Ηλεκτρικά Κυκλώματα ΙΙ

Διάλεξη 04

Α. Δροσόπουλος

30-03-2023

Outline

Ανάλυση κόμβων

- Βασίζεται στο νόμο ρευμάτων του Kirchhoff (KCL).

Kirchhoff
circuit
law

- Παρέχει μια γενική διαδικασία για την ανάλυση κυκλωμάτων με τις τάσεις των κόμβων ως μεταβλητές. Με τη χρήση των τάσεων κόμβων αντί των τάσεων των στοιχείων μειώνονται οι εξισώσεις που πρέπει να λύσουμε.

➢ Βρίσκουμε τον αριθμό n των κόμβων του κυκλώματος.

➢ Επιλέγουμε έναν κόμβο ως κόμβο αναφοράς. Είναι χρήσιμο να επιλεγεί ο κόμβος στον οποίο συνδέονται 1) τα περισσότερα στοιχεία και 2) οι περισσότερες πηγές τάσης.

➢ Οι τάσεις των υπολοίπων $n-1$ κόμβων ορίζονται ως προς τον κόμβο αναφοράς. Πρέπει να βρεθούν $n-1$ γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις.

➢ Ορίζουμε ρεύματα και πολικότητες.

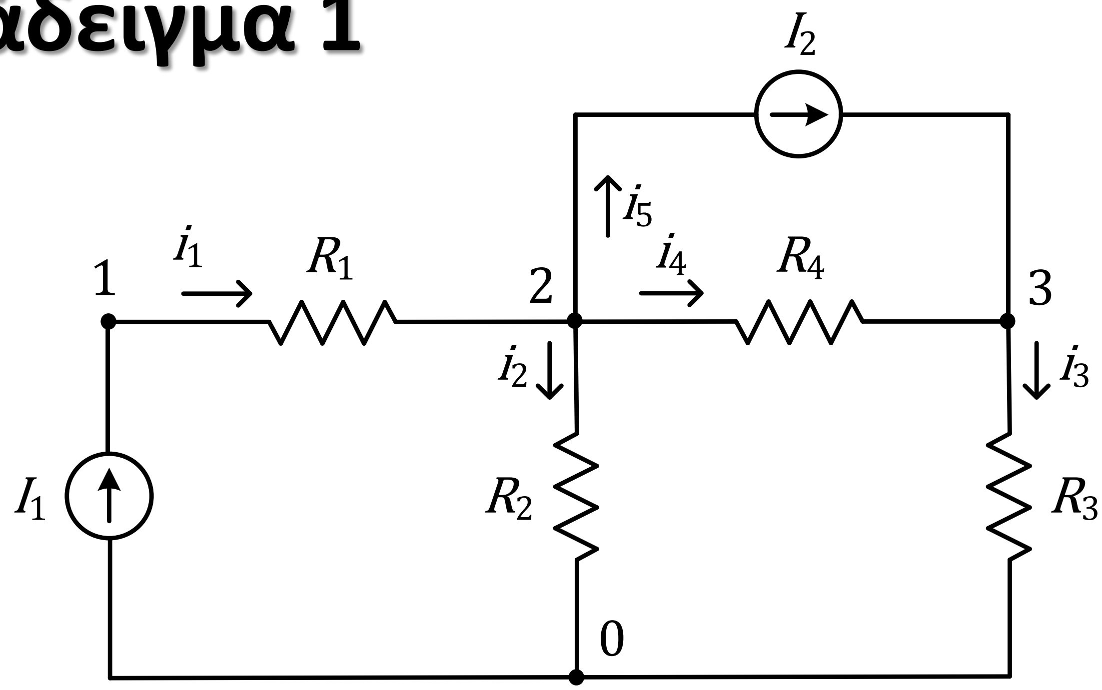
Ανάλυση κόμβων

- Μια πηγή τάσης μπορεί να συνδέεται μεταξύ του κόμβου αναφοράς και κάποιου από τους υπόλοιπους κόμβους ή μεταξύ δύο από τους υπόλοιπους κόμβους.
- Στη δεύτερη περίπτωση δημιουργεί πρόβλημα διότι δεν μπορεί να εκφραστεί το ρεύμα συναρτήσει της τάσης.
- Η πηγή τάσης με τους κόμβους που συνδέεται, όταν αυτοί δεν είναι κόμβοι αναφοράς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δημιουργούν έναν υπερκόμβο (ο κόμβος που θα προέκυπτε αν βραχυκυκλώναμε την πηγή τάσης).
- Γράφουμε μια εξίσωση-περιορισμό για κάθε πηγή τάσης συναρτήσει των τάσεων κόμβων. Κάθε τέτοια εξίσωση αποτελεί μία από τις απαραίτητες γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις. n_u πηγές δίνουν ισάριθμες εξισώσεις.

Ανάλυση κόμβων

- Για κάθε εξαρτημένη πηγή εκφράζουμε τη μεταβλητή ελέγχου συναρτήσει των κομβικών τάσεων.
- Εφαρμόζουμε τον KCL στους κόμβους και τους υπερκόμβους εκτός από τον κόμβο αναφοράς και δημιουργούμε τις υπόλοιπες $n-1-n_u$ γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις. Κάθε πηγή τάσης μειώνει τον αριθμό των κόμβων στους οποίους πρέπει να εφαρμόσουμε KCL.
- Ο KCL εφαρμόζεται στον υπερκόμβο με τη λογική ότι αφού το άθροισμα των ρευμάτων σε κάθε επιμέρους κόμβο είναι μηδέν τότε θα είναι μηδέν και για το συνδυασμό τους.
- Λύνουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν για να βρούμε τις κομβικές τάσεις.
- Χρησιμοποιούμε το νόμο Ohm για να εκφράσουμε τα ρεύματα κλάδων συναρτήσει των τάσεων κόμβων όπου χρειάζεται.

Παράδειγμα 1



- Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα του σχήματος.
- Επιλέγουμε τον κόμβο αναφοράς, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι κόμβοι 1, 2 και 3 θεωρούμε ότι έχουν τάσεις u_1, u_2 και u_3 αντίστοιχα ως προς τον κόμβο αναφοράς. Εφαρμόζουμε KCL στους κόμβους αυτούς.
- Στον κόμβο 1:

$$I_1 = i_1$$

- Στον κόμβο 2:

$$i_1 = i_2 + i_4 + i_5$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_2 - u_3}{R_4} + I_2$$

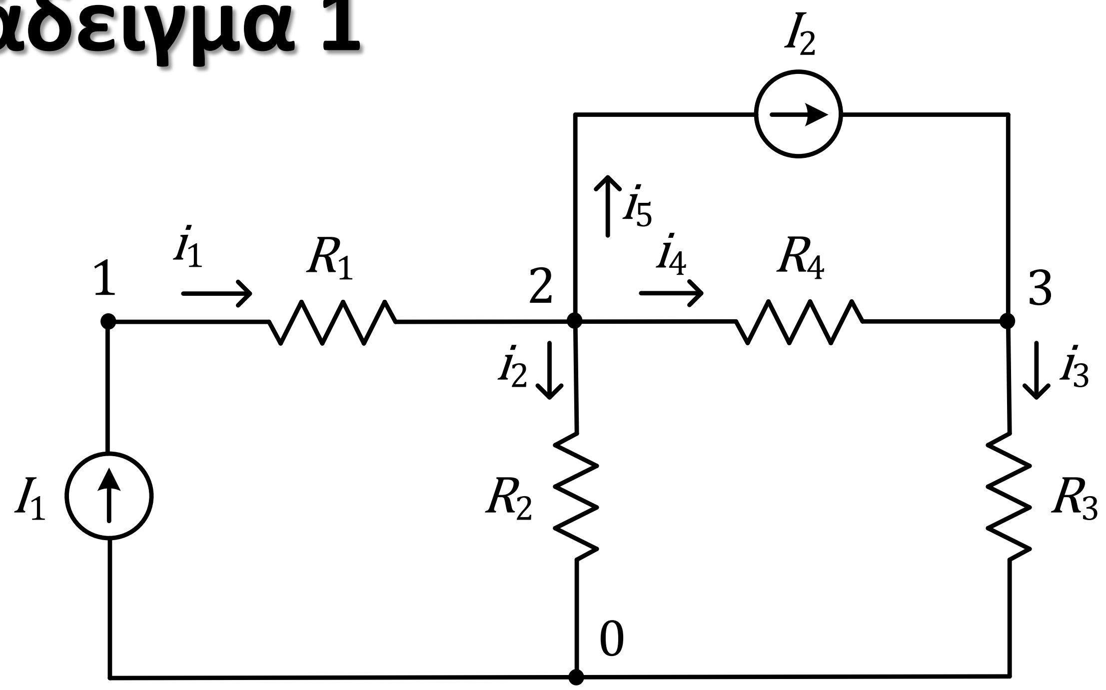
Παράδειγμα 1

- Στον κόμβο 3:

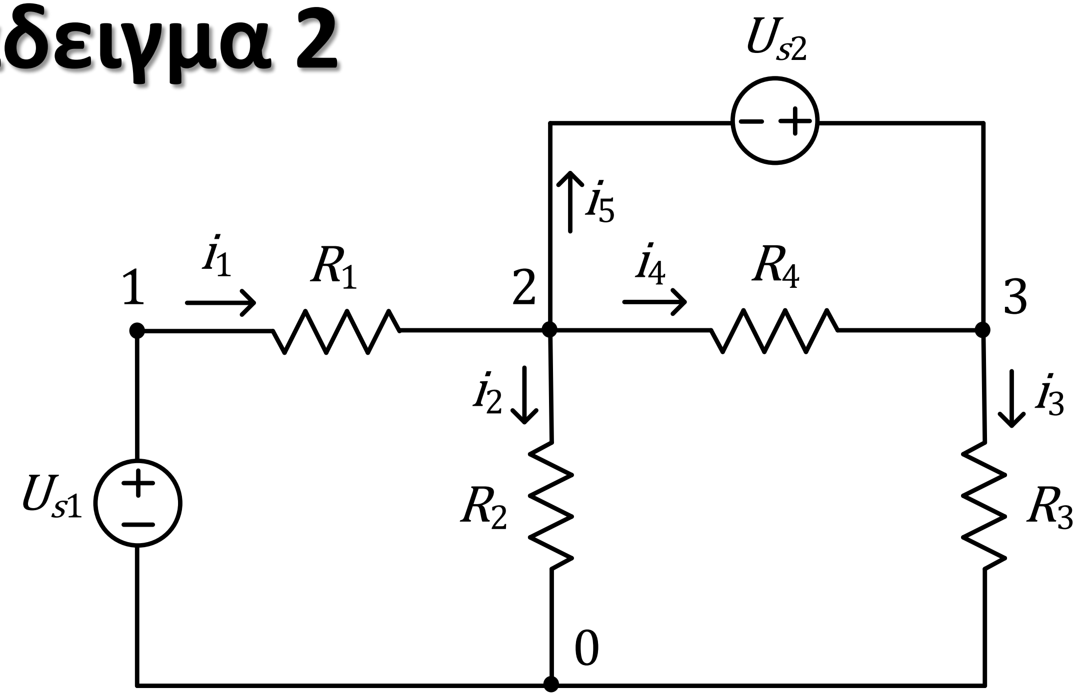
$$i_4 + i_5 = i_3$$

$$\Rightarrow \frac{u_2 - u_3}{R_4} + I_2 = \frac{u_3}{R_3}$$

- Δεν υπάρχει δυσκολία γιατί οι πηγές είναι πηγές ρεύματος.



Παράδειγμα 2



- Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα του σχήματος.
- Επιλέγουμε τον κόμβο αναφοράς, όπως φαίνεται στο σχήμα.
- Οι κόμβοι 1, 2 και 3 θεωρούμε ότι έχουν τάσεις u_1, u_2 και u_3 αντίστοιχα ως προς τον κόμβο αναφοράς όπως και πριν.
- Η πηγή τάσης που έχει το ένα άκρο της συνδεδεμένο στον κόμβο αναφοράς δεν δημιουργεί πρόβλημα. Λαμβάνουμε εύκολα από αυτή την εξίσωση:

$$u_1 = U_{s1}$$

- Πρόβλημα υπάρχει με την πηγή που ενώνεται μεταξύ δύο κόμβων από τους οποίους κανένας δεν είναι ο κόμβος αναφοράς, δηλαδή με την U_{s2}.

