Ηλεκτρικά Κυκλώματα II

Διάλεξη 11

Α. Δροσόπουλος

01-06-2023

Topic

1. Μετρήσεις Ηλεκτρικών Μεγεθών

Σφάλματα μετρήσεων

- Ένα αναλογικό βολτόμετρο κλάσης 2.5 με μέγιστο κλίμακας $100\ \mathrm{V}$ μπορεί να δείχνει $100 \times 0.025 = 2.5\ \mathrm{V}$ παρακάτω ή παραπάνω από την πραγματική τιμή (μέγιστο απόλυτο σφάλμα). Αν η μετρούμενη τάση είναι $90\ \mathrm{V}$ τότε το βολτόμετρο μπορεί να δείχνει από $87.5\ \mathrm{V}$ έως $92.5\ \mathrm{V}$. Το σχετικό σφάλμα είναι τότε 2.8% της μέτρησης. Ωστόσο αν μετρήσουμε $10\ \mathrm{V}$ στην ίδια κλίμακα, τότε μπορεί να δείχνει μεταξύ $7.5\ \mathrm{V}$ και $12.5\ \mathrm{V}$ δηλαδή 25% της μέτρησης.
- Για να διατηρούμε κάποια σχετική ακρίβεια πρέπει να επιλέγουμε την κλίμακα του αναλογικού οργάνου έτσι ώστε ο δείκτης κατά τη μέτρηση να βρίσκεται μετά τα 2/3 της πλήρους κλίμακας.
- Για τα ψηφιακά όργανα συχνά δίνεται το σταθερό σφάλμα ανάγνωσης ως ποσοστό της ένδειξης του οργάνου. Έτσι δίνεται μία τιμή πχ $\pm 0.2\%$ της ένδειξης. Αν ένα βολτόμετρο δείξει $8.135\ \mathrm{V} \pm 0.2\%$ δηλαδή $8.135\ \mathrm{V} \pm 0.016\ \mathrm{V}$ τότε η τάση θα είναι μεταξύ $8.119\ \mathrm{V}$ και $8.151\ \mathrm{V}$.
- Μπορεί όμως επίσης να δίνεται η ακρίβεια ως ποσοστό της ένδειξης σε συνδυασμό με κάποιο σφάλμα στην ένδειξη του τελευταίου ψηφίου.

Σφάλματα μετρήσεων

- Έστω ότι ένα ψηφιακό πολύμετρο μετράει μια τάση $1.2\ \mathrm{V}$. Ο κατασκευαστής του δηλώνει την ακρίβεια στη μορφή $\pm(0.5\% + 3)$.
- Αρχικά θέτουμε το διακόπτη στην κλίμακα $200\ \mathrm{V}$. Η οθόνη θα δείξει τη μετρούμενη τάση στη μορφή XX.X. Η ακρίβεια είναι $1.2 \cdot \frac{0.5}{100} = 0.006\ \mathrm{V}$, που δεν μπορεί καν να φανεί στην οθόνη αφού φαίνεται μόνο ένα ψηφίο μετά την υποδιαστολή.
- Ωστόσο δίνεται επίσης ότι το τελευταίο ψηφίο στην οθόνη μπορεί να διαφέρει κατά ± 3 τιμές. Δηλαδή το όργανο μπορεί να δείχνει τιμή $1.2 \pm 0.3\ \mathrm{V}$ δηλαδή από $0.9\ \mathrm{V}$ έως $1.5\ \mathrm{V}$. Δηλαδή $\pm 25\%$ πιθανό σφάλμα.

Σφάλματα μετρήσεων

- Αν θέσουμε το διακόπτη στην κλίμακα $20\ \mathrm{V}$ το όργανο θα δείχνει X.XX. Η ακρίβεια υπολογίζεται ως εξής: $\pm\left(1.20 \cdot \frac{0.5}{100} + 0.03\right) = \pm 0.036\ \mathrm{V}$. Δηλαδή μπορεί να δείχνει από $1.16\ \mathrm{V}$ έως $1.23\ \mathrm{V}$. Το πιθανό σφάλμα είναι τώρα $\pm 3\%$.
- Τέλος αν θέσουμε το διακόπτη στην κλίμακα $2\ \mathrm{V}$ το όργανο θα δείχνει X.XXX. Το ποσοστό της ένδειξης και πάλι δεν αλλάζει αλλά το τρίτο λιγότερο σημαντικό ψηφίο είναι μικρότερος παράγοντας. Η συνολική ακρίβεια ορίζεται ως $\pm\left(1.200 \cdot \frac{0.5}{100} + 0.003\right) = \pm 0.009\ \mathrm{V}$. Δηλαδή μπορεί να δείχνει από $1.191\ \mathrm{V}$ έως $1.209\ \mathrm{V}$.

Παράδειγμα 5

- Το αμπερόμετρο του εργαστηρίου είναι κλάσης 1.5 και διαθέτει 5 κλίμακες: $10\ \mathrm{A}, 5\ \mathrm{A}, 1\ \mathrm{A}, 0.5\ \mathrm{A}, 0.1\ \mathrm{A}$. Έστω ότι η μετρούμενη τιμή είναι $0.45\ \mathrm{A}$. Να βρεθεί σε ποια κλίμακα η μέτρηση αυτή θα παρουσιάζει το μεγαλύτερο σχετικό σφάλμα και σε ποια το μικρότερο.

Απάντηση:

- Το σχετικό σφάλμα της μέτρησης είναι

$$\Sigma\Phi = \frac{\Delta X}{X_\mu} \times 100$$

- Το μέγιστο απόλυτο σφάλμα για τις κλίμακες του αμπερομέτρου και το αντίστοιχο σχετικό σφάλμα είναι

$$10\ \mathrm{A}:\ \ \Delta X_{max} = \frac{G \cdot X_{max}}{100} = 0.15\ \mathrm{A}\ \rightarrow \Sigma\Phi = \frac{0.15}{0.45} \times 100 = 33.3\%$$

$$5\ \mathrm{A}:\ \ \Delta X_{max} = \frac{G \cdot X_{max}}{100} = 0.075\ \mathrm{A}\ \rightarrow \Sigma\Phi = \frac{0.075}{0.45} \times 100 = 16.7\%$$

Παράδειγμα 5

$$1\text{ A:}\quad \Delta X_{max} = \frac{G \cdot X_{max}}{100} = 0.015\text{ A} \rightarrow \Sigma\Phi = \frac{0.015}{0.45} \times 100 = 3.3\%$$

$$0.5\text{ A:}\quad \Delta X_{max} = \frac{G \cdot X_{max}}{100} = 0.0075\text{ A} \rightarrow \Sigma\Phi = \frac{0.075}{0.45} \times 100 = 1.7\%$$

- Την κλίμακα 0.1 A δεν την εξετάζουμε.

Παράδειγμα 6

- Θέλουμε να μετρήσουμε τάση περίπου 380 V με βολτόμετρο κλάσης 1.5. Ποια πρέπει να είναι η μέγιστη τιμή της κλίμακας του βολτομέτρου ώστε το σχετικό σφάλμα να είναι μικρότερο από 2%;

Απάντηση:

- Πρέπει

$$\Sigma\Phi = \frac{G \cdot U_{max}}{U_{\mu}} \leq 2 \Rightarrow U_{max} \leq 507 \text{ V}$$

- Άρα ένα βολτόμετρο με κλίμακα 500 V είναι κατάλληλο.

