# Ηλεκτρικά Κυκλώματα II

## Διάλεξη 08

Α. Δροσόπουλος

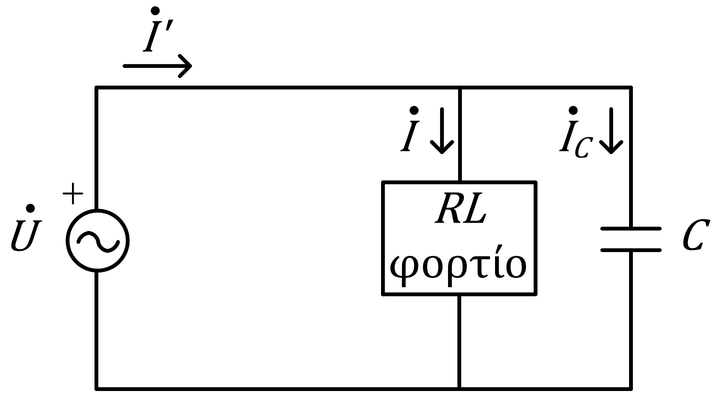
25-04-2024

# Outline

# Topic

# Παράδειγμα 2.4

- Ένα φορτίο με $P = 1\ \mathrm{kW}$ και συντελεστή ισχύος $0.5$ επαγωγικό τροφοδοτείται από τάση $230\ \mathrm{V}$. Παράλληλα στο φορτίο τοποθετείται πυκνωτής για διόρθωση του συντελεστή σε $0.8$. Να βρεθεί πόσο μεταβλήθηκε το ρεύμα του παράλληλου συνδυασμού φορτίου-πυκνωτή.




Απάντηση:

- Η φαινομένη ισχύς του φορτίου είναι

$$S = \frac{P}{\cos\varphi} = 2\ \mathrm{kVA}$$

- Άρα το ρεύμα του φορτίου είναι

$$I = \frac{S}{U} = 8.7\ \mathrm{A}$$

- Η φαινομένη ισχύς του παράλληλου συνδυασμού είναι

$$S' = \frac{P}{\cos\varphi'} = 1.250\ \mathrm{kVA}$$

# Παράδειγμα 2.4

- Άρα το ρεύμα του παράλληλου συνδυασμού είναι

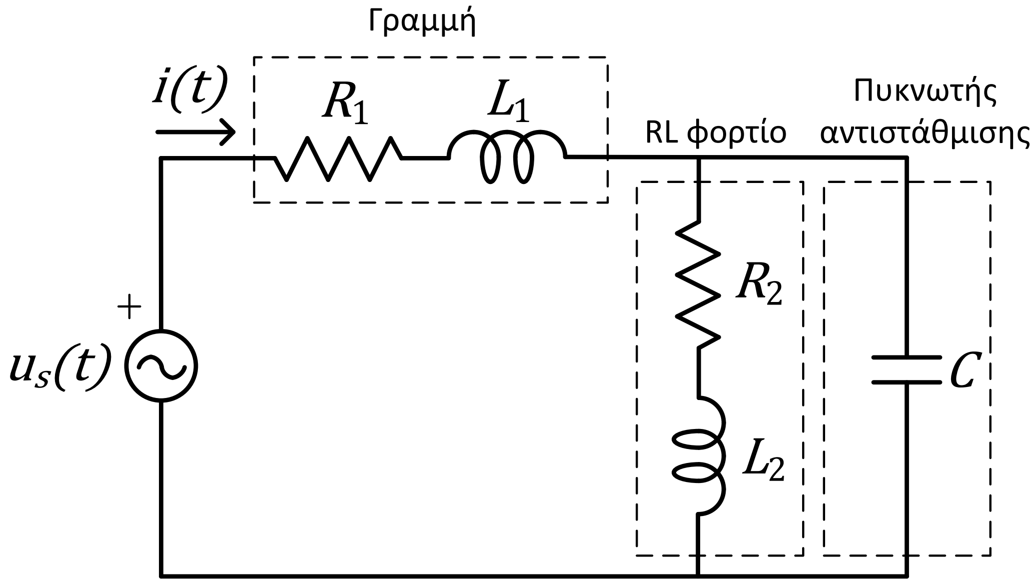
$$I' = \frac{S'}{U} = 5.4\ \mathrm{A}$$

- Μείωση:

$$\frac{8.7 - 5.4}{8.7} 100 = 37.9\%$$

# Παράδειγμα 2.5

- Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $R_1 = 1\ \Omega$, $L_1 = 0.01$ H, $R_2 = 50\ \Omega$, $L_2 = 0.1$ H, $C = 0.02$ mF, $\dot{U}_s = 230\angle 0°$ V, $\omega = 100\pi$ rad/s.
- Να βρεθεί η μιγαδική ισχύς των στοιχείων.




Απάντηση:

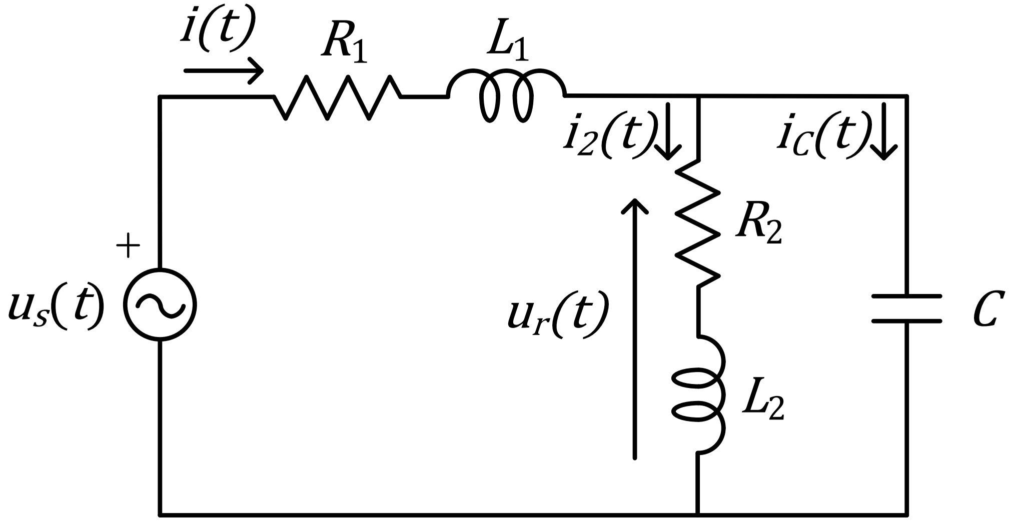
- Το ρεύμα της πηγής είναι

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{(R_1 + j\omega L_1) + \dfrac{(R_2 + j\omega L_2)\left(-\dfrac{j}{\omega C}\right)}{R_2 + j\omega L_2 - \dfrac{j}{\omega C}}} = 3.19 - j0.75 = 3.28\angle(-13.1°)\text{A}$$

# Παράδειγμα 2.5

- Η τάση $\dot{U}_r$ του κλάδου $R_2L_2$ και του πυκνωτή είναι

$$\dot{U}_r = \dot{U}_s - \dot{I}(R_1 + j\omega L_1) = 224.47 - j9.29 = 224.66\angle(-2.4°)\ \mathrm{V}$$




- Τα ρεύματα $\dot{I}_2$ και $\dot{I}_C$ του κλάδου $R_2L_2$ και του πυκνωτή είναι

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_r}{R_2 + j\omega L_2} = 3.145 - j2.16 = 3.81\angle(-34.5°)\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_r}{-\frac{j}{\omega C}} = 0.06 + j1.41 = 1.41\angle 87.6°\ \mathrm{A}$$

- Η μιγαδική ισχύς της πηγής είναι

$$\dot{S} = \dot{U}_s\dot{I}^* = (734.47 + j171.38)\ \mathrm{VA}$$

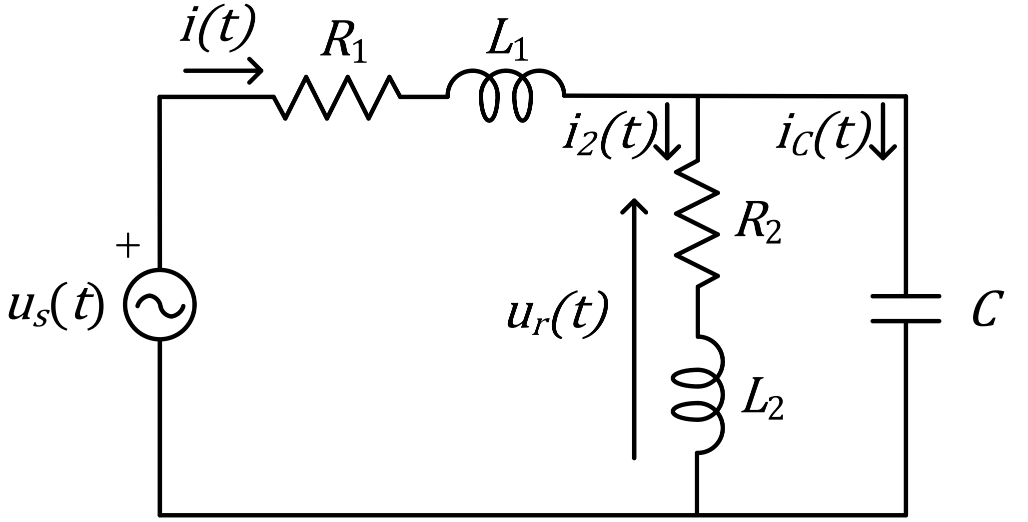
# Παράδειγμα 2.5

- Η μιγαδική ισχύς του κλάδου $R_2L_2$ είναι

$$\dot{S}_2 = \dot{U}_r \dot{I}_2^* = (723.71 + j454.72)\text{VA}$$

- Η μιγαδική ισχύς του πυκνωτή είναι

$$\dot{S}_C = \dot{U}_r \dot{I}_C^* = -j317.12\text{VA}$$




- Επίσης η γραμμή $R_1L_1$ απορροφά

$$\dot{S}_1 = \left(\dot{U}_s - \dot{U}_r\right)\dot{I}^* = (10.75 + j33.78)\text{ VA}$$

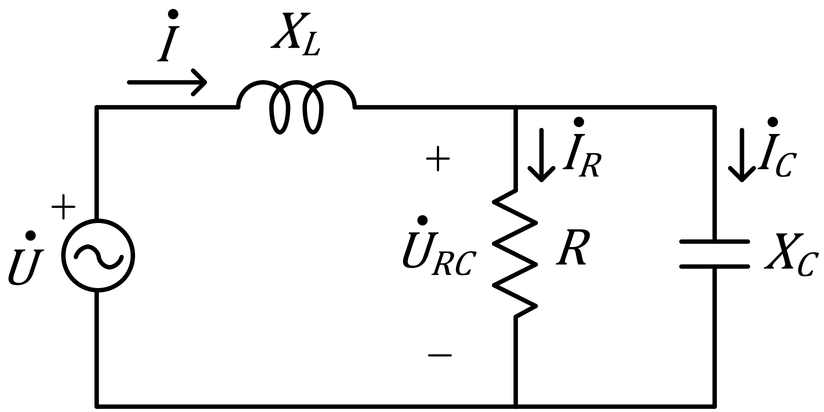
- Η πηγή παράγει ενεργό ισχύ 734.47 W που απορροφάται στις δύο αντιστάσεις (723.71 W + 10.75 W).

- Η πηγή παράγει άεργο 171.38 Var. Ο πυκνωτής παράγει άεργο 317.12 Var. Η γραμμή $R_1L_1$ και το φορτίο $R_2L_2$ καταναλώνουν άεργο 454.72 Var + 33.78 Var. Είναι

$$454.72 + 33.78 = 171.38 + 317.12 = 488.5\text{ Var}$$

# Παράδειγμα 2.6

- Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $X_L = 100\ \Omega$. Η τάση τροφοδοσίας είναι $\dot{U} = 100\angle 0°\ \mathrm{V}$ με συχνότητα $f = 50\ \mathrm{Hz}$. Η τάση στην αντίσταση έχει rms τιμή επίσης $100\ \mathrm{V}$. Το φορτίο $R$ καταναλώνει ενεργό ισχύ $P_R = 50\ \mathrm{W}$. Να βρεθεί η άεργος ισχύς του πυκνωτή και η τιμή της χωρητικότητάς του.