Παράδειγμα 2

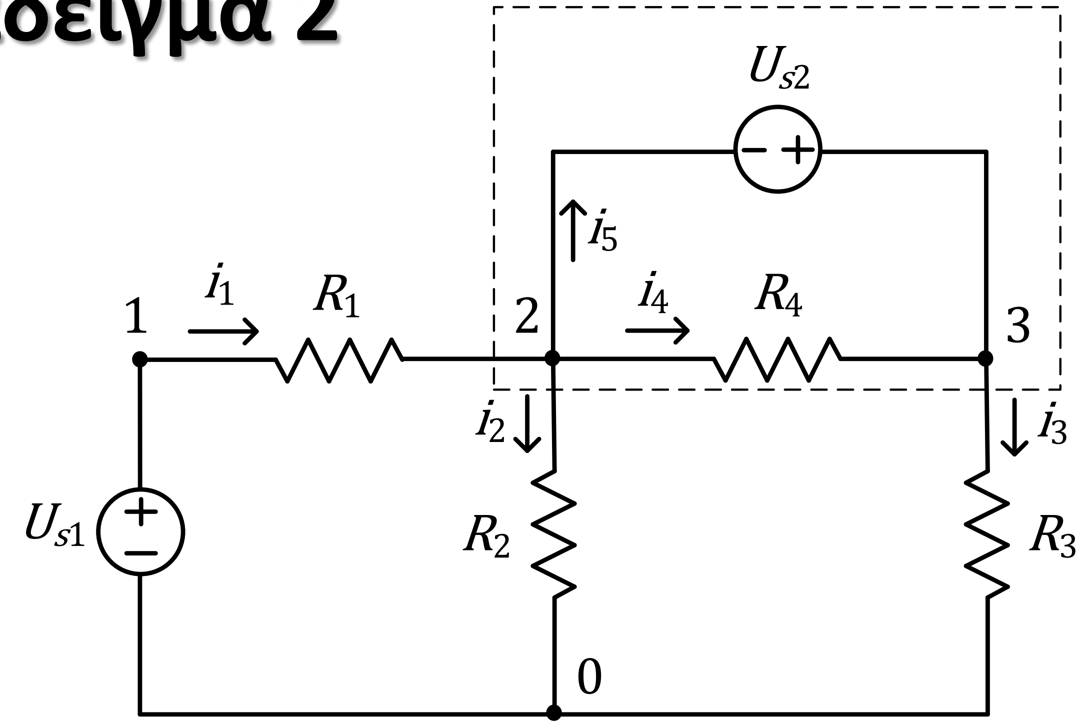
- Μεταξύ κόμβων 2 και 3 ισχύει ότι

$$u_2 - u_3 = -U_{s2}$$

- Οι κόμβοι 2 και 3 θεωρούμε ότι σχηματίζουν έναν υπερκόμβο.
- Εφαρμόζουμε KCL στον υπερκόμβο:

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$\Rightarrow \frac{u_1 - u_2}{R_1} = \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_3}{R_3}$$



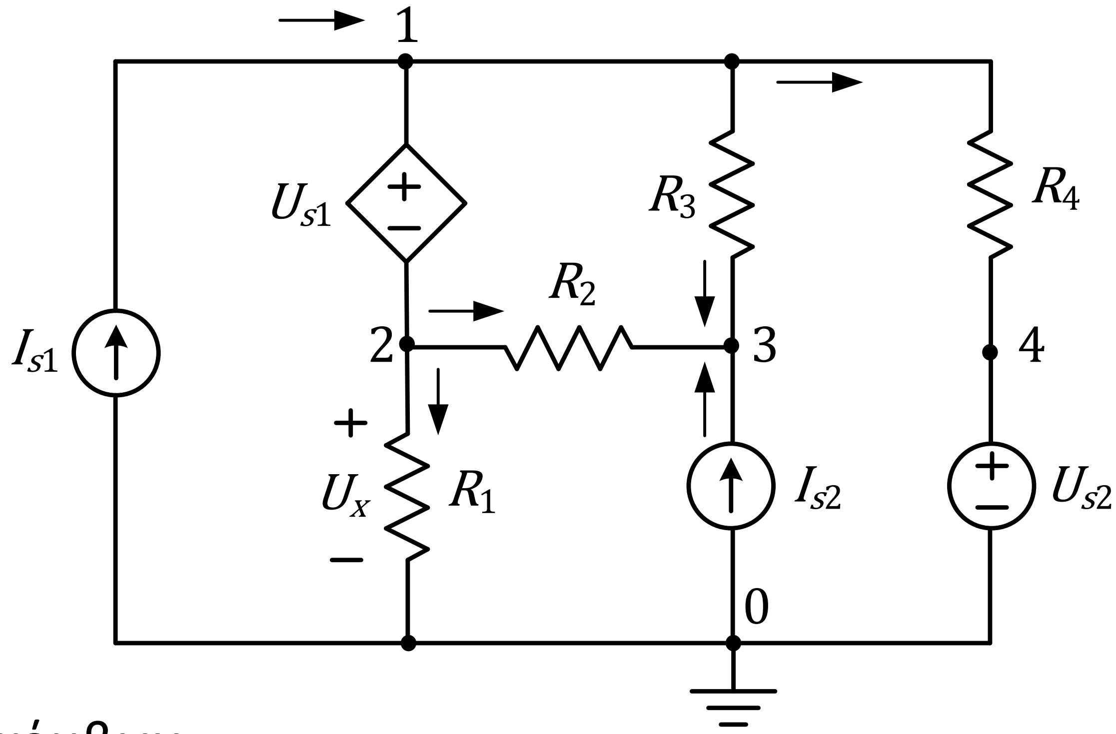
- Επομένως

$$\frac{U_{s1} - u_2}{R_1} = \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_2 + U_{s2}}{R_3}$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{\frac{U_{s1}}{R_1} - \frac{U_{s2}}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Παράδειγμα 3

- Να βρεθούν οι τάσεις των κόμβων στο διπλανό κύκλωμα.
- Δίνονται: $I_{s1} = I_{s2} = 1\ \mathrm{mA}$, $U_{s1} = 2U_x$, $U_{s2} = 10\ \mathrm{V}$, $R_1 = R_2 = 1\ \mathrm{k\Omega}$, $R_3 = R_4 = 5\ \mathrm{k\Omega}$.
- Να βρεθεί η τάση στα άκρα της R_4.



Απάντηση:

- Απαιτούνται $n - 1 = 4$ εξισώσεις κόμβων.
- Λόγω της πηγής τάσης U_{s2}:

$$u_4 = U_{s2} = 10\ \mathrm{V}$$

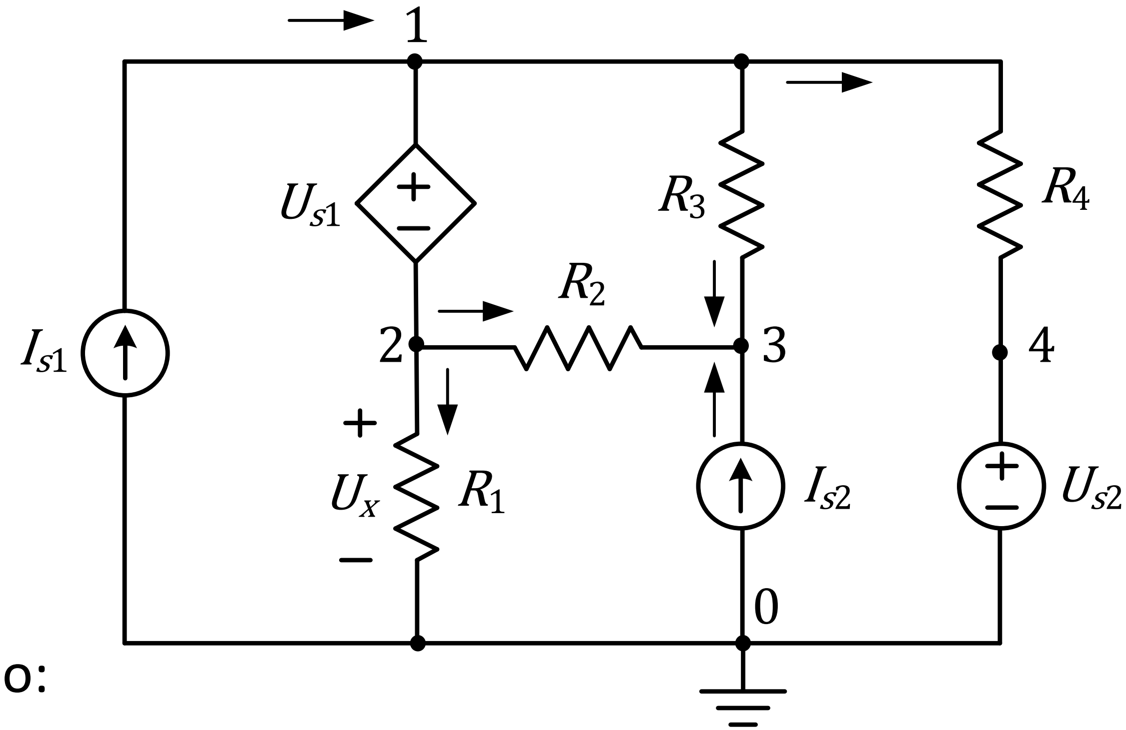
- Επίσης για την εξαρτημένη πηγή ισχύει:

$$U_{s1} = 2U_x$$
$$U_x = u_2$$

Παράδειγμα 3

- Γύρω από την εξαρτημένη πηγή τάσης μεταξύ των κόμβων 1 και 2 ορίζεται ένας υπερκόμβος.
- Μεταξύ των δύο αυτών κόμβων ισχύει ότι

$$u_1 - u_2 = U_{s1} \Rightarrow u_1 = 3U_x$$



- Εφαρμόζουμε KCL στον υπερκόμβο:

$$I_{s1} = \frac{u_1 - u_3}{R_3} + \frac{u_2 - u_3}{R_2} + \frac{u_2}{R_1} + \frac{u_1 - u_4}{R_4}$$

$$\Rightarrow I_{s1} = \frac{3U_x - u_3}{R_3} + \frac{U_x - u_3}{R_2} + \frac{U_x}{R_1} + \frac{3U_x - u_4}{R_4}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{5}U_x - \frac{6}{5}u_3 = 3$$

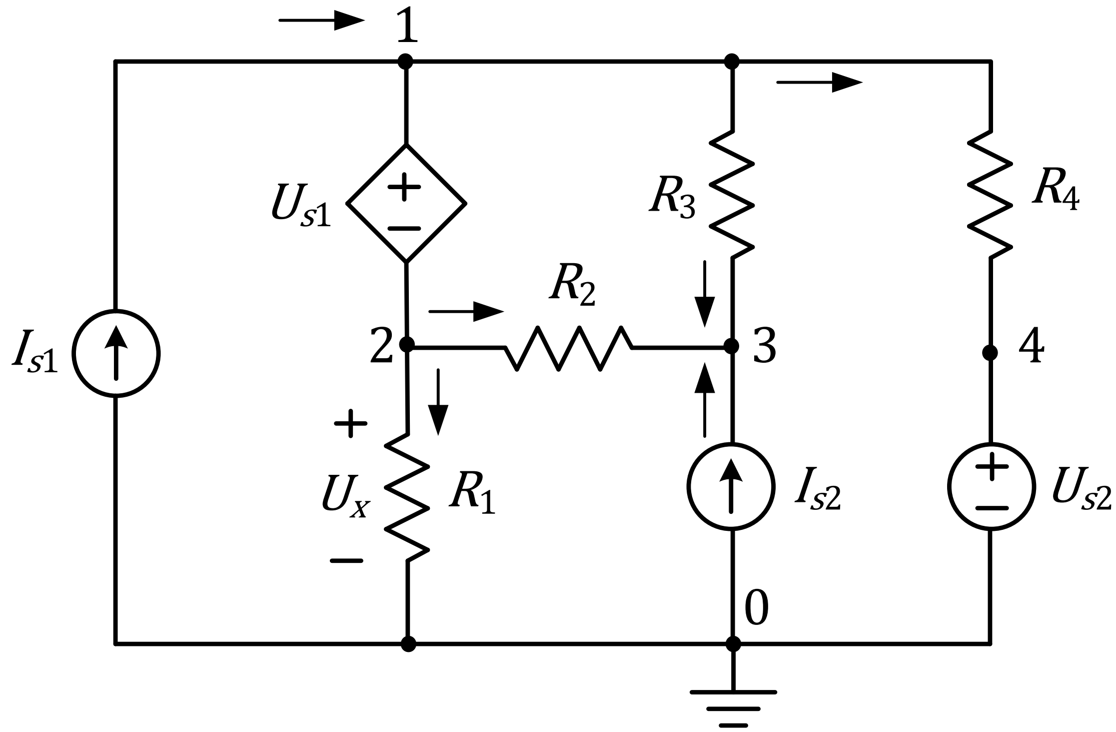
Παράδειγμα 3

- Στον κόμβο 3:

$$I_{s2} + \frac{u_1 - u_3}{R_3} + \frac{u_2 - u_3}{R_2} = 0$$

$$\Rightarrow I_{s2} + \frac{3U_x - u_3}{R_3} + \frac{U_x - u_3}{R_2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8}{5}U_x - \frac{6}{5}u_3 = -1$$



- Τελικά:

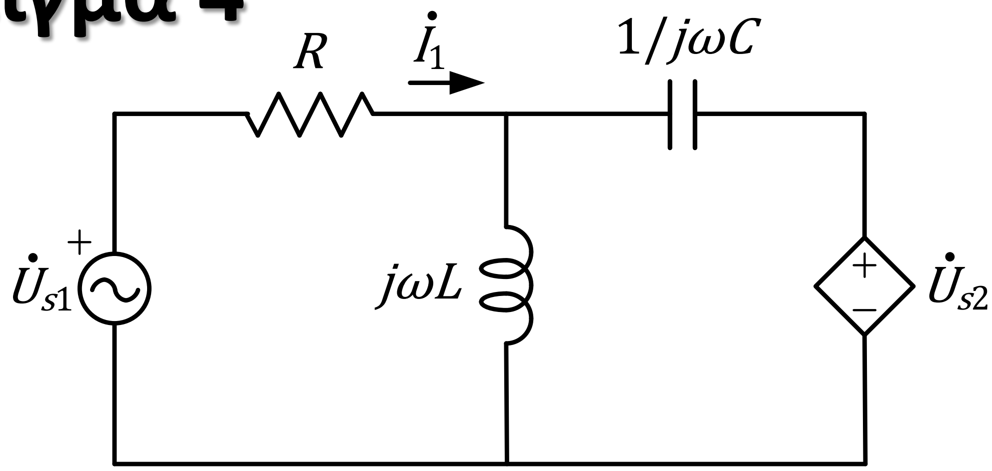
$$U_x = 2.5\text{ V}, u_3 = 4.2\text{ V}$$

- Στην αντίσταση R_4:

$$U_4 = u_1 - u_4 = 3U_x - 10 = -2.5\text{ V}$$

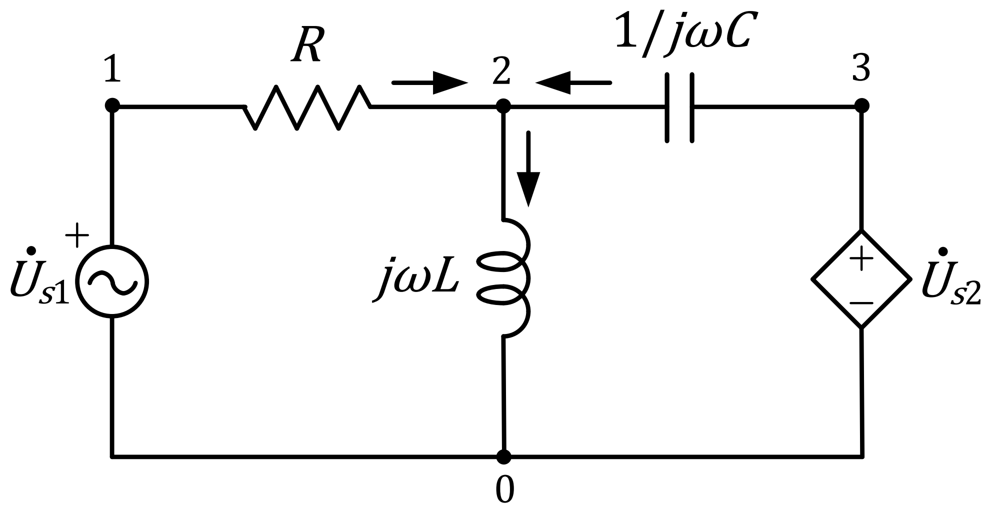
Παράδειγμα 4

- Να βρεθεί το ρεύμα $i_1(t)$ της ανεξάρτητης πηγής στο διπλανό κύκλωμα.