Σφάλματα μετρήσεων

- Όταν μια ποσότητα υπολογίζεται από μετρήσεις που γίνονται μέσω δύο ή περισσοτέρων οργάνων τότε πρέπει να υποθέσουμε ότι τα σφάλματα συνδυάζονται με το χειρότερο δυνατό τρόπο. Το τελικό σφάλμα είναι μεγαλύτερο από το σφάλμα σε κάθε ένα από τα όργανα ξεχωριστά.
- Όταν η ποσότητα προκύπτει ως άθροισμα δύο μετρήσεων τότε το συνολικό σφάλμα είναι το άθροισμα των απολύτων σφαλμάτων

$$E = (X_1 \pm \Delta X_1) + (X_2 \pm \Delta X_2) = (X_1 + X_2) \pm (\Delta X_1 + \Delta X_2)$$

- Αν οι ποσότητες πρέπει να αφαιρεθούν:

$$E = (X_1 \pm \Delta X_1) - (X_2 \pm \Delta X_2) = (X_1 - X_2) \pm (\Delta X_1 + \Delta X_2)$$

- Όταν μια ποσότητα προκύπτει ως γινόμενο δύο άλλων:

$$E = (X_1 \pm \Delta X_1)(X_2 \pm \Delta X_2) = X_1 X_2 \pm X_1 \Delta X_2 \pm X_2\, \Delta X_1 \pm \Delta X_1 \Delta X_2$$

➢ Η ποσότητα $\Delta X_1 \Delta X_2$ θα είναι πολύ μικρή επομένως

$$E \approx X_1 X_2 \pm (X_1 \Delta X_2 + X_2\, \Delta X_1)$$

Σφάλματα μετρήσεων

- Τελικά το ποσοστιαίο σφάλμα ΣΦ% θα είναι:

$$\Sigma\Phi\% = \frac{X_1 \Delta X_2 + X_2\, \Delta X_1}{X_1 X_2} 100\% = \left(\frac{\Delta X_2}{X_2} + \frac{\Delta X_1}{X_1}\right) 100\% = \Sigma\Phi_1\% + \Sigma\Phi_2\%$$

- Αν για παράδειγμα θέλουμε να μετρήσουμε ισχύ και

$$U = 100\ \mathrm{V} \pm 2\% = 100\ \mathrm{V} \pm 2\ \mathrm{V}$$

$$I = 5\ \mathrm{A} \pm 3\% = 5\ \mathrm{A} \pm 0.15\ \mathrm{A}$$

- Τότε για την ισχύ προκύπτει σφάλμα

$$P = 500\ \mathrm{W} \pm 5\%$$

- Το ίδιο ακριβώς αποδεικνύεται ότι ισχύει για το ποσοστιαίο σφάλμα και στην περίπτωση που έχουμε πηλίκο δύο ποσοτήτων.

Μετρήσεις τάσης και ρεύματος

Βολτόμετρο:

- Συνδέεται παράλληλα στο κύκλωμα του οποίου την τάση θέλουμε να μετρήσουμε. Με τη λέξη «κύκλωμα» μπορεί να περιγράφεται μεμονωμένο στοιχείο, συνδεσμολογία περισσοτέρων στοιχείων ή ολόκληρη εγκατάσταση.
- Η σύνδεση του οργάνου αλλάζει το ρεύμα στο κύκλωμα. Όσο μεγαλύτερη είναι η αντίστασή του τόσο μικρότερη είναι η επίδρασή του.

Αμπερόμετρο:

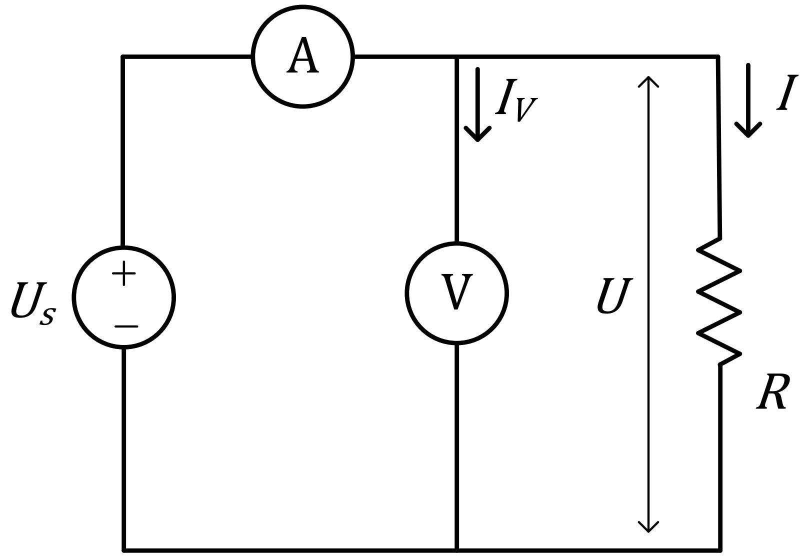
- Συνδέεται σε σειρά με το στοιχείο του οποίου το ρεύμα θέλουμε να μετρήσουμε.
- Η σύνδεση του οργάνου προκαλεί μικρή πτώση τάσης στο κύκλωμα. Όσο μικρότερη είναι η αντίστασή του τόσο μικρότερη είναι αυτή η πτώση τάσης.

Μέτρηση αντίστασης με ωμόμετρο

- Ωμόμετρο

Μέτρηση αντίστασης με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

- $1^{ος}$ τρόπος:



- Αν R_V είναι η εσωτερική αντίσταση του βολτομέτρου

$$R_\mu = \frac{U}{I + I_V} = \frac{U}{I + \frac{U}{R_V}}$$

- Η πραγματική τιμή όμως της αντίστασης είναι

$$R_\pi = \frac{U}{I}$$

Μέτρηση αντίστασης με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

- Άρα μπορούμε να γράψουμε ότι

$$R_\mu = \frac{R_\pi \cdot R_V}{R_\pi + R_V}$$

- Μπορούμε να υπολογίσουμε το σχετικό σφάλμα της μέτρησης ως εξής:

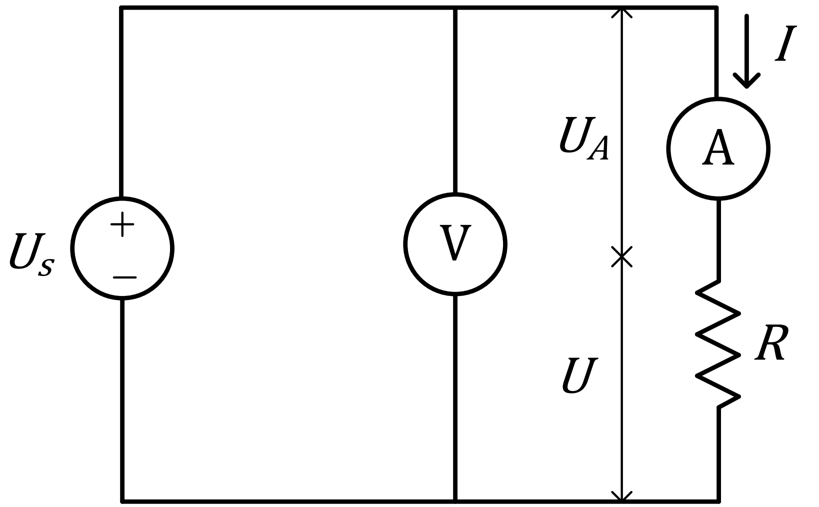
$$\Sigma\Phi_R = \frac{R_\pi - R_\mu}{R_\pi} 100\% = \frac{R_\pi - \frac{R_\pi \cdot R_V}{R_\pi + R_V}}{R_\pi} 100\% = \left(1 - \frac{R_V}{R_\pi + R_V}\right) 100\%$$

$$= \frac{R_\pi}{R_\pi + R_V} 100\%$$

- Όσο πιο μεγάλη είναι η αντίσταση του βολτομέτρου τόσο πιο μικρή είναι η τιμή του σφάλματος.

