voltages in the coils are equal in magnitude but out of phase by 120 degrees



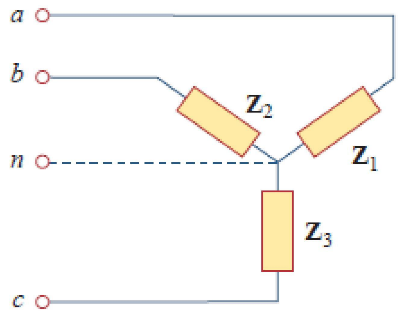
Three-Phase Circuits



Three-Phase Circuits

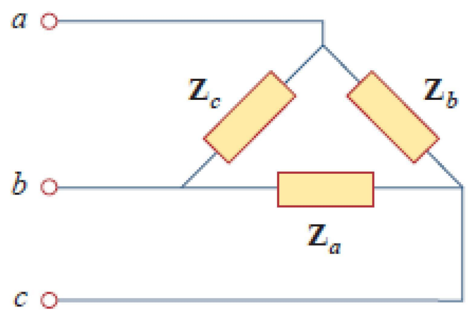
A **balanced load** is one in which the phase impedances are **equal in magnitude and in phase.**

Balanced Star connected load



$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_Y$$

Balanced Delta connected load



$$\mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_c = \mathbf{Z}_\Delta$$

- Star-connected load can be transformed into a delta connected load, or vice versa:

$$\boxed{\mathbf{Z}_\Delta = 3\mathbf{Z}_Y \qquad \text{or} \qquad \mathbf{Z}_Y = \frac{1}{3}\mathbf{Z}_\Delta}$$

Three-Phase Circuits

- Since both the three-phase source and the three-phase load can be either wye- or delta-connected, we have four possible connections

1. **Star - Star Connection**
   - **4-wire system**
   - **3-wires system**
2. **Star - Delta Connection**
3. **Delta - Star Connection**
4. **Delta - Delta Connection**

Three-Phase Circuits

- Firstly, we are going to deal with **balanced** three phase circuit

Balanced three phase circuit

Balanced 3-phase supply

Balanced supply consists of three sources equal in magnitude but out of phase by 120 degrees

$$\mathbf{V}_{an} = V_p\angle 0^\circ$$
$$\mathbf{V}_{cn} = V_p\angle -120^\circ$$
$$\mathbf{V}_{bn} = V_p\angle -240^\circ = V_p\angle +120^\circ$$

Balanced 3-phase load

Balanced load consists of three identical impedances connected star or delta

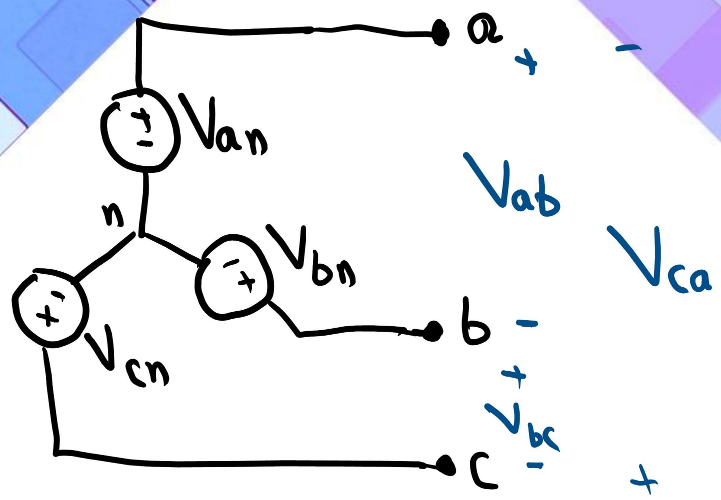
$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_Y$$

$$\mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_c = \mathbf{Z}_\Delta$$

Three-Phase Circuits

❑ Line Voltages of 3-phase system

➢ For the shown 3-phase supply



V_{an}, V_{bn}, V_{cn} **are called phase voltages**

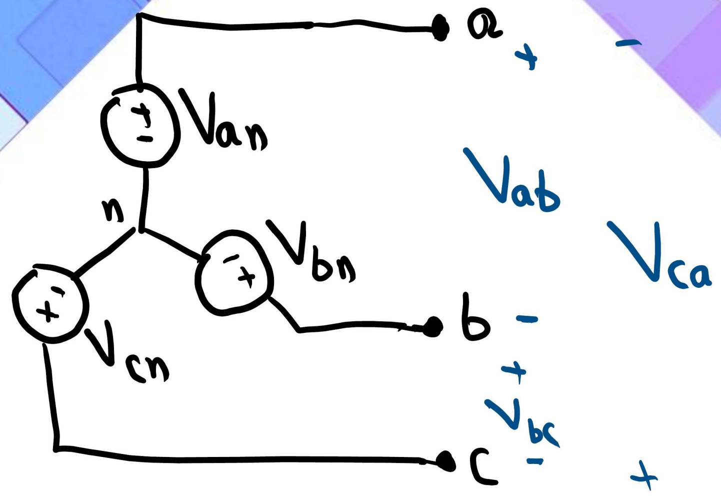
V_{ab}, V_{bc}, V_{ca} **are called line voltages**

➢ We need to find the relation between phase voltages and line voltages

Three-Phase Circuits

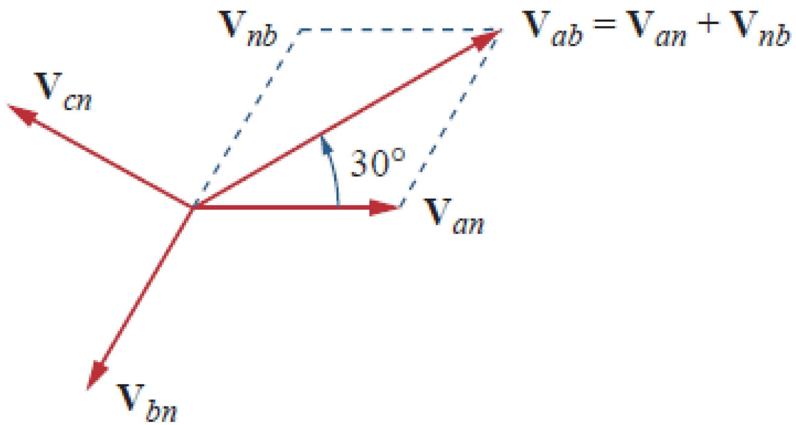
- **Line Voltages of 3-phase system**

$$V_{an} = V\angle 0$$
$$V_{bn} = V\angle -120$$
$$V_{cn} = V\angle +120 = V\angle -240$$



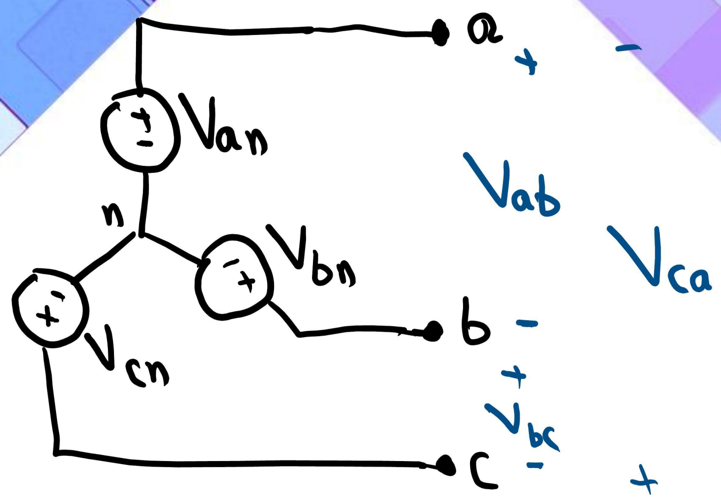
$$V_{ab} = V_{an} - V_{bn}$$

$$\boxed{V_{ab} = \sqrt{3}\, V \angle 30^\circ}$$

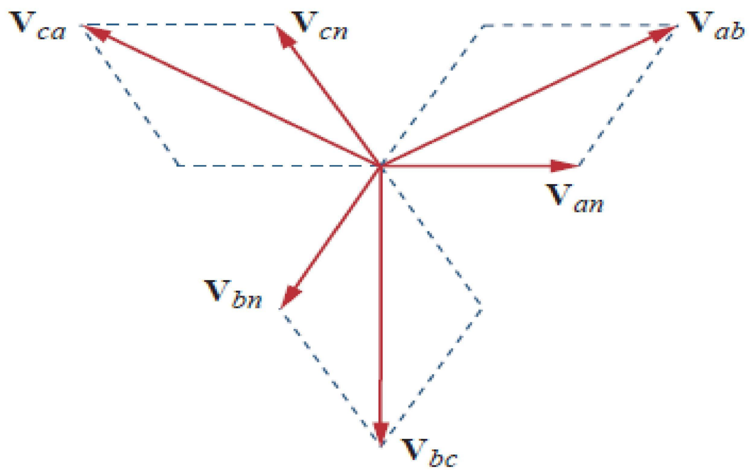


Three-Phase Circuits

❑ Line Voltages of 3-phase system



→
$$\boxed{\begin{aligned} V_{an} &= V\angle 0 \\ V_{bn} &= V\angle -120 \\ V_{cn} &= V\angle +120 = V\angle -240 \end{aligned}}$$



- By the same procedure, we can get $\boldsymbol{V_{bc}}$, $\boldsymbol{V_{ca}}$

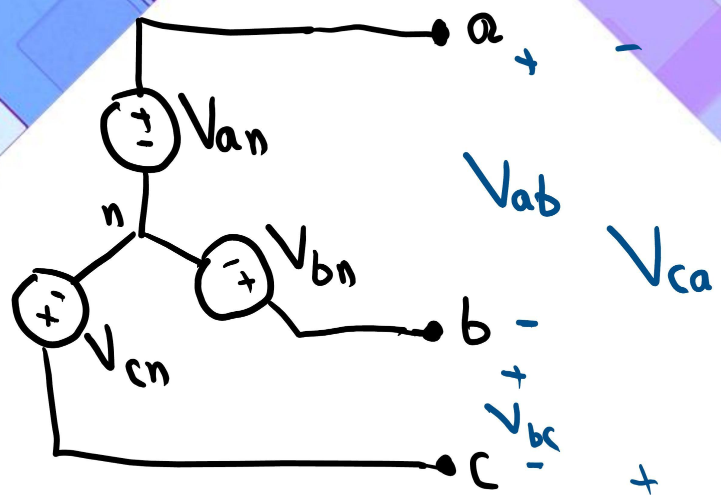
$$V_{bc} = V_{bn} - V_{cn} = \sqrt{3}\,V\angle -90^\circ$$

$$V_{ca} = V_{cn} - V_{an} = \sqrt{3}\,V\angle 150^\circ$$

Three-Phase Circuits

❑ Summary

- The magnitude of the line voltages $\sqrt{3}$ times the magnitude of the phase voltage
- The line voltages lead their corresponding phase voltages by 30 degrees



Phase voltages (V_{ph})		Line voltages (V_L)
$V_{an} = V\angle 0$	$\xrightarrow{*\sqrt{3}\ ,\ +30^\circ}$	$V_{ab} = \sqrt{3}V\angle 30^\circ$
$V_{bn} = V\angle -120$	$\xrightarrow{*\sqrt{3}\ ,\ +30^\circ}$	$V_{bc} = \sqrt{3}V\angle -90^\circ$
$V_{cn} = V\angle +120 = V\angle -240$	$\xrightarrow{*\sqrt{3}\ ,\ +30^\circ}$	$V_{ca} = \sqrt{3}V\angle 150^\circ$

Three-Phase Circuits

1. Balanced Star – Star connection → (i) 4 – wire system

- Let the phase voltages are:

$$\boxed{\begin{aligned} V_{an} &= V_p\angle 0 \\ V_{bn} &= V_p\angle -120 \\ V_{cn} &= V_p\angle +120 \end{aligned}}$$

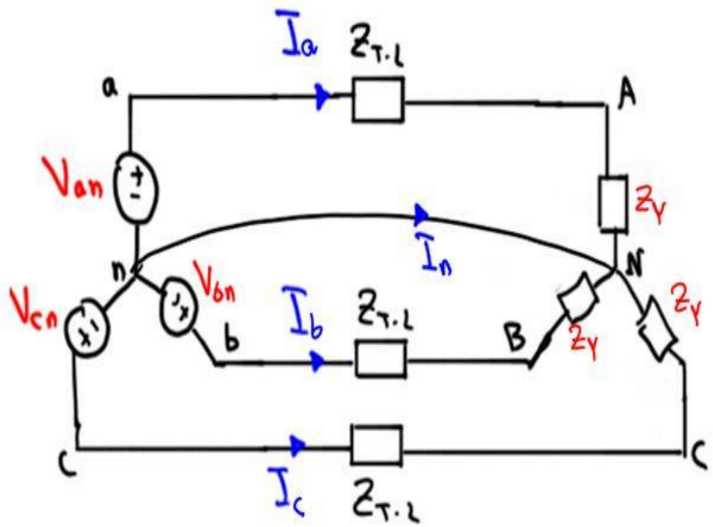
- The line voltages are:

$$V_{ab} = \sqrt{3}V_p\angle 30$$

$$V_{bc} = \sqrt{3}V_p\angle -90^\circ$$

$$V_{ca} = \sqrt{3}V_p\angle 150^\circ$$

Assume $Z_{T.L} = 0$



- To find the line currents → Apply KVL to each phase

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_Y} \qquad \mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{\mathbf{V}_{an}\angle -120^\circ}{\mathbf{Z}_Y} = \mathbf{I}_a\angle -120^\circ$$

$$\mathbf{I}_c = \frac{\mathbf{V}_{cn}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{\mathbf{V}_{an}\angle -240^\circ}{\mathbf{Z}_Y} = \mathbf{I}_a\angle -240^\circ$$

Three-Phase Circuits

1. Balanced Star – Star connection → **(i) 4 – wire system**

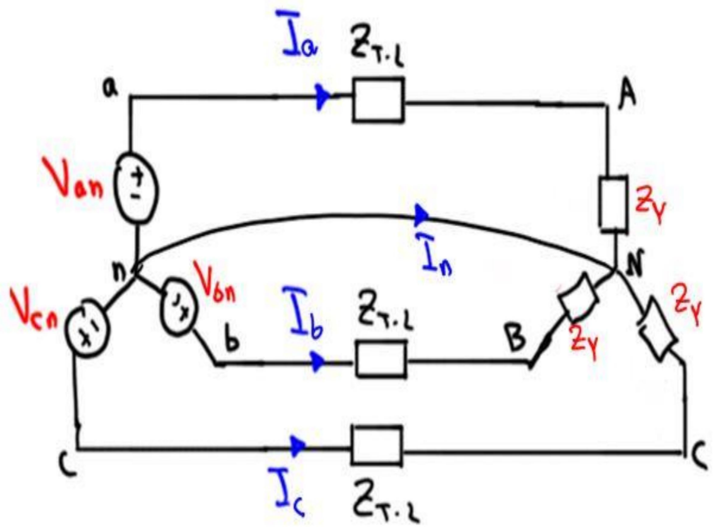
$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_Y} \qquad \mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{\mathbf{V}_{an}\angle -120^\circ}{\mathbf{Z}_Y} = \mathbf{I}_a\angle -120^\circ$$

$$\mathbf{I}_c = \frac{\mathbf{V}_{cn}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{\mathbf{V}_{an}\angle -240^\circ}{\mathbf{Z}_Y} = \mathbf{I}_a\angle -240^\circ \qquad \boxed{\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 0}$$

For balanced 3-phase circuits, the line currents are equal in magnitude and out of phase by 120 degrees

- To find the neutral current: $\mathbf{I}_n = -(\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c) = 0$

For balanced 3-phase systems, the neutral line can thus be removed without affecting the system



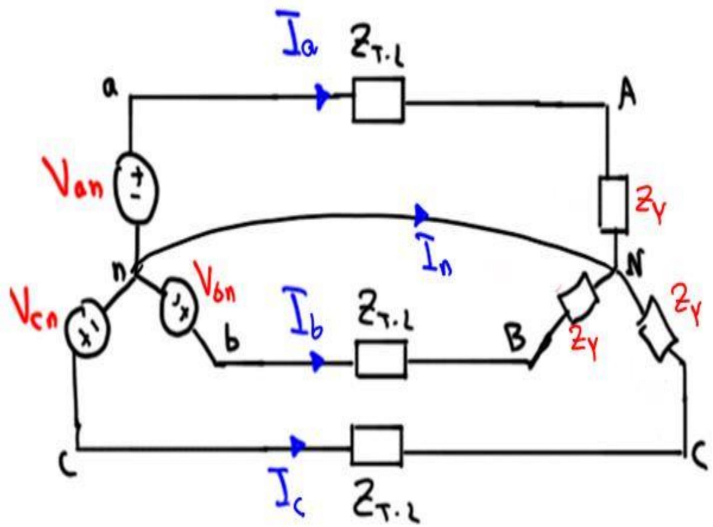
Three-Phase Circuits

1. Balanced Star – Star connection → (i) 4 – wire system

- In 3-phase systems, we have two types of currents

1. Line currents → **Currents flowing in each line**

2. Phase currents → **Currents flowing in each phase**



For Star connection
Line currents = phase currents
I_a, I_b, I_c

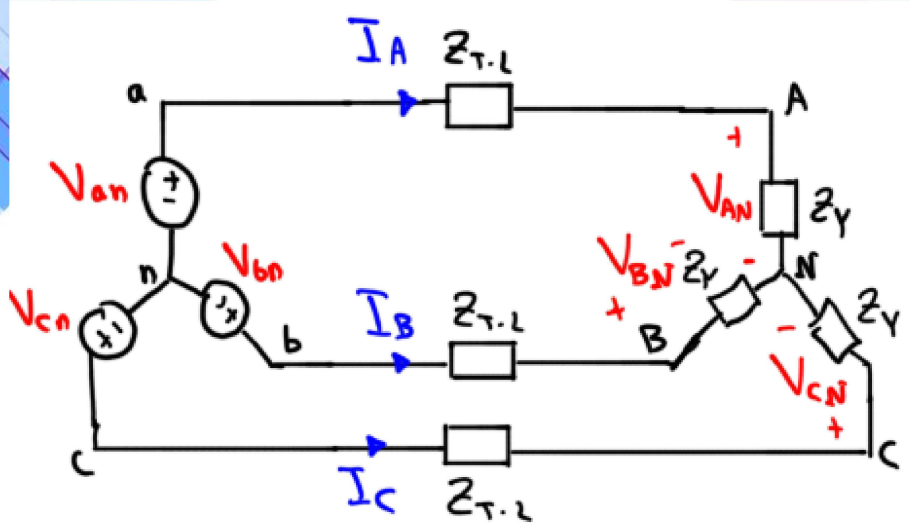
Three-Phase Circuits

1. Balanced Star – Star connection

(ii) 3 – wire system

➢ **Let the phase voltages are:**

$$V_{an} = V_p \angle 0$$
$$V_{bn} = V_p \angle -120$$
$$V_{cn} = V_p \angle +120$$