Απάντηση:

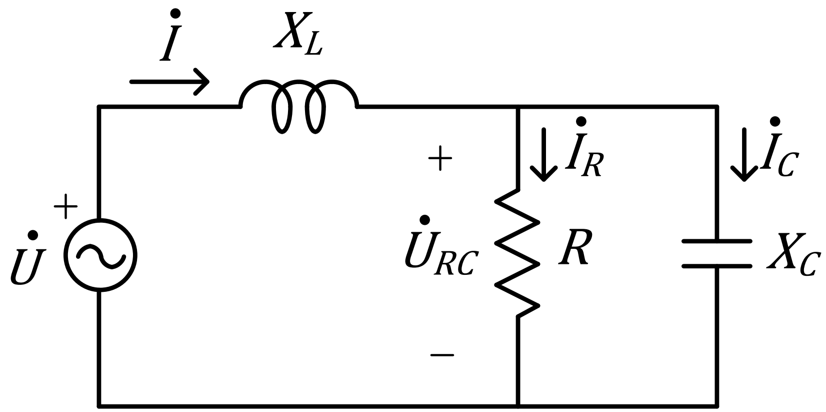
- Ο φάσορας της τάσης της πηγής είναι

$$\dot{U} = 100\angle 0°\ \mathrm{V}$$

- Ο φάσορας της τάσης στα άκρα του παράλληλου συνδυασμού $R, C$ είναι

$$\dot{U}_{RC} = 100\angle\alpha = 100(\cos\alpha + j\sin\alpha)$$

# Παράδειγμα 2.6




- Έστω ότι ο φάσορας του ρεύματος της πηγής είναι

$$\dot{I} = I\angle\beta = I(\cos\beta + j\sin\beta)$$

- Επίσης από νόμο τάσεων Kirchhoff στο βρόχο πηγής, $X_L, R$ προκύπτει ότι

$$\dot{U} - \dot{I}jX_L - \dot{U}_{RC} = 0$$

$$\Rightarrow \;\; U - jX_L I(\cos\beta + j\sin\beta) - U_{RC}(\cos\alpha + j\sin\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \;\; U - jX_L I\cos\beta + X_L I\sin\beta - U_{RC}\cos\alpha - jU_{RC}\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \;\; (U + X_L I\sin\beta - U_{RC}\cos\alpha) - j(X_L I\cos\beta + U_{RC}\sin\alpha) = 0$$

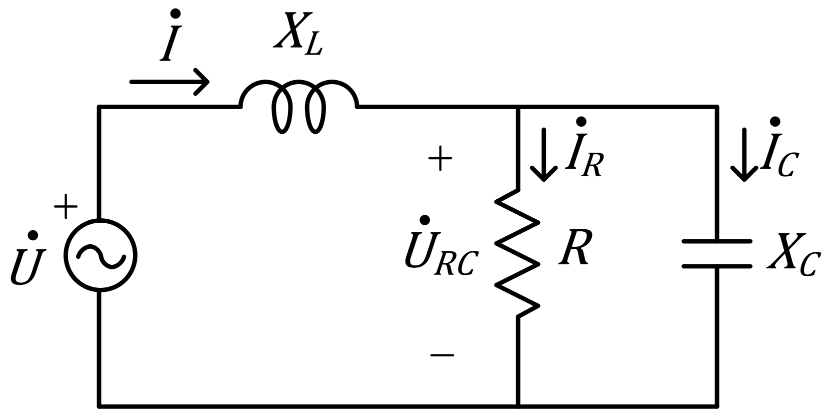
- Γνωστά: $X_L, U, U_{RC}$,      άγνωστα: $\alpha, \beta, I$
- Από την τελευταία εξίσωση (μιγαδική) προκύπτει ότι

$$U + X_L I\sin\beta - U_{RC}\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$X_L I\cos\beta + U_{RC}\sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

# Παράδειγμα 2.6

- Η ενεργός ισχύς που απορροφά η αντίσταση είναι ίση με την ενεργό ισχύ που παράγει η πηγή. Επομένως




$$P = P_R \;\Rightarrow\; UI\cos(0° - \beta)$$
$$= P_R \;\Rightarrow\; UI\cos\beta = P_R$$

$$\Rightarrow I\cos\beta = \frac{P_R}{U} = 0.5 \quad \text{A} \qquad (3)$$

- Επομένως

$$(2) \;\Rightarrow\; \sin\alpha = -0.5 \;\Rightarrow\; \alpha = -30°$$

και

$$\dot{U}_{RC} = 100\angle(-30°) \quad \text{V}$$

- Επίσης

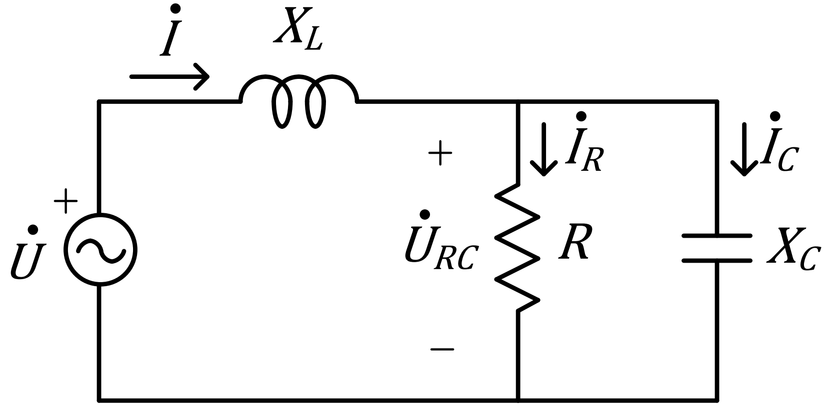
$$(1) \;\Rightarrow\; I\sin\beta = -0.134 \quad \text{A} \qquad (4)$$

# Παράδειγμα 2.6

- Διαιρώντας (4) και (3) κατά μέλη βρίσκουμε

$$\tan\beta = -0.268 \;\Rightarrow\; \beta = \tan^{-1}(-0.268) = -15°$$

$$(4) \;\Rightarrow\; I = 0.518 \text{ A}$$




- Επομένως
- Η αέργος που απορροφά ο παράλληλος συνδυασμός $R, C$ είναι

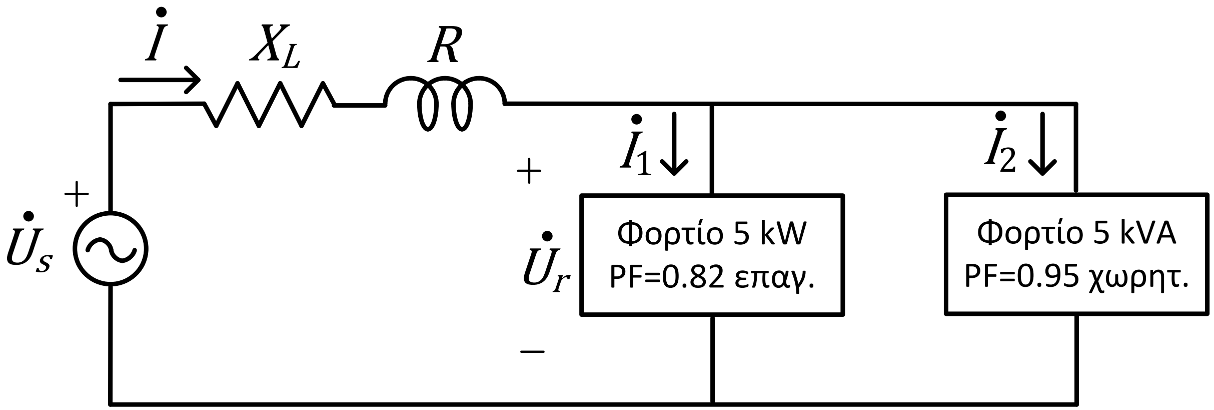
$$Q_C = U_{RC} I \sin(\alpha - \beta) = 100 \cdot 0.518 \sin(-30° + 15°) = -13.4 \text{ Var}$$

- Το ωμικό φορτίο δεν έχει σχέση με την άεργο, άρα αυτή είναι η άεργος του πυκνωτή.
- Η άεργος είναι αρνητική, όπως ήταν αναμενόμενο για πυκνωτή.
- Η χωρητικότητα του πυκνωτή θα είναι

$$C = \frac{Q_c}{\omega U_{RC}^2} = 4.3 \text{ μF}$$

# Παράδειγμα 2.7

- Στο παρακάτω κύκλωμα η τάση στα φορτία είναι $\dot{U}_r = 230\angle 0°\ \mathrm{V}$, $f = 50\ \mathrm{Hz}$. Για τη γραμμή θεωρούμε ότι $R = 0.2\ \Omega$, $L = 1.3\ \mathrm{mH}$. Να βρεθεί η τάση της πηγής $\dot{U}_s$.




Απάντηση:

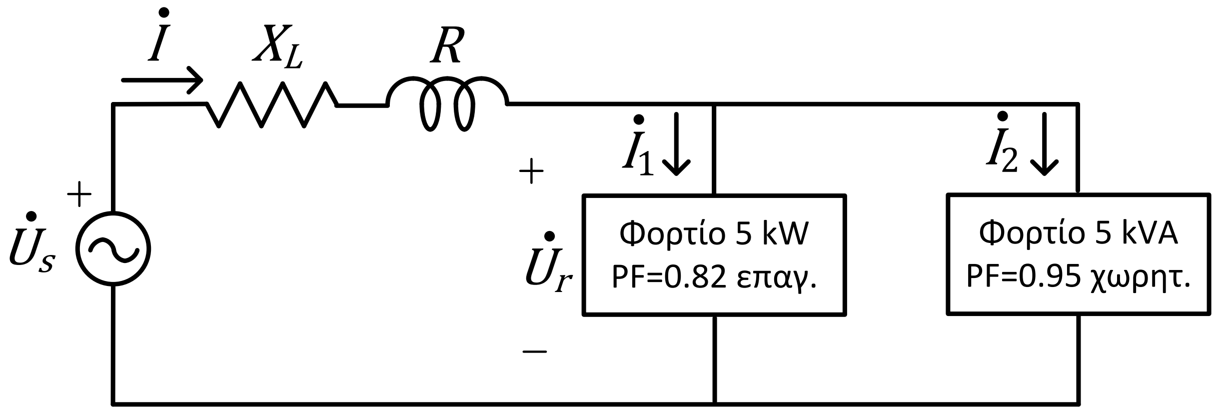
- Πρέπει να βρούμε τα ρεύματα των φορτίων. Έστω $\dot{I}_1 = I_1\angle\beta_1$ το ρεύμα στο φορτίο $5\ \mathrm{kW}$.
- Ο συντελεστής ισχύος είναι

$$\cos(0° - \beta_1) = PF_1 = 0.82\ \varepsilon\pi\alpha\gamma\omega\gamma\iota\kappa\acute{o}\varsigma$$

0-β1 > 0
-β1 > 0
β1 < 0

- Άρα $\beta_1 = -34.9°$.

# Παράδειγμα 2.7




- Επίσης

$$P_1 = U_r I_1 \cos(0° - \beta_1) \Rightarrow I_1 = 26.5 \text{ A}$$

- Έστω $\dot{I}_2 = I_2 \angle \beta_2$ το ρεύμα στο φορτίο 5 kVA.
- Ο συντελεστής ισχύος είναι

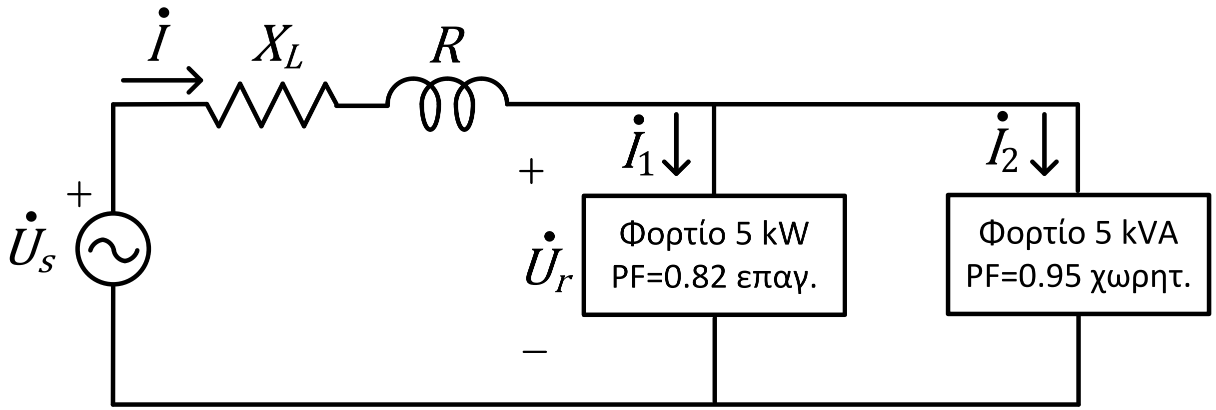
$$\cos(0° - \beta_2) = PF_2 = 0.95 \; \chi\omega\rho\eta\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$$

0-β2 < 0
-β2 < 0
β2 > 0

- Άρα $\beta_2 = 18.2°$.
- Επίσης

$$S_2 = U_r I_2 \Rightarrow I_2 = 21.7 \text{ A}$$

# Παράδειγμα 2.7




- Το συνολικό ρεύμα στη γραμμή θα είναι:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 26.5\angle(-34.9°) + 21.7\angle 18.2° = 43.2\angle(-11.2°)\text{ A}$$

- Από νόμο τάσεων Kirchhoff:

$$-\dot{U}_s + \dot{I}(R + j\omega L) + \dot{U}_r = 0$$

$$\dot{U}_s = \dot{I}(R + j\omega L) + \dot{U}_r = (42.4 - j8.4)(0.2 + j0.4) + 230 = 242.3\angle 3.6°\text{ V}$$

- Πτώση τάσης στη γραμμή:

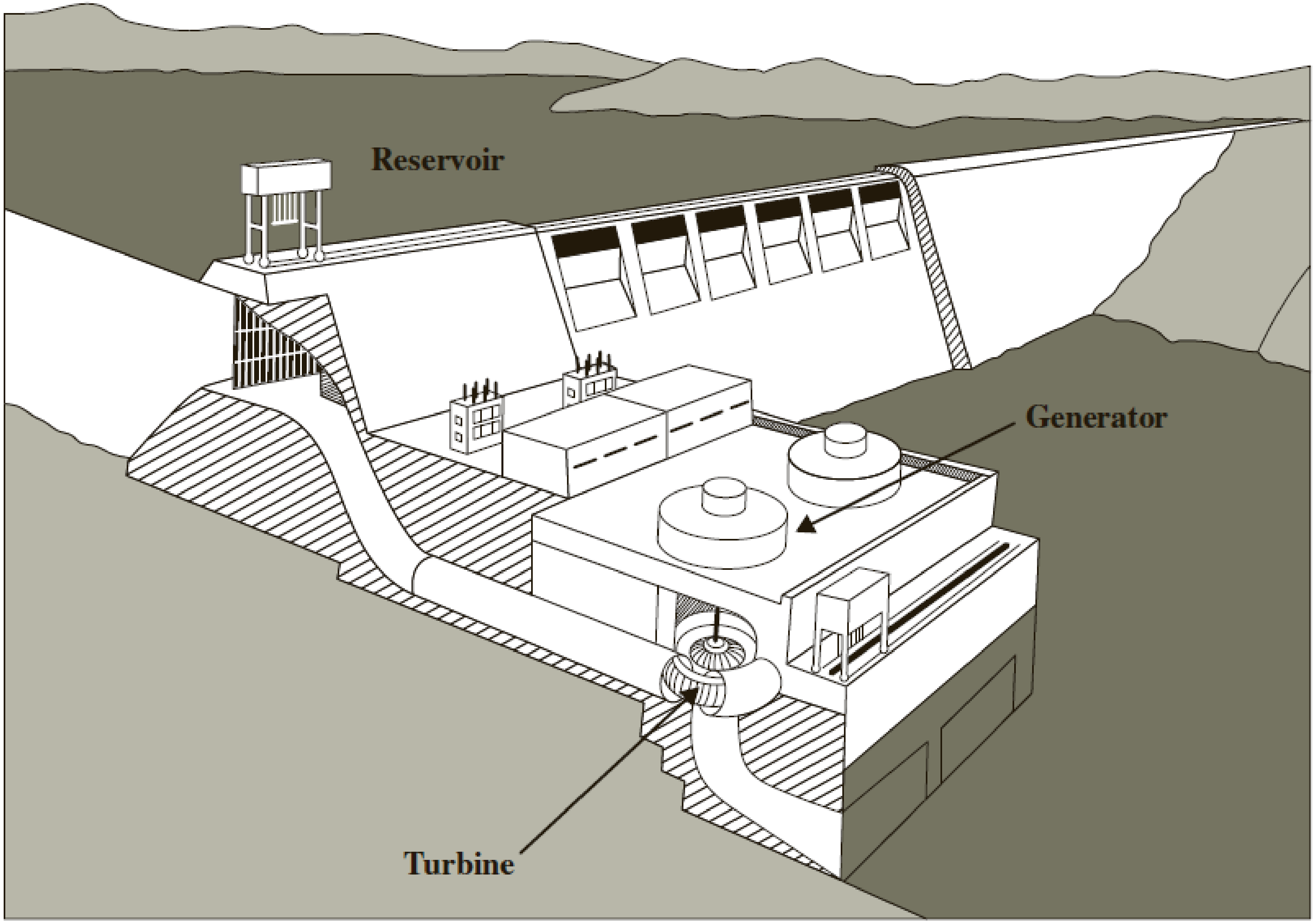
$$\dot{I}(R + j\omega L) = \dot{U}_s - \dot{U}_r = 19.3\angle 52.2°\text{ V}$$