Μέτρηση αντίστασης με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

- $2^{ος}$ τρόπος:



- Στην περίπτωση αυτή:

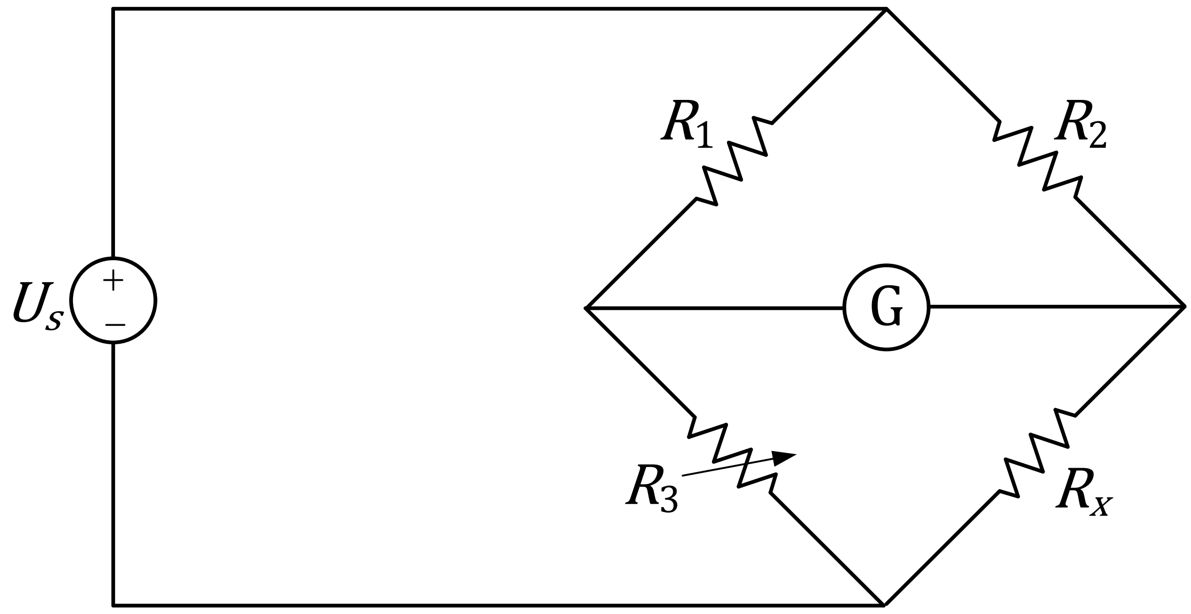
$$R_\mu = \frac{U + U_A}{I} = \frac{U}{I} + \frac{U_A}{I} = R_\pi + R_A$$

$$\Sigma\Phi_R = \frac{R_\pi - R_\mu}{R_\pi} 100\% = \frac{R_\pi - R_\pi - R_A}{R_\pi} 100\% = \frac{-R_A}{R_\pi} 100\%$$

- Όσο πιο μεγάλη είναι η εσωτερική αντίσταση του αμπερομέτρου τόσο πιο μεγάλο είναι το σχετικό σφάλμα.

Μέτρηση αντίστασης με γέφυρα Wheatstone

- Το κύκλωμα αποτελείται από την άγνωστη αντίσταση R_x, δύο αντιστάσεις ακριβείας R_1, R_2 και μια μεταβλητή αντίσταση R_3, καθώς και ένα γαλβανόμετρο (αμπερόμετρο υψηλής ευαισθησίας).



- Η τάση τροφοδοσίας προκαλεί ροή ρεύματος μέσω των αντιστάσεων.
- Ρυθμίζουμε την R_3 μέχρι το γαλβανόμετρο να δείχνει μηδέν, οπότε δεν ρέει ρεύμα μέσω αυτού του κλάδου. Τότε λέμε ότι η γέφυρα ισορροπεί και ισχύει ότι η διαφορά δυναμικού στα άκρα του γαλβανομέτρου είναι μηδέν, επομένως

$$U_{R_1} = U_{R_2}$$
$$U_{R_x} = U_{R_3}$$

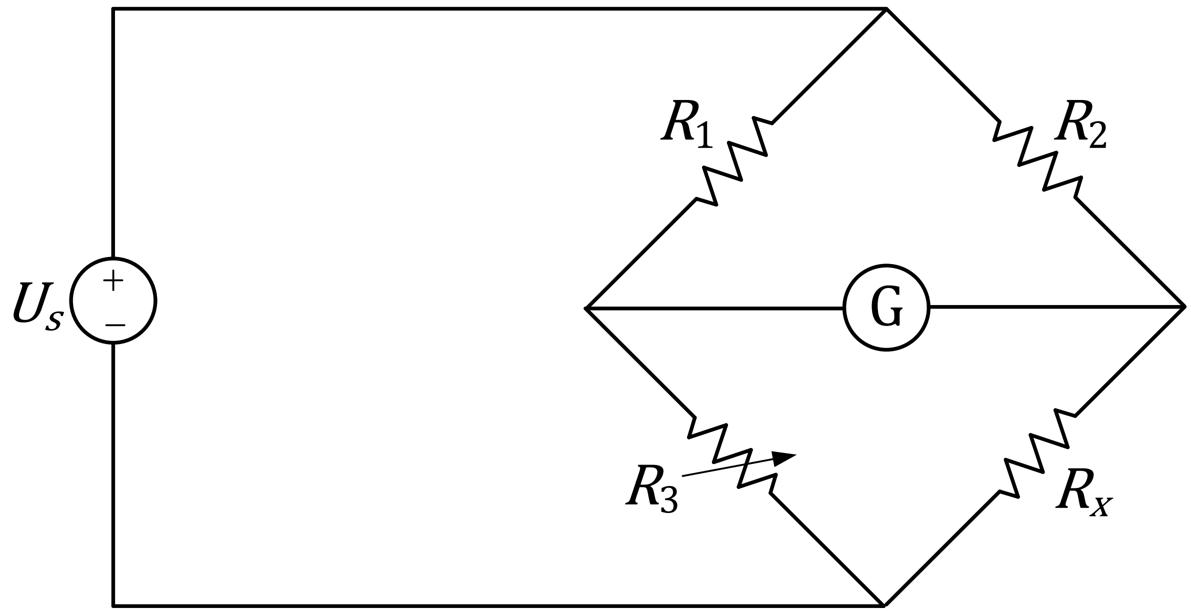
Μέτρηση αντίστασης με γέφυρα Wheatstone

- Επομένως

$$I_1 R_1 = I_2 R_2$$
$$I_1 R_3 = I_2 R_x$$

- Τελικά αν διαιρέσουμε κατά μέλη:

$$R_X = \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

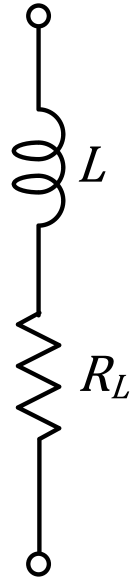


Μέτρηση συντελεστή αυτεπαγωγής και χωρητικότητας

- Το ισοδύναμο ενός πραγματικού πυκνωτή περιέχει έναν ιδανικό πυκνωτή και μία ωμική αντίσταση παράλληλα σε αυτόν.
- Η χωρητικότητα C παριστάνει την χωρητικότητα του πυκνωτή και η ωμική αντίσταση την αντίσταση του διηλεκτρικού ή αντίσταση διαρροής.
- Πυκνωτές με μεγάλο ρεύμα διαρροής όπως οι ηλεκτρολυτικοί πυκνωτές έχουν σχετικά μικρή αντίσταση ενώ πυκνωτές όπως οι πλαστικής μεμβράνης πολύ μικρό ρεύμα διαρροής και μεγάλη αντίσταση.
- Γενικά η επίδραση της αντίστασης στην περίπτωση του πυκνωτή και ανάλογα με την κατασκευή του μπορεί να είναι αμελητέα, σε αντίθεση με αυτή του πηνίου.

Μέτρηση συντελεστή αυτεπαγωγής και χωρητικότητας

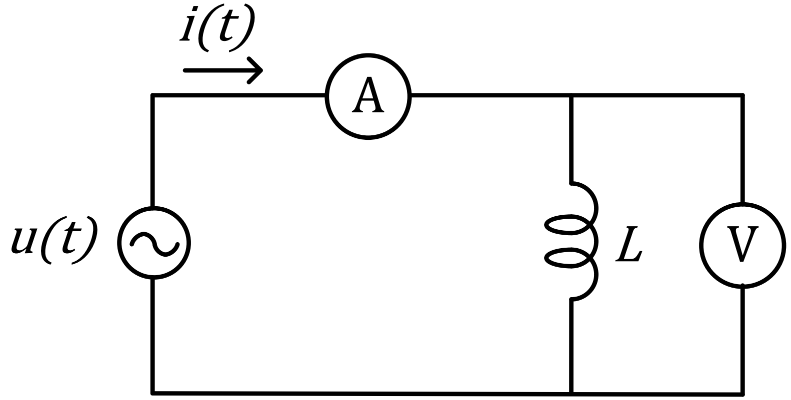
- Ένα πραγματικό πηνίο έχει ισοδύναμο της μορφής:



όπου L η τιμή της αυτεπαγωγής του και R_L η αντίσταση του σύρματος, η οποία δεν είναι καθόλου αμελητέα. Ιδανικά θα ήταν μηδενική όμως στην πράξη εξαρτάται από το μήκος, τη διατομή του σύρματος και την ειδική αντίσταση του υλικού.