➢ **In our analysis, we need to find:**

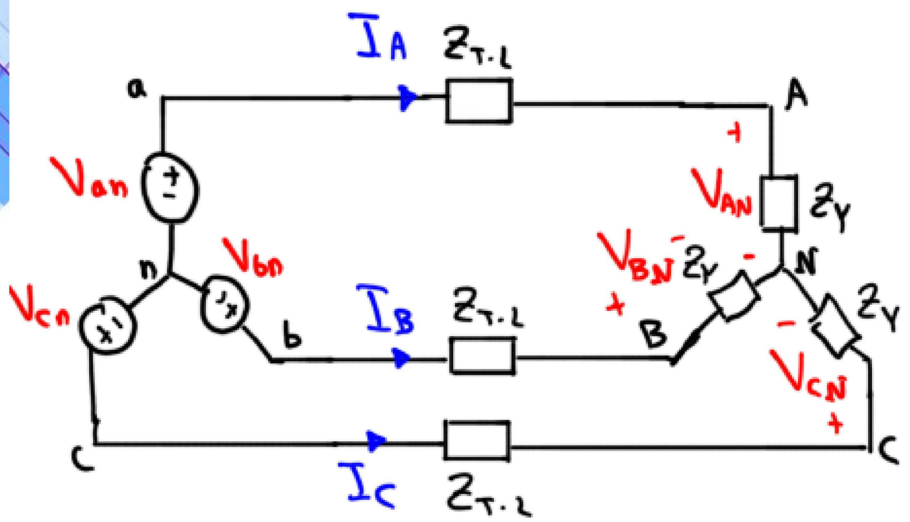
1. **Load phase currents**
2. **Load line currents**
3. **Load phase voltages**
4. **Load line voltages**

Three-Phase Circuits

1. Balanced Star – Star connection

(ii) 3 – wire system

- A common simple way to analyze **balanced** 3-phase circuits is to draw the **single -phase equivalent circuit**



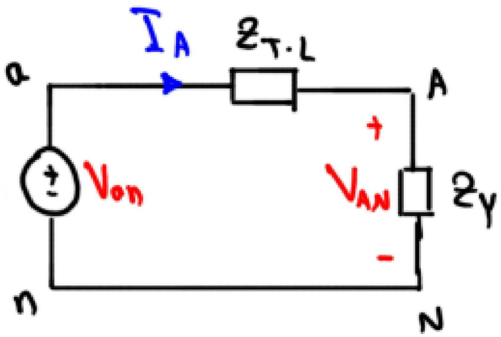
- **Load phase or line currents**

$$I_A = \frac{V_{an}}{Z_Y + Z_{T.L}} = I\angle\theta$$

$$I_B = I\angle\theta - 120^\circ$$

$$I_C = I\angle\theta + 120^\circ$$

single -phase equivalent circuit

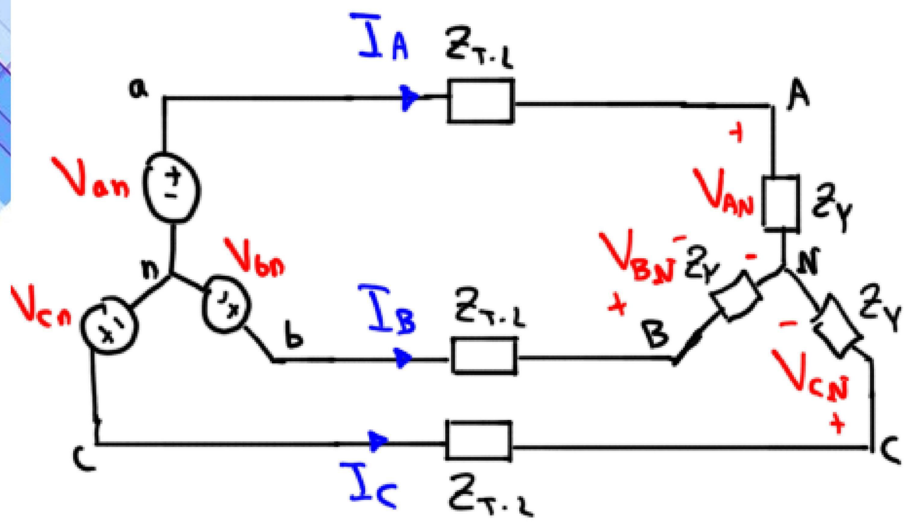


Three-Phase Circuits

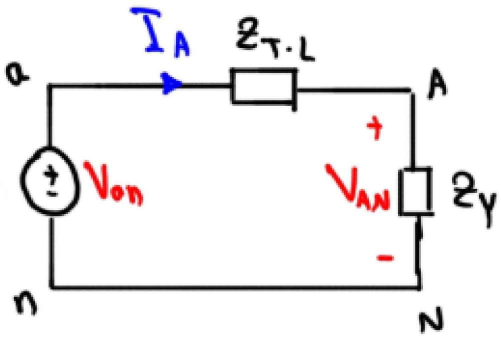
1. Balanced Star – Star connection

(ii) 3 – wire system

➢ A common simple way to analyze **balanced** 3-phase circuits is to draw the **single -phase equivalent circuit**



single -phase equivalent circuit



➢ **Load phase voltages**

$$* \; V_{AN} = I_A Z_Y = V \angle \theta_V$$

$$* \; V_{BN} = V \angle \theta_V - 120^\circ$$

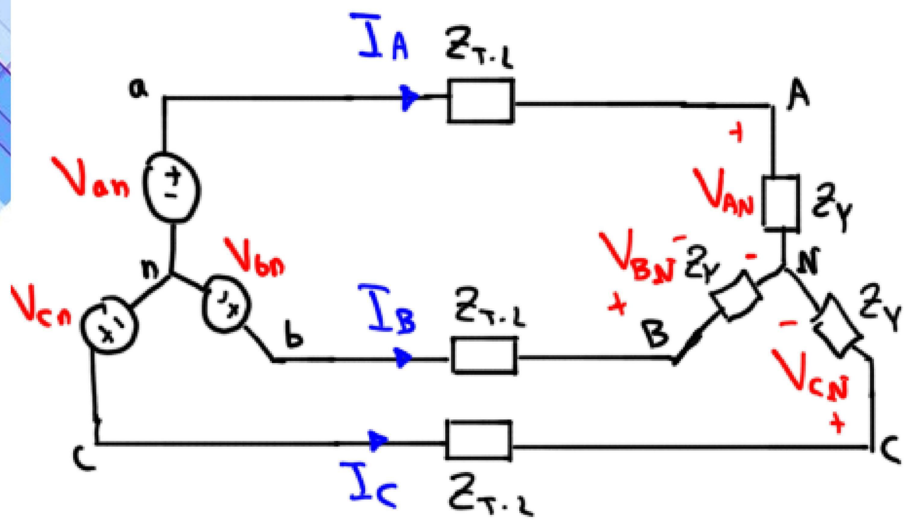
$$* \; V_{CN} = V \angle \theta_V + 120^\circ$$

Three-Phase Circuits

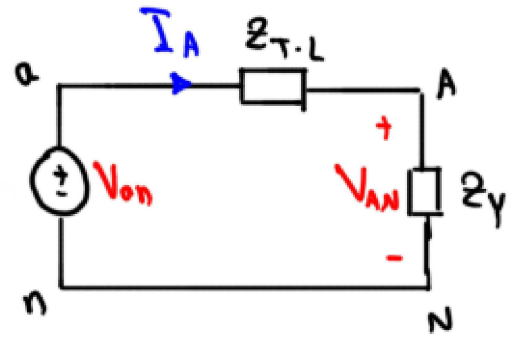
1. Balanced Star – Star connection

(ii) 3 – wire system

- A common simple way to analyze **balanced** 3-phase circuits is to draw the **single -phase equivalent circuit**



single -phase equivalent circuit



- **Load line voltages**

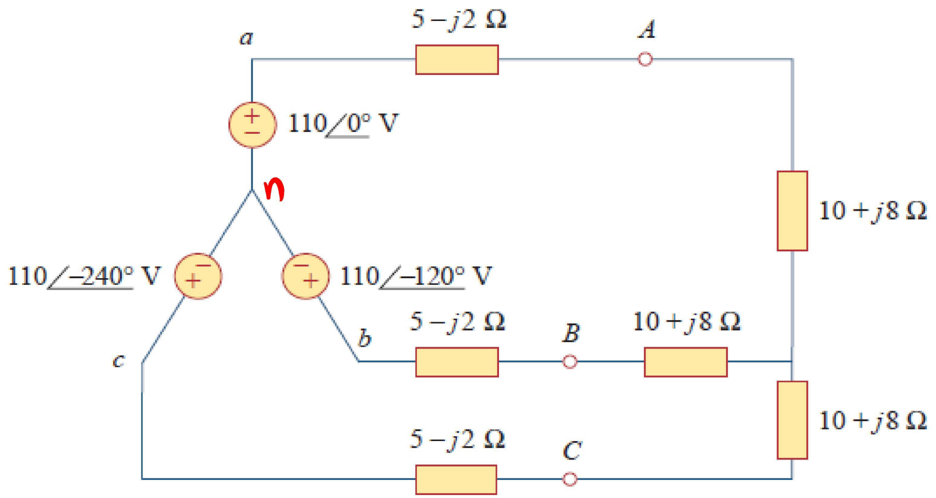
$$* V_{AB} = \sqrt{3}\, V \angle \theta_v + 30$$

$$* V_{BC} = \sqrt{3}\, V \angle \theta_v - 90$$

$$* V_{CA} = \sqrt{3}\, V \angle \theta_v + 150$$

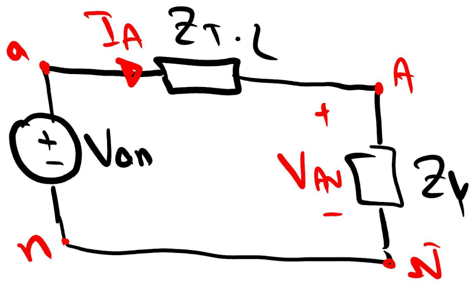
Example

Calculate the line currents in the three-wire Y-Y system



* $V_{an} = 110\angle 0\ V$, $Z_Y = 10 + 8j$, $Z_{T.L} = 5 - 2j$

1-Ph equiv. ct ⇐



$$I_A = \frac{V_{an}}{Z_{T.L} + Z_Y} = \frac{110\angle 0}{(5-2j)+(10+8j)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} I_A = 6.8\angle -21.8^\circ \\ I_B = 6.8\angle -141.8^\circ \\ I_C = 6.8\angle 98.2^\circ \end{array}}$$

→ Line or Phase Current

$$* V_{AN} = I_A * Z_Y = 6.8\angle -21.8 * (10+8j)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} V_{AN} = 87\angle 16.8^\circ \\ V_{BN} = 87\angle -103.2^\circ \\ V_{CN} = 87\angle 136.8^\circ \end{array}}$$

Phase Voltages

$$V_{AB} = \sqrt{3} * 87\angle 16.8 + 30$$

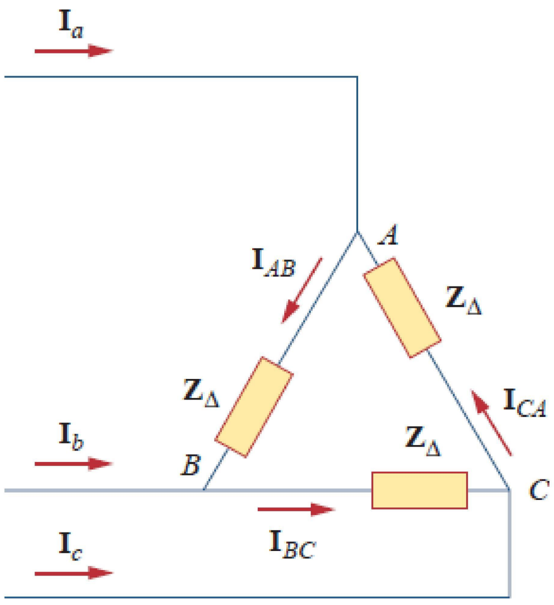
$$\boxed{\begin{array}{l} V_{AB} = 150.68\angle 46.8^\circ \\ V_{BC} = 150.68\angle -73.2^\circ \\ V_{CA} = 150.68\angle 166.8^\circ \end{array}}$$

Line Voltages

Three-Phase Circuits

- **Relation between line and phase currents**

➢ For the shown 3-phase delta connected load



I_{AB}, I_{BC}, I_{CA} are called phase currents

I_A, I_B, I_C are called line currents

➢ We need to find the relation between phase current and line currents

Three-Phase Circuits

- Relation between line and phase currents

- Assume the 3 phase currents are : ⟶

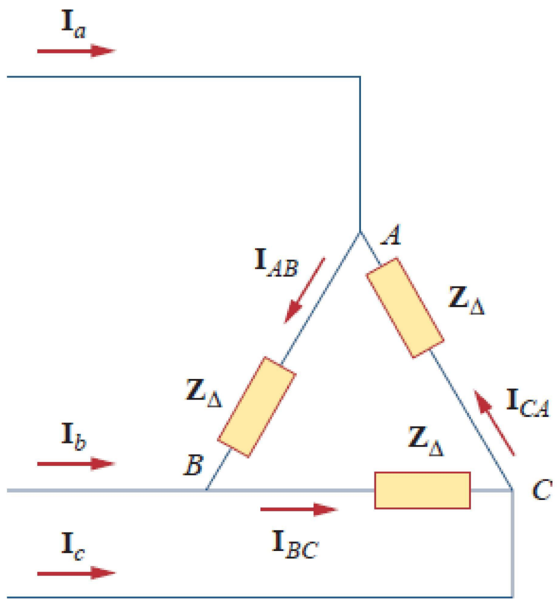
$$\boxed{\begin{aligned} I_{AB} &= I\angle 0 \\ I_{BC} &= I\angle -120 \\ I_{CA} &= I\angle +120 \end{aligned}}$$

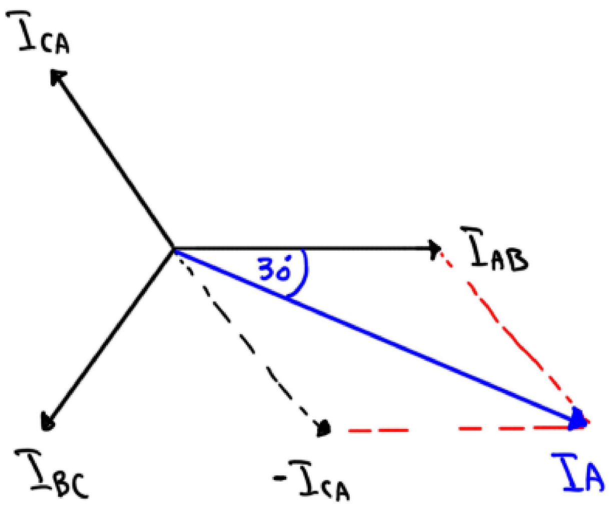
- For the line currents: ⟶ KCL at A

$$I_A + I_{CA} = I_{AB}$$

$$I_A = I_{AB} - I_{CA}$$

$$\boxed{I_A = \sqrt{3}\, I \angle -30^\circ}$$

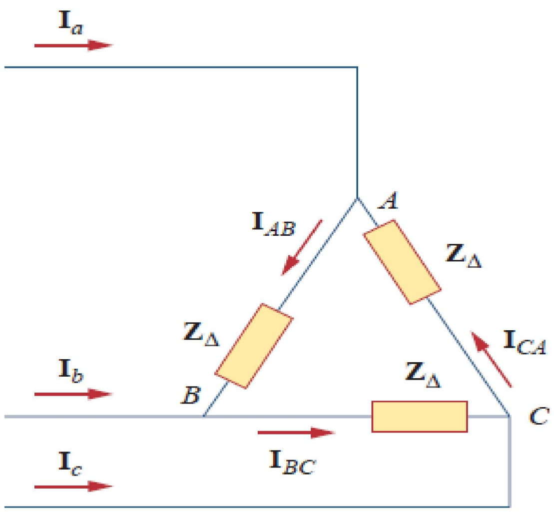




Three-Phase Circuits

❑ Relation between line and phase currents

- The magnitude of the line current $\sqrt{3}$ times the magnitude of the phase current
- The line currents lag their corresponding phase currents by 30 degrees