- Δίνονται: $u_{s1}(t) = 10\sqrt{2}\cos\omega t\ \text{V}$, $u_{s2}(t) = 2i_1(t)$, $\omega = 1000\ \text{rad/s}$, $R = 3\ \Omega$, $L = 4\ \text{mH}$, $C = 0.5\ \text{mF}$.

Απάντηση:



- Μετατρέπουμε σε φάσορες:

$$\dot{U}_{s1} = 10\angle 0°\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{s2} = 2\dot{I}_1$$

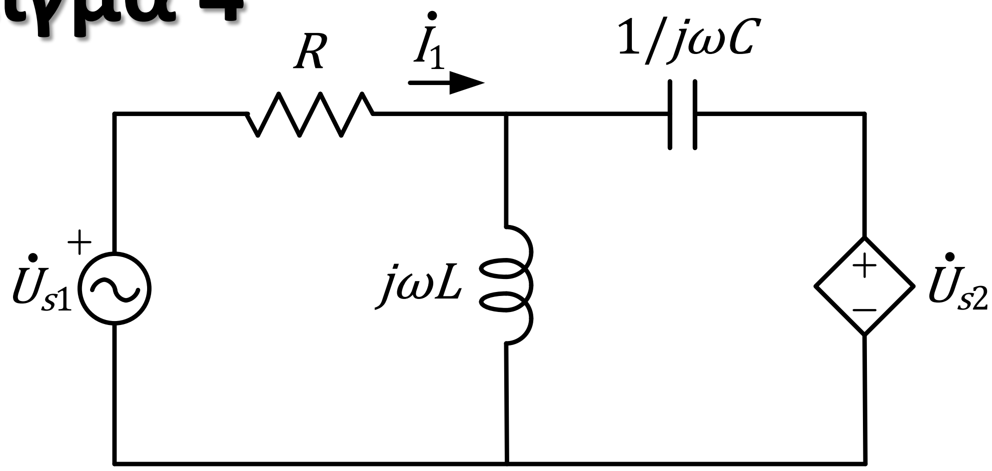
- Για τον κόμβο 1:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{s1}$$

- Για τον κόμβο 3 και την εξαρτημένη πηγή:

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_{s2} = 2\dot{I}_1 = 2\frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{R} = \frac{2}{3}\left(10 - \dot{U}_2\right)$$

Παράδειγμα 4



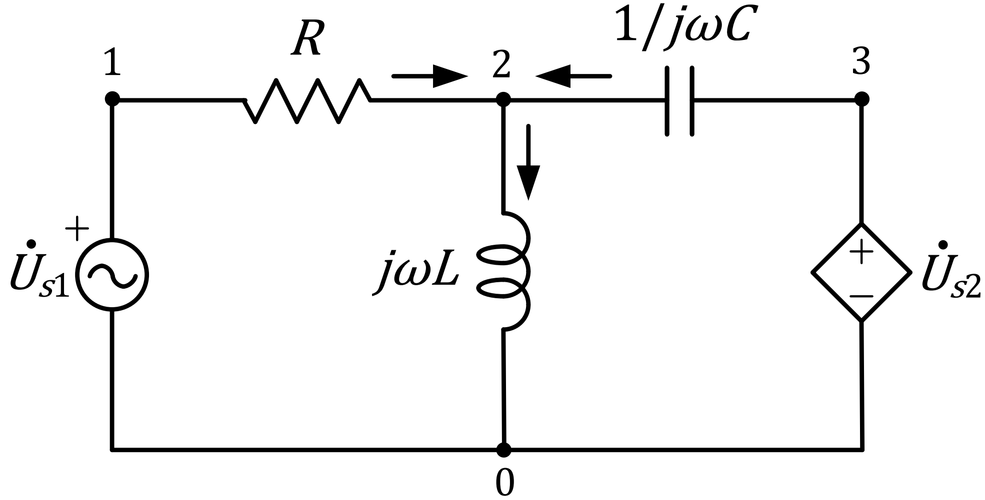
- Για τον κόμβο 2:

$$\frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{R} + \frac{\dot{U}_3 - \dot{U}_2}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{\dot{U}_2}{j\omega L}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{3} + \frac{\dot{U}_3 - \dot{U}_2}{-j2} = \frac{\dot{U}_2}{j4}$$

$$\Rightarrow \frac{10 - \dot{U}_2}{3} - \frac{2}{j6}\left(10 - \dot{U}_2\right) + \frac{\dot{U}_2}{j2} = \frac{\dot{U}_2}{j4}$$

$$\Rightarrow \dot{U}_2 = (6.769 + j1.846)\ \mathrm{V}$$



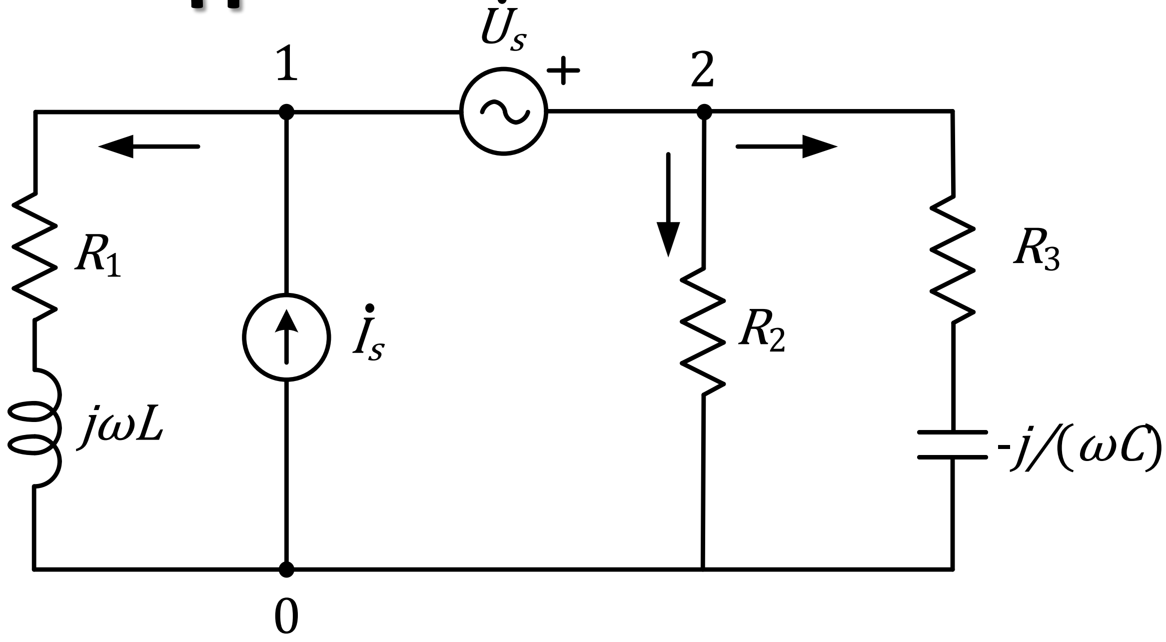
- Το ρεύμα της πηγής $\dot{U}_{s1}$ είναι

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{R} = \frac{\dot{U}_{s1} - \dot{U}_2}{3} = 1.077 + j0.615 = 1.24\angle 29.7°\ \mathrm{A}$$

$$i_1(t) = 1.24\sqrt{2}\cos(\omega t + 29.7°)\ \mathrm{A}$$

Παράδειγμα 5

- Να βρεθούν οι τάσεις των κόμβων στο διπλανό κύκλωμα.
- Δίνονται: $\dot{U}_s = 5\angle 0° \text{ V}$, $\dot{I}_s = 2\angle 0° \text{ A}$, $\omega = 1000 \text{ rad/s}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 1\ \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 1 \text{ mF}$.



Απάντηση:

- Θεωρούμε ότι οι κόμβοι 1 και 2 σχηματίζουν υπερκόμβο. Ισχύει ότι

$$\dot{U}_2 - \dot{U}_1 = \dot{U}_s \Rightarrow -\dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 5$$

- Εφαρμόζουμε KCL στον υπερκόμβο:

$$\dot{I}_s - \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1} - \frac{\dot{U}_2}{R_2} - \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_3} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{U}_1}{R_1 + j\omega L} + \frac{\dot{U}_2}{R_2} + \frac{\dot{U}_2}{R_3 - \frac{j}{\omega C}} = \dot{I}_s$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{U}_1}{1+j} + \frac{\dot{U}_2}{1} + \frac{\dot{U}_2}{1-j} = 2 \Rightarrow (0.5 - 0.5j)\dot{U}_1 + (1.5 + 0.5j)\dot{U}_2 = 2$$

Παράδειγμα 5

- Άρα έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.5-0.5j & 1.5+0.5j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Υπολογίζουμε τις ορίζουσες:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0.5-0.5j & 1.5+0.5j \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1.5+0.5j \end{vmatrix} = 5.5 + j2.5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0.5-0.5j & 2 \end{vmatrix} = -4.5 + j2.5$$

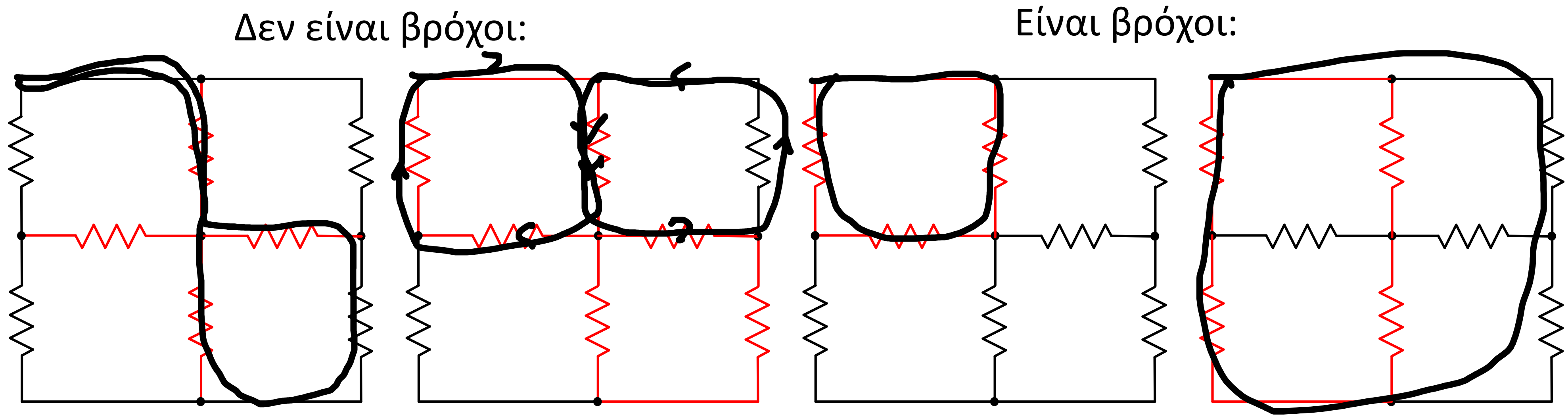
- Οι τάσεις θα είναι:

$$\dot{U}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -2.75 - j1.25 = 3.021\angle(-155.6°)\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2.25 - j1.25 = 2.574\angle(-29.1°)\ \mathrm{V}$$

Ανάλυση βρόχων

- Αν ξεκινήσουμε από έναν κόμβο του κυκλώματος και διαγράψουμε μια συνεχή διαδρομή στο κύκλωμα χωρίς να περάσουμε από κάποιο κόμβο ή στοιχείο δεύτερη φορά και καταλήξουμε στον ίδιο κόμβο απ' όπου ξεκινήσαμε, τότε η διαδρομή που διαγράψαμε ονομάζεται βρόχος.



- Ελάχιστος βρόχος είναι αυτός που δεν περικλείει άλλους βρόχους (μόνο ο βρόχος στο 3ο σχήμα είναι τέτοιος).

Ανάλυση βρόχων

Kirchhoff
voltage
law

- Βασίζεται στο νόμο τάσεων του Kirchhoff (KVL).