Μέτρηση συντελεστή αυτεπαγωγής και χωρητικότητας

- Μέτρηση L με αμπερόμετρο και βολτόμετρο:

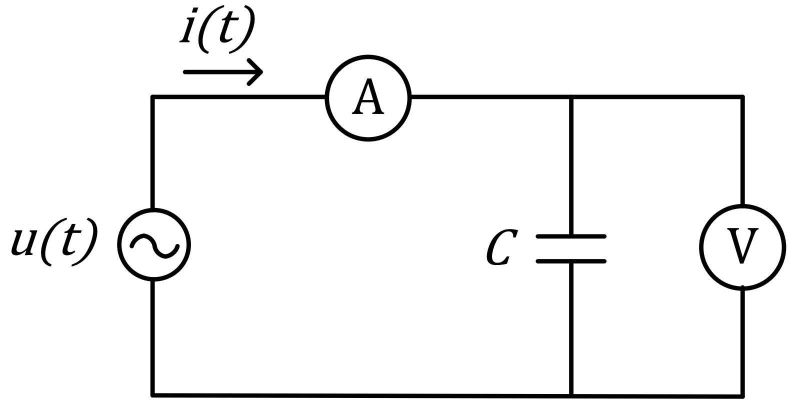


$$Z = \frac{U}{I}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + {X_L}^2}$$

$$X_L = \omega L = 2\pi f L$$

- Την ωμική αντίσταση τη μετράμε με ωμόμετρο.
- Μέτρηση C με αμπερόμετρο και βολτόμετρο:

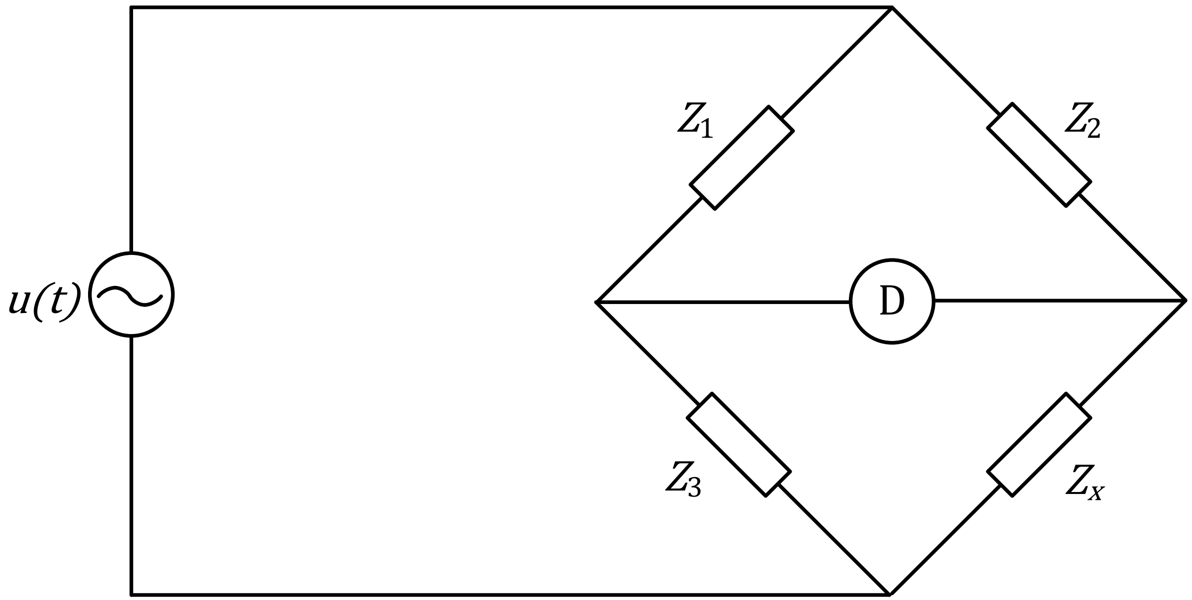


$$X_C = \frac{U}{I}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

Μέτρηση συντελεστή αυτεπαγωγής και χωρητικότητας

- Μέτρηση με AC γέφυρες:
- Όπως ακριβώς προκύπτει στη γέφυρα Wheatstone έτσι και εδώ όταν ο ανιχνευτής του μηδενός στον κεντρικό κλάδο δείξει μηδέν τότε η γέφυρα ισορροπεί.

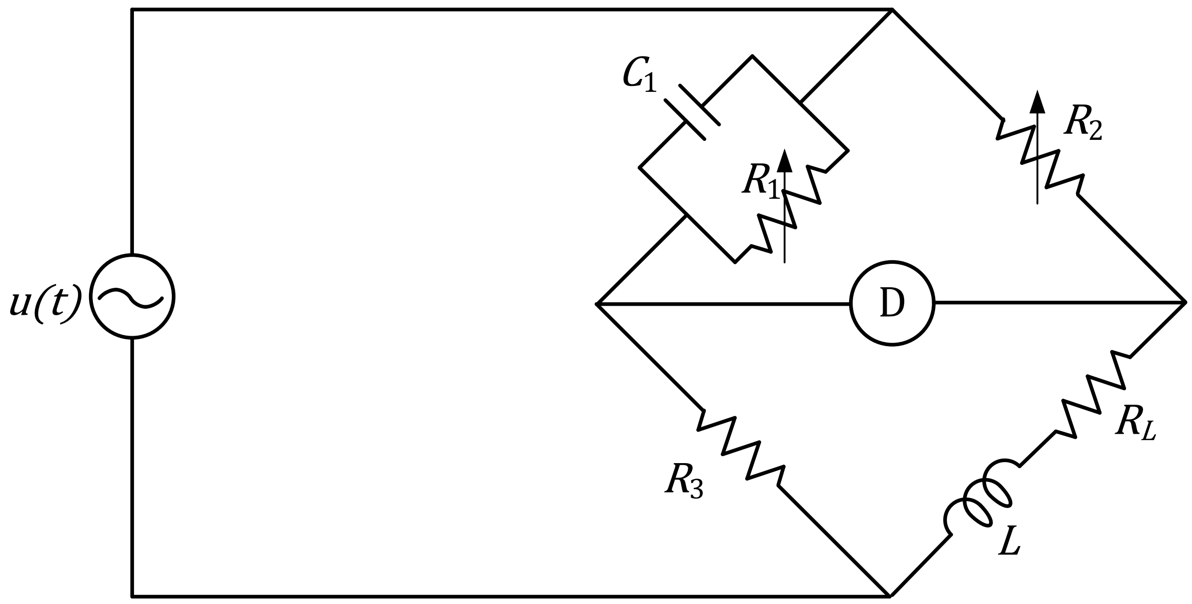


$$\dot{Z}_1\dot{Z}_x = \dot{Z}_2\dot{Z}_3 \Rightarrow \dot{Z}_x = \frac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1}$$

- Βέβαια εδώ για να είναι μηδέν η τάση αυτή πρέπει τα μεγέθη στα άκρα του να είναι ίσα σε μέτρο και γωνία.
- Η παραπάνω εξίσωση οδηγεί σε δύο εξισώσεις, μία για το πραγματικό και μία για το φανταστικό της μέρος. Και οι άγνωστοι είναι δύο: Η αυτεπαγωγή και η αντίσταση του σύρματος.

Μέτρηση συντελεστή αυτεπαγωγής και χωρητικότητας

- Ένα παράδειγμα: Γέφυρα Maxwell
- Στη γέφυρα αυτή χρησιμοποιείται γνωστός πυκνωτής παράλληλα με ρυθμιζόμενη αντίσταση μαζί με άλλες δύο αντιστάσεις από τις οποίες τουλάχιστον η μία είναι ρυθμιζόμενη.



- Γενικά είναι πιο εύκολη η κατασκευή σχεδόν ιδανικού πυκνωτή.
- Ο τέταρτος κλάδος περιέχει το πηνίο που πρέπει να μετρηθεί το οποίο παριστάνεται με αυτεπαγωγή L σε σειρά με R_L.