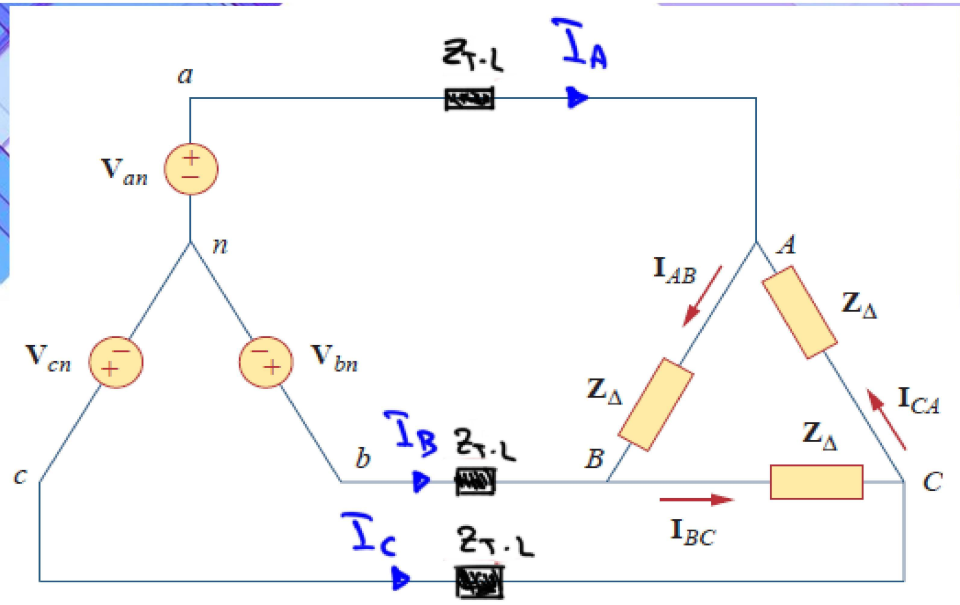
Phase currents		Line currents
$I_{AB} = I \angle 0$	$\xrightarrow{*\sqrt{3}\ ,\ -30^\circ}$	$I_A = \sqrt{3}\, I \angle -30^\circ$
$I_{BC} = I \angle -120$	$\xrightarrow{*\sqrt{3}\ ,\ -30^\circ}$	$I_B = \sqrt{3}\, I \angle -150^\circ$
$I_{CA} = I \angle +120$	$\xrightarrow{*\sqrt{3}\ ,\ -30^\circ}$	$I_C = \sqrt{3}\, I \angle 90^\circ$

Three-Phase Circuits

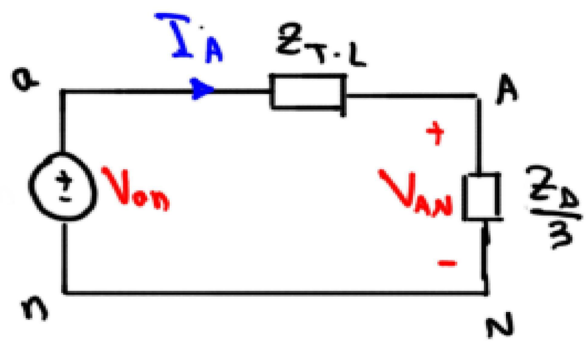
2. Balanced Star – Delta connection

- To be able to draw per phase equivalent circuit, we need to convert delta load into **star load**

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$$



single -phase equivalent circuit



- **Load line currents**

$$* \; I_A = \frac{V_{an}}{Z_{T.L} + \frac{Z_\Delta}{3}} = I\angle\theta$$

$$* \; I_B = I\angle\theta - 120^\circ$$

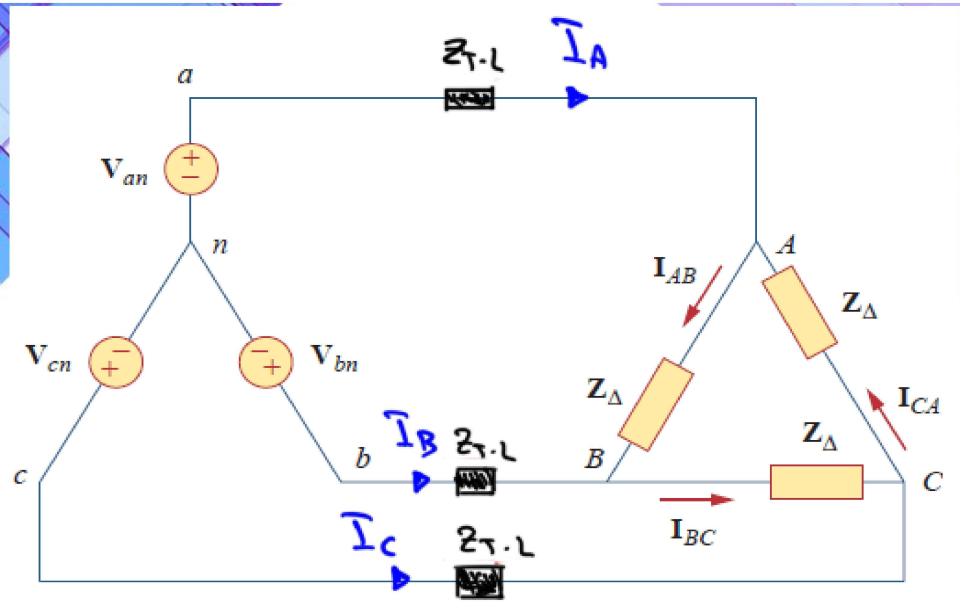
$$* \; I_C = I\angle\theta + 120^\circ$$

Three-Phase Circuits

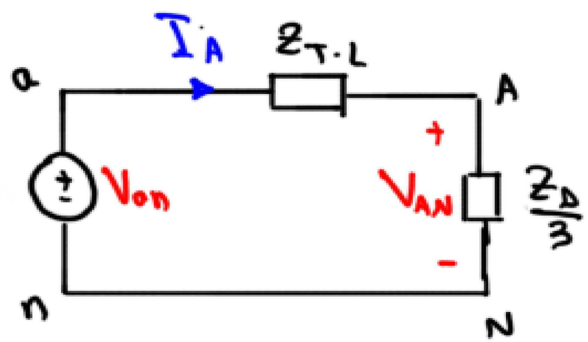
2. Balanced Star – Delta connection

- To be able to draw per phase equivalent circuit, we need to convert delta load into **star load**

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$$



single -phase equivalent circuit



Load phase currents

* $I_{AB} = \frac{I}{\sqrt{3}} \angle \theta+30$

* $I_{BC} = \frac{I}{\sqrt{3}} \angle \theta-90$

* $I_{CA} = \frac{I}{\sqrt{3}} \angle \theta+150$

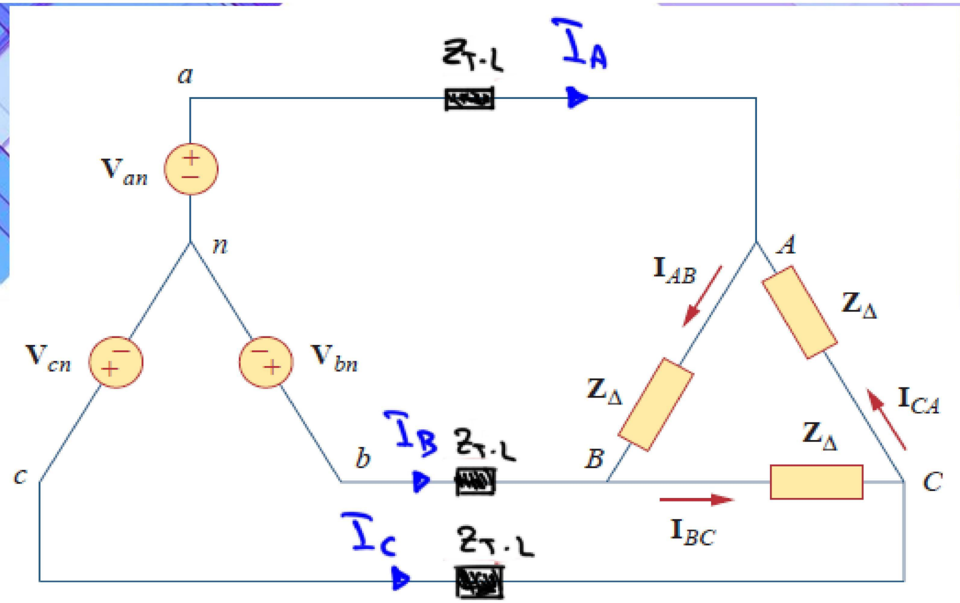
Three-Phase Circuits

2. Balanced Star – Delta connection

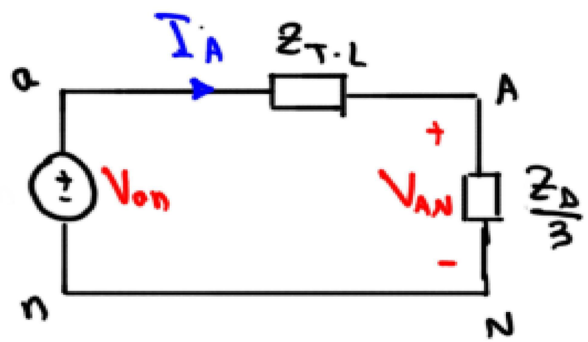
For Delta connection

Line voltages = phase voltages

V_{AB} , V_{BC} , V_{CA}



single -phase equivalent circuit



- **Load phase or line voltages**

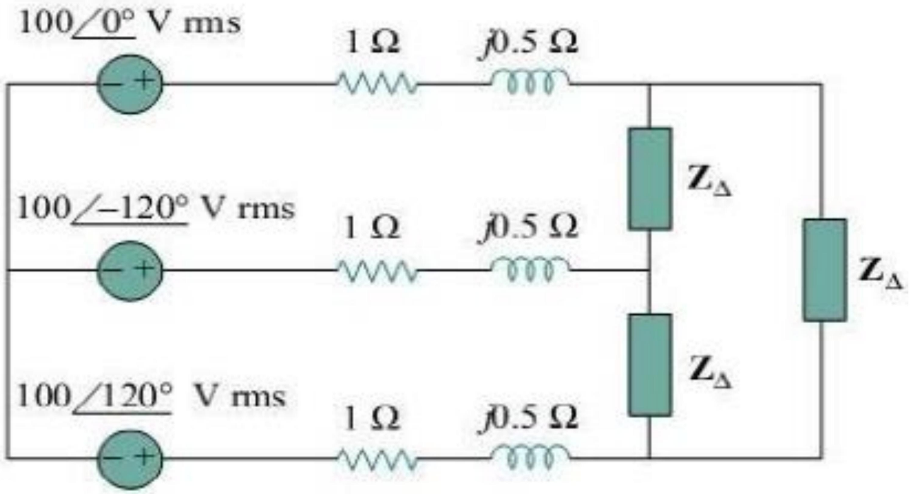
$$* \; V_{AB} = I_{AB} Z_\Delta = V \angle \theta_v$$

$$* \; V_{BC} = V \angle \theta_v - 120$$

$$* \; V_{CA} = V \angle \theta_v + 120^\circ$$

Example

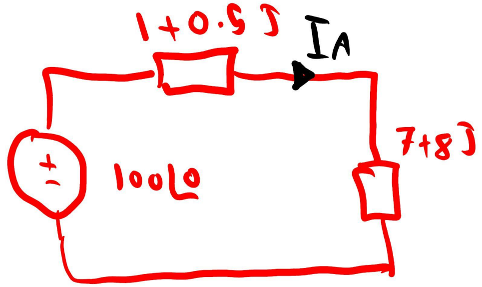
Find the load phase voltage. $\mathbf{Z}_\Delta = 21 + j24\ \Omega.$



$* \; Z_Y = \frac{Z_D}{3} = \frac{21+24J}{3} = 7+8J$

$* \; Z_{T.L} = 1+0.5J \quad , \quad V_{an} = 100\angle 0$

→ 1Ph - equiv. CCT



$* \; I_A = \frac{100\angle 0}{(1+7)+(8+0.5)J}$

$\boxed{I_A = 8.56\angle -46.7^\circ}$ → Line Current

$* \; I_{AB} = \frac{8.56}{\sqrt{3}} \angle -46.7+30^\circ$

$\boxed{I_{AB} = 4.94\angle -16.7^\circ}$ → Phase current

$* \; V_{AB} = I_{AB} \cdot Z_D = (4.94\angle -16.7^\circ) * (21+24J)$

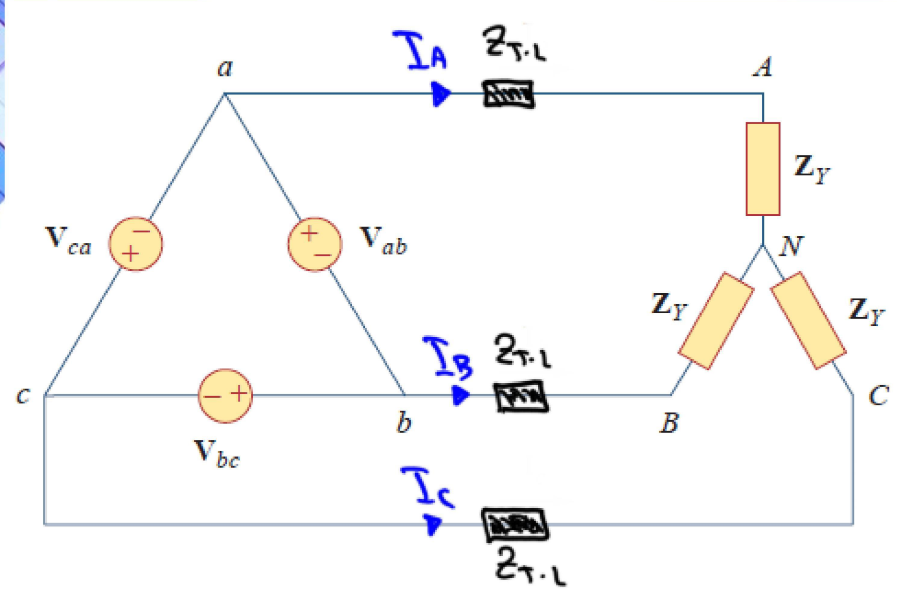
$\boxed{V_{AB} = 157.53\angle 32.1^\circ}$ → Phase = Line Voltage

Three-Phase Circuits

3. Balanced Delta – Star connection

- **Given**: $\mathbf{V}_{ab} = V_p\angle 0^\circ,\quad \mathbf{V}_{bc} = V_p\angle -120^\circ$
  $\mathbf{V}_{ca} = V_p\angle +120^\circ$

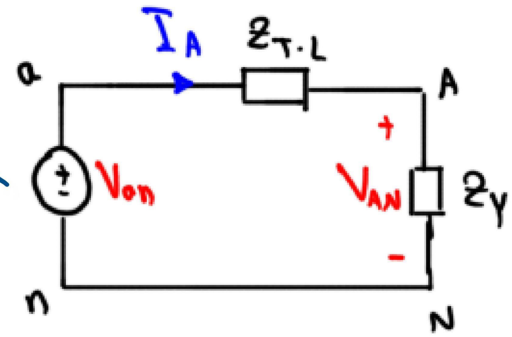
- To be able to draw per phase equivalent circuit, we need to convert delta supply into **star supply**



single -phase equivalent circuit

$\therefore V_{ab} = V_P \angle 0$

$$\boxed{\therefore V_{an} = \frac{V_P}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ}$$

