Ηλεκτρικά Κυκλώματα ΙΙ - Λύσεις

Α Εξεταστική Ιούνιος 2023

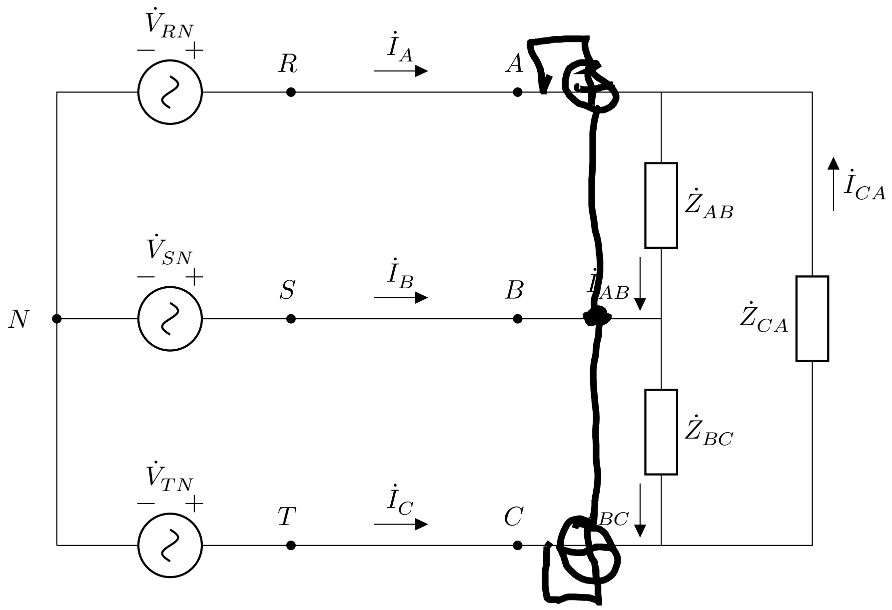
1 Θέμα (5 μον.)

Στο παρακάτω κύκλωμα έχουμε αρνητική ακολουθία φάσεων με

$$\begin{aligned} \dot{V}_{SN} &= 385\ \underline{/27^\circ}\text{V} \\ Z_{AB} &= 408\ \Omega \\ Z_{BC} &= 156\ \Omega \\ Z_{CA} &= j672\ \Omega \end{aligned}$$

Υπολογίστε τα ρεύματα γραμμής $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$, τα πολικά ρεύματα $\dot{I}_{AB}$, $\dot{I}_{BC}$, $\dot{I}_{CA}$ καθώς και την συνολική ενεργό και άεργο ισχύ που καταναλώνεται στο τριφασικό φορτίο. Ποιος είναι ο συντελεστής ισχύος για αυτό το φορτίο;

Σχεδιάστε στο κύκλωμα την εγκατάσταση βαττομέτρων για εφαρμογή μεθόδου Aron. Ποιες οι ενδείξεις των βαττομέτρων καθώς και η ολική ενεργός ισχύς που καταναλώνεται στο τριφασικό φορτίο σύμφωνα με την μέθοδο αυτή;



Σχήμα 1: Τριφασικό κύκλωμα

Λύση

Ο πιο απλός τρόπος είναι να μετατρέψουμε την πηγή από αστέρα σε τρίγωνο. Έχουμε:

$$\dot{V}_{RN} = \dot{V}_{SN}\underline{/-120^\circ} = 385\underline{/-93^\circ}\ \text{V} \qquad \dot{V}_{SN} = 385\ \underline{/27^\circ}\text{V} \qquad \dot{V}_{TN} = \dot{V}_{SN}\underline{/120^\circ} = 385\underline{/147^\circ}\ \text{V}$$

$$\dot{V}_{RS} = \sqrt{3}\dot{V}_{RN}\underline{/-30^\circ} = 666.8\underline{/-123^\circ}\ \text{V} \qquad \dot{V}_{ST} = \dot{V}_{RS}\underline{/120^\circ} = 666.8\underline{/-3^\circ}\ \text{V} \qquad \dot{V}_{TR} = \dot{V}_{RS}\underline{/-120^\circ} = 666.8\underline{/117^\circ}\ \text{V}$$

οπότε

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{V}_{RS}}{Z_{AB}} = 1.63\underline{/-123^\circ}\ \text{A} \qquad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{V}_{ST}}{Z_{BC}} = 4.27\underline{/-3^\circ}\ \text{A} \qquad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{V}_{TR}}{Z_{CA}} = 0.992\underline{/27^\circ}\ \text{A}$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 2.54\underline{/-134.2^\circ}\ \text{A} \qquad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = 5.28\underline{/12.5^\circ}\ \text{A} \qquad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = 3.45\underline{/168.7^\circ}\ \text{A}$$

Εναλλακτικά και πιο επίπονα, μετατρέπουμε το φορτίο σε αστέρα και:

$$Z_A = \frac{Z_{AB}Z_{CA}}{Z_{AB}+Z_{BC}+Z_{CA}} = 312.5\underline{/40^\circ}\ \Omega \qquad Z_B = \frac{Z_{AB}Z_{BC}}{Z_{AB}+Z_{BC}+Z_{CA}} = 72.5\underline{/-50^\circ}\ \Omega$$

$$Z_C = \frac{Z_{BC}Z_{CA}}{Z_{AB}+Z_{BC}+Z_{CA}} = 119.5\underline{/40^\circ}\ \Omega$$