# Topic

# Εισαγωγή

- Στα προηγούμενα ασχοληθήκαμε με την ανάλυση κυκλωμάτων με ημιτονοειδείς κυματομορφές στη μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση τα οποία ήταν μονοφασικά.
- Ένα μονοφασικό σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας αποτελείται από μια γεννήτρια (πηγή) που συνδέεται μέσω ενός ζεύγους αγωγών με το φορτίο.
- Θα επεκτείνουμε τις τεχνικές ανάλυσης που αναπτύχθηκαν για μονοφασικά κυκλώματα στα τριφασικά, δηλαδή κυκλώματα που περιλαμβάνουν τρεις πηγές τάσεων οι οποίες απέχουν χρονικά μεταξύ τους κατά ένα τρίτο του κύκλου.
- Στην πράξη τα συστήματα παραγωγής και μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας είναι τριφασικά.
- Η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας επιτυγχάνεται με μια ηλεκτρική γεννήτρια που μετατρέπει μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική. Η μηχανική ενέργεια μπορεί να παράγεται για παράδειγμα σε ένα υδροηλεκτρικό εργοστάσιο.
- Το νερό που αποθηκεύεται στο φράγμα πέφτει από κάποιο ύψος μέσω υδροστροβίλων στο ποτάμι. Οι έλικες των υδροστροβίλων περιστρέφονται από το νερό και μαζί τους περιστρέφεται ο άξονας ηλεκτρογεννήτριας.

# Εισαγωγή




- Εικόνα από "Basic Engineering Circuit Analysis", J.D. Irwin, R.M. Nelms, 11th ed., Wiley, 2015.

# Εισαγωγή

- Η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται μέσω της γεννήτριας σε ηλεκτρική.
- Σε ατμοηλεκτρικά εργοστάσια γίνεται καύση ορυκτών καυσίμων, θερμαίνεται νερό και μετατρέπεται σε ατμό με τη βοήθεια του οποίου περιστρέφεται ο στρόβιλος. Νερό χρησιμοποιείται επίσης για την ψύξη και την μετατροπή του ατμού σε νερό ώστε να αρχίσει ο κύκλος από την αρχή
- Σε πυρηνικά εργοστάσια πάλι ο ατμός κινεί στροβίλους, μόνο που εκεί το νερό βράζει λόγω της θερμότητας που παράγεται από τη σχάση του πυρήνα του αντιδραστήρα.
- Οι παραπάνω τύποι εργοστασίων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας βρίσκονται συνήθως μακριά από τις πόλεις, δηλαδή μακριά από τα φορτία που καταναλώνουν την ηλεκτρική ενέργεια που παράγουν.
- Τριφασικές γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά από το εργοστάσιο στα φορτία.

# Εισαγωγή

- Η μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας είναι πιο αποδοτική σε υψηλές τάσεις. (Όσο υψηλότερη είναι η τάση υπό την οποία μεταφέρεται συγκεκριμένη ισχύς τόσο χαμηλότερο είναι το ρεύμα.) Τα επίπεδα τάσης που χρησιμοποιούνται κατά τη μεταφορά είναι πολύ διαφορετικά από αυτό που απαιτούν πχ τα οικιακά φορτία.
- Υπάρχει λοιπόν ανάγκη ανύψωσης και υποβιβασμού της τάσης. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω τριφασικών μετασχηματιστών σε υποσταθμούς ηλεκτρικής ενέργειας.
- Το μεγαλύτερο μέρος της ηλεκτρικής ενέργειας παράγεται και μεταφέρεται μέσω τριφασικού συστήματος. Όταν χρειάζεται μονοφασική τάση τότε λαμβάνεται και αυτή από το τριφασικό σύστημα.

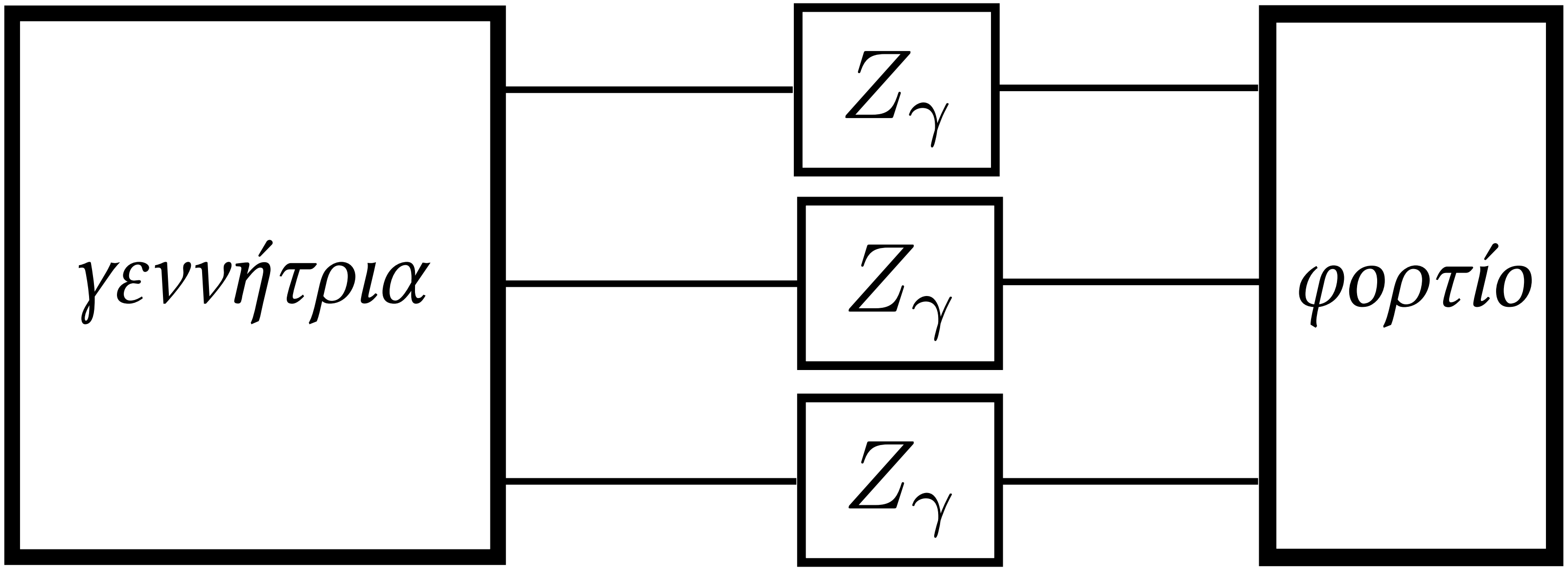
# Εισαγωγή

- Εικόνες από "Basic Engineering Circuit Analysis", J.D. Irwin, R.M. Nelms, 11th ed., Wiley, 2015.

# Εισαγωγή

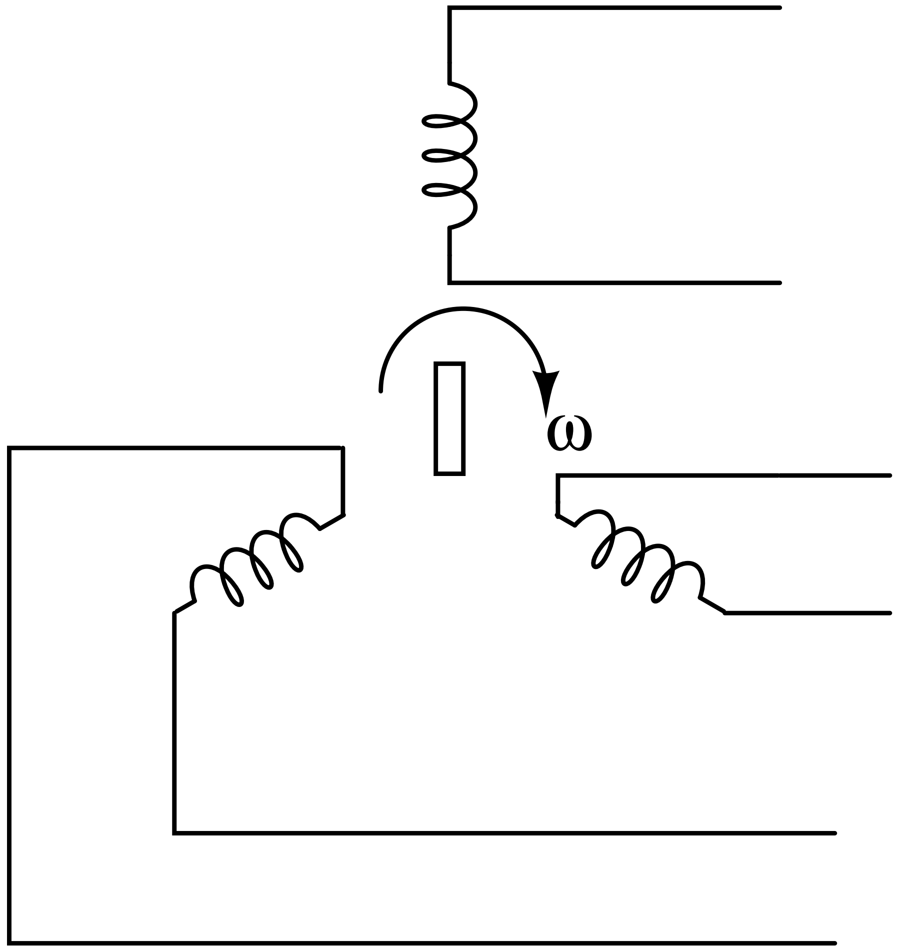
- Στα τριφασικά κυκλώματα που θα εξετάσουμε η διέγερση θα είναι ένα τριφασικό σύστημα ημιτονοειδών τάσεων.
- Αν οι τρεις φάσεις έχουν ίδιο πλάτος και συχνότητα και κάθε τάση έχει διαφορά φάσης $120°$ από τις άλλες δύο, τότε οι τάσεις χαρακτηρίζονται ως συμμετρικές.
- Αν τα φορτία είναι τέτοια ώστε τα ρεύματα που παράγονται λόγω των τάσεων να είναι επίσης συμμετρικά, τότε όλο το σύστημα χαρακτηρίζεται ως συμμετρικό τριφασικό.
- Πλεονεκτήματα: Η στιγμιαία ισχύς σε ένα τριφασικό σύστημα μπορεί να είναι σταθερή (χωρίς κυμάτωση). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ομοιόμορφη μεταφορά ισχύος και περιορισμό των κραδασμών των μηχανών. Οι τριφασικές μηχανές είναι πιο αποδοτικές από τις μονοφασικές και δεν απαιτούν βοηθητικό κύκλωμα για έναυση. Επίσης για τη μεταφορά ίδιας ποσότητας ισχύος το τριφασικό σύστημα είναι πιο οικονομικό. (Οι αγωγοί που απαιτούνται είναι λιγότεροι.)