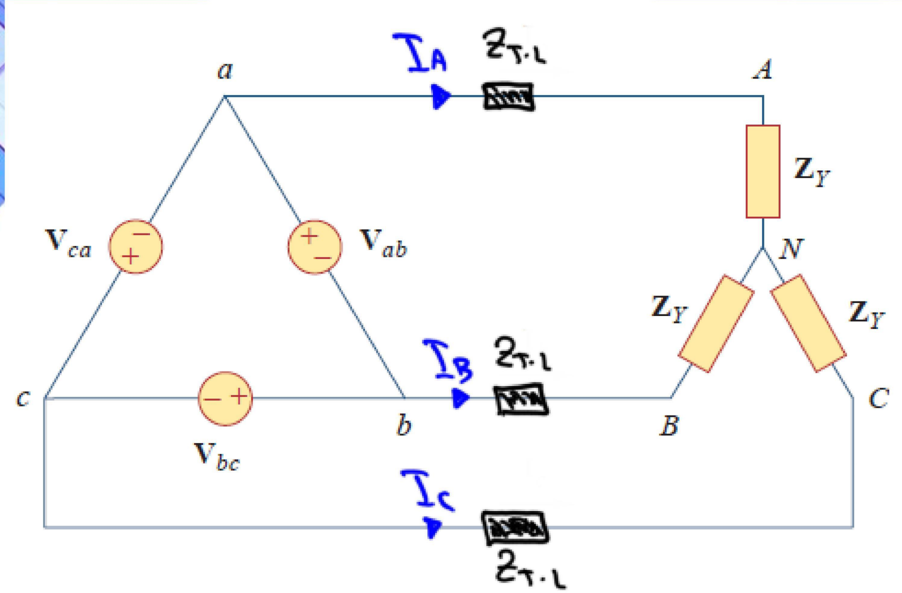


Three-Phase Circuits

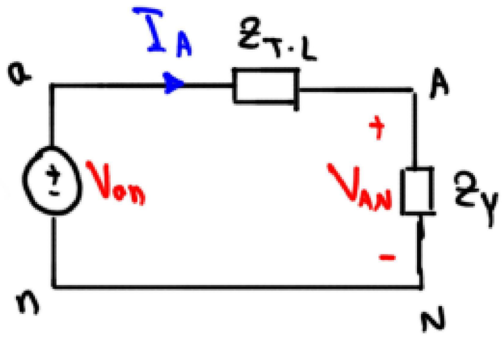
3. Balanced Delta – Star connection

➤ **Given**: $\mathbf{V}_{ab} = V_p\angle 0^\circ, \quad \mathbf{V}_{bc} = V_p\angle -120^\circ$

$$\mathbf{V}_{ca} = V_p\angle +120^\circ$$



single -phase equivalent circuit



➤ **Load line or phase currents**

$$* \; I_A = \frac{V_{an}}{Z_{T.L} + Z_Y} = I\angle\theta$$

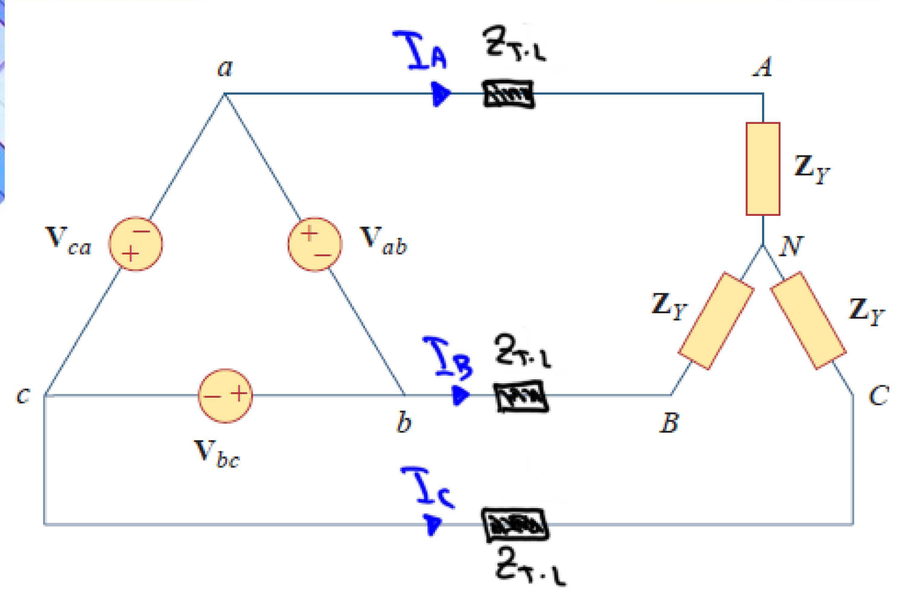
$$* \; I_B = I\angle\theta - 120^\circ$$

$$* \; I_C = I\angle\theta + 120^\circ$$

Three-Phase Circuits

3. Balanced Delta – Star connection

- **Given**: $\mathbf{V}_{ab} = V_p\angle 0°, \quad \mathbf{V}_{bc} = V_p\angle -120°$
  $\mathbf{V}_{ca} = V_p\angle +120°$



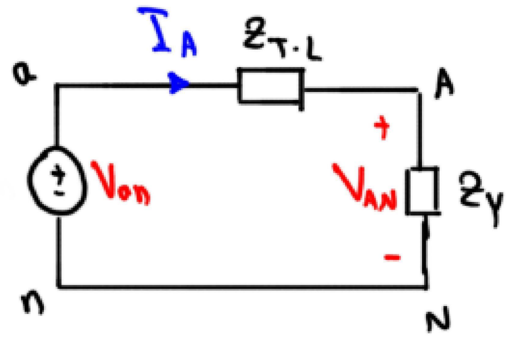
single -phase
equivalent circuit

- **Load phase voltages**

$* \; V_{AN} = I_A Z_Y = V\angle\theta_v$

$* \; V_{BN} = V\angle\theta_v - 120°$

$* \; V_{CN} = V\angle\theta_v + 120°$

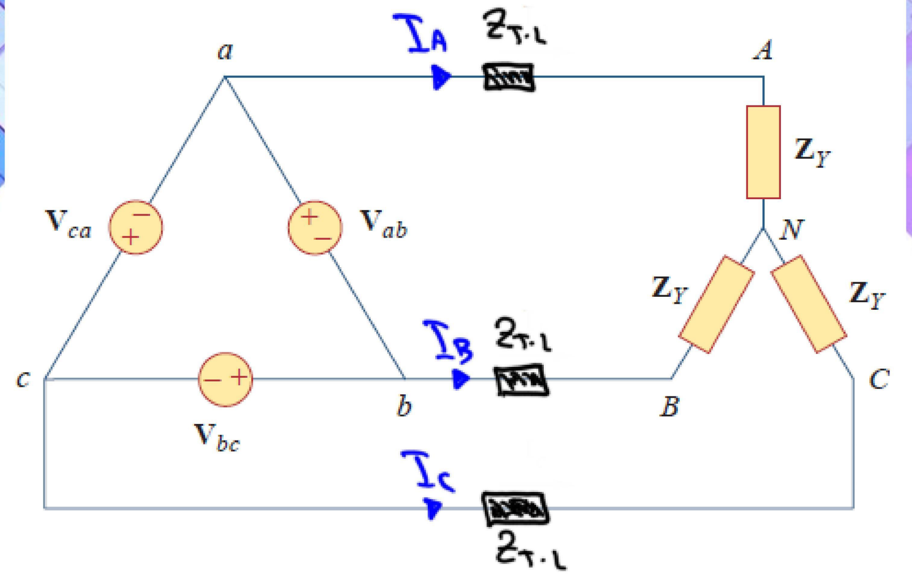


Three-Phase Circuits

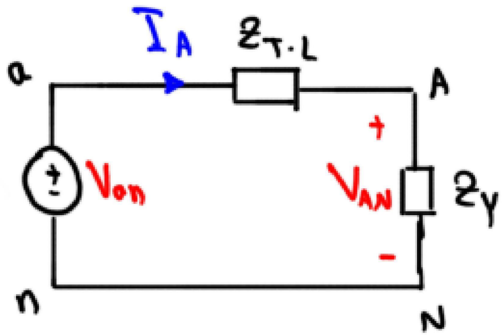
3. Balanced Delta – Star connection

➢ **Given**: $\mathbf{V}_{ab} = V_p\angle 0°, \quad \mathbf{V}_{bc} = V_p\angle -120°$

$\mathbf{V}_{ca} = V_p\angle +120°$



single -phase
equivalent circuit



➢ **Load line voltages**

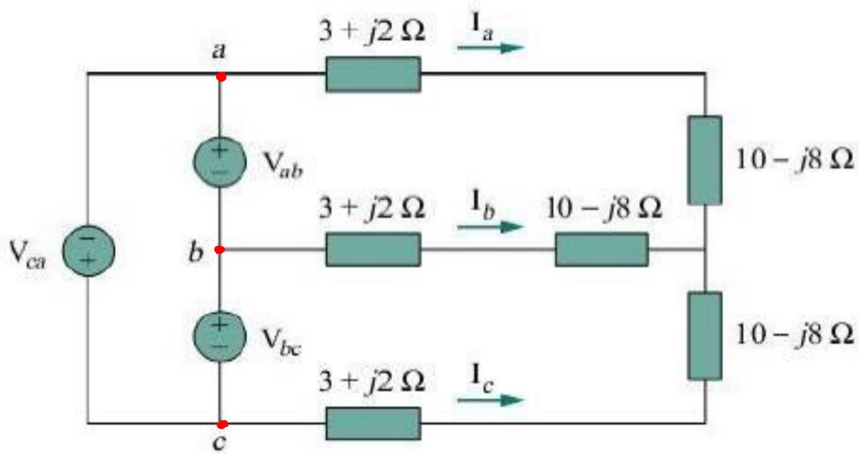
* $V_{AB} = \sqrt{3}\, V \angle \theta_v + 30$

* $V_{BC} = \sqrt{3}\, V \angle \theta_v - 90$

* $V_{CA} = \sqrt{3}\, V \angle \theta_v + 150$

Example

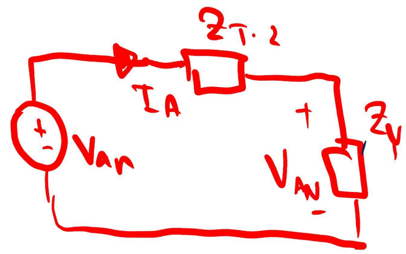
Find the line currents, the load phase voltages and line voltages for the system shown, if Vab=440∟10°.



* Δ - Supply → Y - Supply

$\rightarrow V_{an} = \frac{440}{\sqrt{3}} \angle 10-30^\circ \rightarrow \boxed{V_{an} = 254 \angle -20^\circ}$

* Line Current



$$I_A = \frac{254 \angle -20}{(10-8j)+(3+2j)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_A &= 17.74 \angle 4.7^\circ \\ I_B &= 17.74 \angle -115.8^\circ \\ I_C &= 17.74 \angle 124.7^\circ \end{aligned}}$$

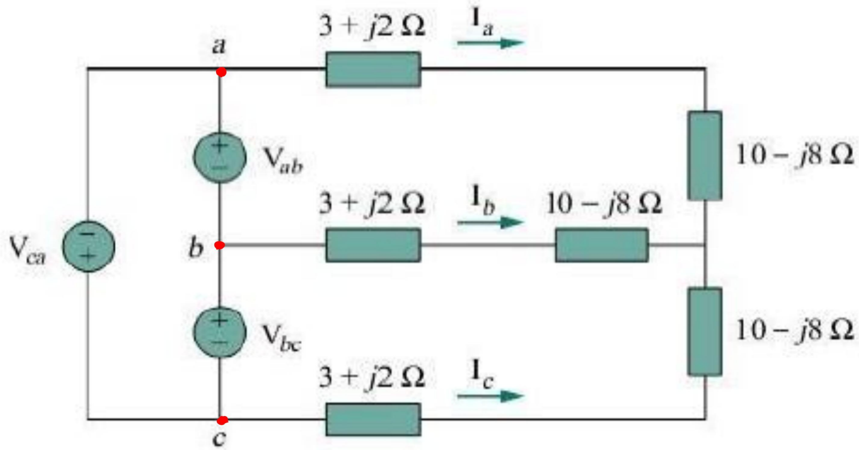
* Load Phase Voltages

$$V_{AN} = I_A Z_Y = (17.74 \angle 4.7)(10-8j)$$

$$\boxed{\begin{aligned} V_{AN} &= 227.18 \angle -33.8^\circ \\ V_{BN} &= 227.18 \angle -153.8^\circ \\ V_{CN} &= 227.18 \angle 86.2^\circ \end{aligned}}$$

Example

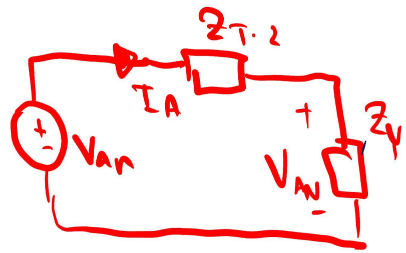
Find the line currents, the load phase voltages and line voltages for the system shown, if Vab=440∠10°.



* Δ - Supply → Y - Supply

$\rightarrow V_{an} = \frac{440}{\sqrt{3}} \angle 10-30^\circ \rightarrow \boxed{V_{an} = 254 \angle -20^\circ}$

* Line Voltages.



$V_{AB} = 227.18\sqrt{3} \angle -33.8+30$

$V_{AB} = 393.48 \angle -3.8^\circ$

$V_{BC} = 393.48 \angle -123.8^\circ$

$V_{CA} = 393.48 \angle 116.2^\circ$

* Load Phase Voltages

$V_{AN} = I_A Z_Y = (17.74 \angle 4.7)(10-8j)$

$V_{AN} = 227.18 \angle -33.8^\circ$

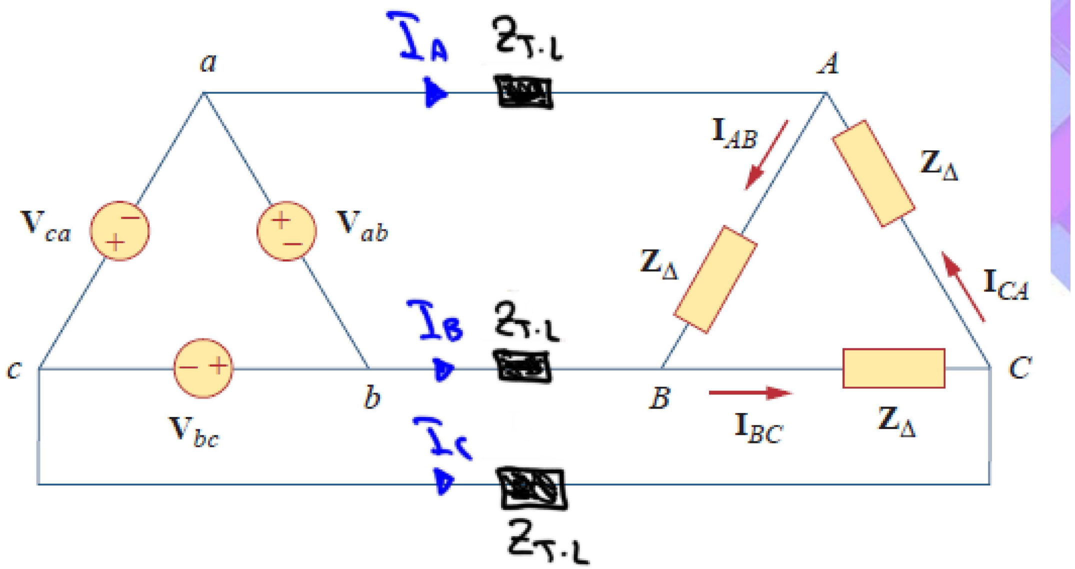
$V_{BN} = 227.18 \angle -153.8^\circ$

$V_{CN} = 227.18 \angle 86.2^\circ$

Three-Phase Circuits

4. Balanced Delta – Delta connection

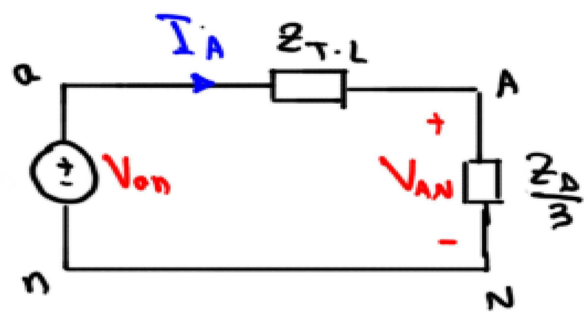
➢ **Given**: $\mathbf{V}_{ab} = V_p\angle 0^\circ, \quad \mathbf{V}_{bc} = V_p\angle -120^\circ$
$\mathbf{V}_{ca} = V_p\angle +120^\circ$



➢ To be able to draw per phase equivalent circuit, we need to convert delta supply into **star supply**

$$\because V_{ab} = V_p\angle 0 \rightarrow \boxed{\therefore V_{an} = \frac{V_p}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ}$$

single -phase equivalent circuit



➢ Delta connected load is converted to **star connected load**

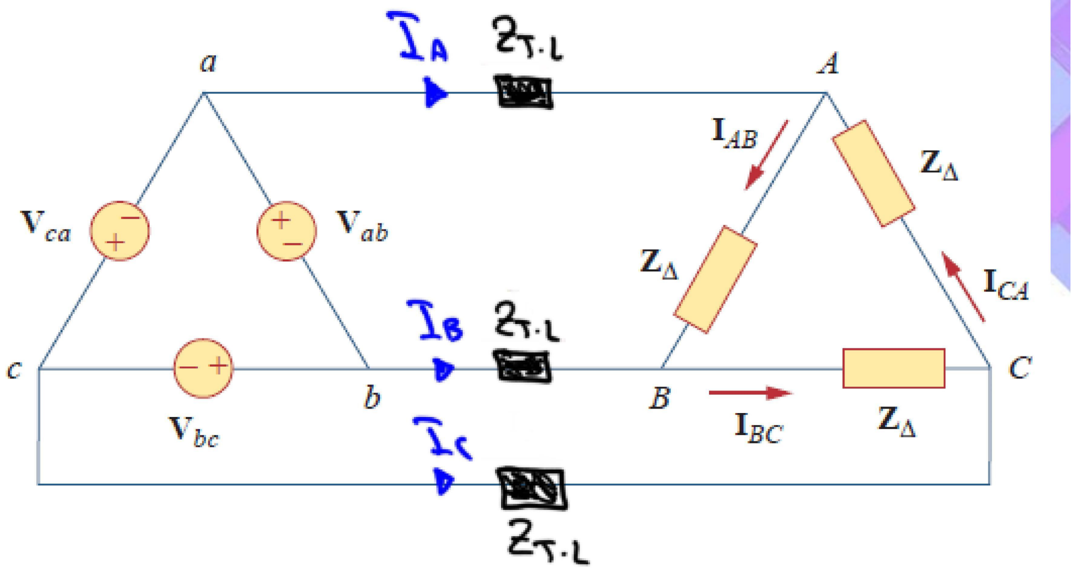
$$\boxed{Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}}$$