Μέτρηση συντελεστή αυτεπαγωγής και χωρητικότητας

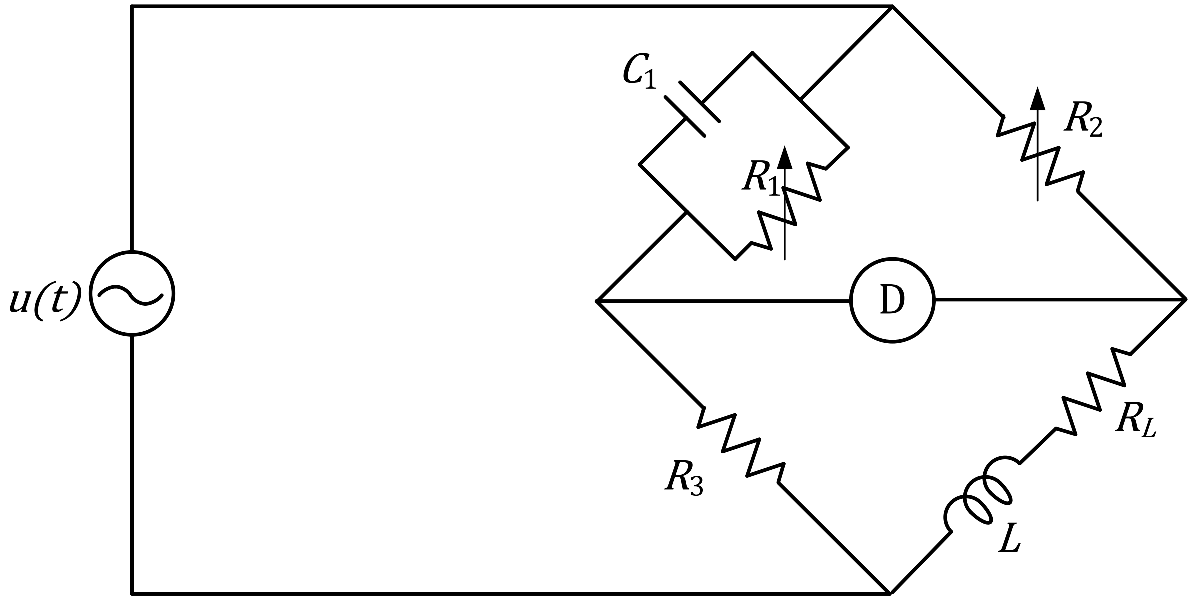
$$\dot{Z}_1\dot{Z}_x = \dot{Z}_2\dot{Z}_3 \Rightarrow \dot{Z}_x = \frac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1}$$

$$= \dot{Z}_2\dot{Z}_3\dot{Y}_1$$

$$\dot{Y}_1 = \frac{1}{R_1} + j\omega C_1$$

$$\dot{Z}_2 = R_2$$

$$\dot{Z}_3 = R_3$$



$$\dot{Z}_x = R_L + j\omega L$$

$$R_L + j\omega L = R_2R_3\left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_1\right) \Rightarrow R_L + j\omega L = \frac{R_2R_3}{R_1} + j\omega R_2R_3C_1$$

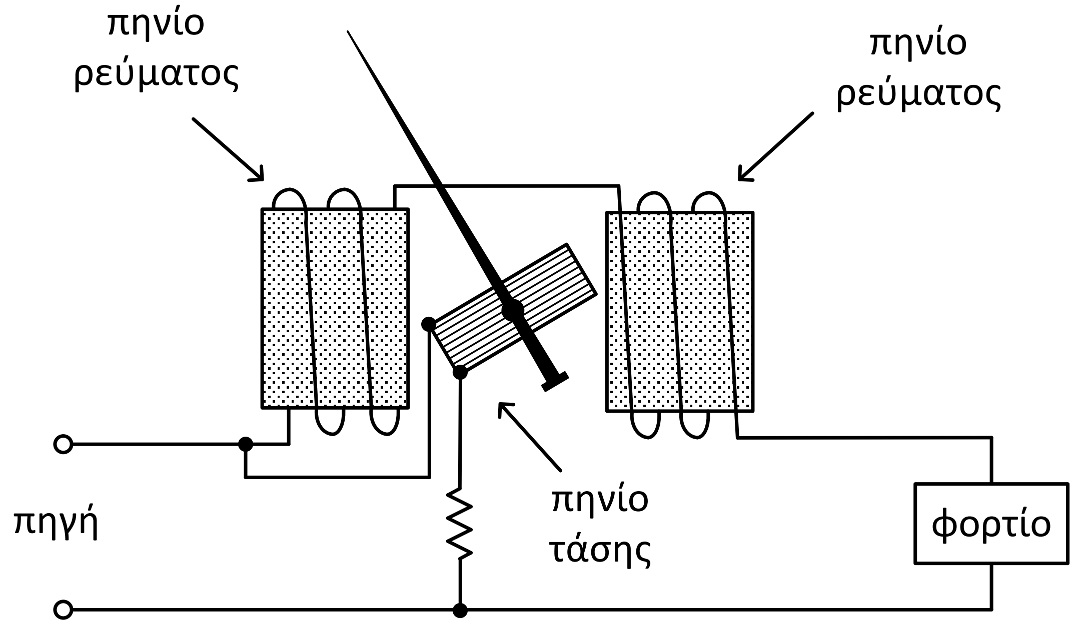
$$\Rightarrow \begin{cases} L = R_2R_3C_1 \\ R_L = \dfrac{R_2R_3}{R_1} \end{cases}$$

Μέτρηση συντελεστή αυτεπαγωγής και χωρητικότητας

- Μετρητής LCR: Άμεση μέτρηση

Μέτρηση ισχύος - Βαττόμετρο

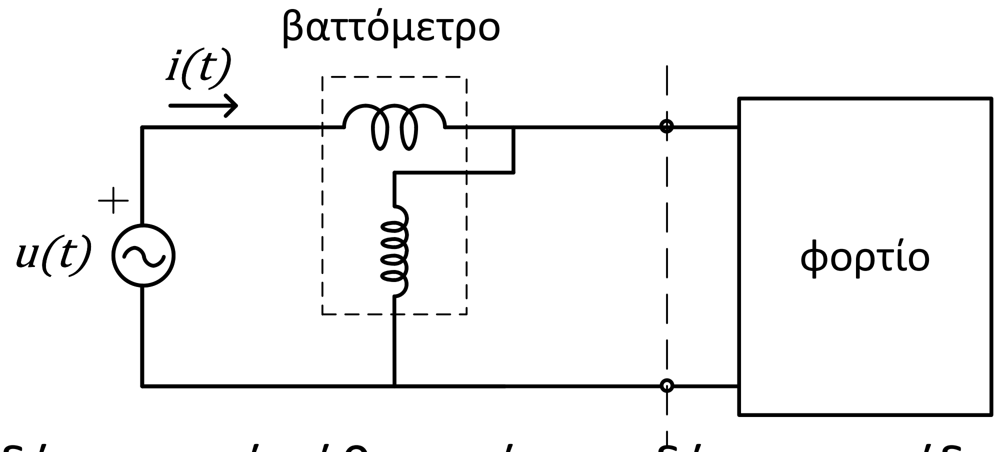
- Το αναλογικό βαττόμετρο ανήκει στην κατηγορία των ηλεκτροδυναμικών οργάνων (βλ. μάθημα 9).



- Το πηνίο έντασης διαθέτει λίγες και μεγάλης διατομής σπείρες ενώ το πηνίο τάσης πολλές και μικρής διατομής.

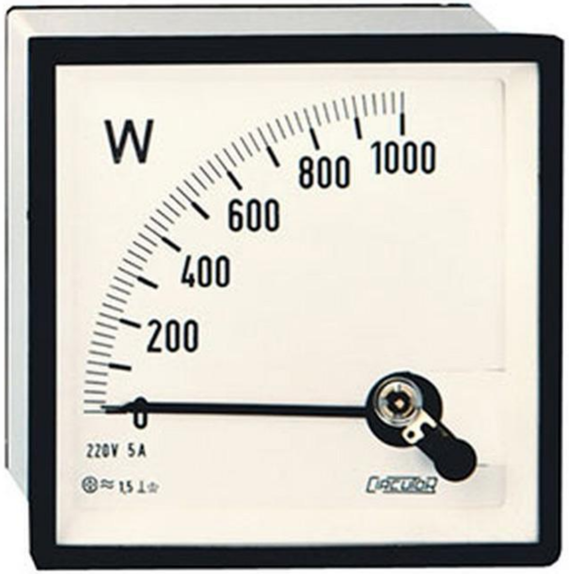
Μέτρηση ισχύος - Βαττόμετρο

- Το πηνίο έντασης του βαττομέτρου έχει επομένως πολύ μικρή αντίσταση, με αποτέλεσμα η πτώση τάσης στα άκρα του να είναι αμελητέα και να μην επηρεάζει την τάση στα άκρα του φορτίου. Το πηνίο τάσης έχει πολύ μεγάλη αντίσταση με αποτέλεσμα να διαρρέεται από αμελητέο ρεύμα και να μην επηρεάζει το ρεύμα του φορτίου.
- Το βαττόμετρο διαθέτει δύο ζεύγη ακροδεκτών, ένα για το πηνίο τάσης και ένα για το πηνίο έντασης.