- Καθορίζουμε τον αριθμό ανεξαρτήτων βρόχων στο κύκλωμα. Ορίζουμε από ένα ρεύμα για κάθε βρόχο. Ορίζουμε φορά.
- Αν το κύκλωμα έχει l ανεξάρτητους βρόχους απαιτούνται l γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις για να βρούμε τα ρεύματα βρόχων.
- Γράφουμε μια εξίσωση-περιορισμό για κάθε πηγή ρεύματος που ανήκει μόνο σε έναν βρόχο συναρτήσει των ρευμάτων βρόχων. n_i πηγές δίνουν ισάριθμες εξισώσεις.
- Αν υπάρχουν πηγές ρεύματος που ανήκουν σε δύο βρόχους ταυτόχρονα, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε έναν υπερβρόχο (ο βρόχος που θα προέκυπτε αν ανοιχτοκυκλώναμε την πηγή ρεύματος). Από την πηγή προκύπτει μια επιπλέον εξίσωση για τα ρεύματα.

Ανάλυση βρόχων

- Για κάθε εξαρτημένη πηγή εκφράζουμε τη μεταβλητή ελέγχου συναρτήσει των ρευμάτων βρόχων.
- Εφαρμόζουμε τον KVL για να δημιουργήσουμε τις υπόλοιπες γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις.
- Λύνουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν για να βρούμε τα άγνωστα ρεύματα βρόχων.
- Υπολογίζουμε τάσεις με το νόμο του Ohm.

οφθαλμοί = ελάχιστοι βρόχοι

Παράδειγμα 6

- Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα του σχήματος.
- Απαιτούνται 3 εξισώσεις (όσοι και οι ελάχιστοι βρόχοι).
- Στον βρόχο 1:

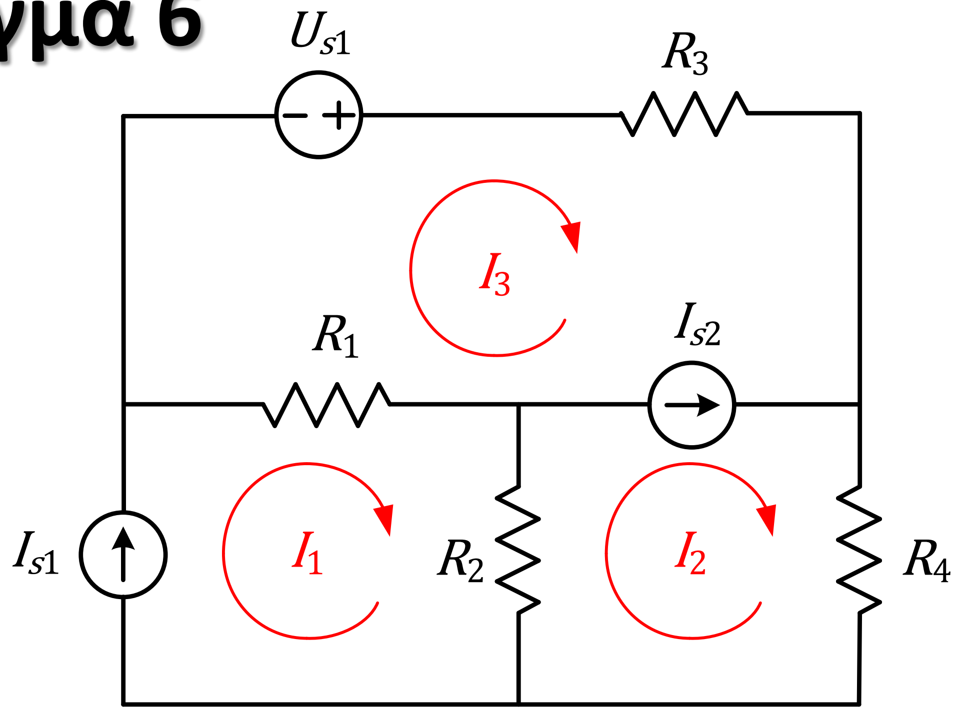
$$I_1 = I_{s1}$$

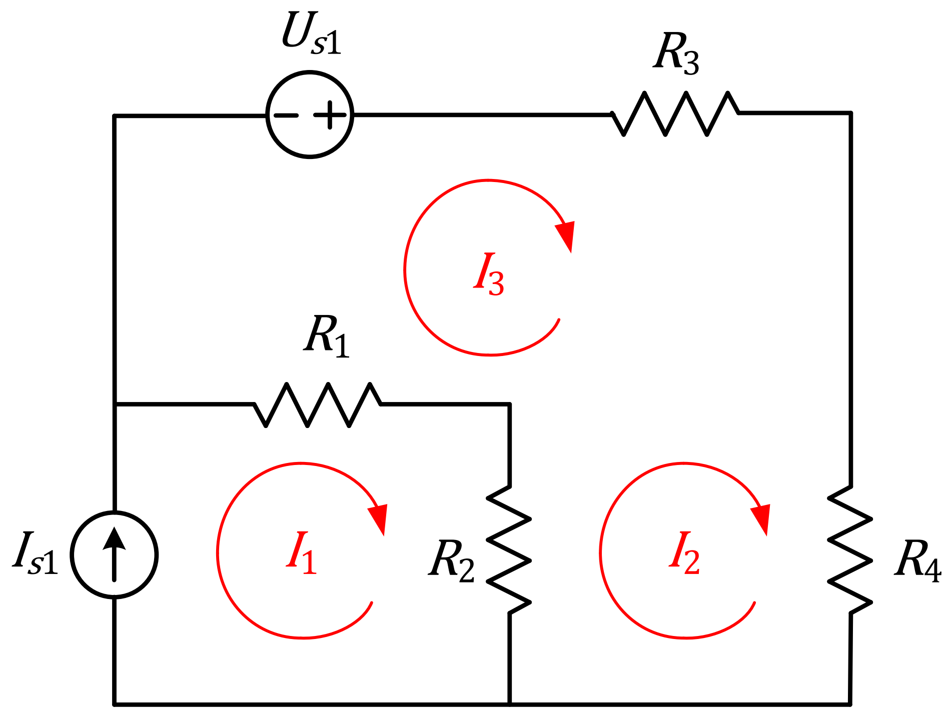
- Η δεύτερη όμως πηγή ρεύματος ανήκει σε δύο βρόχους ταυτόχρονα.
- Από τον κλάδο της πηγής I_{s2}:

$$I_2 - I_3 = I_{s2}$$

- Ορίζουμε υπερβρόχο, όπως φαίνεται στο κάτω σχήμα.
- Στον υπερβρόχο:

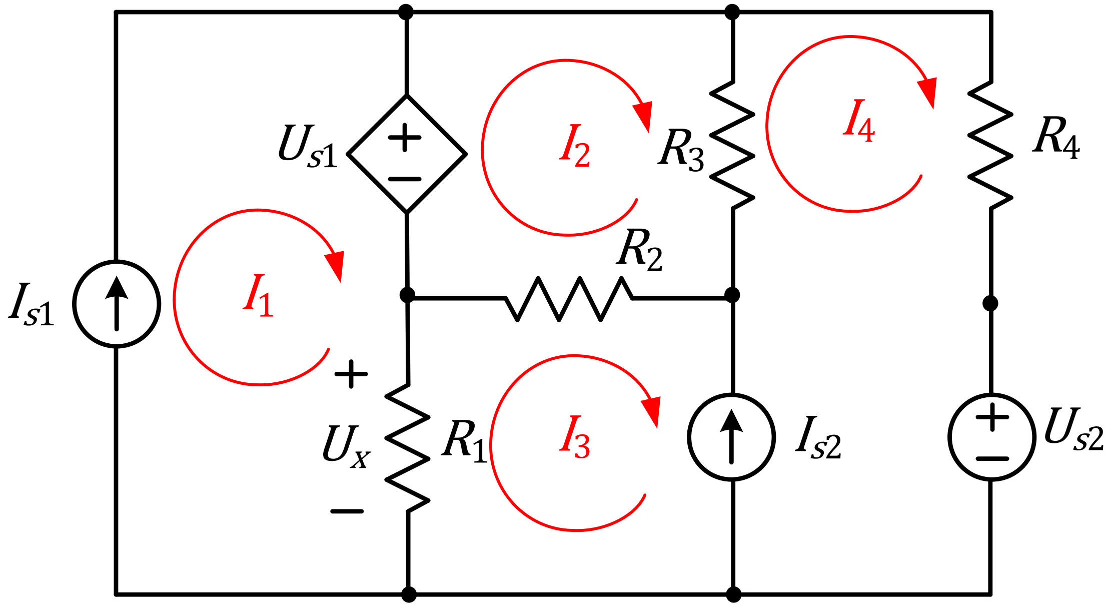
$$-U_{s1} + I_3R_3 + I_2R_4 + (I_2 - I_1)R_2 + (I_3 - I_1)R_1 = 0$$





Παράδειγμα 7

- Επιλύεται ξανά το Παράδειγμα 3.
- Δίνονται: $I_{s1} = I_{s2} = 1\ \mathrm{mA}$,
  $U_{s1} = 2U_x$, $U_{s2} = 10\ \mathrm{V}$,
  $R_1 = R_2 = 1\ \mathrm{k\Omega}$, $R_3 = R_4 = 5\ \mathrm{k\Omega}$.
- Να βρεθεί η τάση στα άκρα της R_4.



Απάντηση:

- Απαιτούνται 4 εξισώσεις βρόχων.
- Από την πηγή ρεύματος I_{s1} διέρχεται ένα ρεύμα βρόχου. Επομένως

$$I_1 = I_{s1}$$

- Από το βρόχο 2:

$$(I_2 - I_3)R_2 - U_{s1} + (I_2 - I_4)R_3 = 0$$

- Από τον υπερβρόχο (θεωρώντας ανοιχτοκυκλωμένη την πηγή ρεύματος I_{s2}):

$$(I_3 - I_1)R_1 + (I_3 - I_2)R_2 + (I_4 - I_2)R_3 + I_4R_4 + U_{s2} = 0$$

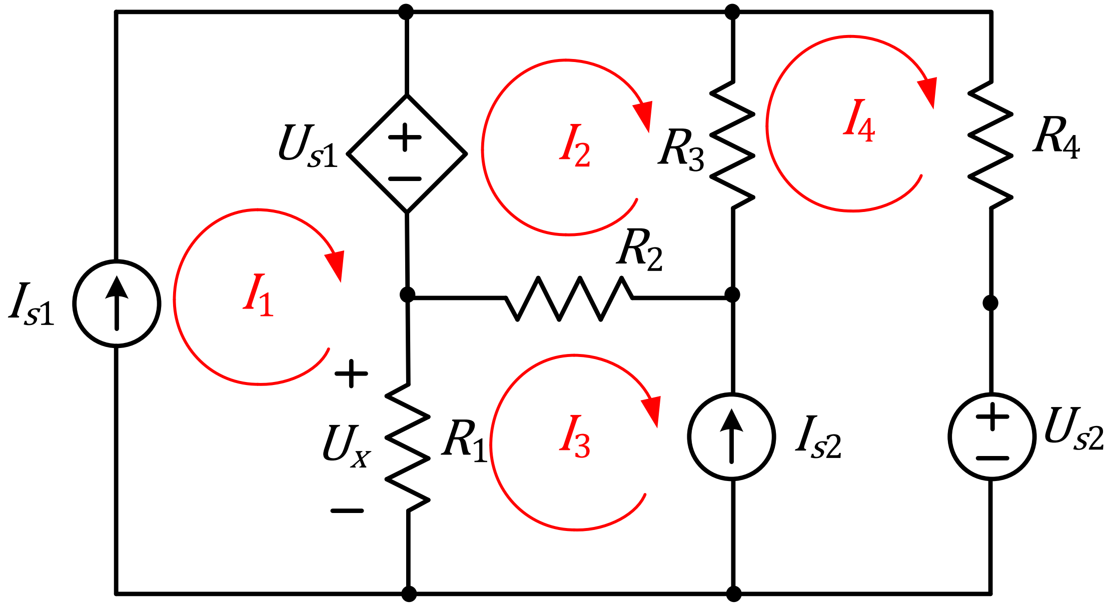
Παράδειγμα 7

- Από τον κλάδο της πηγής ρεύματος I_{s2}:

$$I_4 - I_3 = I_{s2} = 1 \text{ mA}$$

- Επιπλέον λόγω της εξαρτημένης πηγής:

$$U_{s1} = 2U_x$$
$$(I_1 - I_3)R_1 = U_x$$



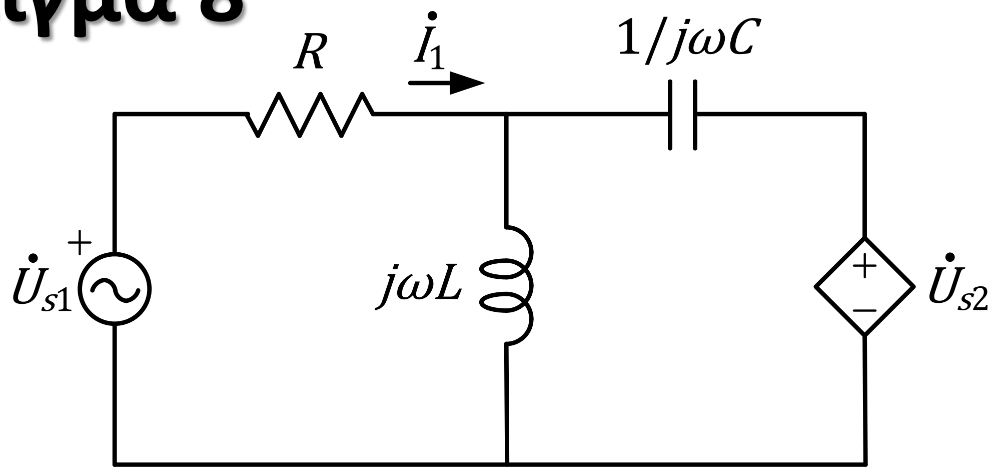
- Προκύπτει ότι

$$I_1 = I_{s1} = 1 \text{ mA}$$
$$I_4 = -0.5 \text{ mA}$$
$$I_2 = 1/6 \text{ mA}$$
$$I_3 = -1.5 \text{ mA}$$

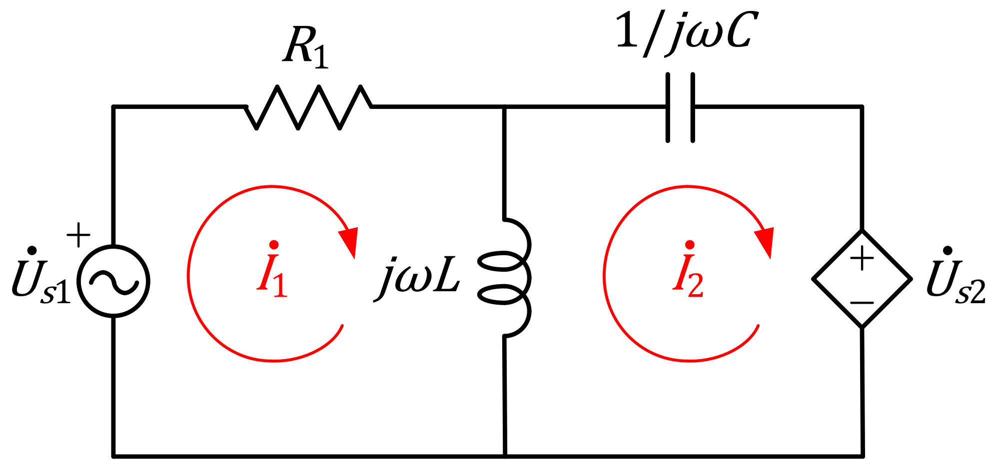
- Στην αντίσταση R_4:

$$U_4 = I_4 R_4 = -2.5 \text{ V}$$

Παράδειγμα 8



- Να βρεθεί το ρεύμα $i_1(t)$ της ανεξάρτητης πηγής στο διπλανό κύκλωμα με ανάλυση βρόχων.
- Δίνονται: $u_{s1}(t) = 10\sqrt{2}\cos\omega t\ \text{ V}$, $u_{s2}(t) = 2i_1(t)$, $\omega = 1000\text{ rad/s}$, $R = 3\ \Omega$, $L = 4\text{ mH}$, $C = 0.5\text{ mF}$.