Three-Phase Circuits

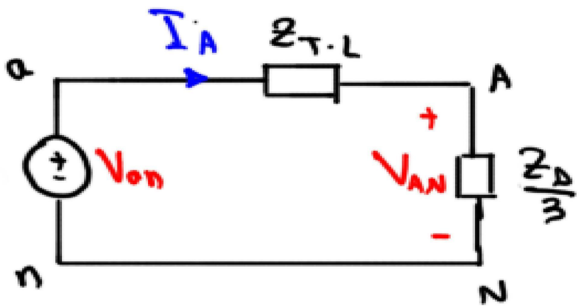
4. Balanced Delta – Delta connection

➢ **Given**: $\mathbf{V}_{ab} = V_p\angle 0°, \quad \mathbf{V}_{bc} = V_p\angle -120°$

$$\mathbf{V}_{ca} = V_p\angle +120°$$



single -phase
equivalent circuit



➢ **Load line currents**

$$* \; I_A = \frac{V_{an}}{Z_{T.L} + \frac{Z_\Delta}{3}} = I\angle\theta$$

$$* \; I_B = I\angle\theta - 120°$$

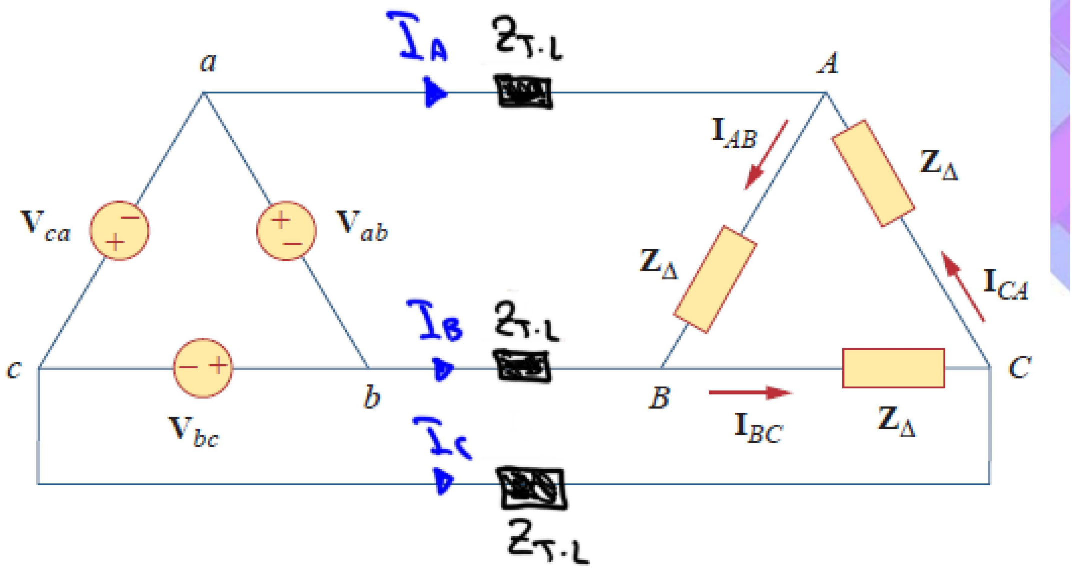
$$* \; I_C = I\angle\theta + 120°$$

Three-Phase Circuits

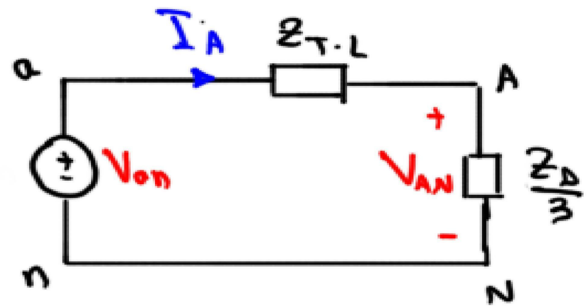
4. Balanced Delta – Delta connection

➢ **Given**: $\mathbf{V}_{ab} = V_p\angle 0^\circ, \qquad \mathbf{V}_{bc} = V_p\angle -120^\circ$

$$\mathbf{V}_{ca} = V_p\angle +120^\circ$$



single -phase
equivalent circuit



➢ Load phase currents

* $I_{AB} = \frac{I}{\sqrt{3}}\angle\theta+30$

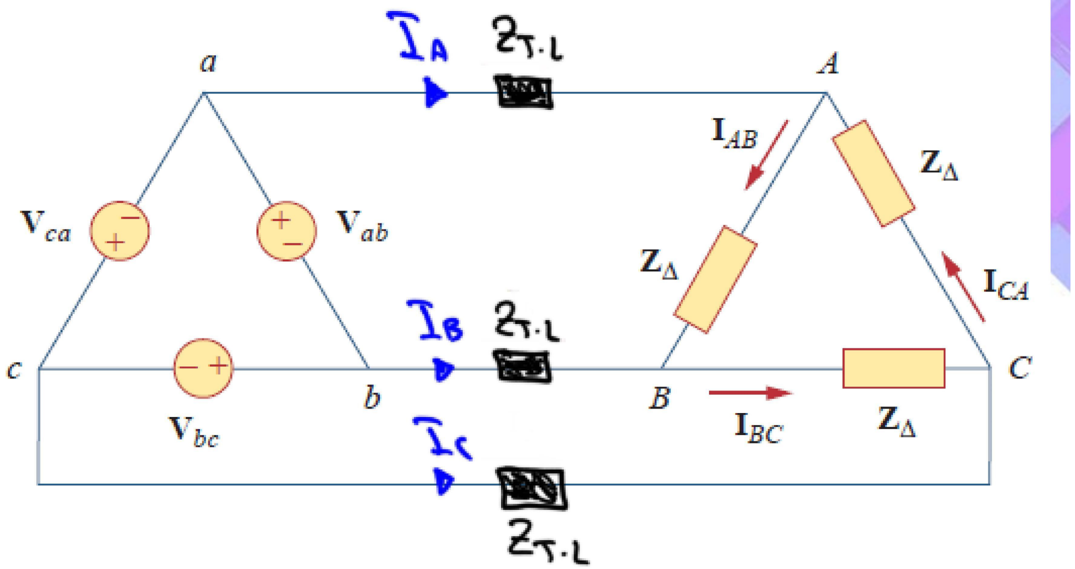
* $I_{BC} = \frac{I}{\sqrt{3}}\angle\theta-90$

* $I_{CA} = \frac{I}{\sqrt{3}}\angle\theta+150$

Three-Phase Circuits

4. Balanced Delta – Delta connection

- **Given**: $\mathbf{V}_{ab} = V_p\angle 0^\circ, \quad \mathbf{V}_{bc} = V_p\angle -120^\circ$
  $\mathbf{V}_{ca} = V_p\angle +120^\circ$



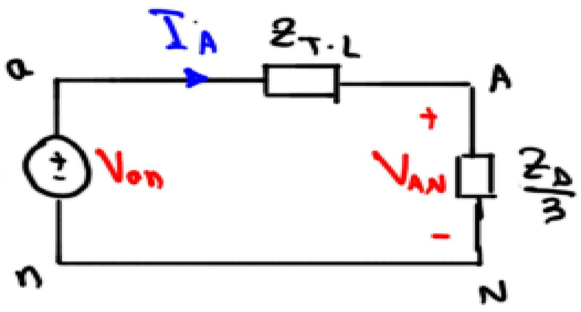
- **Load phase or line voltages**

$$* \; V_{AB} = I_{AB} Z_\Delta = V\angle\theta_v$$

$$* \; V_{BC} = V\angle\theta_v - 120$$

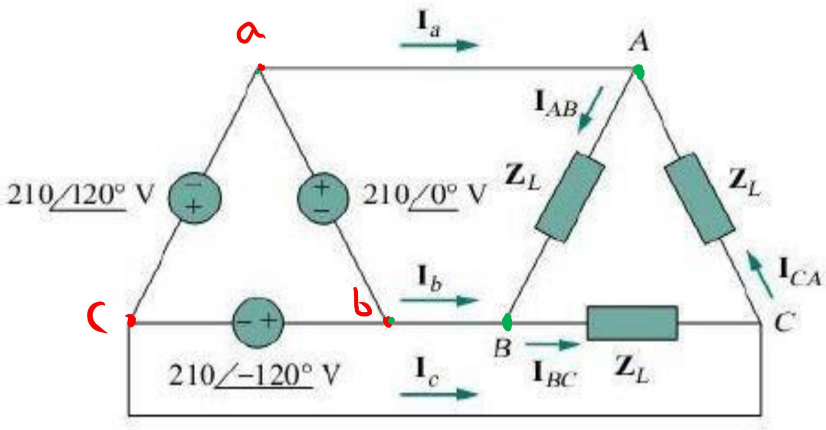
$$* \; V_{CA} = V\angle\theta_v + 120^\circ$$

single -phase equivalent circuit



Example

Calculate the phase and line currents for the following circuit.

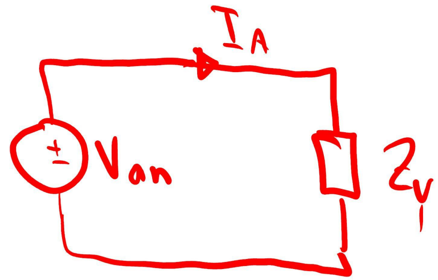


$Z_L = 12 + j9\ \Omega$

* $V_{ab} = 210\angle 0$ V , $Z_D = 12 + 9J$

$\boxed{V_{an} = \frac{210}{\sqrt{3}} \angle 0 - 30^\circ \text{ V}}$, $\boxed{Z_Y = \frac{Z_D}{3} = 4 + 3J}$

→ 1-Ph equiv. ct.



① Load line Current.

$$I_A = \frac{\frac{210}{\sqrt{3}} \angle -30}{4 + 3J} = \boxed{24.24 \angle -66.8^\circ}$$

② Load Phase Current.

$$I_{AB} = \frac{24.24}{\sqrt{3}} \angle -66.8 + 30^\circ$$

$$\boxed{I_{AB} = 14 \angle -36.8^\circ}$$

③ Load Ph or Line Voltage.

$V_{AB} = I_{AB} \cdot Z_D \rightarrow \boxed{V_{AB} = 210 \angle 0 \text{ V}}$ V_{ab}

Ασύμμετρα τριφασικά κυκλώματα

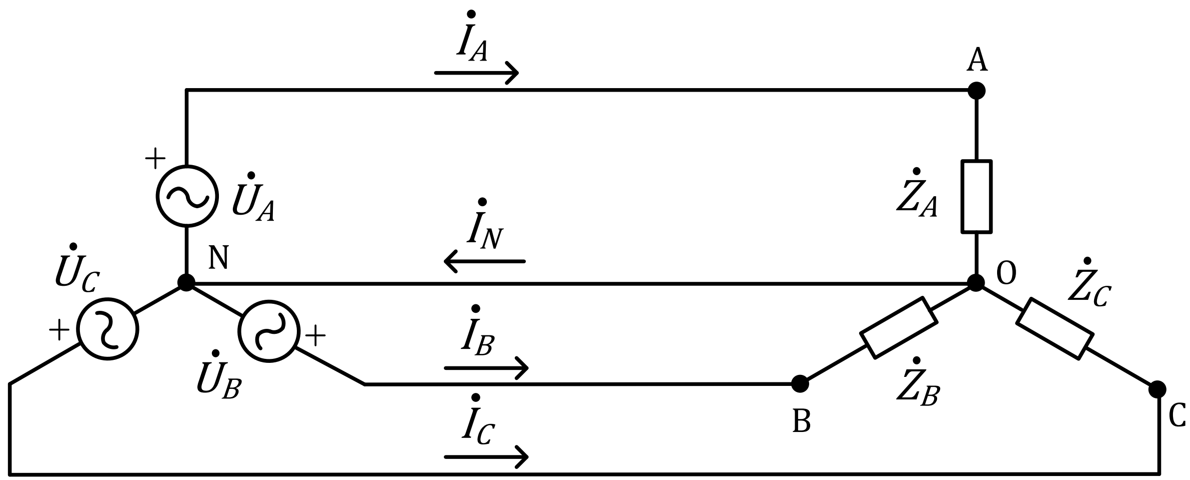
- Ένα κύκλωμα μπορεί να είναι μη συμμετρικό λόγω των τάσεων της πηγής ή της σύνθετης αντίστασης του φορτίου. Θα θεωρήσουμε τη δεύτερη περίπτωση.
- Για την ανάλυσή του χρησιμοποιούμε τις γνωστές τεχνικές ανάλυσης κυκλωμάτων (πχ μέθοδο βρόχων).
- Στον ασύμμετρο αστέρα 4 αγωγών με ιδανικούς αγωγούς (που δεν έχουν δηλαδή δική τους σύνθετη αντίσταση) αρκεί να λύσουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\dot{Z}_A}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\dot{Z}_B}$$

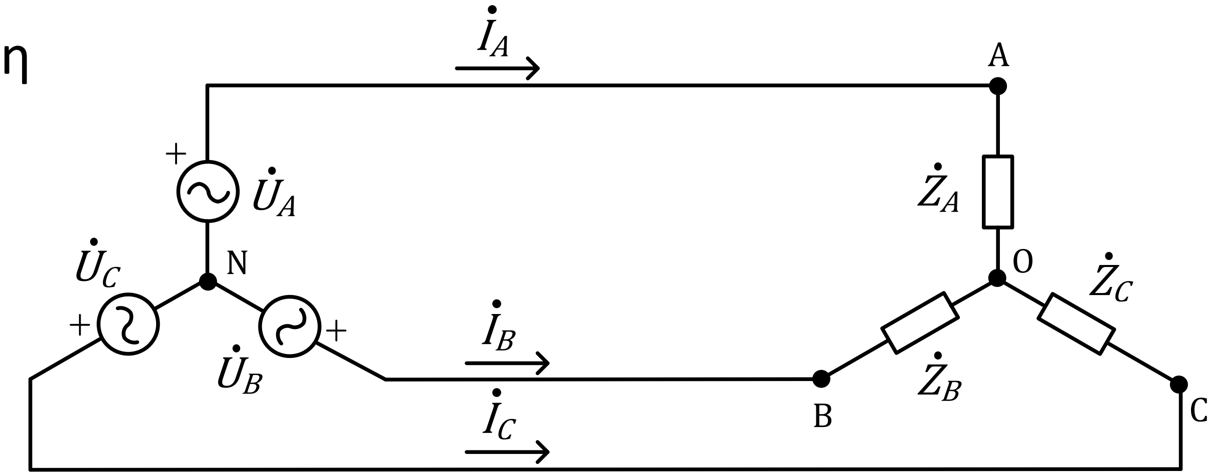
$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{Z}_C}$$

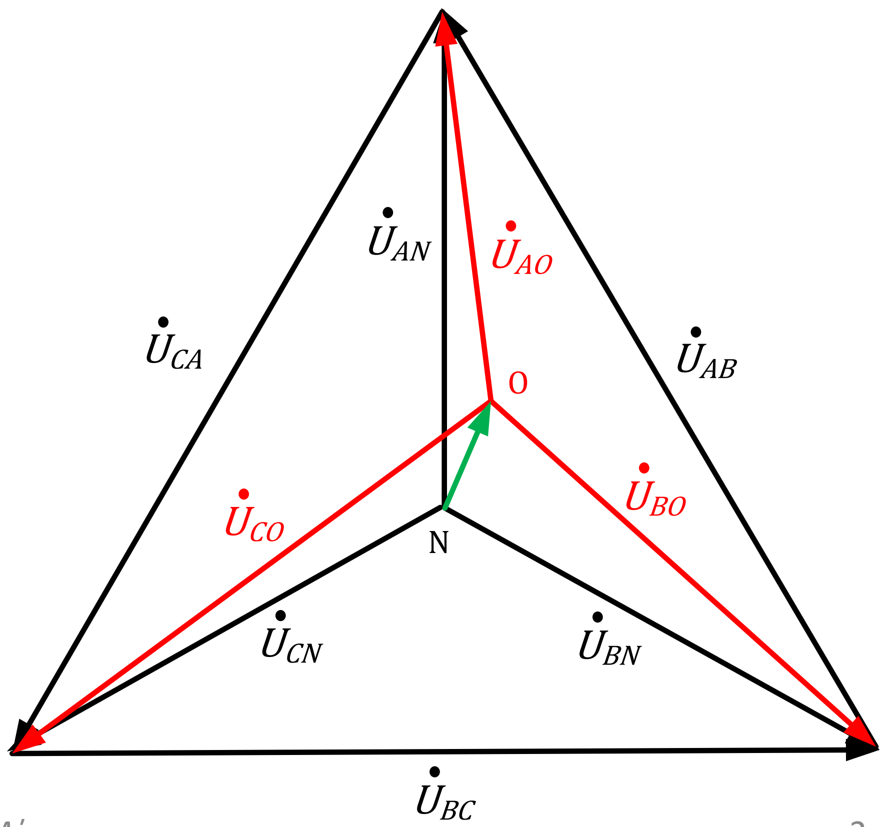
$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$$



Ασύμμετρα τριφασικά κυκλώματα σε Υ

- Όταν όμως δεν υπάρχει σύνδεση του ουδετέρου οι τάσεις στους κλάδους του αστέρα $\dot{U}_{AO}, \dot{U}_{BO}, \dot{U}_{CO}$ δεν είναι οι φασικές τάσεις της πηγής.
- Οι πολικές τάσεις βέβαια εξακολουθούν να είναι ίδιες.
- Μπορούμε πχ να χρησιμοποιήσουμε ανάλυση βρόχων για να βρούμε τις φασικές.
- Προκύπτει τότε ένα διανυσματικό διάγραμμα όπως αυτό που φαίνεται στο σχήμα.