- Επειδή ένας ακροδέκτης από κάθε πηνίο συνδέεται στο ίδιο σημείο είναι δυνατό το βαττόμετρο να διαθέτει μόνο τρεις ακροδέκτες και το κοινό σημείο σύνδεσης των δύο πηνίων να υπάρχει στο εσωτερικό του οργάνου.

Μέτρηση ισχύος - Βαττόμετρο



Μέτρηση συντελεστή ισχύος

- Η μέτρηση μπορεί να γίνει άμεσα με το συνημιτονόμετρο.

- Επίσης μπορεί να γίνει έμμεση μέτρηση με χρήση βαττομέτρου, αμπερομέτρου, βολτομέτρου και εφαρμογή του τύπου:

$$\cos\varphi = \frac{P}{UI}$$

Μέτρηση τριφασικής ισχύος

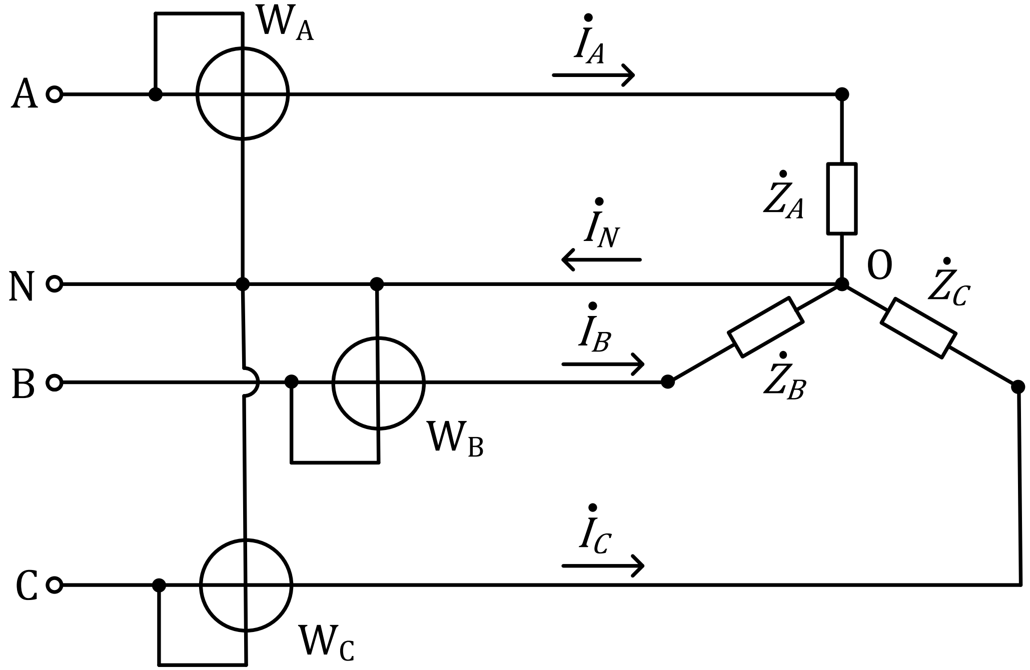
- Η μέτρηση μπορεί να γίνει με τριφασικό βαττόμετρο

- Μπορεί επίσης να γίνει με χρήση 2 ή 3 μονοφασικών βαττομέτρων.
- Εδώ θα εξετάσουμε μόνο μέτρηση μέσω μονοφασικών βαττομέτρων.

Μέτρηση ισχύος σε τριφασικά κυκλώματα

- Η ενεργός ισχύς φορτίου σε συνδεσμολογία Y 4 αγωγών είναι

$$P = P_A + P_B + P_C$$
$$= U_{AN} I_A \cos\varphi_A + U_{BN} I_B \cos\varphi_B$$
$$+ U_{CN} I_C \cos\varphi_C$$



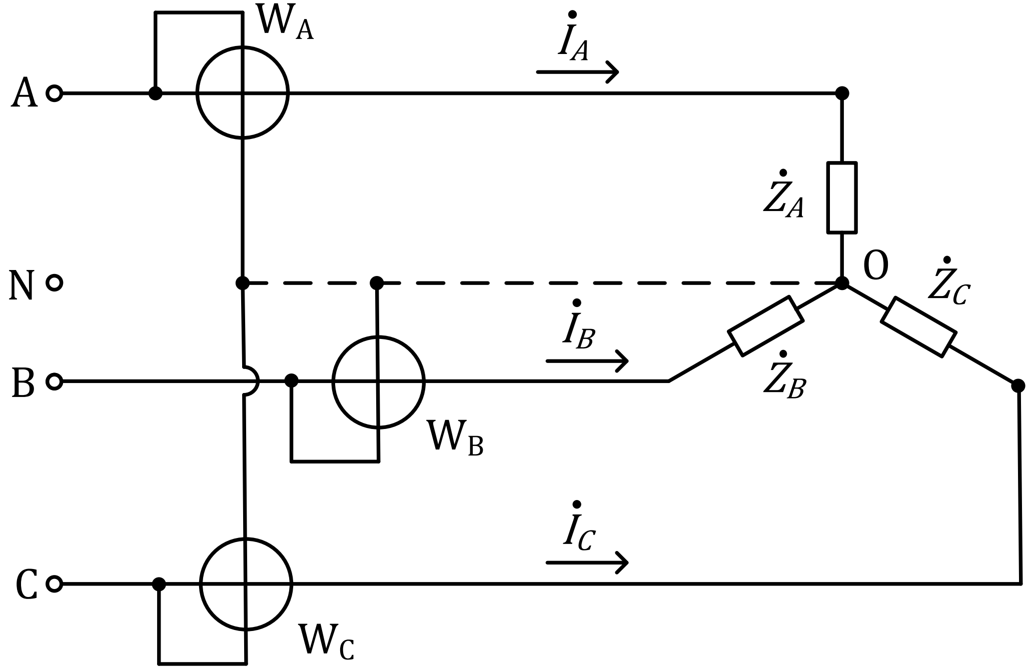
- Αρκεί λοιπόν να συνδέσουμε 3 μονοφασικά βαττόμετρα όπως φαίνεται στο κύκλωμα.
- Οι ενδείξεις τους θα είναι

$$\mathrm{W}_A = U_{AN} I_A \cos\varphi_A$$
$$\mathrm{W}_B = U_{BN} I_B \cos\varphi_B$$
$$\mathrm{W}_C = U_{CN} I_C \cos\varphi_C$$

- Άρα

$$P = \mathrm{W}_A + \mathrm{W}_B + \mathrm{W}_C$$

Μέτρηση ισχύος σε τριφασικά κυκλώματα



- Η ενεργός ισχύς φορτίου σε συνδεσμολογία Y 3 αγωγών είναι

$$P = P_A + P_B + P_C$$
$$= U_{AO} I_A \cos\varphi_A + U_{BO} I_B \cos\varphi_B + U_{CO} I_C \cos\varphi_C$$

- Αρκεί λοιπόν να συνδέσουμε 3 μονοφασικά βαττόμετρα όπως φαίνεται στο κύκλωμα. Δημιουργούμε έτσι εικονικό ουδέτερο.