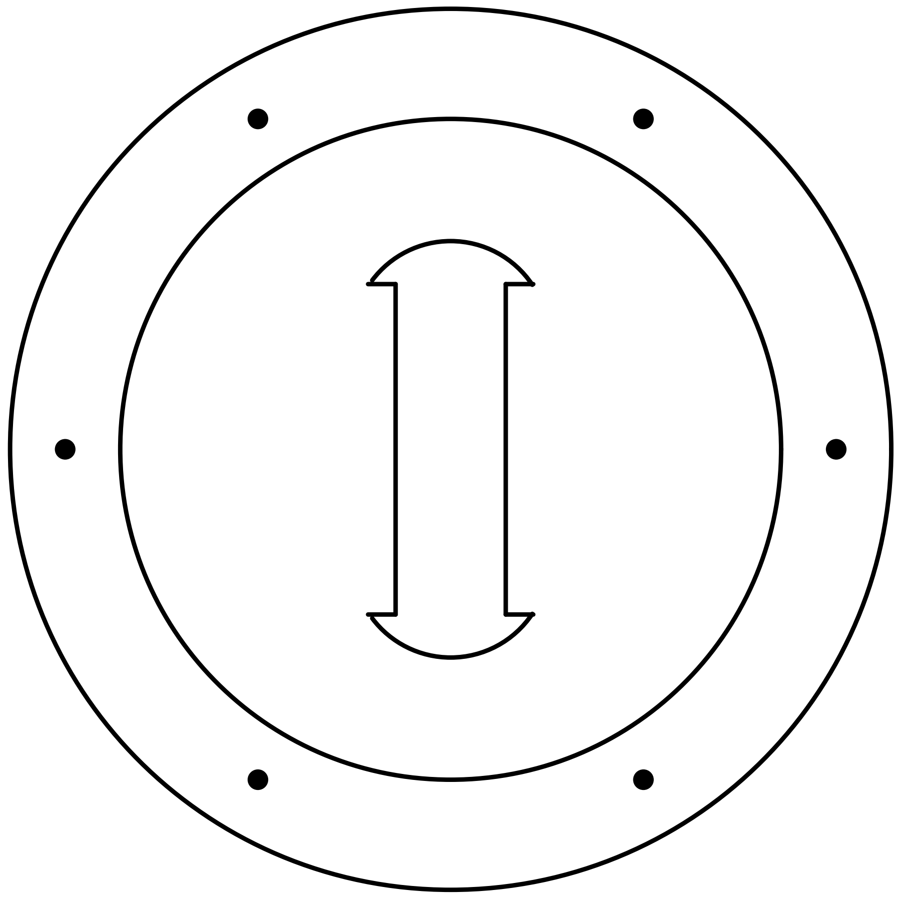
# Τριφασικό σύστημα



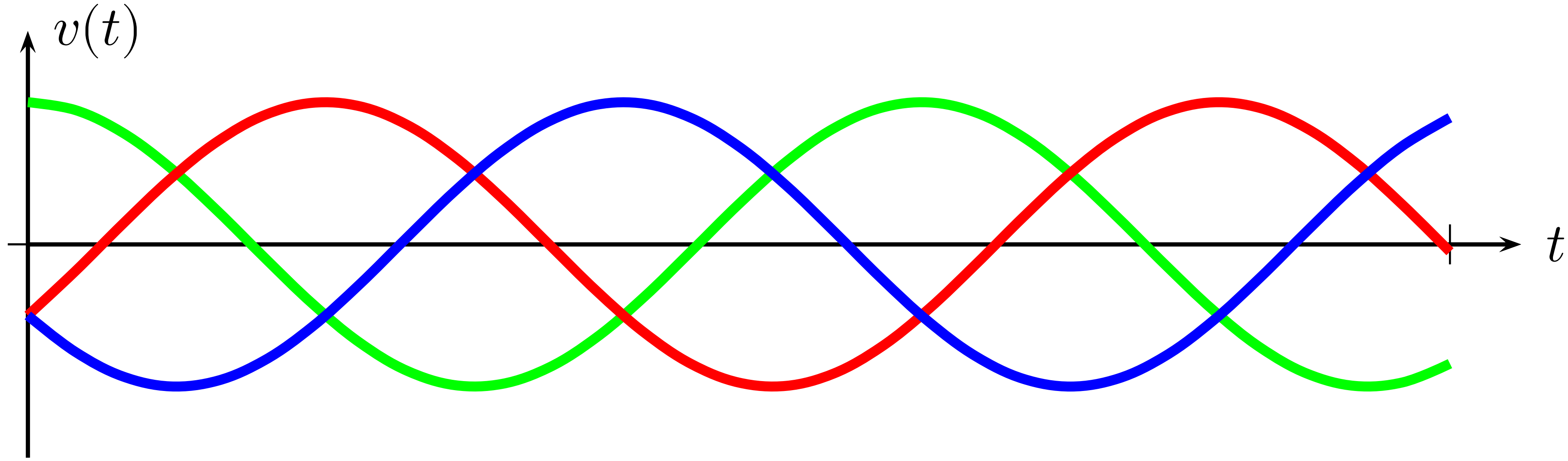

**Σχήμα:** Τμήματα τριφασικού συστήματος

# Αρχή τριφασικής γεννήτριας



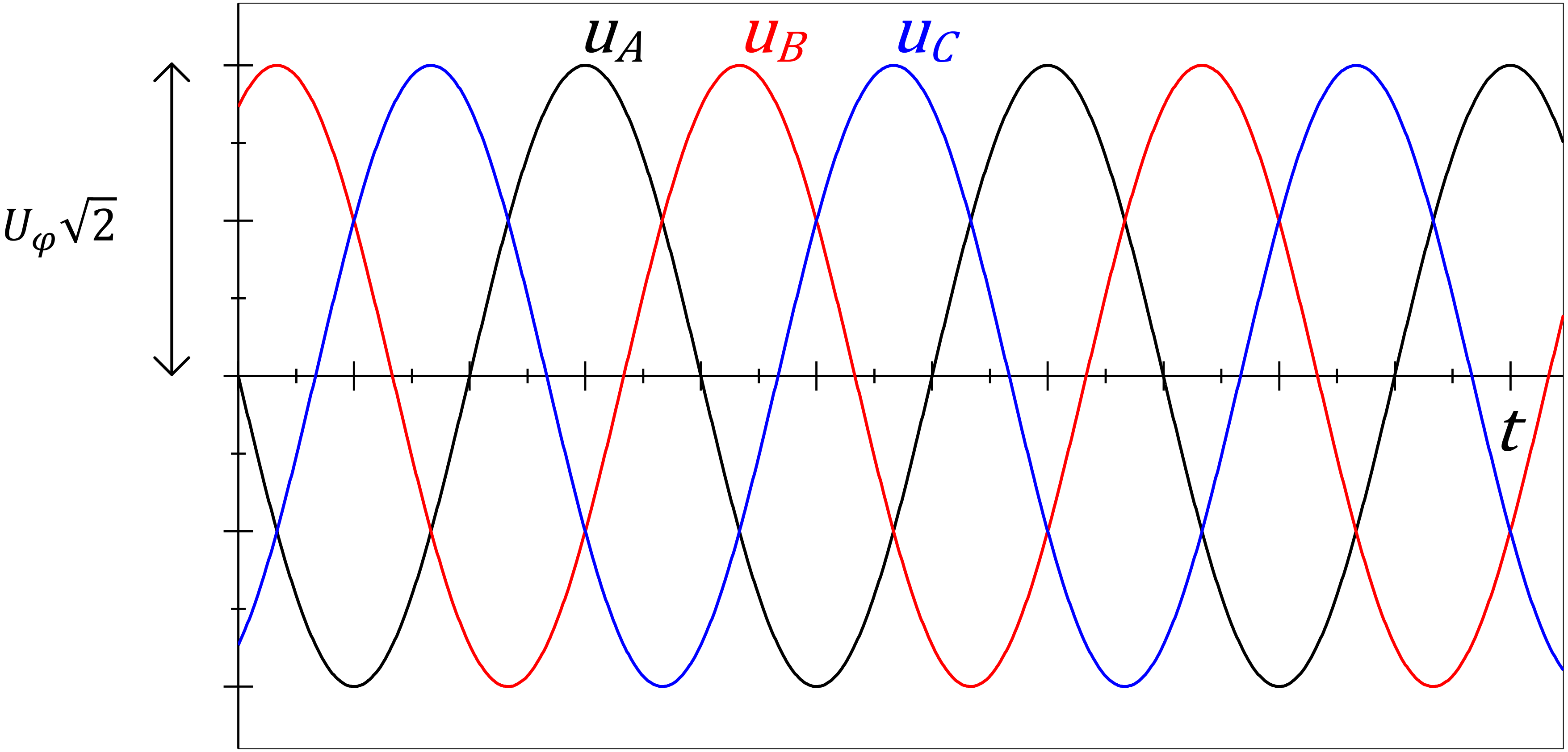
# Κυματομορφές τάσεων




**Σχήμα:** Τρεις τάσεις με ίδιο μέτρο και διαφορά φάσης $120^\circ$ μεταξύ τους.

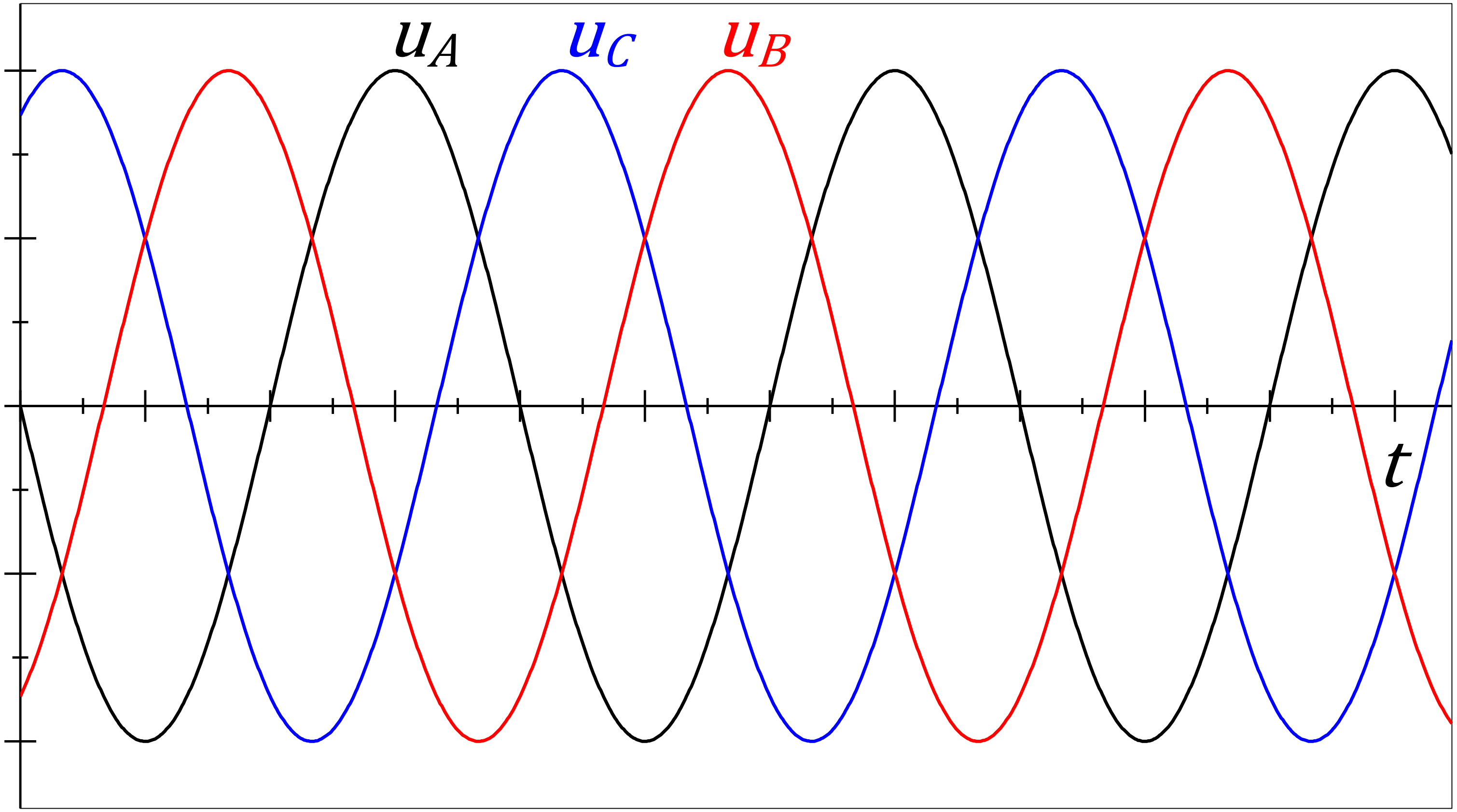
# Ακολουθία φάσεων

- Ας θεωρήσουμε τρεις ημιτονοειδείς τάσεις με ίδιες rms τιμές $U_\varphi$ και διαφορά φάσης $120°$ μεταξύ τους.



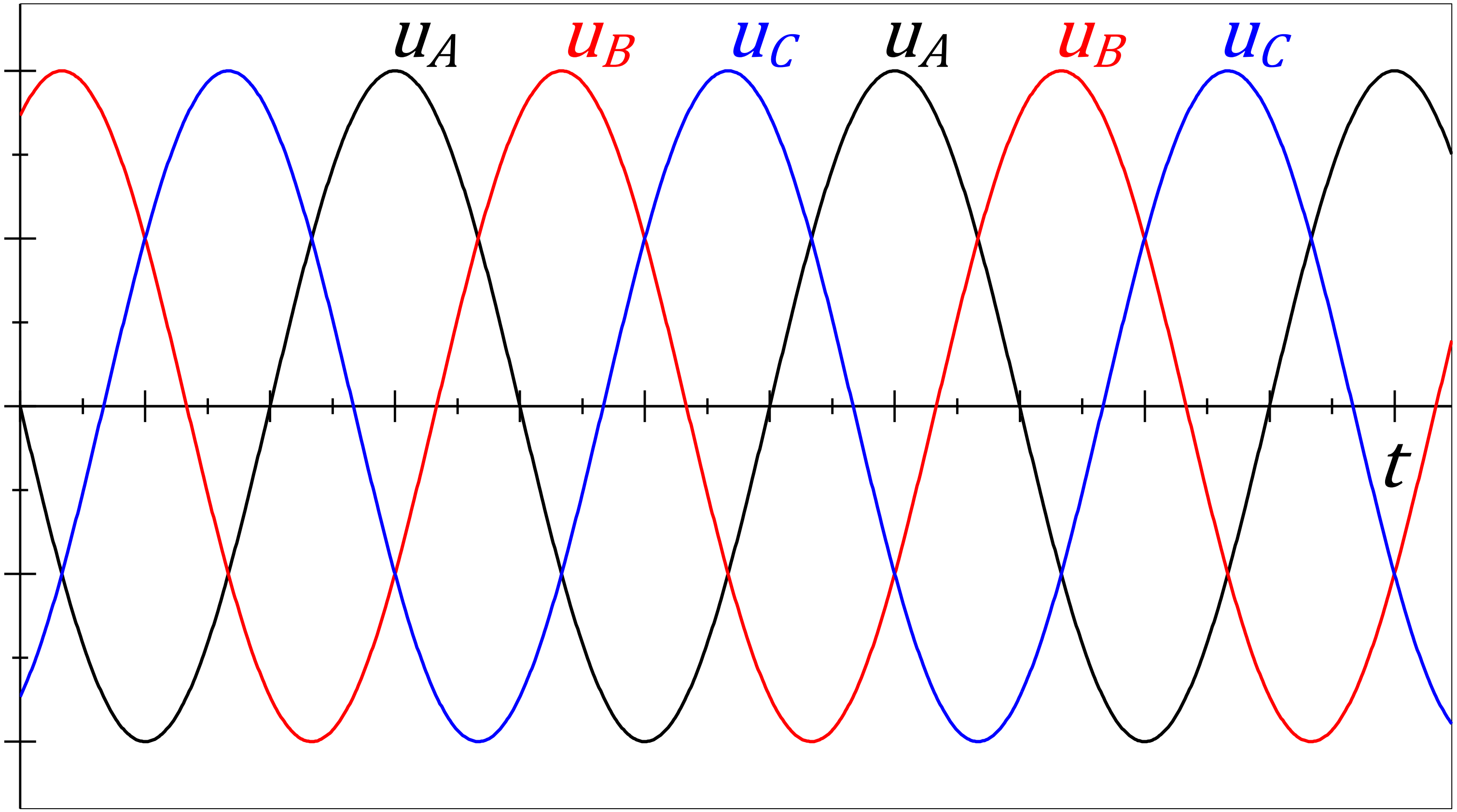
# Ακολουθία φάσεων

- Η χρονική σειρά με την οποία περνούν οι τάσεις από τις αντίστοιχες μέγιστες τιμές τους ονομάζεται ακολουθία φάσεων.
- Στην προηγούμενη διαφάνεια η ακολουθία ήταν ABC. Θα μπορούσε όμως να είναι και ACB όπως φαίνεται παρακάτω. Στην περίπτωση αυτή η ακολουθία ονομάζεται και ABC αρνητική.