Απάντηση:

- Μετατρέπουμε σε φάσορες:

$$\dot{U}_{s1} = 10\angle 0°\text{ V}$$

- Για την εξαρτημένη πηγή:

$$\dot{U}_{s2} = 2\dot{I}_1$$

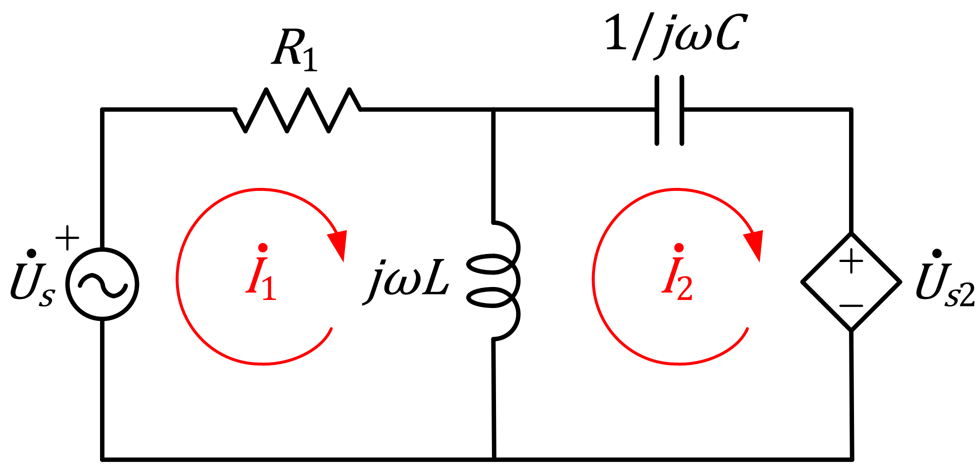
- Για το βρόχο 1:

$$-\dot{U}_{s1} + \dot{I}_1 R + \left(\dot{I}_1 - \dot{I}_2\right) j\omega L = 0$$

Παράδειγμα 8

$$\Rightarrow -10 + 3\dot{I}_1 + \left(\dot{I}_1 - \dot{I}_2\right)j4 = 0$$

$$\Rightarrow (3 + j4)\dot{I}_1 - j4\dot{I}_2 = 10$$



- Για το βρόχο 2:

$$\dot{U}_{s2} + \left(\dot{I}_2 - \dot{I}_1\right)j\omega L + \dot{I}_2 \frac{1}{j\omega C} = 0$$

$$\Rightarrow 2\dot{I}_1 + j4\left(\dot{I}_2 - \dot{I}_1\right) - j2\dot{I}_2 = 0$$

$$\Rightarrow (2 - j4)\dot{I}_1 + j2\dot{I}_2 = 0$$

- Άρα έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 3 + j4 & -j4 \\ 2 - j4 & j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

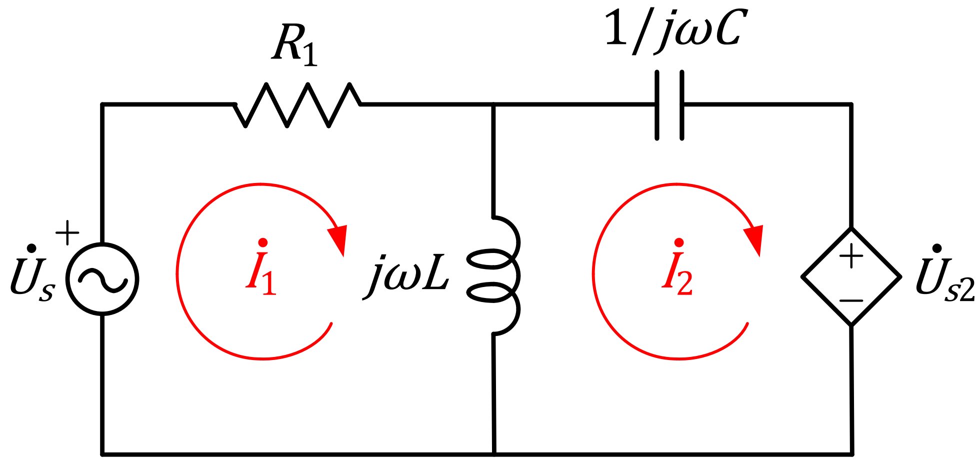
- Υπολογίζουμε τις ορίζουσες:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 + j4 & -j4 \\ 2 - j4 & j2 \end{vmatrix} = 8 + j14$$

Παράδειγμα 8

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & -j4 \\ 0 & j2 \end{vmatrix} = j20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3+j4 & 10 \\ 2-j4 & 0 \end{vmatrix} = -20 + j40$$



- Τα ρεύματα θα είναι:

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1.077 + j0.615 = 1.240\angle 29.7°\ \mathrm{A}$$

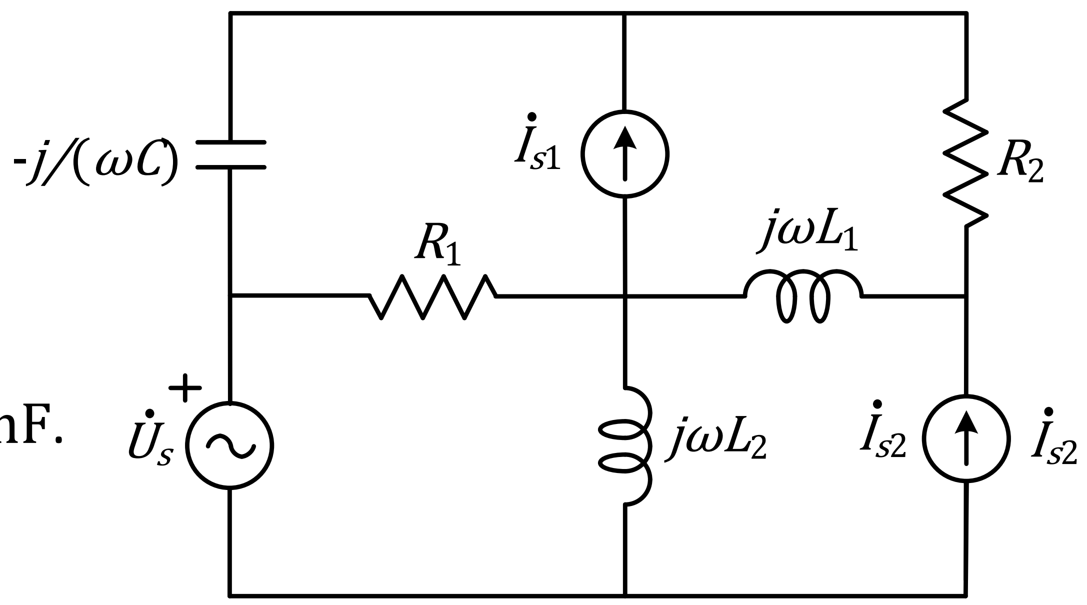
$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1.538 + j2.308 = 2.774\angle 56.3°\ \mathrm{A}$$

- Το ρεύμα της ανεξάρτητης πηγής είναι:

$$i_1(t) = 1.24\sqrt{2}\cos(\omega t + 29.7°)\ \mathrm{A}$$

Παράδειγμα 9

- Να βρεθεί η τάση στο πηνίο L_1 στο κύκλωμα του σχήματος.
- Δίνονται: $\dot{U}_s = 10\angle 0°\ \mathrm{V}$, $\dot{I}_{s1} = 5\angle 0°\ \mathrm{A}$, $\dot{I}_{s2} = 2\angle 30°\ \mathrm{A}$, $\omega = 1000\ \mathrm{rad/s}$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $L_1 = 2\ \mathrm{mH}$, $L_2 = 10\ \mathrm{mH}$, $C = 0.5\ \mathrm{mF}$.



Απάντηση:

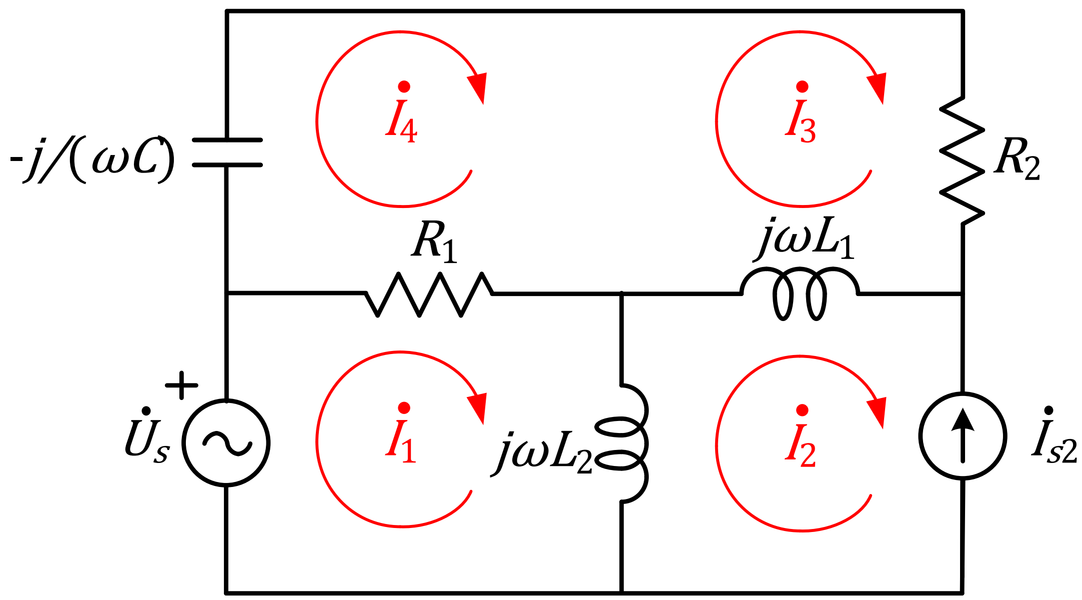
- Απαιτούνται 4 εξισώσεις.
- Στο βρόχο 2 λόγω της πηγής $\dot{I}_{s2}$:

$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_{s2}$$

- Λόγω της πηγής $\dot{I}_{s1}$:

$$\dot{I}_3 - \dot{I}_4 = \dot{I}_{s1}$$

- Θα θεωρήσουμε έναν υπερβρόχο ανοιχτοκυκλώνοντας την πηγή $\dot{I}_{s1}$.