Ασύμμετρα τριφασικά κυκλώματα σε Υ

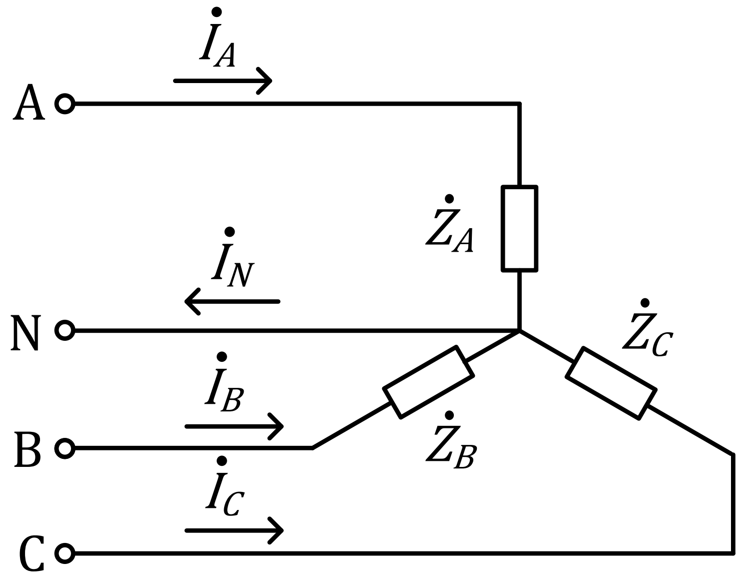
- Όπως φαίνεται από το διάγραμμα, από δύο φασικές τάσεις πχ τις $\dot{U}_{BO}, \dot{U}_{CO}$ προκύπτει η πολική $\dot{U}_{BC}$. Η ίδια πολική τάση προκύπτει και από τις $\dot{U}_{BN}, \dot{U}_{CN}$.
- Η τάση μεταξύ του κόμβου O του φορτίου και του κόμβου N της πηγής είναι $\dot{U}_{ON}$ και όχι μηδέν όπως θα ήταν αν υπήρχε σύνδεση του ουδετέρου ή αν το φορτίο ήταν συμμετρικό (με ή χωρίς σύνδεση ουδέτερου).
- Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται μετατόπιση του ουδετέρου και μπορεί να προκύψει σε μια πραγματική τριφασική εγκατάσταση αν για κάποιο λόγο κοπεί ο ουδέτερος.
- Τα φορτία σε μια τριφασική εγκατάσταση είναι στην πλειοψηφία τους μονοφασικά. Κατανέμονται σε 3 φάσεις και το συνολικό φορτίο σχηματίζει Υ.
- Όταν το φορτίο είναι συμμετρικός αστέρας είτε συνδέεται ο ουδέτερος κόμβος του αστέρα με αυτόν της πηγής είτε όχι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο. Δεν ρέει ρεύμα στον αγωγό αυτό και οι τάσεις στους κλάδους του αστέρα είναι οι φασικές τάσεις της πηγής.

Ασύμμετρα τριφασικά κυκλώματα σε Υ

- Αν και γίνεται προσπάθεια ισοκατανομής των φορτίων στις φάσεις, το αποτέλεσμα δεν μπορεί ποτέ να είναι συμμετρικό. Επειδή όμως ο ουδέτερος του φορτίου συνδέεται με τον ουδέτερο της πηγής, οι τάσεις στα φορτία είναι οι φασικές τάσεις της πηγής δηλαδή $230\ \mathrm{V}$. Τότε βέβαια ρέει ρεύμα στον ουδέτερο.
- Αν για οποιονδήποτε λόγο διακοπεί ο ουδέτερος, τότε λόγω της μετατόπισης του ουδετέρου οι τάσεις στους κλάδους του αστέρα λαμβάνουν διαφορετικές τιμές από τις αναμενόμενες.
- Τα φορτία όμως αντέχουν ορισμένη τιμή τάσης (ονομαστική τάση) με κάποια μικρή ανοχή. Υπό υψηλότερη ή χαμηλότερη τάση από την ονομαστική τους μπορεί να μην λειτουργούν κανονικά ή ακόμη και να καταστραφούν.
- Είναι λοιπόν πολύ σημαντικό να υπάρχει ουδέτερος σε μια τριφασική εγκατάσταση.

Παράδειγμα 5

- Θεωρούμε ότι το φορτίο του σχήματος τροφοδοτείται από τριφασικό συμμετρικό σύστημα τάσεων αρνητικής ακολουθίας με $U = 400\ \mathrm{V}$ και $\dot{Z}_A = 10\ \Omega$, $\dot{Z}_B = 10\angle 30°\ \Omega$, $\dot{Z}_C = 10\angle 45°\ \Omega$. Να υπολογιστούν τα ρεύματα.



Απάντηση:

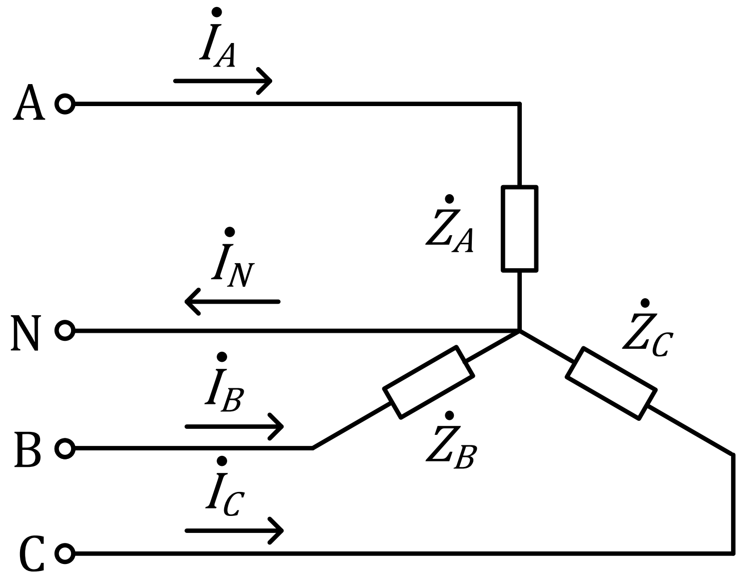
- Επειδή η ακολουθία είναι αρνητική οι φασικές τάσεις της πηγής είναι

$$\dot{U}_A = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle(-90°)\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_B = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle 30°\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_C = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle 150°\ \mathrm{V}$$

Παράδειγμα 5



- Τα ρεύματα θα είναι

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\dot{Z}_A} = 23.1\angle(-90°)\ \mathrm{A}$$

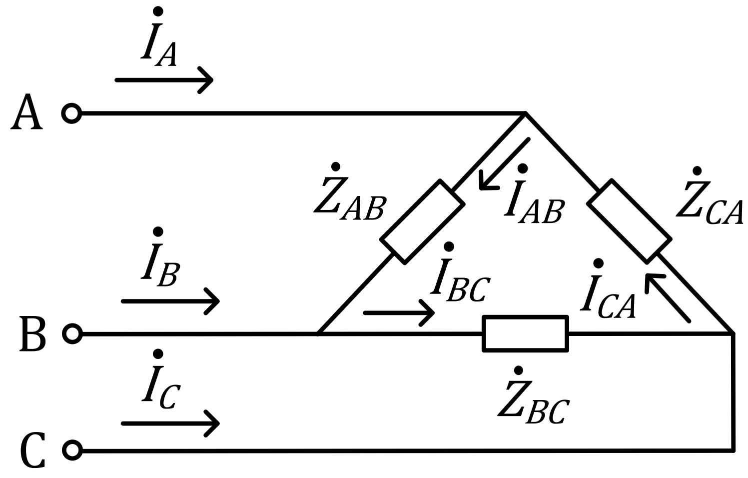
$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\dot{Z}_B} = 23.1\angle 0°\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{Z}_C} = 23.1\angle 105°\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 17.1\angle(-2.6°)\ \mathrm{A}$$

- Οι σύνθετες αντιστάσεις μπορεί να έχουν ίδια μέτρα έχουν όμως διαφορετικές γωνίες, οπότε το φορτίο δεν είναι συμμετρικό. Γι’ αυτό προκύπτει μη μηδενικό ρεύμα στον ουδέτερο αγωγό.

Παράδειγμα 6



- Θεωρούμε ότι το φορτίο του σχήματος τροφοδοτείται από τριφασικό συμμετρικό σύστημα τάσεων θετικής ακολουθίας με $U = 400$ V και $\dot{Z}_{AB} = 10\ \Omega$, $\dot{Z}_{BC} = 10\angle 30°\ \Omega$, $\dot{Z}_{CA} = 15\angle 30°\ \Omega$. Να υπολογιστούν τα ρεύματα.

Απάντηση:

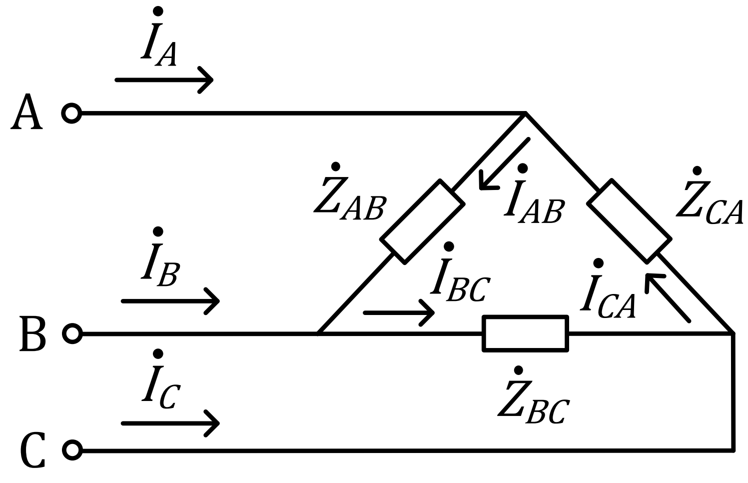
- Οι τάσεις στα άκρα των κλάδων του Δ είναι οι πολικές τάσεις της πηγής, αφού οι αγωγοί θεωρούνται ιδανικοί. Επομένως τα ρεύματα των κλάδων είναι

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_{AB}} = \frac{400\angle 120°}{10} = 400\angle 120°\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{Z}_{BC}} = \frac{400}{10\angle 30°} = 40\angle(-30°)\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\dot{Z}_{CA}} = \frac{400\angle(-120°)}{15\angle 30°} = 26.7\angle(-150°)\ \text{A}$$

Παράδειγμα 6



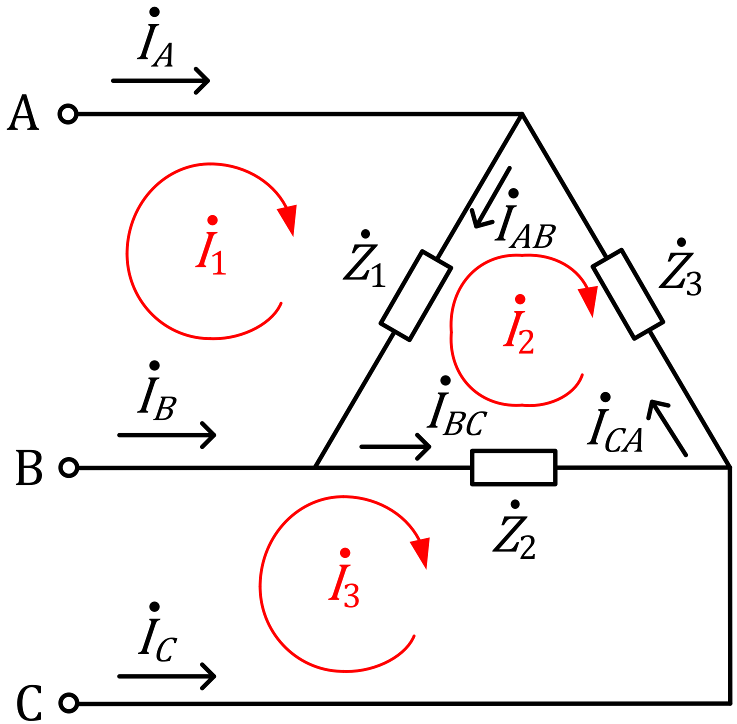
- Τα ρεύματα των γραμμών θα είναι

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 48.1\angle 86.3°\ \mathrm{A}$$
$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = 77.3\angle(-45°)\ \mathrm{A}$$
$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = 58.1\angle 173.4°\ \mathrm{A}$$

- Γενικά οι άγνωστοι είναι 6 και επομένως χρειάζονται 6 ανεξάρτητες εξισώσεις για να τους υπολογίσουμε (σύστημα 6 x 6).
- Βέβαια η περίπτωση αυτή είναι σχετικά απλή, γιατί οι τάσεις στις αντιστάσεις είναι γνωστές και οι 3 πρώτες εξισώσεις προέκυψαν με απλή εφαρμογή του νόμου του Ohm, οπότε υπολογίσαμε χωρίς πολύ κόπο τα 3 ρεύματα.

Παράδειγμα 7

- Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $U = 400\ \mathrm{V}$, $\dot{Z}_1 = 10 - j5\ \Omega$, $\dot{Z}_2 = 5 + j4\ \Omega$, $\dot{Z}_3 = 12 + j6\ \Omega$.
- Να βρεθούν τα ρεύματα γραμμών. Να θεωρηθεί σύστημα τάσεων θετικής ακολουθίας.



Απάντηση:

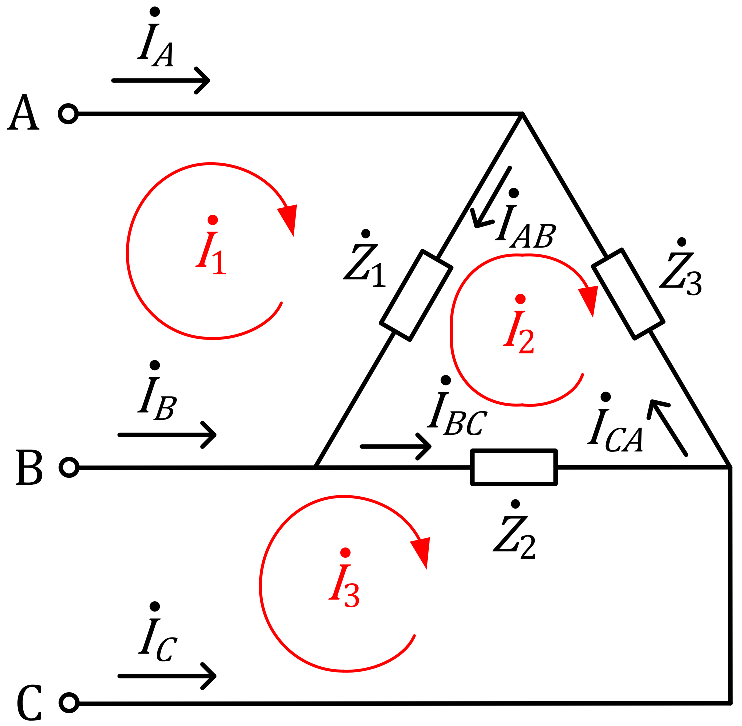
- Εφαρμόζεται ανάλυση βρόχων:

$$-\dot{U}_{AB} + \dot{Z}_1(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) = 0 \Rightarrow -\dot{U}_{AB} + \dot{Z}_1\dot{I}_1 - \dot{Z}_1\dot{I}_2 = 0$$
$$-\dot{U}_{BC} + \dot{Z}_2(\dot{I}_3 - \dot{I}_2) = 0 \Rightarrow -\dot{U}_{BC} - \dot{Z}_2\dot{I}_2 + \dot{Z}_2\dot{I}_3 = 0$$
$$\dot{Z}_1(\dot{I}_2 - \dot{I}_1) + \dot{Z}_3\dot{I}_2 + \dot{Z}_2(\dot{I}_2 - \dot{I}_3) = 0 \Rightarrow -\dot{Z}_1\dot{I}_1 + (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3)\dot{I}_2 - \dot{Z}_2\dot{I}_3 = 0$$

- Με αντικατάσταση του $\dot{I}_3$ από τη δεύτερη στην τρίτη:

$$\dot{Z}_1\dot{I}_1 - \dot{Z}_1\dot{I}_2 = \dot{U}_{AB} \Rightarrow (10 - j5)\dot{I}_1 - (10 - j5)\dot{I}_2 = 400\angle 120°$$
$$-\dot{Z}_1\dot{I}_1 + (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3)\dot{I}_2 = \dot{U}_{BC} \Rightarrow -(10 - j5)\dot{I}_1 + (10 - j5 + 12 + j6)\dot{I}_2 = 400$$

Παράδειγμα 7



- Βρίσκουμε τα εξής:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{Z}_1 & -\dot{Z}_1 \\ -\dot{Z}_1 & \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 \end{vmatrix} = 150$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{U}_{AB} & -\dot{Z}_1 \\ \dot{U}_{BC} & \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 \end{vmatrix} = -781 + j6183$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dot{Z}_1 & \dot{U}_{AB} \\ -\dot{Z}_1 & \dot{U}_{BC} \end{vmatrix} = 3905 + j2811$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 41.548\angle 97.2°\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 32.076\angle 35.7°\ \mathrm{A}$$

- Επίσης

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{BC} + \dot{Z}_2\dot{I}_2}{\dot{Z}_2} = 77.517\angle(-15.2°)\ \mathrm{A}$$