# Ακολουθία φάσεων

- Σημαντική παρατήρηση: Η ακολουθία ABC είναι ίδια με BCA, CAB. Πράγματι η χρονική σειρά των τάσεων είναι ABCABCABC…



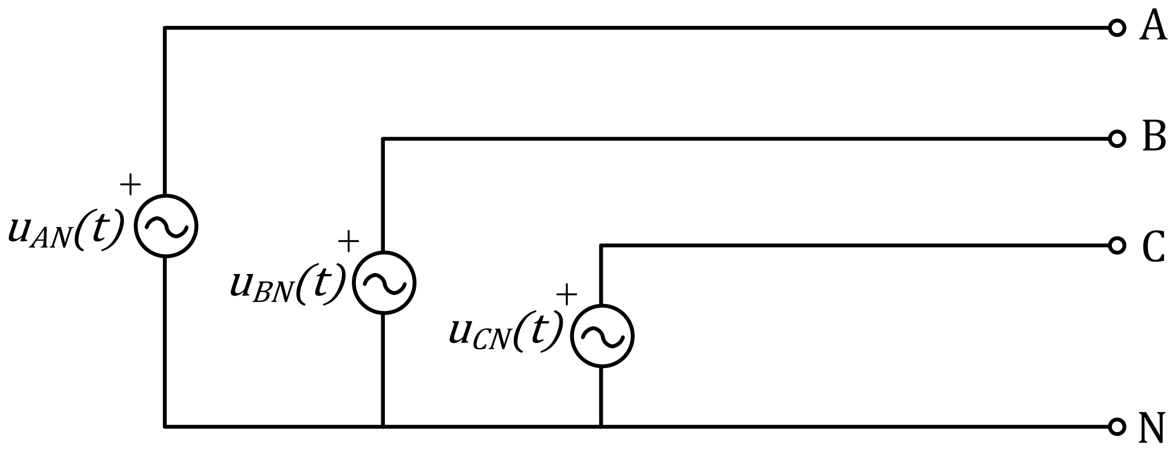

- Ομοίως με ACB, CBA και BAC περιγράφεται η ίδια χρονική σειρά και πρόκειται για την αρνητική ακολουθία φάσεων.

# Ακολουθία φάσεων

- Σε τριφασικά συστήματα η ακολουθία φάσεων είναι πολύ σημαντική.
- Καθορίζει για παράδειγμα τη φορά περιστροφής ενός κινητήρα που τροφοδοτείται από το συγκεκριμένο σύστημα τάσεων. Επίσης πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά τη μέτρηση αέργου ισχύος με τριφασικούς μετρητές. Εσφαλμένη σύνδεση των μετρητών αυτών οδηγεί σε εσφαλμένα αποτελέσματα.

# Τριφασική πηγή τάσεων

- Μια τριφασική πηγή τάσης που θα μπορούσε να παράγει το σύστημα των ημιτονοειδών τάσεων που εξετάζουμε φαίνεται στο σχήμα.




- Οι τάσεις $u_{AN}(t), u_{BN}(t), u_{CN}(t)$ προκύπτουν μεταξύ των γραμμών $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ και του $\mathrm{N}$ αντίστοιχα. Ονομάζονται φασικές τάσεις. Το σημείο $\mathrm{N}$ ονομάζεται ουδέτερος κόμβος.
- Εφόσον οι τάσεις έχουν ίδιο πλάτος και συχνότητα $\omega$ και παρουσιάζουν διαφορά φάσης $120°$ μεταξύ τους λέμε ότι αποτελούν ένα συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων.

# Φασικές τάσεις

- Έστω ότι οι συναρτήσεις των τριών τάσεων είναι

$$u_{AN}(t) = U_\varphi\sqrt{2}\cos(\omega t + 90°)$$

$$u_{BN}(t) = U_\varphi\sqrt{2}\cos(\omega t - 30°)$$

$$u_{CN}(t) = U_\varphi\sqrt{2}\cos(\omega t - 150°) = U_\varphi\sqrt{2}\cos(\omega t + 210°)$$

- Με το σύμβολο $u_{AN}$ συμβολίζουμε την τάση μεταξύ δύο σημείων $\mathrm{A}$ και $\mathrm{N}$. Εναλλακτικά θα χρησιμοποιήσουμε σύμβολα χωρίς το $\mathrm{N}$ στο δείκτη για λόγους απλοποίησης. Δηλαδή οι παραπάνω τάσεις θα συμβολίζονται και ως $u_A(t), u_B(t), u_C(t)$.
- Οι φάσορες των τάσεων θα είναι

$$\dot{U}_A = U_\varphi\angle 90°$$

$$\dot{U}_B = U_\varphi\angle(-30°)$$

$$\dot{U}_C = U_\varphi\angle 210°$$

# Φασικές τάσεις

- Βασική ιδιότητα ενός συμμετρικού συστήματος τάσεων:

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$$

- Πράγματι

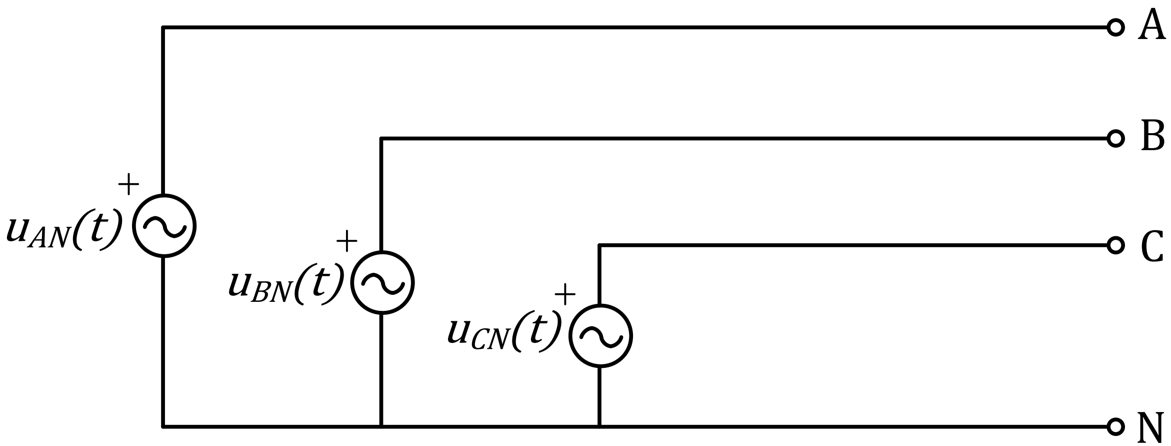
$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = U_\varphi \angle 90° + U_\varphi \angle(-30°) + U_\varphi \angle 210°$$
$$= U_\varphi [\cos 90° + j \sin 90° + \cos(-30°) + j \sin(-30°) + \cos 210°$$
$$+ j \sin 210°] = U_\varphi \left[ j + \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right] = 0$$

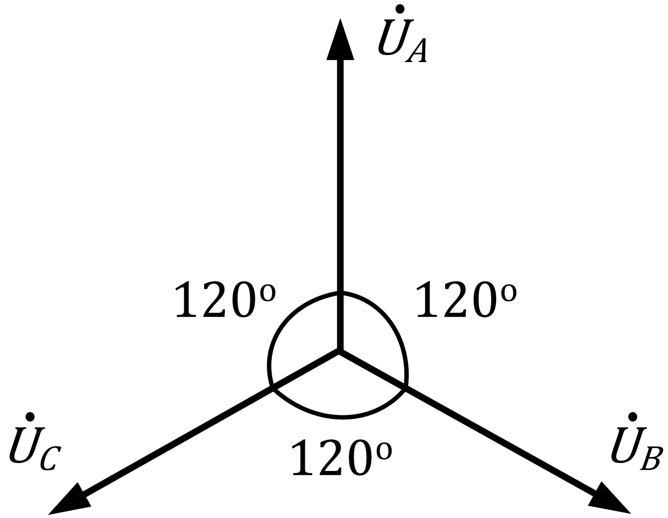
- Το ίδιο αποδεικνύεται αν αθροίσουμε τις συναρτήσεις στο πεδίο του χρόνου. Γενικά 3 ημιτονοειδείς συναρτήσεις με ίδια πλάτη και διαφορά φάσης $120°$ μεταξύ τους έχουν άθροισμα 0:

$$\cos \alpha + \cos(\alpha - 120°) + \cos(\alpha + 120°)$$
$$= \cos \alpha + \cos \alpha \cos 120° + \sin \alpha \sin 120° + \cos \alpha \cos 120°$$
$$- \sin \alpha \sin 120° = \cos \alpha + 2 \cos \alpha \cos 120° = \cos \alpha + 2(-0.5) \cos \alpha$$
$$= 0$$

# Φασικές τάσεις

- Για ακολουθία ABC οι φάσορες των τάσεων θα είναι:




- Θα θεωρούμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι η $\dot{U}_A$ έχει γωνία $90°$, εκτός και αν δίνεται διαφορετική γωνία.
- Οι παραπάνω τάσεις λαμβάνονται μεταξύ των ακροδεκτών $\mathrm{A-N}$, $\mathrm{B-N}$, $\mathrm{C-N}$ της πηγής και ονομάζονται φασικές τάσεις.
- Θα μπορούσαμε όμως να πάρουμε και τις τάσεις μεταξύ δύο φάσεων, δηλαδή μεταξύ των ακροδεκτών $\mathrm{A-B}$, $\mathrm{B-C}$, $\mathrm{C-A}$.

# Πολικές τάσεις

- Οι τάσεις μεταξύ δύο φάσεων ονομάζονται πολικές και μπορούν να βρεθούν με εφαρμογή KVL ως εξής:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = U_\varphi\angle 90° - U_\varphi\angle(-30°) = jU_\varphi - U_\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\,\frac{1}{2}\right)$$

$$= U_\varphi\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{3}{2}\right) = \sqrt{3}U_\varphi\left(-\frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}U_\varphi\angle 120° = \dot{U}_A\sqrt{3}\angle 30°$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = U_\varphi\angle(-30°) - U_\varphi\angle 210° = U_\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\,\frac{1}{2}\right) - U_\varphi\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\,\frac{1}{2}\right)$$

$$= U_\varphi\left(2\,\frac{\sqrt{3}}{2} + j0\right) = \sqrt{3}U_\varphi\angle 0° = \dot{U}_B\sqrt{3}\angle 30°$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = U_\varphi\angle 210° - U_\varphi\angle 90° = U_\varphi\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\,\frac{1}{2}\right) - jU_\varphi$$

$$= U_\varphi\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\,\frac{3}{2}\right) = \sqrt{3}U_\varphi\left(-\frac{1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}U_\varphi\angle(-120°)$$