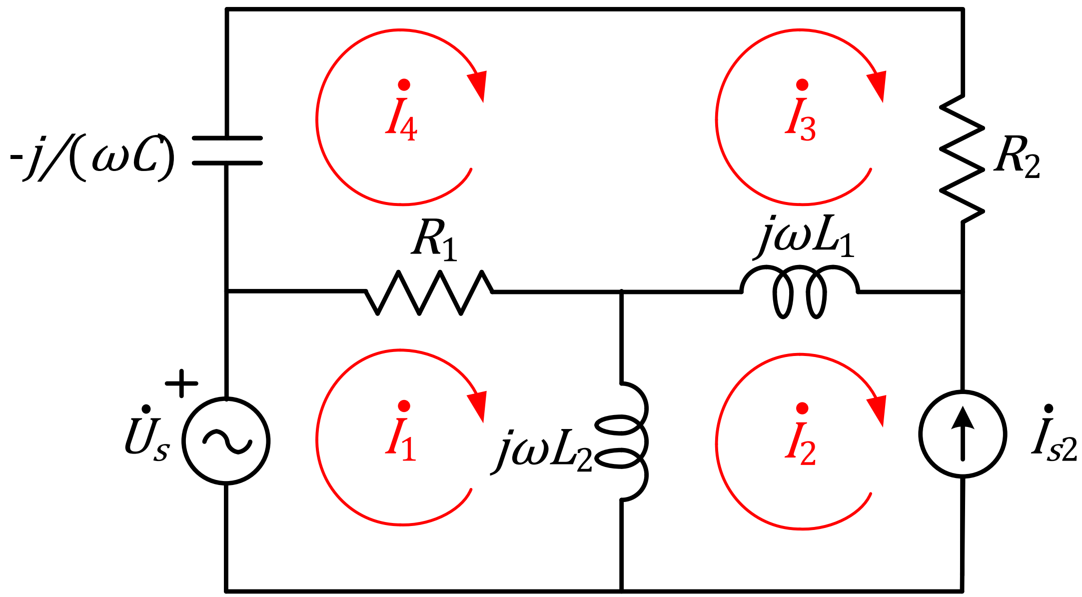
Παράδειγμα 9

- Στον υπερβρόχο:

$$-\dot{I}_4 \frac{j}{\omega C} + \dot{I}_3 R_2 + (\dot{I}_3 - \dot{I}_2) j\omega L_1$$
$$+ (\dot{I}_4 - \dot{I}_1) R_1 = 0$$

- Στο βρόχο 1:

$$-\dot{U}_s + (\dot{I}_1 - \dot{I}_4) R_1 + (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) j\omega L_2$$
$$= 0$$

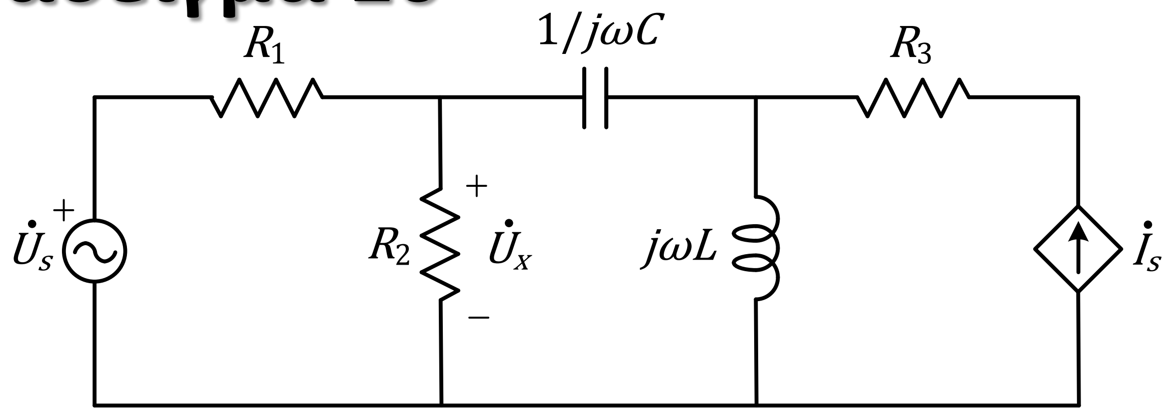


- Αποτελέσματα:

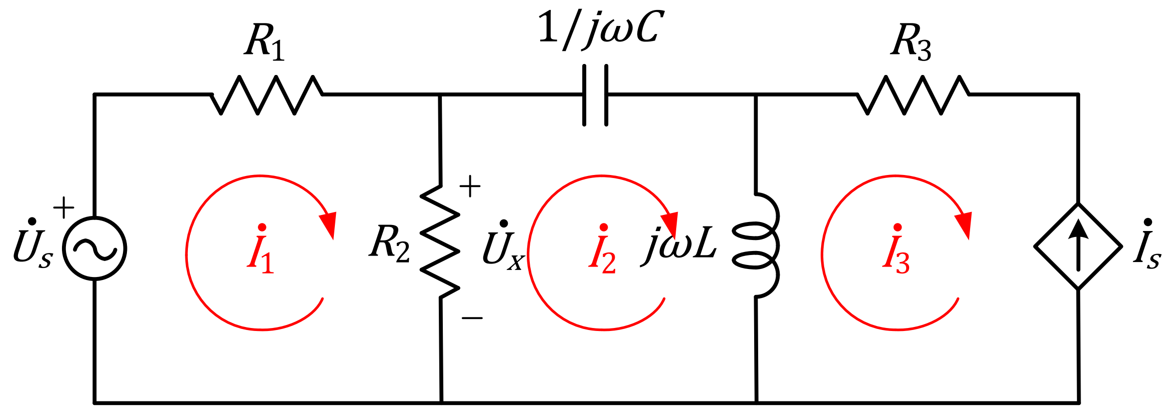
$$\dot{I}_1 = 2.1\angle 72.7^\circ \text{ A}$$
$$\dot{I}_2 = 2\angle 210^\circ \text{ A}$$
$$\dot{I}_3 = 3.7\angle 14.2^\circ \text{ A}$$
$$\dot{I}_4 = 1.7\angle 146.8^\circ \text{ A}$$

Παράδειγμα 10

- Να βρεθεί η μιγαδική ισχύς στους ακροδέκτες της πηγής ρεύματος στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος.



- Δίνονται: $\dot{U}_s = 24\angle 0°\ \mathrm{V}$, $\dot{I}_s = 2\dot{U}_x$, $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega\ j\omega L = j2\ \Omega$, $1/j\omega C = -j\ \Omega$.



Απάντηση:

- Με ανάλυση βρόχων:
- Για το βρόχο 1:

$$-\dot{U}_s + \dot{I}_1 R_1 + \left(\dot{I}_1 - \dot{I}_2\right) R_2 = 0$$

$$\Rightarrow -24 + 4\dot{I}_1 + \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 0$$

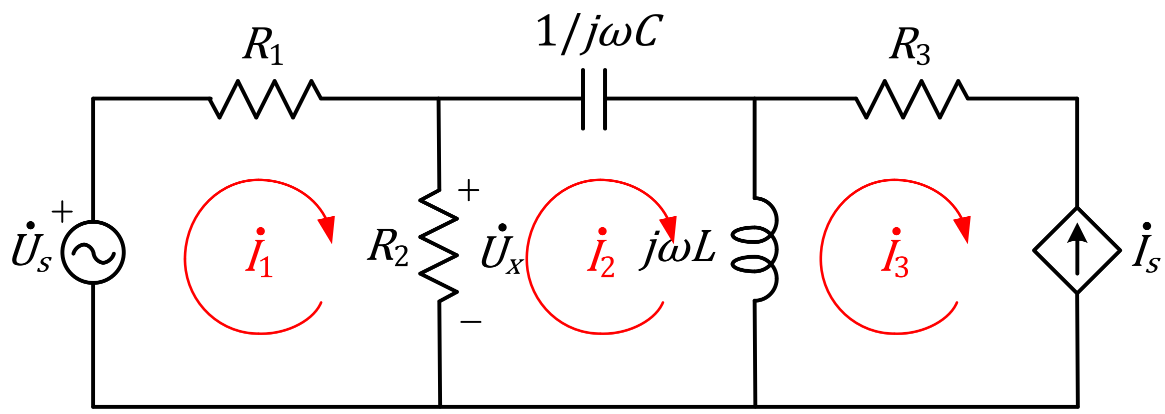
$$\Rightarrow 5\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 24$$

$$\Rightarrow \dot{I}_2 = 5\dot{I}_1 - 24$$

Παράδειγμα 10

- Για το βρόχο 3:

$$\dot{I}_3 = -\dot{I}_s = -2\dot{U}_x$$
$$= -2(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)R_2$$
$$= -2\dot{I}_1 + 2\dot{I}_2$$



- Για το βρόχο 2:

$$(\dot{I}_2 - \dot{I}_1)R_2 + \dot{I}_2\frac{1}{j\omega C} + (\dot{I}_2 - \dot{I}_3)j\omega L = 0$$
$$\Rightarrow \dot{I}_2 - \dot{I}_1 - j\dot{I}_2 + (\dot{I}_2 - \dot{I}_3)j2 = 0$$

- Με αντικατάσταση των $\dot{I}_2$ και $\dot{I}_3$ η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$(5\dot{I}_1 - 24)(1 + j) - \dot{I}_1 - j2(-2\dot{I}_1 + 2\dot{I}_2) = 0$$
$$\Rightarrow \dot{I}_1 = (6.482 - j0.175)\ \mathrm{A}$$

- Επομένως

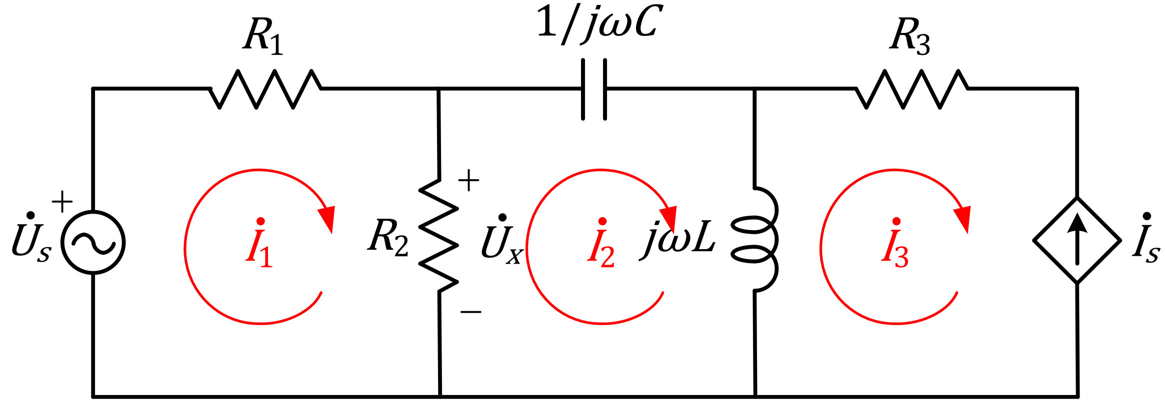
$$\dot{I}_2 = (8.409 - j0.876)\ \mathrm{A}$$

Παράδειγμα 10

- Επίσης

  $$\dot{I}_3 = (3.854 - j1.402)\ \mathrm{A}$$

- Άρα το ρεύμα της πηγής ρεύματος είναι



$$\dot{I}_s = (-3.854 + j1.402)\ \mathrm{A}$$

- Η τάση στους ακροδέκτες της πηγής ρεύματος είναι:

$$\dot{U}_3 = -\dot{I}_3 R_3 + \left(\dot{I}_2 - \dot{I}_3\right) j\omega L = (-8.760 + j11.915)\ \mathrm{V}$$

- Επομένως η μιγαδική ισχύς είναι

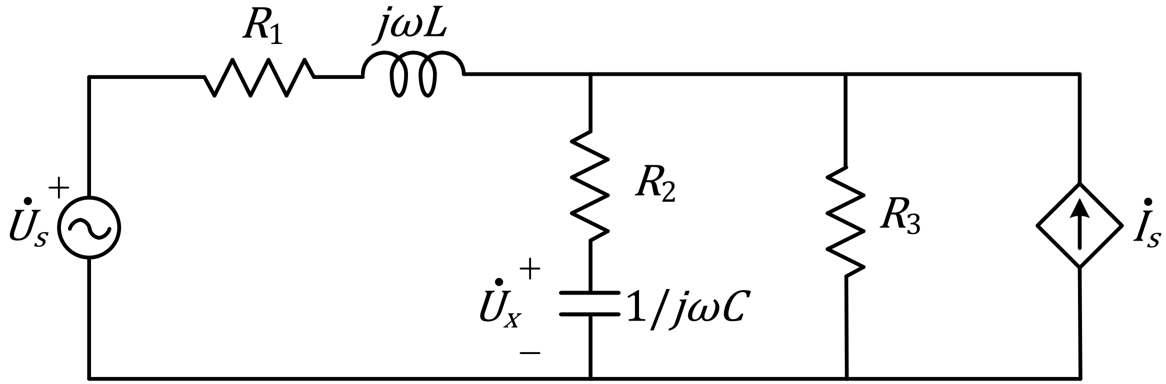
$$\dot{S}_{Is} = \dot{U}_3 \dot{I}_s^{\,*} = (-8.760 + j11.915)(-3.854 - j1.402) = (50.464 - j33.64)\ \mathrm{VA}$$

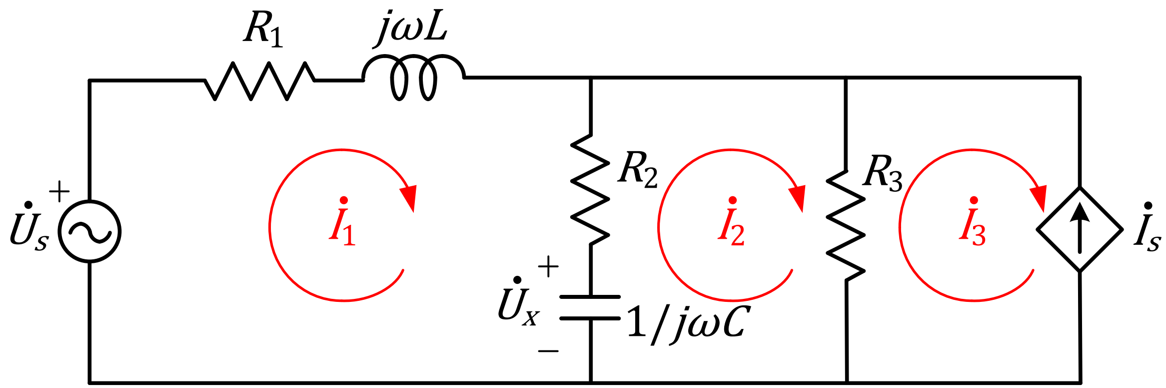
Επιλογή μεθόδου

- Ένα βασικό κριτήριο είναι ο αριθμός των εξισώσεων. Ένα κύκλωμα με n κόμβους οδηγεί σε $n - 1$ KCL εξισώσεις. Με κάθε υπερκόμβο μειώνονται αυτές κατά μία. Αν το κύκλωμα έχει l ελάχιστους βρόχους, τότε έχουμε l το πολύ KVL εξισώσεις. Κάθε υπερβρόχος μειώνει τον αριθμό κατά μία.
- Αν υπάρχουν εξαρτημένες πηγές τότε οι μεταβλητές ελέγχου τους μπορεί να παίξουν ρόλο στην επιλογή. Εξαρτημένη πηγή τάσης ελεγχόμενη από κομβική τάση δεν απαιτεί επιπλέον εξίσωση στην ανάλυση κόμβων. Εξαρτημένη πηγή ρεύματος ελεγχόμενη από ρεύμα βρόχου δεν απαιτεί επιπλέον εξίσωση στην ανάλυση βρόχων. Γενικά εξετάζουμε αν η μεταβλητή ελέγχου μπορεί να εκφραστεί πιο εύκολα συναρτήσει ρευμάτων βρόχων ή τάσεων κόμβων.
- Πηγές ρεύματος στην περιφέρεια βρόχου αντιμετωπίζονται εύκολα στην ανάλυση βρόχων. Πηγές τάσης που συνδέονται στον κόμβο αναφοράς αντιμετωπίζονται εύκολα στην ανάλυση κόμβων.
- Όταν ο αριθμός εξισώσεων είναι ίδιος, τότε θα μπορούσαμε να εξετάσουμε αν στα ζητούμενα της άσκησης υπάρχουν τάσεις ή ρεύματα.