Παράδειγμα 7

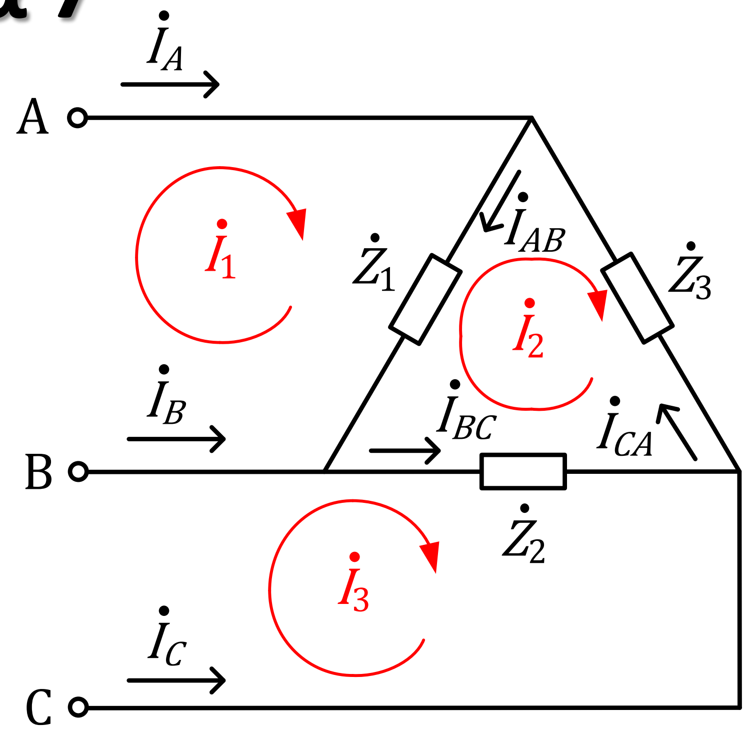
- Οπότε τα ρεύματα γραμμών είναι

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 = 41.548\angle 97.2° \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_3 - \dot{I}_1 = 100.930\angle(-37.5°) \text{ A}$$

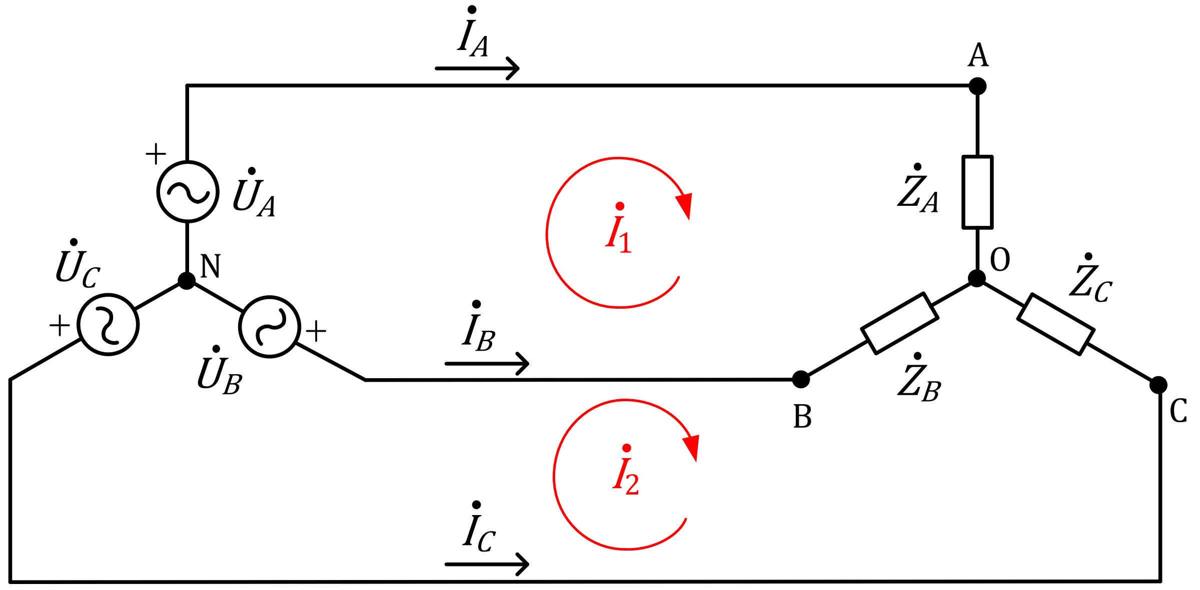
$$\dot{I}_C = \dot{I}_3 = 77.517\angle(-15.2°) \text{ A}$$

- Σημαντική παρατήρηση: Αν υπήρχε και σύνθετη αντίσταση στις γραμμές (βλ. διαφάνεια 22) μια συστηματική μέθοδος ανάλυσης όπως αυτή που εφαρμόστηκε εδώ θα ήταν σίγουρα προτιμότερη από ένα σύστημα 6 x 6 που προκύπτει με απλή εφαρμογή νόμων Kirchhoff.



Παράδειγμα 8

- Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $U_\varphi = 230$ V, $\dot{Z}_A = 20 + j15\ \Omega$, $\dot{Z}_B = 15 + j10\ \Omega$, $\dot{Z}_C = 10 - j18\ \Omega$.
- Να βρεθούν τα ρεύματα των γραμμών και οι τάσεις στα φορτία.



- Θεωρούμε θετική ακολουθία φάσεων.

Απάντηση:

- Χρησιμοποιούμε ανάλυση βρόχων. Προκύπτουν οι εξισώσεις:

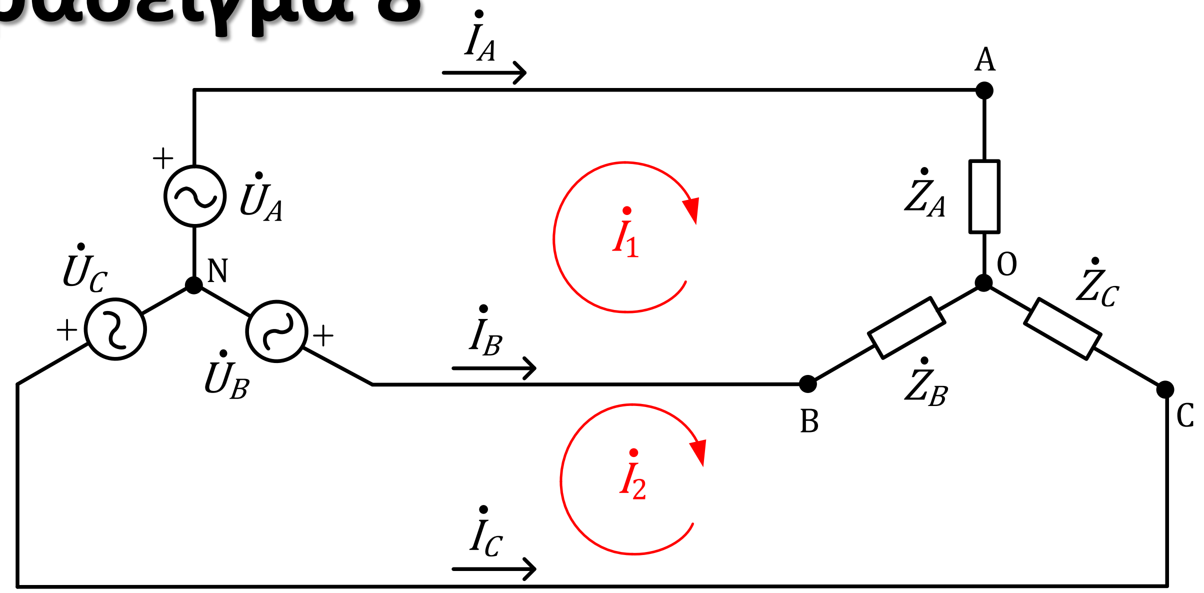
$$-\dot{U}_{AN} + \dot{I}_1\dot{Z}_A + \left(\dot{I}_1 - \dot{I}_2\right)\dot{Z}_B + \dot{U}_{BN} = 0 \Rightarrow \dot{I}_1\dot{Z}_A + \left(\dot{I}_1 - \dot{I}_2\right)\dot{Z}_B = \dot{U}_{AB}$$

$$\Rightarrow (\dot{Z}_A + \dot{Z}_B)\dot{I}_1 - \dot{Z}_B\dot{I}_2 = \dot{U}_{AB} \Rightarrow (35 + j25)\dot{I}_1 - (15 + j10)\dot{I}_2 = 230\sqrt{3}\angle 120°$$

$$-\dot{U}_{BN} + \left(\dot{I}_2 - \dot{I}_1\right)\dot{Z}_B + \dot{I}_2\dot{Z}_C + \dot{U}_{CN} = 0 \Rightarrow \left(\dot{I}_2 - \dot{I}_1\right)\dot{Z}_B + \dot{I}_2\dot{Z}_C = \dot{U}_{BC}$$

$$\Rightarrow -\dot{Z}_B\dot{I}_1 + (\dot{Z}_B + \dot{Z}_C)\dot{I}_2 = \dot{U}_{BC} \Rightarrow -(15 + j10)\dot{I}_1 + (25 - j8)\dot{I}_2 = 230\sqrt{3}$$

Παράδειγμα 8



$$\Delta = \begin{vmatrix} 35 + j25 & -(15 + j10) \\ -(15 + j10) & 25 - j8 \end{vmatrix}$$
$$= 4650 - j5875$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 230\sqrt{3}\angle 120° & -(15 + j10) \\ 230\sqrt{3} & 25 - j8 \end{vmatrix} = 61640 + j43020$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 35 + j25 & 230\sqrt{3}\angle 120° \\ -(15 + j10) & 230\sqrt{3} \end{vmatrix} = 7505 + j13140$$

- Επομένως τα ρεύματα βρόχων είναι

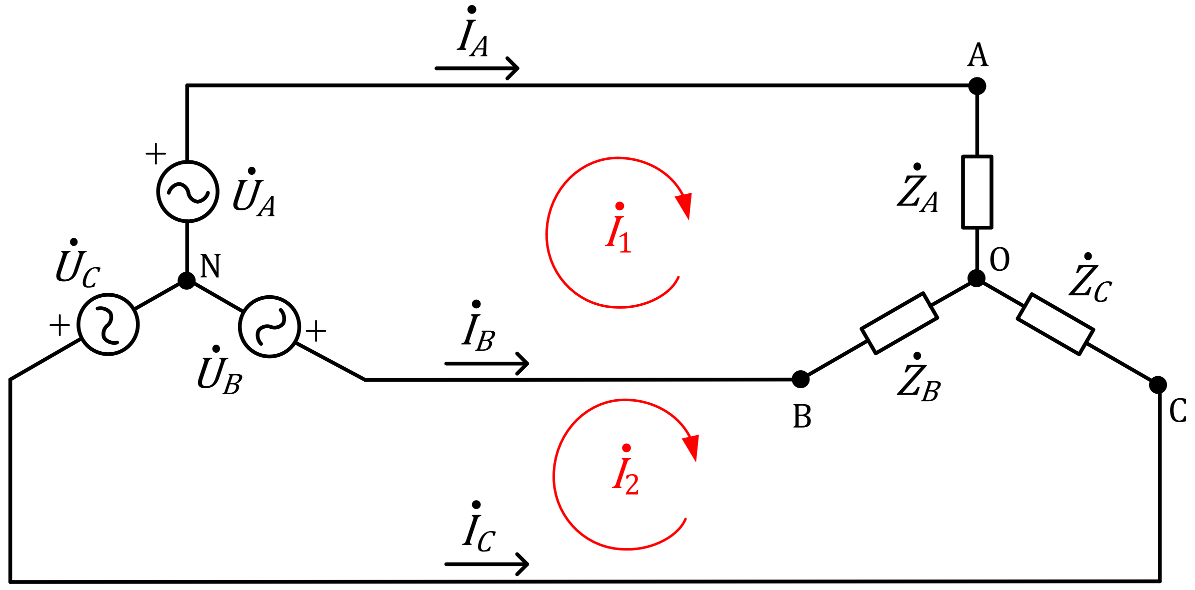
$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0.603 + j10.014 \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -0.754 + j1.874 \text{ A}$$

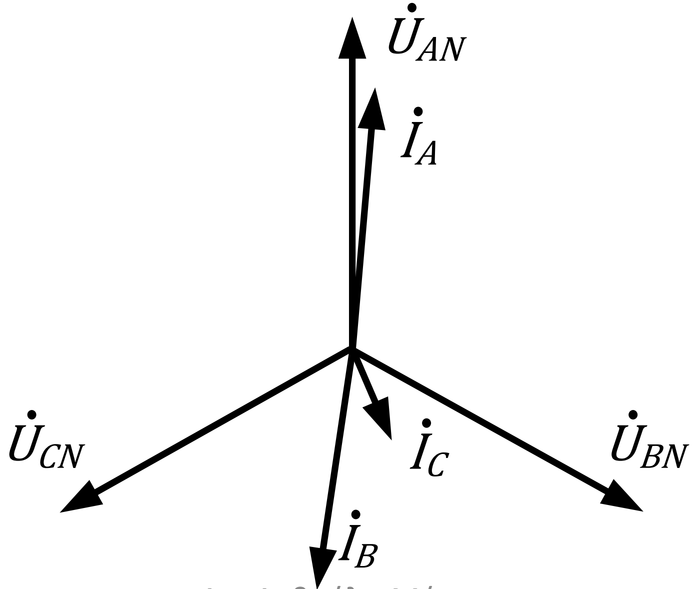
Παράδειγμα 8

- Τα ρεύματα των φάσεων είναι:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 = 10.032\angle 86.6° \text{ A}$$
$$\dot{I}_B = (\dot{I}_2 - \dot{I}_1)$$
$$= 8.252\angle(-99.5°) \text{ A}$$
$$\dot{I}_C = -\dot{I}_2 = 2.02\angle(-68.1°) \text{ A}$$



- Το διανυσματικό διάγραμμα των ρευμάτων του κυκλώματος μαζί με τις φασικές τάσεις είναι



Παράδειγμα 8

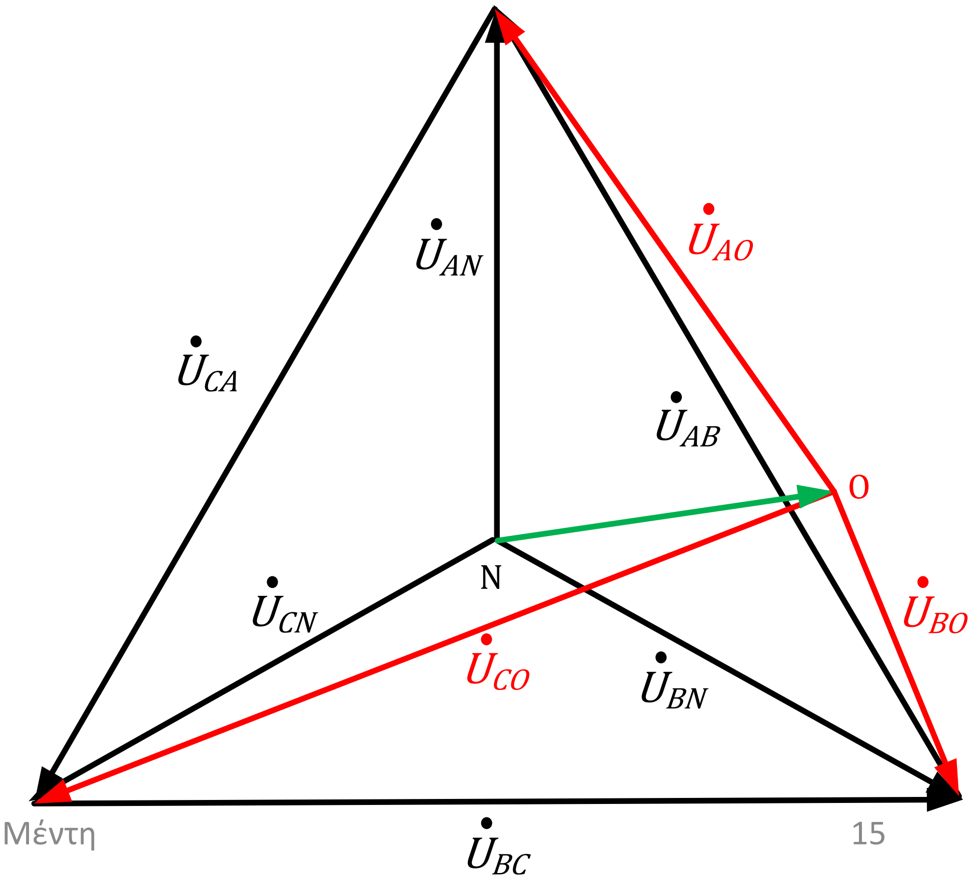
- Οι τάσεις στους κλάδους του αστέρα είναι $\dot{U}_{AO}, \dot{U}_{BO}, \dot{U}_{CO}$ και εφόσον δεν είναι συνδεδεμένος ο ουδέτερος του φορτίου με τον ουδέτερο της πηγής δεν θα είναι ίσες με τις φασικές τάσεις της πηγής $\dot{U}_{AN}, \dot{U}_{BN}, \dot{U}_{CN}$. Πράγματι:

$$\dot{U}_{AO} = \dot{I}_A \dot{Z}_A = 250.8\angle 123.4°\ \mathrm{V}$$
$$\dot{U}_{BO} = \dot{I}_B \dot{Z}_B = 148.8\angle(-65.8°)\ \mathrm{V}$$
$$\dot{U}_{CO} = \dot{I}_C \dot{Z}_C = 363.6\angle(-158.1°)\ \mathrm{V}$$

- Επίσης από το κύκλωμα προκύπτει ότι:

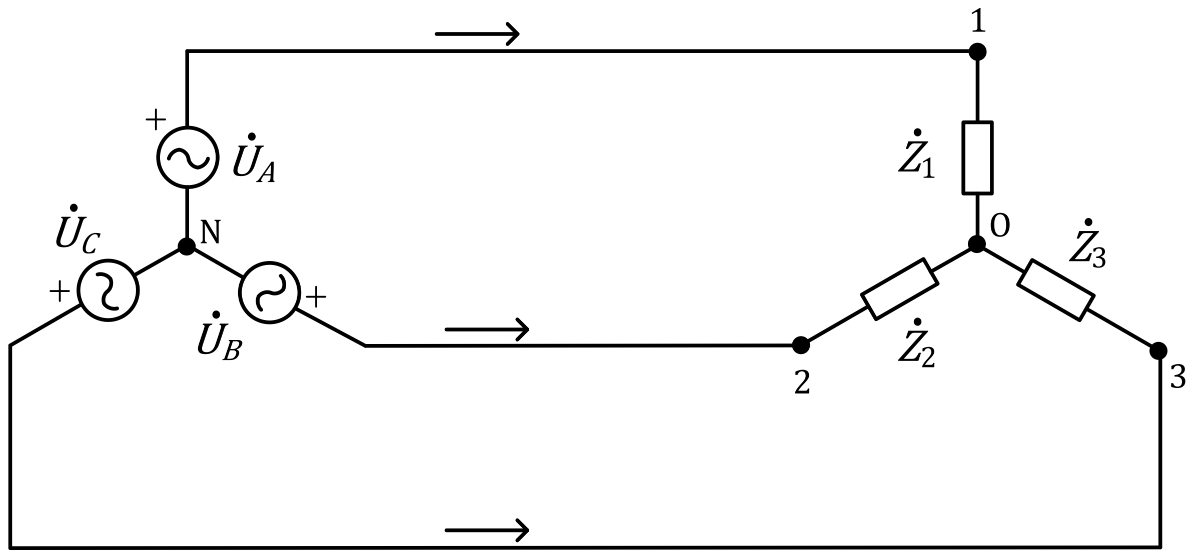
$$\dot{U}_{ON} = \dot{U}_{AN} - \dot{U}_{AO} = 138.1 + j20.7$$
$$= 139.7\angle 8.5°\ \mathrm{V}$$

- Το διανυσματικό διάγραμμα φασικών και πολικών τάσεων φαίνεται στο σχήμα.