$$= \dot{U}_C\sqrt{3}\angle 30°$$

# Πολικές τάσεις

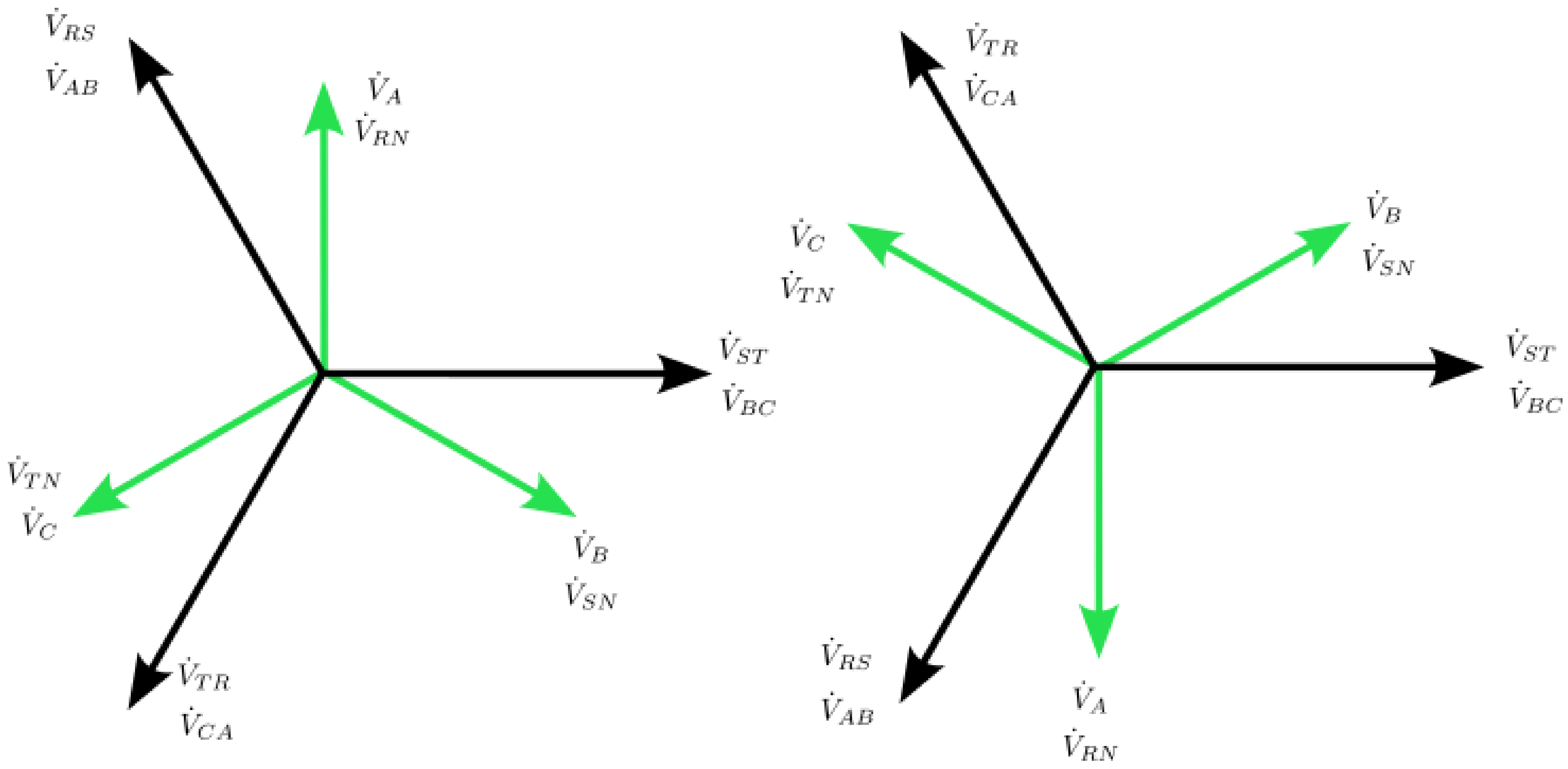
- Στις παραπάνω εξισώσεις συμβολίζουμε την rms τιμή μιας φασικής τάσης με $U_\varphi$.
- Παρατηρούμε ότι

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = \sqrt{3} U_\varphi$$

- Θα συμβολίζουμε επίσης την rms τιμή μιας πολικής τάσης με $U$. Επομένως

$$U = \sqrt{3} U_\varphi$$

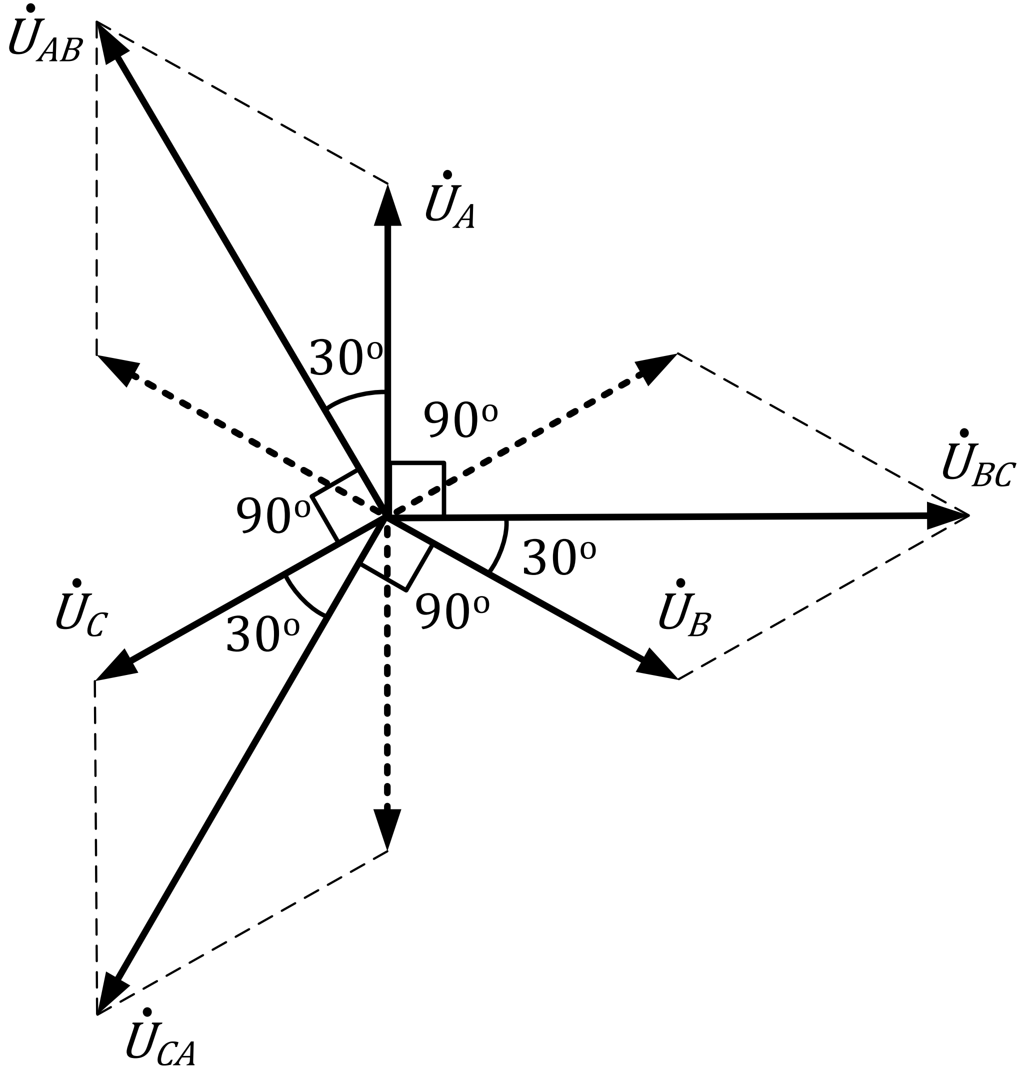
# Διάγραμμα τάσεων (SOS)

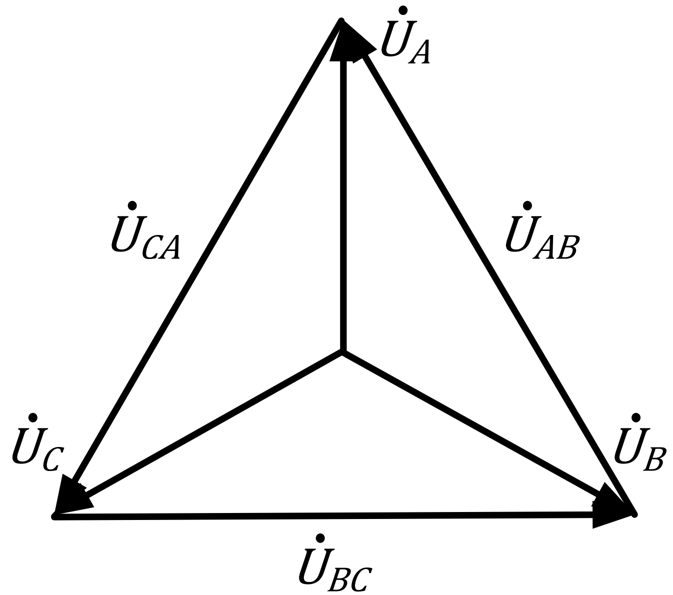



**Σχήμα:** Διάγραμμα φασικών και πολικών τάσεων σε ορθή (αριστερά) και ανάστροφη (δεξιά) διαδοχή φάσεων.

# Διανυσματικό διάγραμμα

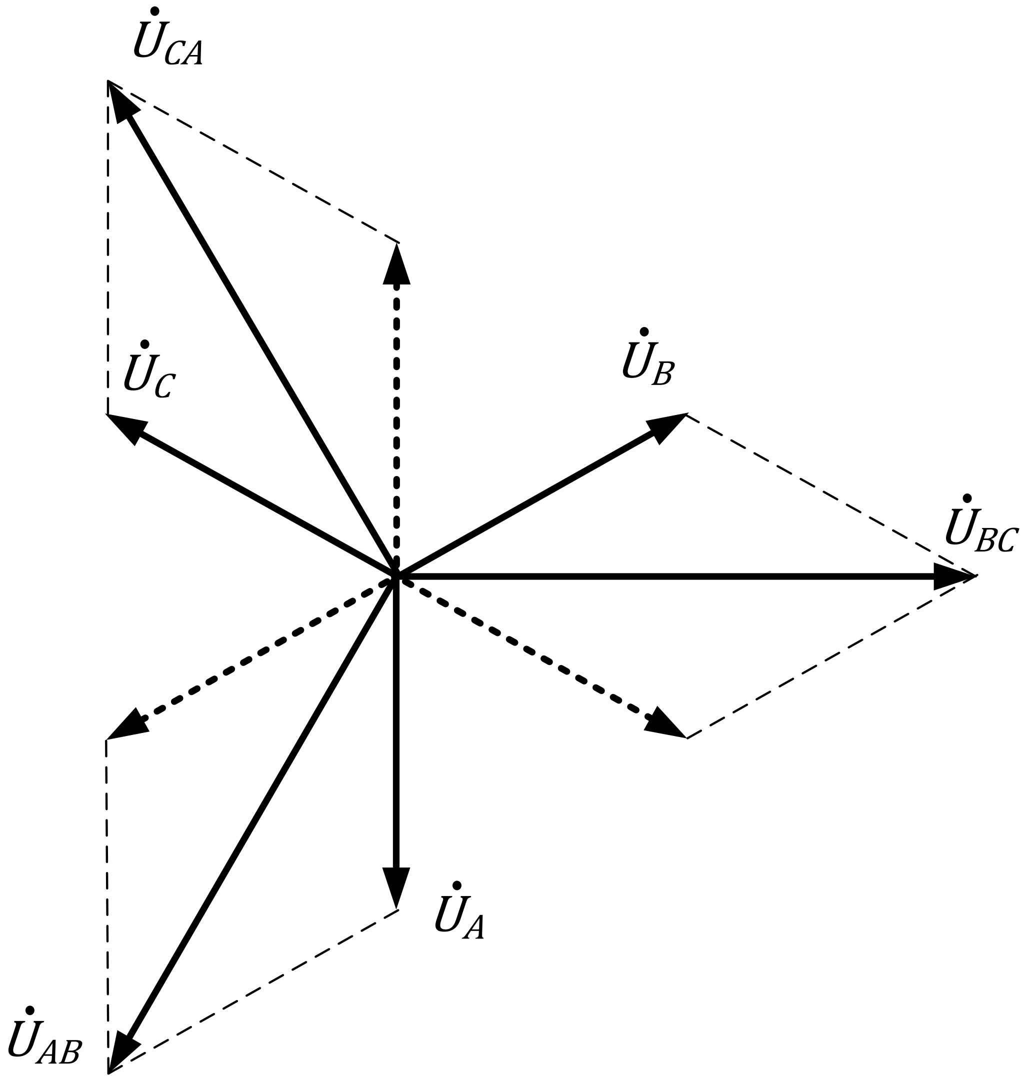
- Η διανυσματική πρόσθεση φασικών τάσεων και οι πολικές τάσεις που προκύπτουν φαίνονται παρακάτω.

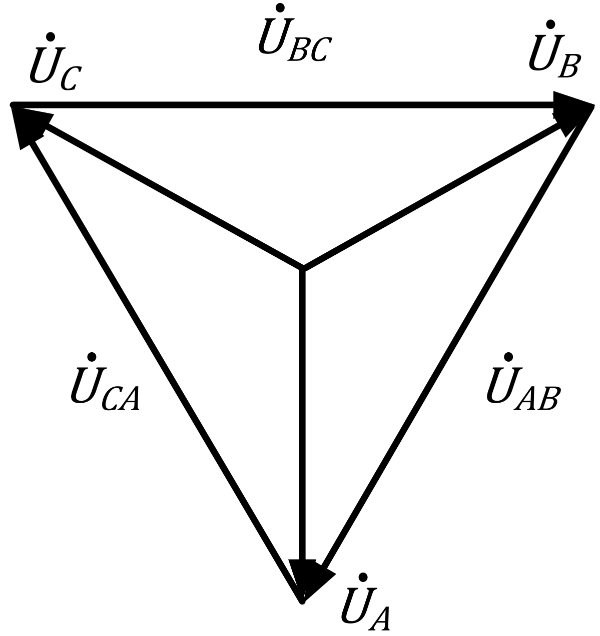


# Διανυσματικό διάγραμμα

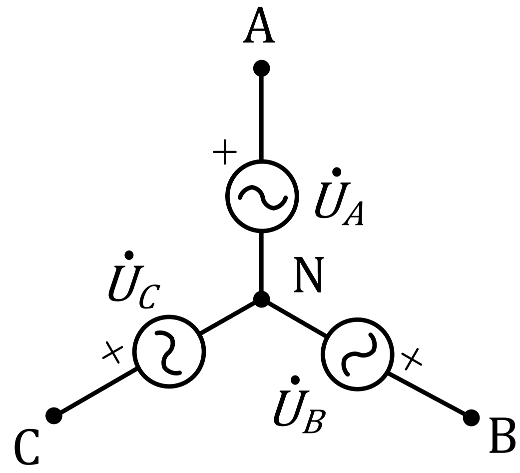
- Αν η ακολουθία είναι CBA τότε



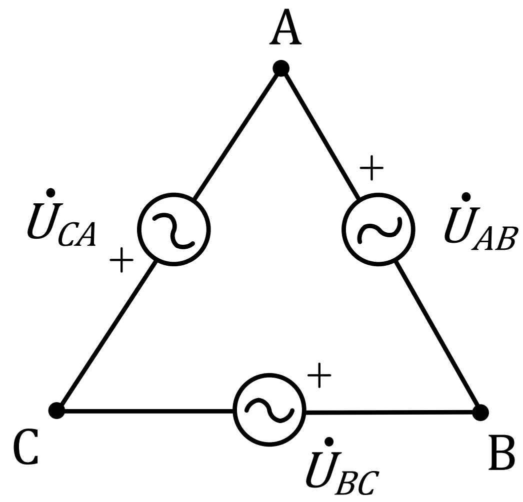



# Συνδεσμολογίες πηγών

- Η τριφασική πηγή τάσης που εξετάσαμε θα μπορούσε να σχεδιαστεί και ως εξής:
- Η συνδεσμολογία ονομάζεται συνδεσμολογία αστέρα ή Υ. Μπορούμε να πάρουμε είτε τις 3 φασικές είτε τις 3 πολικές τάσεις από αυτή.