Εφόσον το τριφασικό είναι ασύμμετρο χρειαζόμαστε την τάση

$$\dot{V}_{ON} = \frac{\dot{V}_{RN}/Z_A + \dot{V}_{SN}/Z_B + \dot{V}_{TN}/Z_C}{1/Z_A + 1/Z_B + 1/Z_C} = 409.8\angle 84.6^\circ \text{ V}$$

και με κανόνα τάσης Kirchhoff στον κάθε βρόχο

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{V}_{RN} - \dot{V}_{ON}}{Z_A} \qquad \dot{I}_B = \frac{\dot{V}_{SN} - \dot{V}_{ON}}{Z_B} \qquad \dot{I}_C = \frac{\dot{V}_{TN} - \dot{V}_{ON}}{Z_C}$$

με ίδιες τιμές όπως πριν. Και πάλι με κανόνα τάσης Kirchhoff στον κάθε βρόχο αλλά για το αρχικό κύκλωμα:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{V}_{RN} - \dot{V}_{SN}}{Z_{AB}} \qquad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{V}_{SN} - \dot{V}_{TN}}{Z_{BC}} \qquad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{V}_{TN} - \dot{V}_{RN}}{Z_{CA}}$$

πάλι με ίδιες τιμές όπως πριν.

Η συνολική ενεργός ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο είναι:

$$P = |\dot{I}_{AB}|^2 Z_{AB} + |\dot{I}_{BC}|^2 Z_{BC} = 3940.4 \text{ W}$$

Η άεργος ισχύς είναι:

$$Q = |\dot{I}_{CA}|^2 \Im m\{Z_{CA}\} = 661.7 \text{ VAR}$$

Η μιγαδική ισχύς για το ολικό φορτίο είναι:

$$\dot{S} = P + jQ = 3940.4 + j661.7 = 3995.5\angle 9.53^\circ \text{ VA}$$

άρα ο συντελεστής ισχύος είναι:

$$\cos(9.53^\circ) = 0.986$$

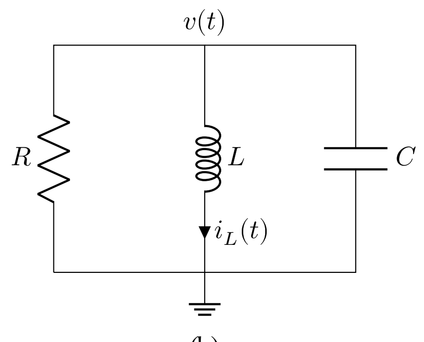
Με μέθοδο Aron

$$w_1 = \Re e\{\dot{V}_{RS}\dot{I}_A^*\} = 1663.0 \text{ W} \qquad w_2 = \Re e\{-\dot{V}_{ST}\dot{I}_C^*\} = 2277.4 \text{ W} \qquad w = w_1 + w_2 = 3940.4 \text{ W}$$

ίδια τιμή με αυτή που υπολογίσαμε προηγουμένως.

2 Θέμα (5 μον.)

Στο παρακάτω κύκλωμα έχουμε $R = 22\ \Omega$, $L = 12.5$ mH, $C = 5$ mF και αρχικές συνθήκες $v(0^-) = 15$ V, $i_L(0^-) = -4$ A. Να υπολογιστεί η τάση $v(t)$ για $t \geq 0$. Δίδεται $\mathcal{L}[e^{-at}] = \dfrac{1}{s+a}$



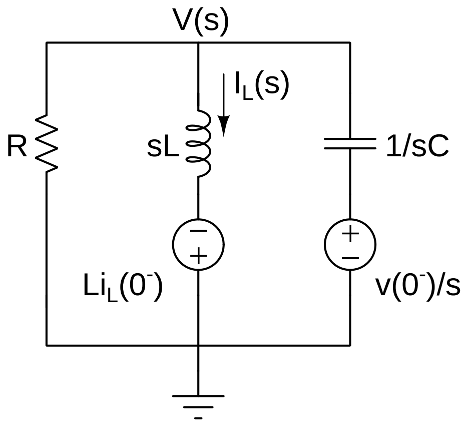
(b)

Σχήμα 2: Κύκλωμα χρονικής εξέλιξης τάσης

Λύση

Με κομβική ανάλυση και λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες:

$$\frac{V}{R} + \frac{V + Li_L(0^-)}{sL} + \frac{V - v(0^-)/s}{1/sC} = 0 \Rightarrow V\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC\right) = -\frac{i_L(0^-)}{s} + Cv(0^-) \Rightarrow$$



$$V(s) = \frac{RL[-i_L(0^-) + v(0^-)Cs]}{RLCs^2 + Ls + R} = \frac{v(0^-)s - \dfrac{i_L(0^-)}{C}}{s^2 + \dfrac{1}{RC}s + \dfrac{1}{LC}} = \frac{15s + \dfrac{4}{C}}{s^2 + \dfrac{1}{RC}s + \dfrac{1}{LC}} =$$

$$= \frac{K}{s - s_1} + \frac{K^*}{s - s_2} = \frac{K}{s + 4.54 - j126.4} + \frac{K^*}{s + 4.54 + j126.4}$$

εφόσον οι ρίζες του παρονομαστή είναι $s_{1,2} = -4.54 \pm j126.4$. Οπότε:

$$K = (s - s_1)V\Big|_{s=s_1} = 8.04\underline{/-21.1^\circ}$$

και

$$v(t) = 16.1\exp(-4.54t)\cos(126.4t - 21.1^\circ) \ \text{V} \quad \text{για } t \geq 0$$