Παράδειγμα 9

- Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $U = 400$ V, $\dot{Z}_1 = R$, $\dot{Z}_2 = R$, $\dot{Z}_3 = 1/j\omega C$, όπου $R = 1/\omega C$.
- Να βρεθεί η πτώση τάσης στις δύο ωμικές αντιστάσεις όταν η τάσεις της πηγής είναι θετικής ακολουθίας και όταν είναι αρνητικής ακολουθίας.



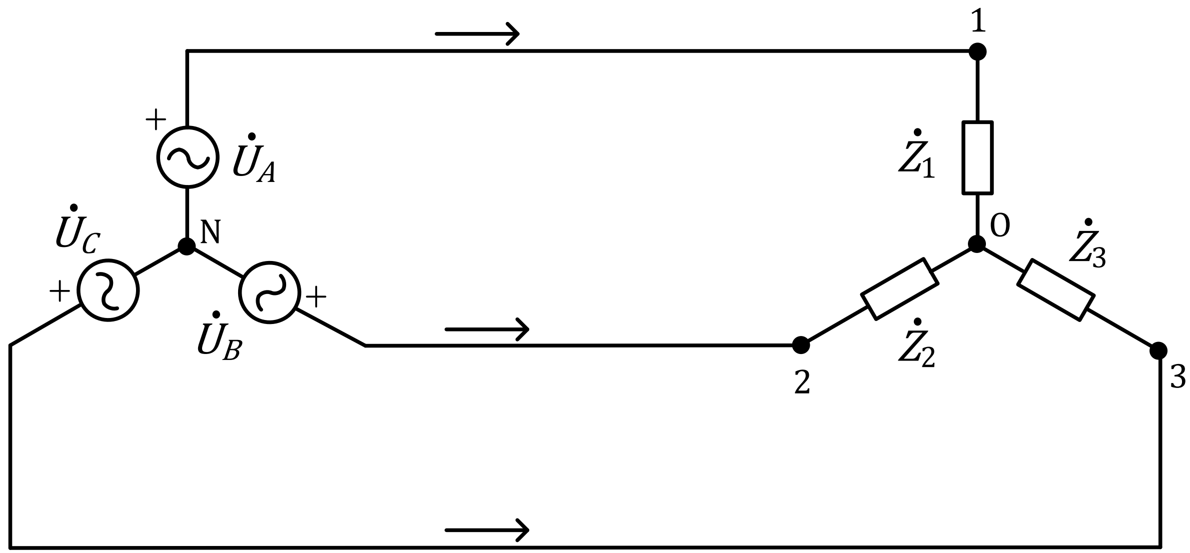
Απάντηση:

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ανάλυση κόμβων με κόμβο αναφοράς τον N
  Λόγω των πηγών τάσης στους κόμβους 1,2 και 3 ισχύει ότι:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_A$$
$$\dot{U}_2 = \dot{U}_B$$
$$\dot{U}_3 = \dot{U}_C$$

Παράδειγμα 9

- Στον κόμβο O εφαρμόζουμε KCL:



$$\frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_O}{\dot{Z}_1} + \frac{\dot{U}_2 - \dot{U}_O}{\dot{Z}_2} + \frac{\dot{U}_3 - \dot{U}_O}{\dot{Z}_3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{U}_O}{\dot{Z}_1} + \frac{\dot{U}_O}{\dot{Z}_2} + \frac{\dot{U}_O}{\dot{Z}_3} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\dot{U}_3}{\dot{Z}_3}$$

$$\Rightarrow \dot{U}_O\left(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3\right) = \dot{U}_1\dot{Y}_1 + \dot{U}_2\dot{Y}_2 + \dot{U}_3\dot{Y}_3$$

$$\Rightarrow \dot{U}_O = \frac{\dot{U}_1\dot{Y}_1 + \dot{U}_2\dot{Y}_2 + \dot{U}_3\dot{Y}_3}{\left(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3\right)}$$

- Παρατήρηση: Υπενθυμίζεται ότι οι τάσεις στις παραπάνω εξισώσεις είναι οι τάσεις των κόμβων ως προς τον κόμβο αναφοράς, δηλαδή τον κόμβο N. Άρα η τάση που υπολογίσαμε είναι η $\dot{U}_{ON}$ που εκφράζει τη μετατόπιση του ουδετέρου λόγω της ασυμμετρίας του φορτίου.

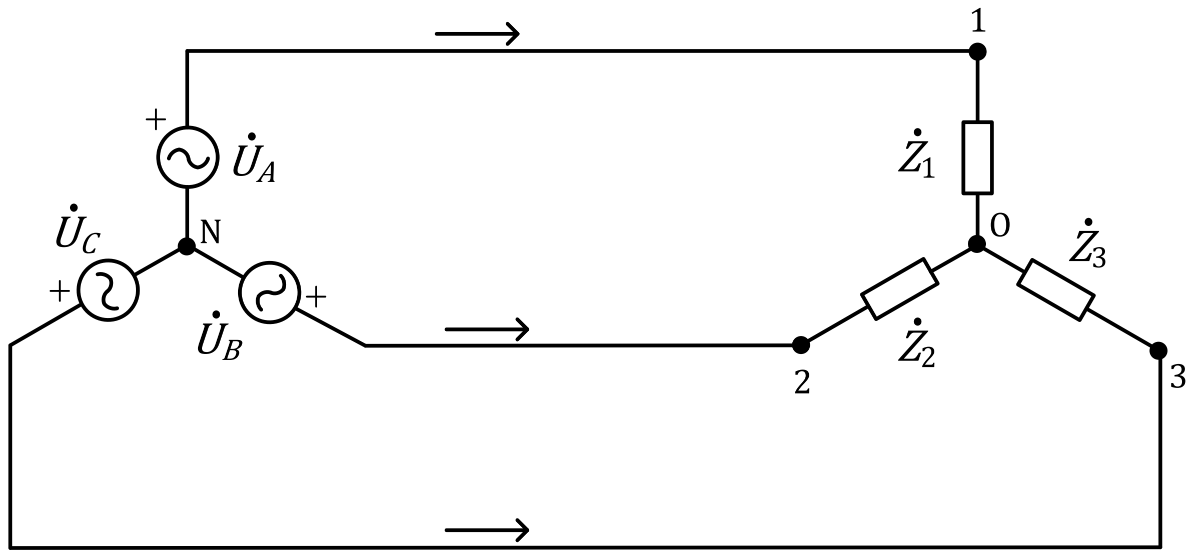
Παράδειγμα 9

- Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης ισχύει ότι:

$$\dot{Y}_1 = \dot{Y}_2 = \frac{1}{R}$$

Και

$$\dot{Y}_3 = j\omega C = \frac{j}{R}$$



- Επομένως

$$\dot{U}_O = \frac{\dot{U}_1\dot{Y}_1 + \dot{U}_2\dot{Y}_2 + \dot{U}_3\dot{Y}_3}{\left(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3\right)} = \frac{(\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + j\dot{U}_3)\frac{1}{R}}{(1 + 1 + j)\frac{1}{R}} = \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + j\dot{U}_3}{2 + j}$$

- Οι τάσεις που ζητούνται είναι οι

$$\dot{U}_{R1} = \dot{U}_1 - \dot{U}_O$$
$$\dot{U}_{R2} = \dot{U}_2 - \dot{U}_O$$

Παράδειγμα 9

- Επομένως

$$\dot{U}_{R1} = \dot{U}_1 - \dot{U}_O = \dot{U}_1 - \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + j\dot{U}_3}{2+j} = \frac{(1+j)\dot{U}_1 - \dot{U}_2 - j\dot{U}_3}{2+j}$$

$$= \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2 + j\left(\dot{U}_1 - \dot{U}_3\right)}{2+j} = \frac{\dot{U}_{12} + j\dot{U}_{13}}{2+j}$$

$$\dot{U}_{R2} = \dot{U}_2 - \dot{U}_O = \dot{U}_2 - \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + j\dot{U}_3}{2+j} = \frac{(1+j)\dot{U}_2 - \dot{U}_1 - j\dot{U}_3}{2+j}$$

$$= \frac{-\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + j\left(\dot{U}_2 - \dot{U}_3\right)}{2+j} = \frac{-\dot{U}_{12} + j\dot{U}_{23}}{2+j}$$

- Όμως

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = \dot{U}_A - \dot{U}_B = \dot{U}_{AB}$$
$$\dot{U}_{13} = \dot{U}_1 - \dot{U}_3 = \dot{U}_A - \dot{U}_C = \dot{U}_{AC}$$
$$\dot{U}_{23} = \dot{U}_2 - \dot{U}_3 = \dot{U}_B - \dot{U}_C = \dot{U}_{BC}$$

Παράδειγμα 9

- Επομένως

$$\dot{U}_{R1} = \frac{\dot{U}_{12} + j\dot{U}_{13}}{2+j} = \frac{\dot{U}_{AB} + j\dot{U}_{AC}}{2+j}$$

$$\dot{U}_{R2} = \frac{-\dot{U}_{12} + j\dot{U}_{23}}{2+j} = \frac{-\dot{U}_{AB} + j\dot{U}_{BC}}{2+j}$$

- Αν η ακολουθία φάσεων της πηγής είναι θετική τότε

$$\dot{U}_{R1} = \frac{\dot{U}_{AB} + j\dot{U}_{AC}}{2+j} = \frac{U\angle 120° + jU\angle(-120° + 180°)}{2+j} = 0.864U\angle 108.4°$$

$$\dot{U}_{R2} = \frac{-\dot{U}_{AB} + j\dot{U}_{BC}}{2+j} = \frac{-U\angle 120° + jU}{2+j} = 0.231U\angle(-11.6°)$$

- Δηλαδή η πτώση τάσης στην αντίσταση που συνδέεται στο άκρο 1 του φορτίου είναι μεγαλύτερη από την πτώση τάσης στην αντίσταση που συνδέεται στο άκρο 2. Αν αντί για αντιστάσεις είχαμε λαμπτήρες πυρακτώσεως στην περίπτωση αυτή (θετική ακολουθία φάσεων) θα φωτοβολούσε ο 1.

Παράδειγμα 9

- Αν η ακολουθία φάσεων της πηγής είναι αρνητική τότε

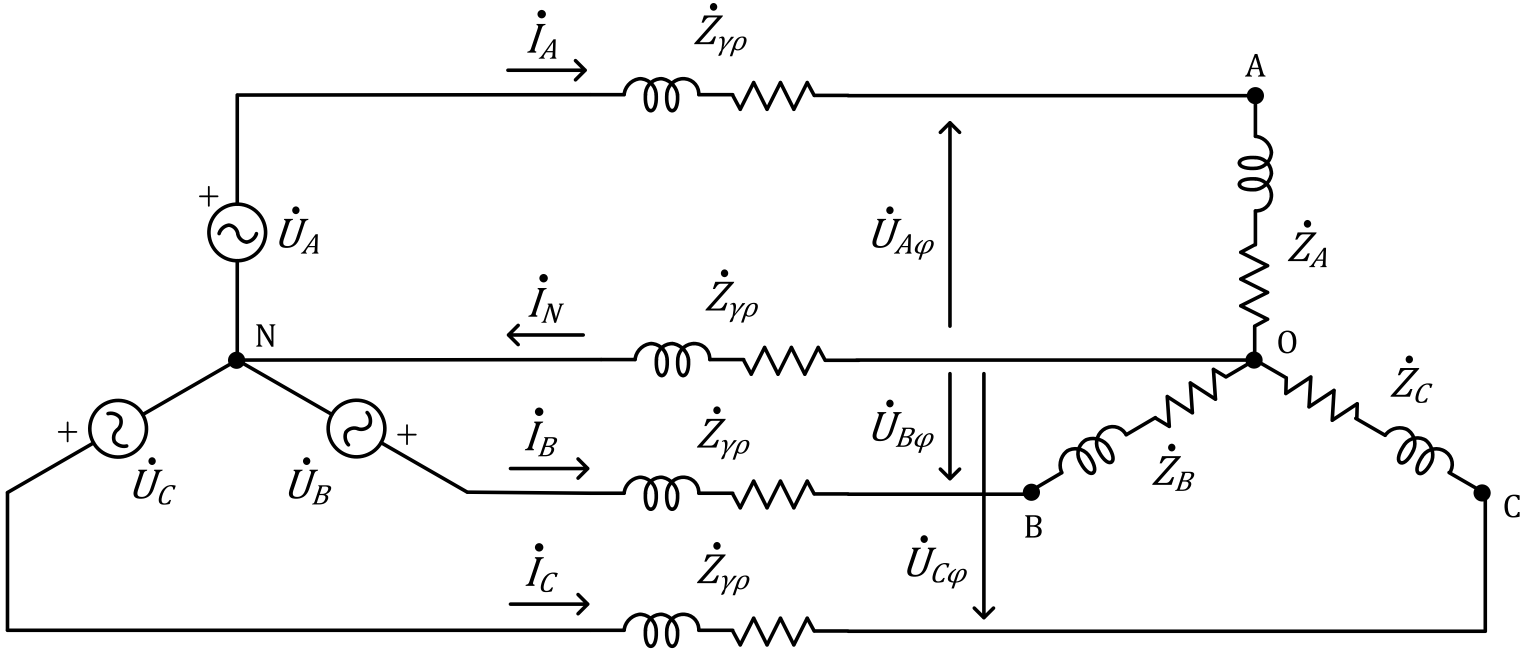
$$\dot{U}_{R1} = \frac{\dot{U}_{AB} + j\dot{U}_{AC}}{2+j} = \frac{U\angle(-120°) + jU\angle(120° + 180°)}{2+j} = 0.231U\angle(-71.6°)$$

$$\dot{U}_{R2} = \frac{-\dot{U}_{AB} + j\dot{U}_{BC}}{2+j} = \frac{-U\angle(-120°) + jU}{2+j} = 0.864U\angle 48.4°$$

- Δηλαδή η πτώση τάσης στην αντίσταση που συνδέεται στο άκρο 2 του φορτίου είναι μεγαλύτερη από την πτώση τάσης στην αντίσταση που συνδέεται στο άκρο 1. Αν αντί για αντιστάσεις είχαμε λαμπτήρες πυρακτώσεως στην περίπτωση αυτή (αρνητική ακολουθία φάσεων) θα φωτοβολούσε ο 2.
- Ο λαμπτήρας που φωτοβολεί δείχνει ότι η φάση που συνδέεται στο άκρο του προηγείται της φάσης που συνδέεται στο άκρο του άλλου λαμπτήρα.
- Παρατήρηση: Το παραπάνω κύκλωμα περιλαμβάνεται σε έναν **ενδείκτη διαδοχής φάσεων**.

Τριφασικά κυκλώματα – Ασύμμετρο φορτίο– Μη ιδανικοί αγωγοί γραμμής

- Οι τάσεις στα άκρα του φορτίου είναι διαφορετικές από τις τάσεις της πηγής όταν οι αγωγοί του κυκλώματος δεν είναι ιδανικοί λόγω της πτώσης τάσης στις γραμμές. Παράδειγμα:



- Και στην περίπτωση αυτή χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε κάποια τεχνική ανάλυσης κυκλωμάτων.