Παράδειγμα 11

- Να βρεθεί το ρεύμα της πηγής τάσης στο διπλανό κύκλωμα.
- Δίνονται: $\dot{U}_s = 33.8\angle 0°\ \mathrm{V}$, $\dot{I}_s = 0.75\dot{U}_x$, $R_1 = 1\ \Omega$, $j\omega L = j2\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $1/(j\omega C) = -j5\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$.





Απάντηση:

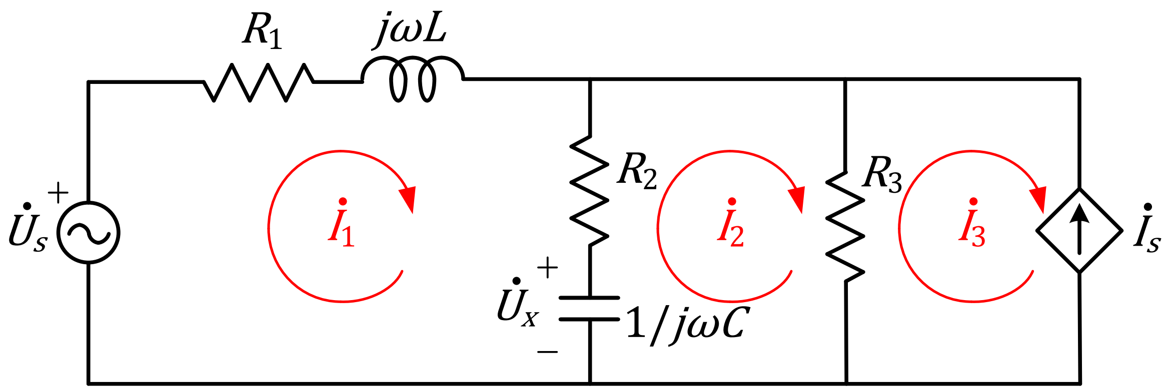
- Με ανάλυση βρόχων:
- Από τον πρώτο βρόχο προκύπτει η εξίσωση:

$$-\dot{U}_{s1} + \dot{I}_1(R_1 + j\omega L) + (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -33.8 + \dot{I}_1(1 + j2) + (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)(3 - j5) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{I}_1(4 - j3) + \dot{I}_2(-3 + j5) = 33.8$$

Παράδειγμα 11



- Από τον τρίτο βρόχο προκύπτει η εξίσωση:

$$\dot{I}_3 = -\dot{I}_s$$

$$\Rightarrow \dot{I}_3 = -0.75\dot{U}_x = -0.75\left(\dot{I}_1 - \dot{I}_2\right)\frac{1}{j\omega C} = -0.75\left(\dot{I}_1 - \dot{I}_2\right)(-j5) = j3.75\left(\dot{I}_1 - \dot{I}_2\right)$$

- Από το δεύτερο βρόχο προκύπτει η εξίσωση:

$$\left(\dot{I}_2 - \dot{I}_3\right)R_3 + \left(\dot{I}_2 - \dot{I}_1\right)\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C}\right) = 0$$

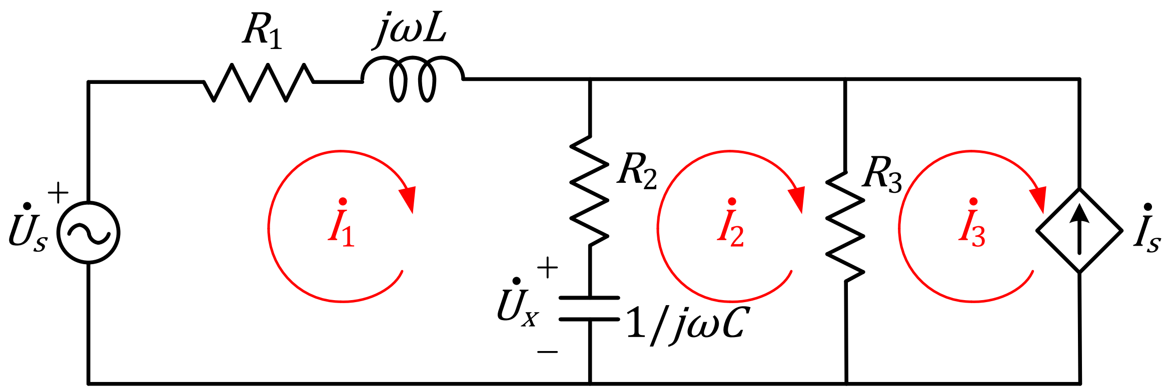
$$\Rightarrow \left(\dot{I}_2 - \dot{I}_3\right)2 + \left(\dot{I}_2 - \dot{I}_1\right)(3 - j5) = 0$$

$$\Rightarrow 2\dot{I}_2 - j7.5\left(\dot{I}_1 - \dot{I}_2\right) + \left(\dot{I}_2 - \dot{I}_1\right)(3 - j5) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{I}_1(-3 - j2.5) + \dot{I}_2(5 + j2.5) = 0$$

Παράδειγμα 11

- Δηλαδή έχουμε το σύστημα μιγαδικών εξισώσεων:



$$\begin{bmatrix} 4-j3 & -3+j5 \\ -3-j2.5 & 5+j2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33.8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4-j3 & -3+j5 \\ -3-j2.5 & 5+j2.5 \end{vmatrix} = (4-j3)(5+j2.5) - (-3+j5)(-3-j2.5)$$
$$= 6 + j2.5$$

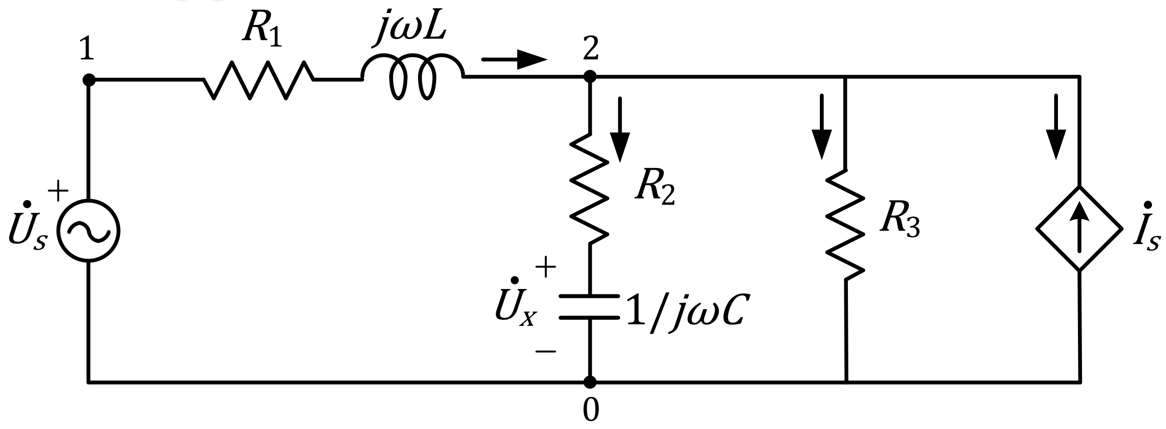
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 33.8 & -3+j5 \\ 0 & 5+j2.5 \end{vmatrix} = 169 + j84.5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4-j3 & 33.8 \\ -3-j2.5 & 0 \end{vmatrix} = 101.4 + j84.5$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = (29 + j2)\ \text{A}, \qquad \dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = (19.4 + j6)\ \text{A}$$

- Το ζητούμενο ρεύμα είναι ίσο με το $\dot{I}_1$.

Παράδειγμα 11



- Με ανάλυση κόμβων:
- Για τον κόμβο 1:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_s$$

- Για την πηγή $\dot{I}_s$:

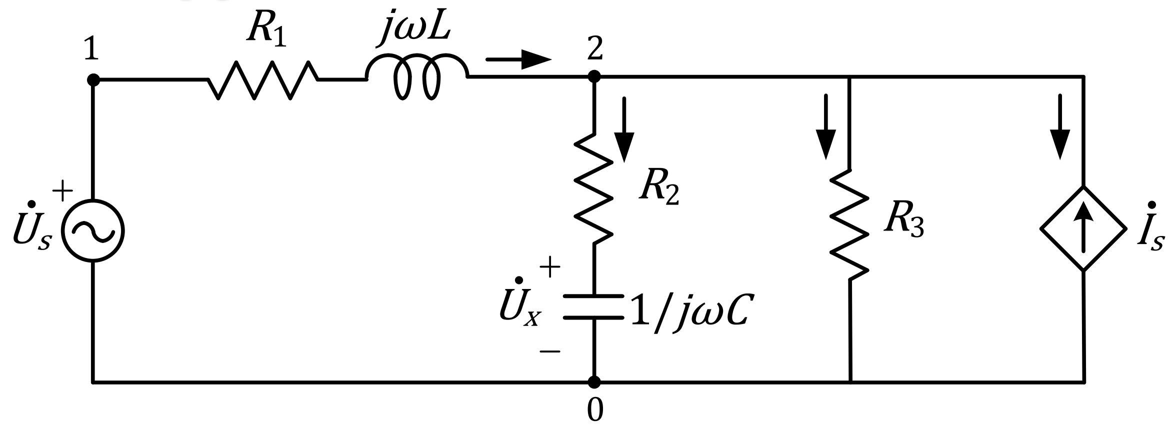
$$\dot{I}_s = 0.75\dot{U}_x = 0.75\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}\dot{U}_2 = 0.75\frac{-j5}{3-j5}\dot{U}_2 = \frac{-j3.75}{3-j5}\dot{U}_2$$

- Για τον κόμβο 2:

$$\frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{R_1 + j\omega L} = \frac{\dot{U}_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{\dot{U}_2}{R_3} - \dot{I}_s$$

$$\Rightarrow \frac{33.8 - \dot{U}_2}{1 + j2} = \frac{\dot{U}_2}{3 - j5} + \frac{\dot{U}_2}{2} + \frac{j3.75}{3-j5}\dot{U}_2 \Rightarrow \dot{U}_2 = (8.8 + j60)\ \mathrm{V}$$

Παράδειγμα 11



- Το ζητούμενο ρεύμα είναι

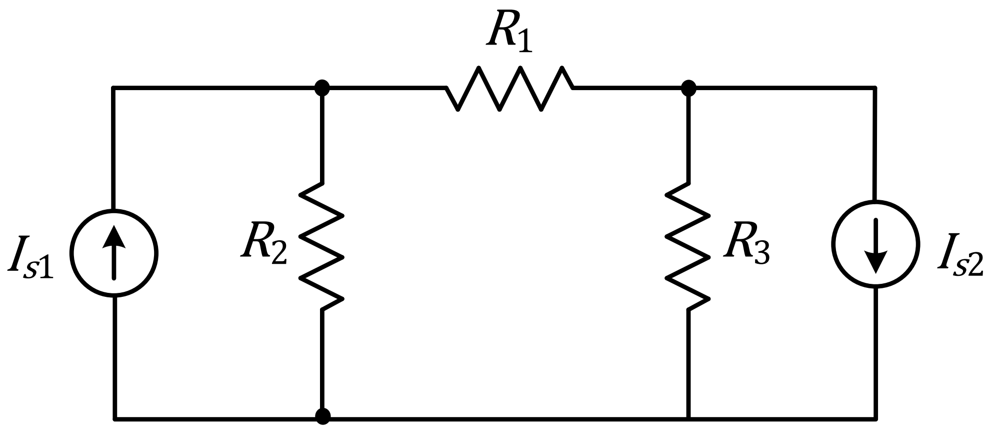
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{R_1 + j\omega L}$$