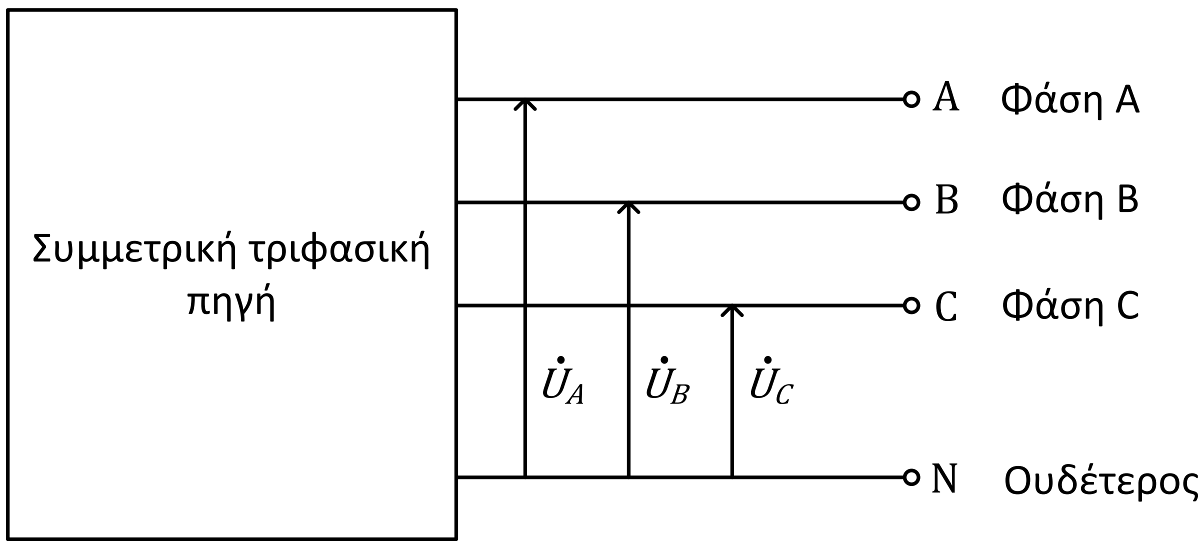



- Επίσης θα μπορούσε μια τριφασική πηγή να είναι συνδεδεμένη και ως εξής:
- Η συνδεσμολογία ονομάζεται συνδεσμολογία τριγώνου ή Δ. Μπορούμε να πάρουμε τις 3 πολικές τάσεις από αυτή.



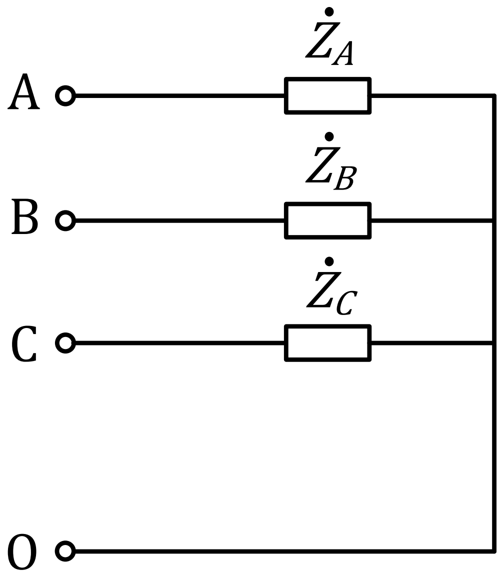
# Τριφασική πηγή τάσεων

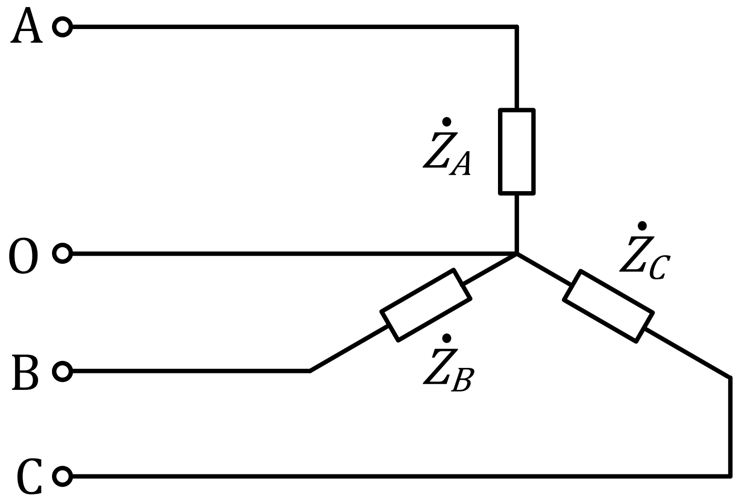
- Συνήθως οι πηγές συνδέονται σε Υ, γιατί η συνδεσμολογία Δ έχει τεχνικά προβλήματα.
- Από την πλευρά του καταναλωτή που συνδέει ένα φορτίο στην πηγή συμμετρικού τριφασικού συστήματος τάσεων δεν έχει σημασία πώς παράγονται οι τάσεις. Μια συμμετρική τριφασική πηγή τάσης μπορεί να παριστάνεται όπως φαίνεται στο σχήμα ή και μόνο με τους ακροδέκτες της A, B, C, N.

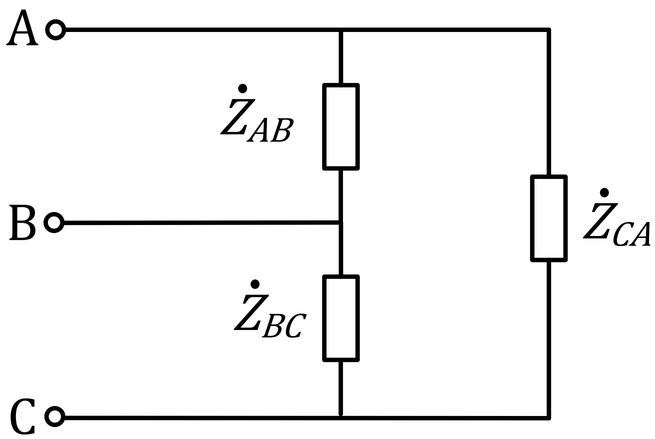


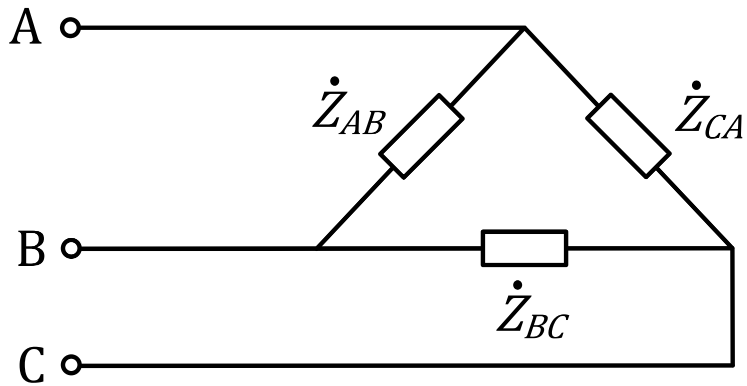
# Τριφασικό φορτίο

- Όπως οι πηγές έτσι και τα φορτία μπορεί να συνδέονται σε αστέρα ή σε τρίγωνο.



# Τριφασικό φορτίο

- Όταν το φορτίο είναι σε αστέρα οι σύνθετες αντιστάσεις συνδέονται σε έναν κοινό κόμβο (ουδέτερο), ενώ όταν είναι σε τρίγωνο συνδέονται σε βρόχο.
- Αν οι 3 σύνθετες αντιστάσεις είναι ίσες, τότε το φορτίο είναι συμμετρικό. (Προσοχή: Ίσες ως προς **το μέτρο και τη γωνία**)
- Ο αγωγός του ουδετέρου μπορεί να συνδέεται, οπότε έχουμε σύνδεση αστέρα 4 αγωγών ή να μην συνδέεται, οπότε έχουμε σύνδεση αστέρα 3 αγωγών. Η λειτουργία του ουδέτερου αγωγού στη συνδεσμολογία Υ θα εξεταστεί παρακάτω.
- Στην περίπτωση Δ συνδεσμολογίας δεν υπάρχει ουδέτερος αγωγός.

# Συνδεσμολογίες τριφασικών κυκλωμάτων

- Η κάθε συνδεσμολογία έχει τα πλεονεκτήματά της.

➢ Στην περίπτωση του Y έχουμε πρόσβαση σε δύο διαφορετικά επίπεδα τάσεων, την πολική (φάση-φάση) και τη φασική (φάση-ουδέτερος).

➢ Τρεις $\dot{Z}$ συνδεδεμένες σε τρίγωνο αντί για αστέρα λειτουργούν υπό υψηλότερη τάση, άρα προκύπτει και υψηλότερη τιμή ενεργού ισχύος στο φορτίο.

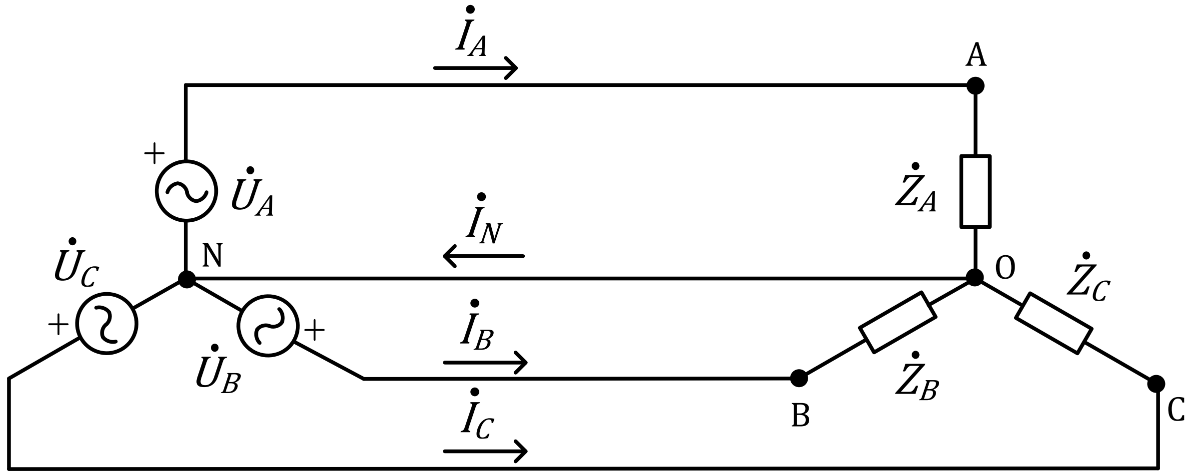
➢ Στην περίπτωση του Y υπάρχει διαθέσιμο σημείο σύνδεσης με τη γη για λόγους προστασίας από επικίνδυνες τάσεις.

➢ Η συνδεσμολογία Δ παρέχει δυνατότητα αποκοπής τρίτων αρμονικών.

κλπ

# Συνδεσμολογία Y-Y

- Θεωρούμε **συμμετρική** Y-Y συνδεσμολογία 4 αγωγών, όπως φαίνεται στο σχήμα.




- Στα άκρα του κάθε κλάδου του Y η τάση ισούται με μία φασική της πηγής.
- Λόγω της συμμετρίας θα είναι $\dot{Z}_A = \dot{Z}_B = \dot{Z}_C = \dot{Z}_Y$.
- Οι φασικές τάσεις (θεωρώντας θετική ακολουθία) είναι:

$$\dot{U}_A = U_\varphi \angle(+90°)$$

$$\dot{U}_B = U_\varphi \angle(-30°)$$

$$\dot{U}_C = U_\varphi \angle(+210°)$$

όπου $U_\varphi$ η rms τιμή της τάση μεταξύ ουδετέρου και οποιασδήποτε φάσης.