- Οι ενδείξεις των βαττομέτρων θα είναι

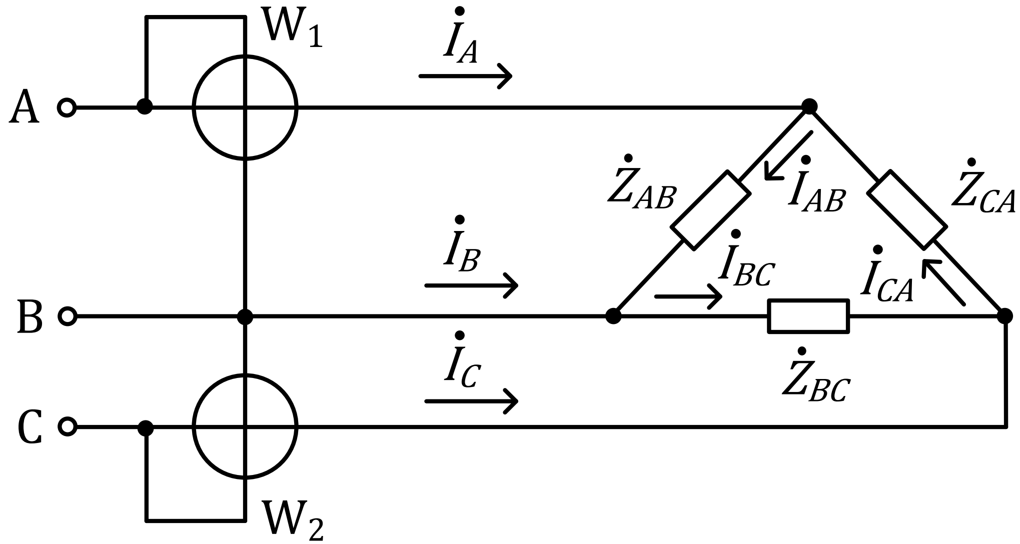
$$\mathrm{W}_A = U_{AO} I_A \cos\varphi_A$$
$$\mathrm{W}_B = U_{BO} I_B \cos\varphi_B$$
$$\mathrm{W}_C = U_{CO} I_C \cos\varphi_C$$

- Άρα

$$P = \mathrm{W}_A + \mathrm{W}_B + \mathrm{W}_C$$

Μέθοδος 2 βαττομέτρων

- Υπάρχει όμως περίπτωση να μην έχουμε πρόσβαση στον ουδέτερο ή να μην υπάρχει ουδέτερος όπως συμβαίνει στην περίπτωση Δ.
- Δύο βαττόμετρα συνδεδεμένα σε οποιεσδήποτε δύο γραμμές ενός τριφασικού συστήματος 3 αγωγών, συμμετρικού ή ασύμμετρου, δίνουν τη συνολική τριφασική ισχύ αν αθροίσουμε τις ενδείξεις τους W_1 και W_2. Παράδειγμα:



- Στο κύκλωμα αυτό η συνολική ενεργός ισχύς είναι

$$P = P_{AB} + P_{CA} + P_{BC}$$

- Αποδεικνύεται ότι η συνολική ενεργός ισχύς που απορροφά το φορτίο θα είναι

$$P = W_1 + W_2$$

Μέθοδος 2 βαττομέτρων

- Πράγματι, οι ενδείξεις των βαττομέτρων στο παραπάνω κύκλωμα θα είναι

$$\mathrm{W}_1 = \mathrm{Re}\left(\dot{U}_{AB}\dot{I}_A^{\ *}\right)$$

$$\mathrm{W}_2 = \mathrm{Re}\left(\dot{U}_{CB}\dot{I}_C^{\ *}\right)$$

- Όμως

$$\dot{U}_{AB}\dot{I}_A^{\ *} = \dot{U}_{AB}(\dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA})^* = \dot{U}_{AB}\dot{I}_{AB}^{\ *} - \dot{U}_{AB}\dot{I}_{CA}^{\ *}$$

$$\dot{U}_{CB}\dot{I}_C^{\ *} = \dot{U}_{CB}(\dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC})^* = \dot{U}_{CB}\dot{I}_{CA}^{\ *} - \dot{U}_{CB}\dot{I}_{BC}^{\ *} = -\dot{U}_{BC}\dot{I}_{CA}^{\ *} + \dot{U}_{BC}\dot{I}_{BC}^{\ *}$$

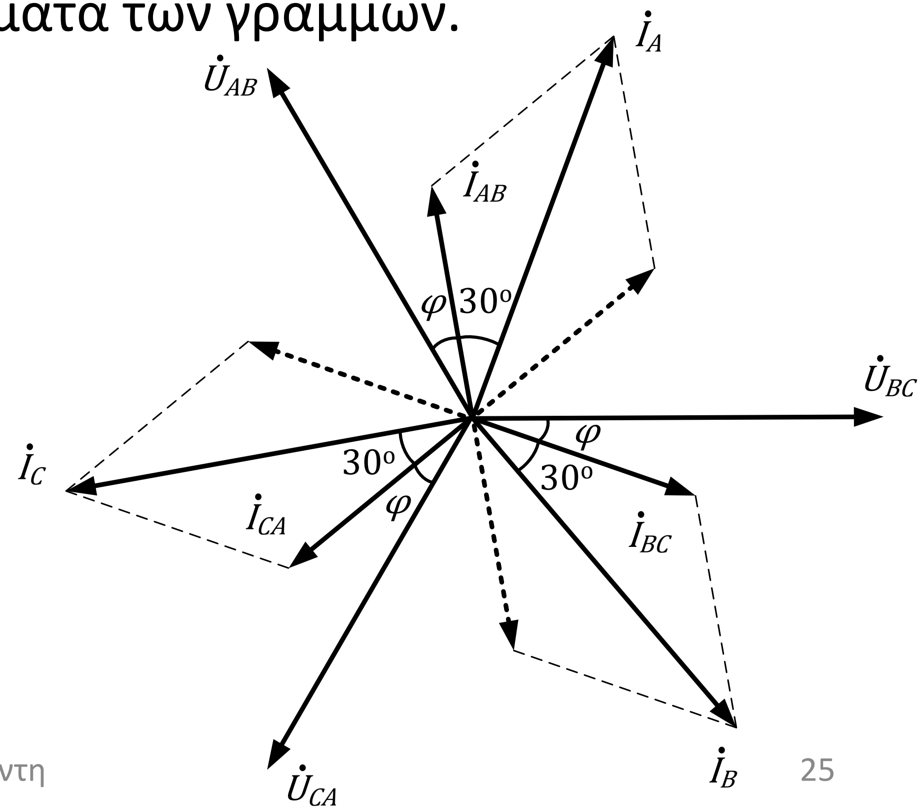
- Άρα

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2 &= \mathrm{Re}\left(\dot{U}_{AB}\dot{I}_{AB}^{\ *}\right) - \mathrm{Re}\left(\dot{U}_{AB}\dot{I}_{CA}^{\ *}\right) - \mathrm{Re}\left(\dot{U}_{BC}\dot{I}_{CA}^{\ *}\right) + \mathrm{Re}\left(\dot{U}_{BC}\dot{I}_{BC}^{\ *}\right) \\
&= P_{AB} + \mathrm{Re}\left[\left(-\dot{U}_{AB} - \dot{U}_{BC}\right)\dot{I}_{CA}^{\ *}\right] + P_{BC} \\
&= P_{AB} + \mathrm{Re}\left[\left(-\dot{U}_A + \dot{U}_B - \dot{U}_B + \dot{U}_C\right)\dot{I}_{CA}^{\ *}\right] + P_{BC} \\
&= P_{AB} + \mathrm{Re}\left[\dot{U}_{CA}\dot{I}_{CA}^{\ *}\right] + P_{BC} = P_{AB} + P_{CA} + P_{BC}
\end{aligned}$$

- Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται η σχέση για φορτίο σε Y 3 αγωγών.

Μέθοδος 2 βαττομέτρων

- Αν η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος σε ένα από τα βαττόμετρα είναι πάνω από $90°$ τότε η βελόνα του βαττομέτρου τείνει να στραφεί προς αρνητικές τιμές. Τότε αρκεί να αντιστρέψουμε τη σύνδεση του πηνίου ρεύματος, οπότε η βελόνα θα δείξει θετική τιμή, την οποία πρέπει να λάβουμε υπόψη με αρνητικό πρόσημο κατά την άθροιση των τιμών.
- Στην περίπτωση συμμετρικού φορτίου συνδεσμολογίας Δ τα ρεύματα των κλάδων σχηματίζουν γωνίες $30°$ με τα ρεύματα των γραμμών.
- Από το διάγραμμα προκύπτει ότι στην περίπτωση αυτή η τάση $\dot{U}_{AB}$ παρουσιάζει διαφορά φάσης με το $\dot{I}_A$ ίση με $\varphi + 30°$ ενώ η $\dot{U}_{CB}$ παρουσιάζει διαφορά φάσης με το $\dot{I}_C$ ίση με $180° - (-\varphi - 120° - 30°) = \varphi - 30°$.