# Συνδεσμολογία Y-Y

- Επομένως τα ρεύματα στις γραμμές θα είναι

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\dot{Z}_A} = \frac{U_\varphi \angle 90°}{\dot{Z}_Y} = \frac{U_\varphi \angle 90°}{Z_Y \angle \varphi}$$

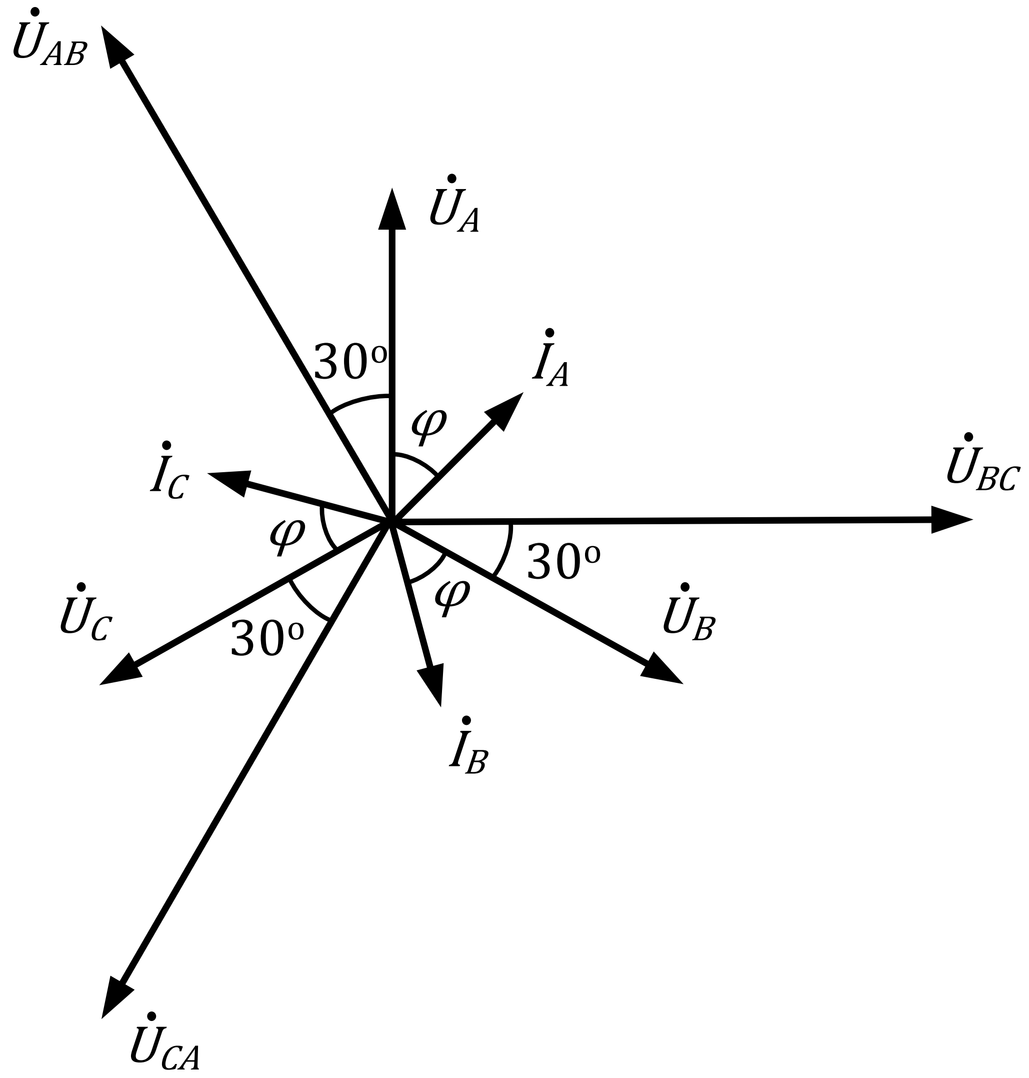
$$= \frac{U_\varphi}{Z_Y} \angle (90° - \varphi)$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\dot{Z}_B} = \frac{U_\varphi \angle (-30°)}{\dot{Z}_Y} = \frac{U_\varphi \angle (-30°)}{Z_Y \angle \varphi}$$

$$= \frac{U_\varphi}{Z_Y} \angle (-30° - \varphi)$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{Z}_C} = \frac{U_\varphi \angle 210°}{\dot{Z}_Y} = \frac{U_\varphi \angle 210°}{Z_Y \angle \varphi}$$

$$= \frac{U_\varphi}{Z_Y} \angle (210° - \varphi)$$



# Συνδεσμολογία Y-Y

- Τα ρεύματα γραμμών είναι ίδια με τα ρεύματα των φάσεων.
- Τα ρεύματα έχουν ίσα μέτρα και παρουσιάζουν διαφορά φάσης $\varphi$ με τις αντίστοιχες φασικές τάσεις.
- Επομένως το $\dot{I}_B$ έπεται κατά $120°$ του $\dot{I}_A$ και το $\dot{I}_C$ προηγείται κατά $120°$ του $\dot{I}_A$, όπως και οι αντίστοιχες τάσεις. Τα ρεύματα είναι δηλαδή και αυτά συμμετρικά.
- Το ρεύμα στον ουδέτερο προκύπτει από KCL και είναι

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$$

- Επειδή τα 3 διανύσματα $\dot{I}_A,\ \dot{I}_B,\ \dot{I}_C$ έχουν ίδια μέτρα και διαφορά φάσης $120°$ μεταξύ τους θα είναι

$$\dot{I}_N = 0$$

- Δηλαδή δεν ρέει ρεύμα στον ουδέτερο και επομένως ότι αντίσταση και αν έχει, ακόμη και αν είναι ανοιχτοκύκλωμα (συνδεσμολογία Y-Y 3 αγωγών), τα παραπάνω αποτελέσματα δεν αλλάζουν.
- Όμως προσοχή: Για να ισχύει αυτό πρέπει το φορτίο να είναι συμμετρικό.

# Συνδεσμολογία Y-Y

- Λόγω της συμμετρίας των ρευμάτων μπορούμε να υπολογίσουμε μόνο το ένα από αυτά. Τα άλλα θα είναι απλώς μετατοπισμένα κατά μία γνωστή γωνία ($\pm 120°$).
- Με βάση αυτό το συμπέρασμα αντί για το τριφασικό κύκλωμα μπορούμε να αναλύσουμε ένα μονοφασικό με τάση $\dot{U}_A$ και σύνθετη αντίσταση $\dot{Z}_A$, να υπολογίσουμε το ρεύμα σε αυτό, το οποίο προφανώς θα είναι $\dot{I}_A$, και στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψη τη διαδοχή φάσεων να βρούμε τάσεις και ρεύματα στις άλλες φάσεις.

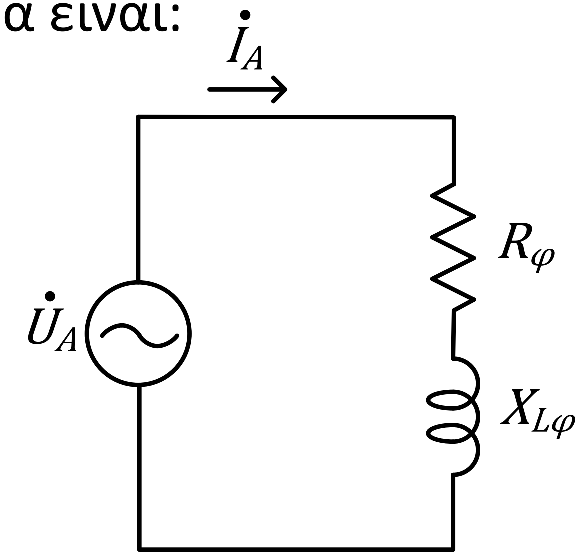
# Παράδειγμα 1

- Ένα συμμετρικό τριφασικό φορτίο συνδεδεμένο σε Υ έχει σύνθετη αντίσταση $\dot{Z}_{\mathrm{Y}} = 10 + j5\ \Omega$ ανά φάση και τροφοδοτείται από τριφασική πηγή συμμετρικού συστήματος τάσεων θετικής ακολουθίας συνδεδεμένη σε Υ με $U_{\varphi} = 100\ \mathrm{V}$. Να βρεθούν τα ρεύματα των γραμμών.

Απάντηση:

- Το κύκλωμα είναι συμμετρικό, επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μονοφασικό ισοδύναμο. Το ρεύμα στο κύκλωμα αυτό θα είναι:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\dot{Z}_A} = \frac{\dot{U}_A}{\dot{Z}_{\mathrm{Y}}} = \frac{100\angle 90°}{10 + j5} = 4 + j8 = 8.944\angle 63°\ \mathrm{A}$$



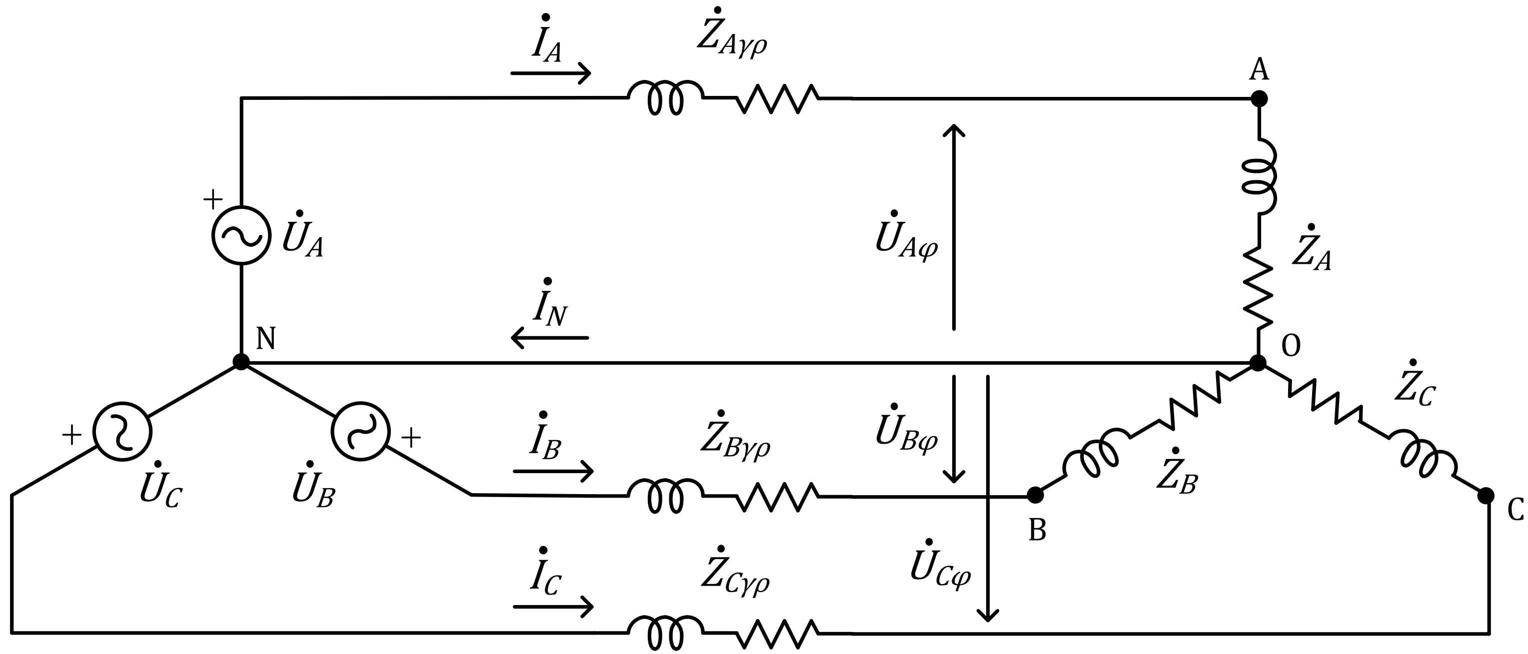

- Τα άλλα δύο ρεύματα λόγω συμμετρίας και με δεδομένο ότι η ακολουθία φάσεων είναι θετική θα είναι:

$$\dot{I}_B = 8.944\angle(63° - 120°) = 8.944\angle(-57°)\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_C = 8.944\angle(63° + 120°) = 8.944\angle 183° = 8.944\angle(-177°)\ \mathrm{A}$$

# Παράδειγμα 2

- Μια τριφασική πηγή τάσεων θετικής ακολουθίας ABC συνδεδεμένη σε αστέρα έχει πολική τάση $U = 400$ V. Αν οι σύνθετες αντιστάσεις της γραμμής και του φορτίου είναι $\dot{Z}_{\gamma\rho} = 2 + j\ \Omega$ και $\dot{Z}_{\varphi} = 20 + j4\ \Omega$ αντίστοιχα να βρεθούν τα ρεύματα γραμμής και οι τάσεις σε κάθε φάση του φορτίου.



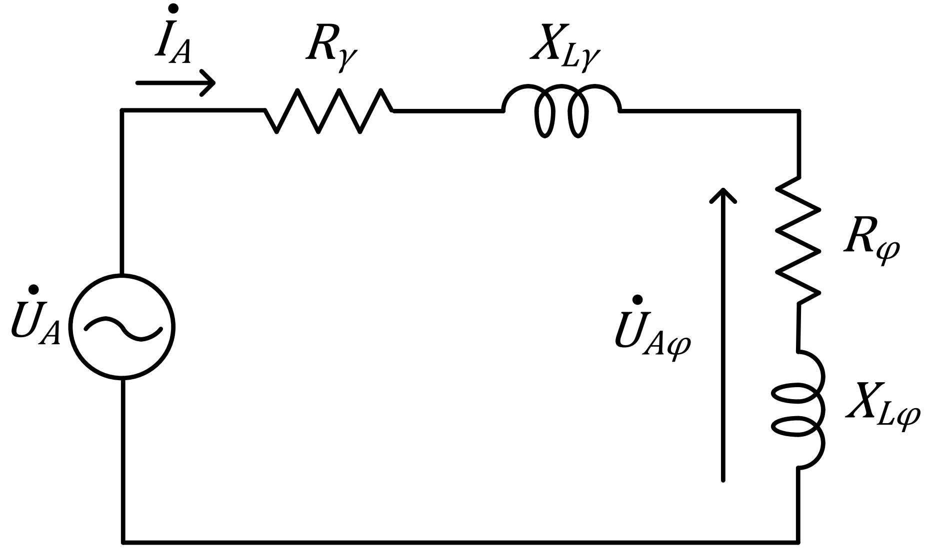
# Παράδειγμα 2

Απάντηση:

- Η φασική τάση της φάσης Α της πηγής είναι

$$\dot{U}_A = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle(+90°) = 230\angle(+90°)\ \mathrm{V}$$

- Μπορούμε να θεωρήσουμε το μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα του διπλανού σχήματος.




- Το ρεύμα στο κύκλωμα αυτό θα είναι

$$\dot{I}_A = \frac{230\angle(+90°)}{\dot{Z}_{\gamma\rho} + \dot{Z}_\varphi} = \frac{j230}{22 + j5} = 2.259 + j9.941 = 10.195\angle 77.2°\ \mathrm{A}$$

- Η τάση στο φορτίο για τη φάση Α είναι

$$\dot{U}_{A\varphi} = \dot{I}_A \dot{Z}_\varphi = (2.259 + j9.941)(20 + j4) = 207.9\angle(+88.5°)\ \mathrm{V}$$

# Παράδειγμα 2

- Από τις τιμές αυτές για τη φάση $\mathrm{A}$ μπορούμε να βρούμε τις τιμές των ρευμάτων και των τάσεων για τις άλλες δύο φάσεις.

$$\dot{I}_B = 10.195\angle(77.2° - 120°)\ \mathrm{A} = 10.195\angle(-42.8°)\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_C = 10.195\angle(77.2° + 120°)\ \mathrm{A} = 10.195\angle(+197.2°)\ \mathrm{A}$$

$$\dot{U}_{B\varphi} = 207.9\angle(88.5° - 120°) = 207.9\angle(-31.5°)\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_{C\varphi} = 207.9\angle(88.5° + 120°) = 207.9\angle(+208.5)\ \mathrm{V}$$