Μέθοδος 2 βαττομέτρων

- Επομένως

$$W_1 = U_{AB} I_A \cos(\varphi + 30°)$$
$$W_2 = U_{CB} I_C \cos(\varphi - 30°)$$

- Γενικότερα για τις ενδείξεις των δύο βαττομέτρων προκύπτει σε κάθε περίπτωση συμμετρικού φορτίου (και σε Υ) ότι

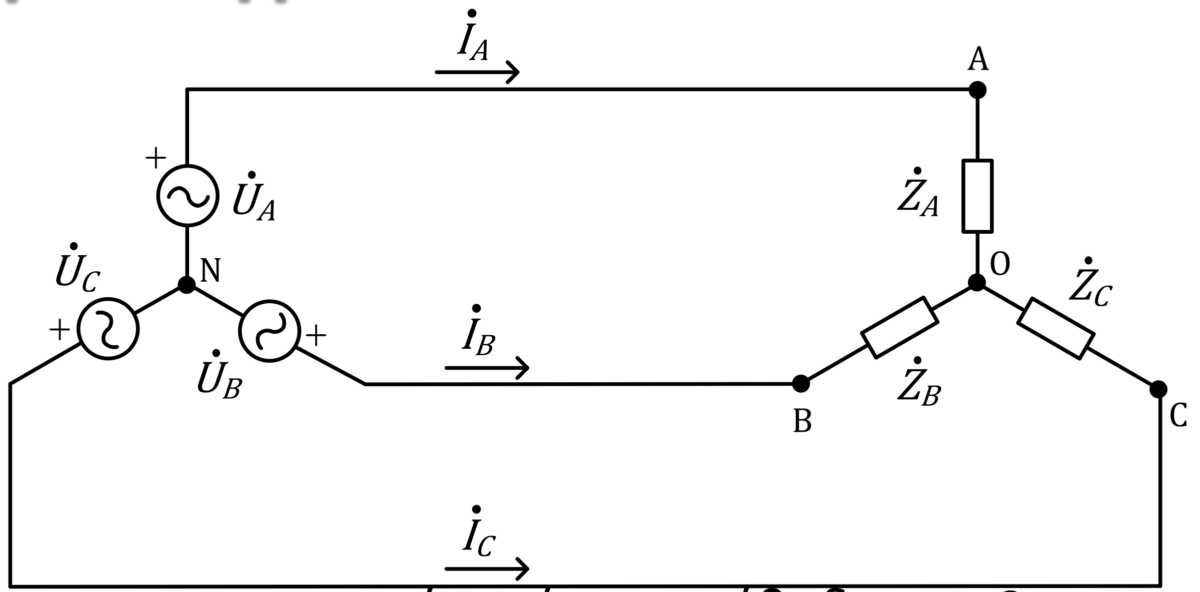
$$W_1 = UI \cos(\varphi + 30°)$$
$$W_2 = UI \cos(\varphi - 30°)$$

- Προκύπτει έτσι ότι

$$\tan\varphi = \sqrt{3}\left(\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}\right)$$

- Από τη σχέση αυτή μπορεί να προκύψει η απόλυτη τιμή της γωνίας φ. Το πρόσημο που προκύπτει δεν έχει νόημα γιατί οι σειρά των μετρήσεων είναι τυχαία.

Παράδειγμα 7



- Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $U_\varphi = 230$ V, $\dot{Z}_A = 20 + j15\ \Omega$, $\dot{Z}_B = 15 + j10\ \Omega$, $\dot{Z}_C = 10 - j18\ \Omega$.
- Θεωρούμε θετική ακολουθία φάσεων.
- Αν χρησιμοποιήσουμε για τη μέτρηση της ενεργού ισχύος τη μέθοδο των 3 βαττομέτρων να βρεθούν οι ενδείξεις των οργάνων και η συνολική ενεργός ισχύς.
- Αν χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των δύο βαττομέτρων και συνδέσουμε τα πηνία έντασης των δύο βαττομέτρων στις φάσεις A και B να βρεθούν οι ενδείξεις των βαττομέτρων και η συνολική ενεργός ισχύς του φορτίου

Απάντηση:

- Τα ρεύματα και οι τάσεις στο φορτίο έχουν υπολογιστεί (παράδειγμα 1 μαθήματος 8).

Παράδειγμα 7

- Οι τιμές τους είναι

$$\dot{I}_A = 10.032\angle 86.6°\ \text{A}$$

$$\dot{I}_B = 8.252\angle(-99.5°)\ \text{A}$$

$$\dot{I}_C = 2.02\angle(-68.1°)\ \text{A}$$

$$\dot{U}_{AO} = \dot{I}_A \dot{Z}_A = 250.8\angle 123.4°\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{BO} = \dot{I}_B \dot{Z}_B = 148.8\angle(-65.8°)\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{CO} = \dot{I}_C \dot{Z}_C = 363.6\angle(-158.1°)\ \text{V}$$

- Έστω ότι χρησιμοποιούμε 3 βαττόμετρα. Οι ενδείξεις τους θα είναι

$$\text{W}_A = U_{AO} I_A \cos(\varphi_{U_{AO}} - \varphi_{i_A}) = 250.8 \cdot 10.032 \cdot \cos(123.4° - 86.6°)$$
$$= 2012.9\ \text{W}$$

$$\text{W}_B = U_{BO} I_B \cos(\varphi_{U_{BO}} - \varphi_{i_B}) = 148.8 \cdot 8.252 \cdot \cos(-65.8° + 99.5°)$$
$$= 1021.5\ \text{W}$$

$$\text{W}_C = U_{CO} I_C \cos(\varphi_{U_{CO}} - \varphi_{i_C}) = 363.6 \cdot 2.02 \cos(-158.1° + 68.1°) = 0$$

- Η συνολική ενεργός ισχύς θα είναι

$$P = \text{W}_A + \text{W}_B + \text{W}_C = 3034\ \text{W}$$

Παράδειγμα 7

- Έστω τώρα ότι χρησιμοποιούμε δύο βαττόμετρα και τα συνδέουμε στις φάσεις A, B.
- Οι πολικές τάσεις στο φορτίο είναι

$$\dot{U}_{AB} = 230\sqrt{3}\angle 120°\ \mathrm{V}$$
$$\dot{U}_{BC} = 230\sqrt{3}\angle 0°\ \mathrm{V}$$
$$\dot{U}_{CA} = 230\sqrt{3}\angle(-120°)\ \mathrm{V}$$

- Η ένδειξη του ενός βαττομέτρου θα είναι

$$\mathrm{W}_1 = \mathrm{Re}\left(\dot{U}_{AC}\dot{I}_A{}^*\right) = U_{AC}I_A\cos(\varphi_{u_{AC}} - \varphi_{i_A})$$

- Η τάση που χρειάζεται είναι η $\dot{U}_{AC}$, δηλαδή η αντίθετη της $\dot{U}_{CA}$. Το διάνυσμα της τάσης αυτής έχει ίδιο μέτρο με τη $\dot{U}_{CA}$ αλλά αντίθετη φορά. Επομένως η γωνία της θα είναι

$$\varphi_{u_{AC}} = \varphi_{u_{CA}} + 180° = -120° + 180° = 60°$$

- Άρα

$$\mathrm{W}_1 = 230\sqrt{3}\cdot 10.032\cos(60° - 86.6°) = 3575\ \mathrm{W}$$

Παράδειγμα 7

- Επίσης

$$\mathrm{W}_2 = \mathrm{Re}\left(\dot{U}_{BC}\dot{I}_B{}^*\right) = U_{BC}I_B\cos(\varphi_{u_{BC}} - \varphi_{i_B})$$
$$= 230\sqrt{3}\cdot 8.252\cos(0° + 99.5°) = -\,540.\,6\ \mathrm{W}$$

- Η συνολική ενεργός ισχύς είναι

$$P = \mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2 = 3034\ \mathrm{W}$$