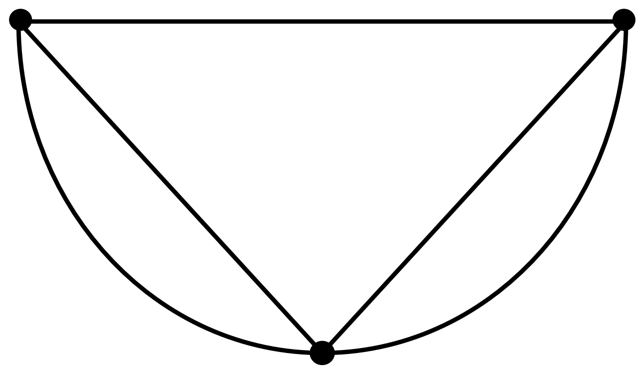
$$= \frac{33.8 - 8.8 + j60}{1 + j2}$$

$$= (29 + j2)\ \mathrm{A}$$

Γενικευμένη ανάλυση κόμβων

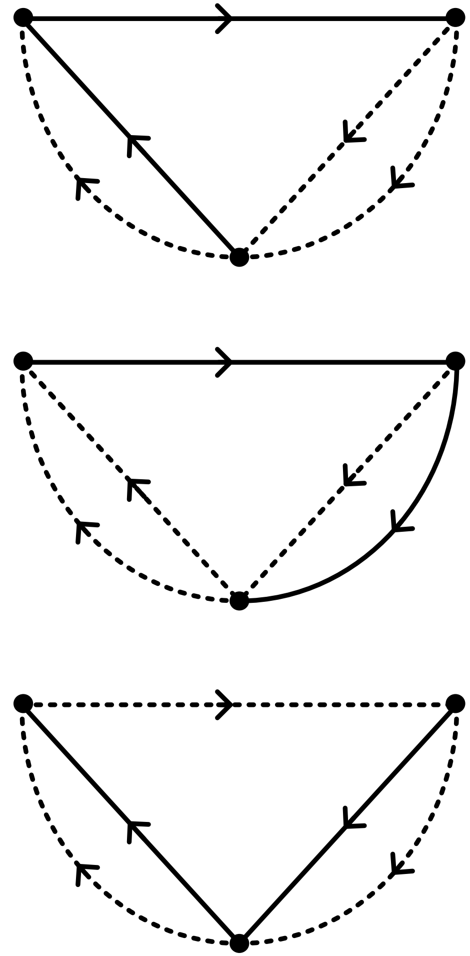
- Γράφος ενός κυκλώματος: Δείχνει τους κλάδους και τους κόμβους του κυκλώματος και πώς είναι συνδεδεμένοι. Δεν φαίνονται τα ακριβή στοιχεία που συνδέονται στους κλάδους. Παράδειγμα:





- Κόμβος: Κοινό σημείο σύνδεσης δύο ή περισσοτέρων στοιχείων.
- Κλάδος: Μια διαδρομή που συνδέει δύο κόμβους μεταξύ τους και περιέχει ένα μόνο στοιχείο.
- Βρόχος: Μια κλειστή διαδρομή.
- Δέντρο: Μια ομάδα κλάδων που συνδέει όλους τους κόμβους μεταξύ τους χωρίς να περιλαμβάνει βρόχους. Μπορούν να επιλεγούν πολλά διαφορετικά δέντρα για το ίδιο κύκλωμα.

Γενικευμένη ανάλυση κόμβων



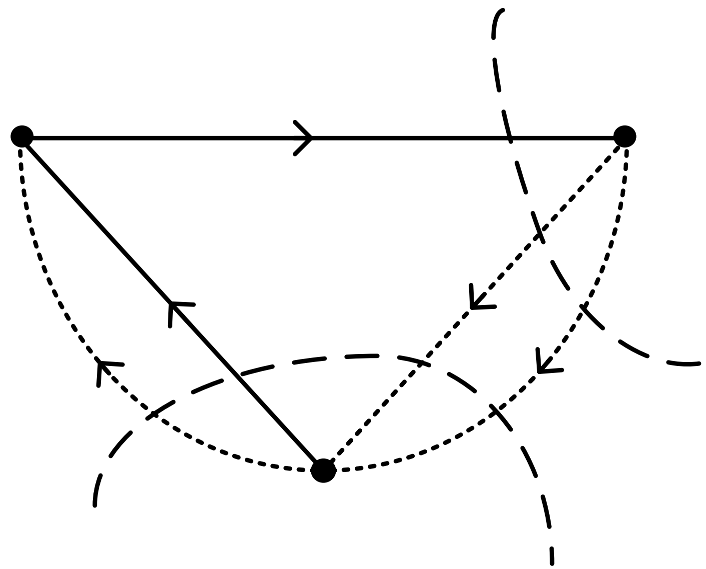
- Μερικά από τα δέντρα που είναι δυνατό να επιλεγούν φαίνονται στο σχήμα (οι διαδρομές που έχουν σχεδιαστεί με συμπαγείς γραμμές).
- Στους κλάδους έχει δοθεί τυχαίος προσανατολισμός (δείχνει φορά αναφοράς για ρεύματα και πολικότητα για τάσεις).
- Αφού επιλεγεί ένα δέντρο, οι κλάδοι που δεν ανήκουν σε αυτό ονομάζονται δεσμοί.

➢ Κατά την επιλογή του δέντρου οι κλάδοι με πηγές τάσης να επιλέγονται ως κλάδοι του δέντρου ενώ οι κλάδοι με πηγές ρεύματος ως δεσμοί.

➢ Οι κλάδοι με τάσεις που ελέγχουν εξαρτημένες πηγές τάσης να τοποθετούνται στο δέντρο, αν αυτό είναι δυνατό, ενώ οι κλάδοι με ρεύματα που ελέγχουν εξαρτημένες πηγές ρεύματος να επιλέγονται ως δεσμοί. Γενικά οι τάσεις συνδέονται με κλάδους δέντρου ενώ τα ρεύματα με δεσμούς.

Γενικευμένη ανάλυση κόμβων

- Στο γράφο μπορούν να σχεδιαστούν τομές που να διαχωρίζουν νοητά έναν ή περισσότερους κόμβους από τον υπόλοιπο γράφο. Οι κλάδοι που κόβονται αποτελούν μια ομάδα που ονομάζεται ομάδα διαχωρισμού (cut-set).



- Μία ομάδα διαχωρισμού που περιλαμβάνει μόνο έναν κλάδο δέντρου και κάποιους δεσμούς ονομάζεται θεμελιώδης. Αφού υπάρχουν $n-1$ κλάδοι δέντρου υπάρχουν και ισάριθμες θεμελιώδεις ομάδες διαχωρισμού.
- Ο KCL μπορεί να εφαρμοστεί όχι μόνο σε κάθε κόμβο ξεχωριστά αλλά και σε μια ομάδα διαχωρισμού που μπορεί να περιλαμβάνει περισσότερους κόμβους.

Γενικευμένη ανάλυση κόμβων

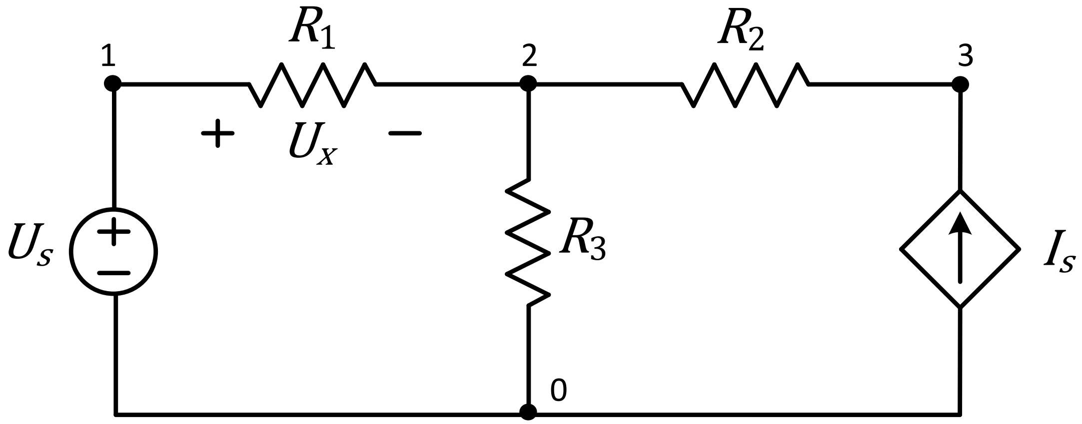
- Αν το δέντρο έχει n κόμβους, τότε απαιτούνται $n-1$ κλάδοι για να δημιουργηθεί ένα δέντρο. Αν οι κλάδοι του κυκλώματος είναι b, τότε ο αριθμός των δεσμών είναι $l = b - (n-1) = b - n + 1$.
- Αναθέτουμε μια μεταβλητή τάσης σε κάθε έναν από τους κλάδους του δέντρου (η πολικότητα ορίζεται από το βέλος). Αν ένας κλάδος περιέχει πηγή τάσης τότε η τάση του λαμβάνει την τιμή της τάσης της πηγής αυτής. Αν ένας κλάδος περιέχει τάση ελέγχου εξαρτημένης πηγής, τότε η τάση του λαμβάνει αυτή την τιμή.
- Δεν γράφεται εξίσωση KCL στην περίπτωση κλάδου δέντρου με πηγή τάσης, άρα δεν μας ενδιαφέρει η θεμελιώδης ομάδα διαχωρισμού που ορίζεται από αυτόν τον κλάδο.
- Ο αριθμός των αγνώστων είναι ίσος με τους κλάδους του δέντρου, δηλαδή με $n-1$, μείον τον αριθμό των πηγών τάσεων και τον αριθμό όσων τάσεων ελέγχου έχουν συμπεριληφθεί στο δέντρο.

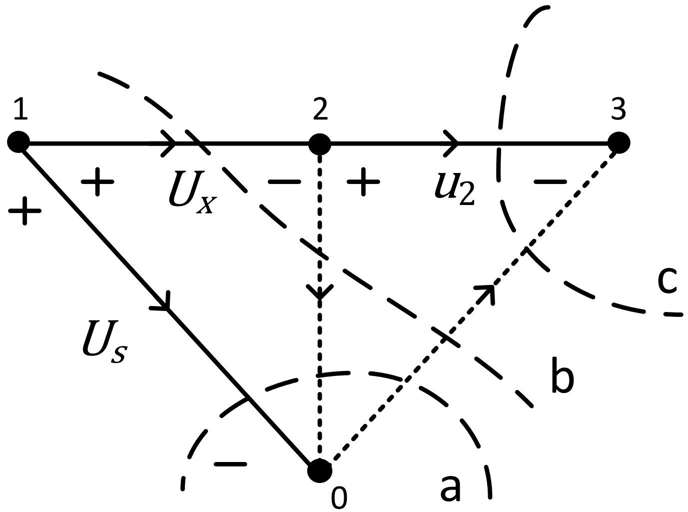
Γενικευμένη ανάλυση κόμβων

- Ο αριθμός των εξισώσεων που απαιτούνται λαμβάνονται μέσω KCL στις θεμελιώδεις ομάδες διαχωρισμού που απομένουν, δηλαδή αυτές που ορίζονται από κλάδο δέντρου που δεν περιέχει πηγή τάσης.
- Κάθε ρεύμα στις KCL εξισώσεις εκφράζεται συναρτήσει των τάσεων που έχουμε ορίσει.
- Αν υπάρχει εξαρτημένη πηγή ελεγχόμενη από ρεύμα πρέπει να γράψουμε μια επιπλέον εξίσωση που να συσχετίζει το ρεύμα ελέγχου με τις τάσεις που ορίσαμε.

Παράδειγμα 12

- Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος είναι: $U_S = 100$ V, $I_S = \frac{U_x}{14}$, $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 15\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$. Να βρεθεί η U_x.

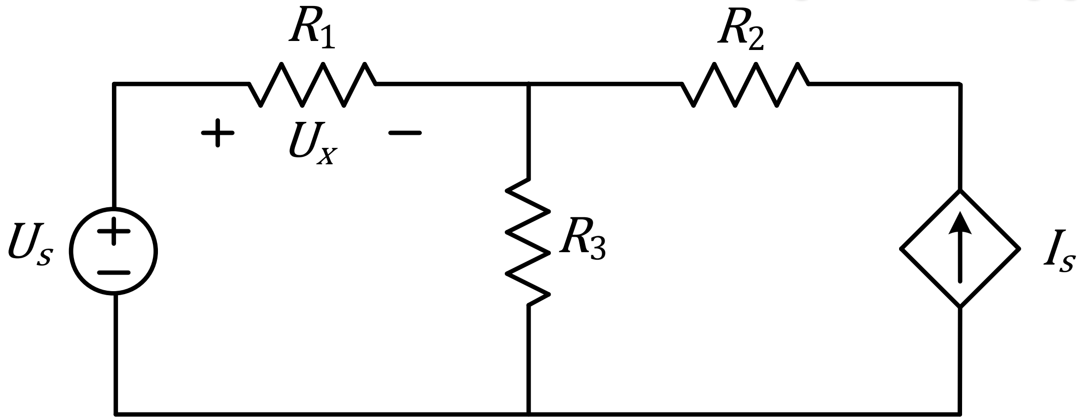


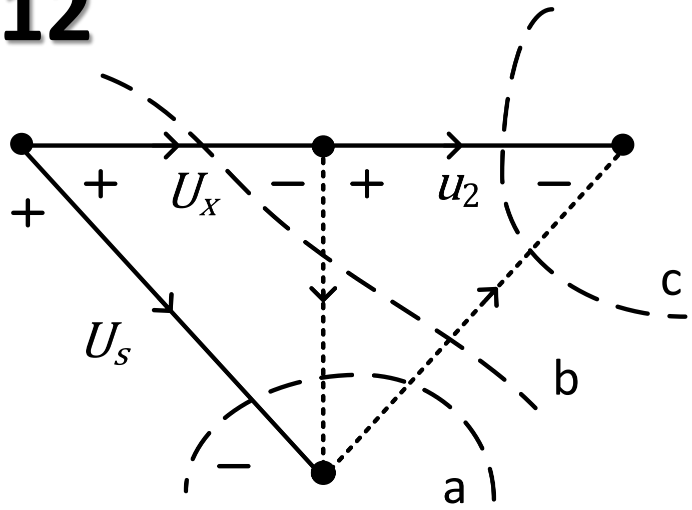


Απάντηση:

- Σύμφωνα με τα παραπάνω πρέπει να επιλέξουμε το δένδρο όπως φαίνεται στο σχήμα.
- Υπάρχουν 3 θεμελιώδεις ομάδες διαχωρισμού a, b και c αλλά λόγω της πηγής τάσης αγνοούμε την a. Ο KCL πρέπει να εφαρμοστεί στις δύο που απομένουν.

Παράδειγμα 12





- Στην ομάδα διαχωρισμού c:

$$\frac{u_2}{R_2} + I_s = 0 \Rightarrow \frac{u_2}{15} + \frac{U_x}{14} = 0$$

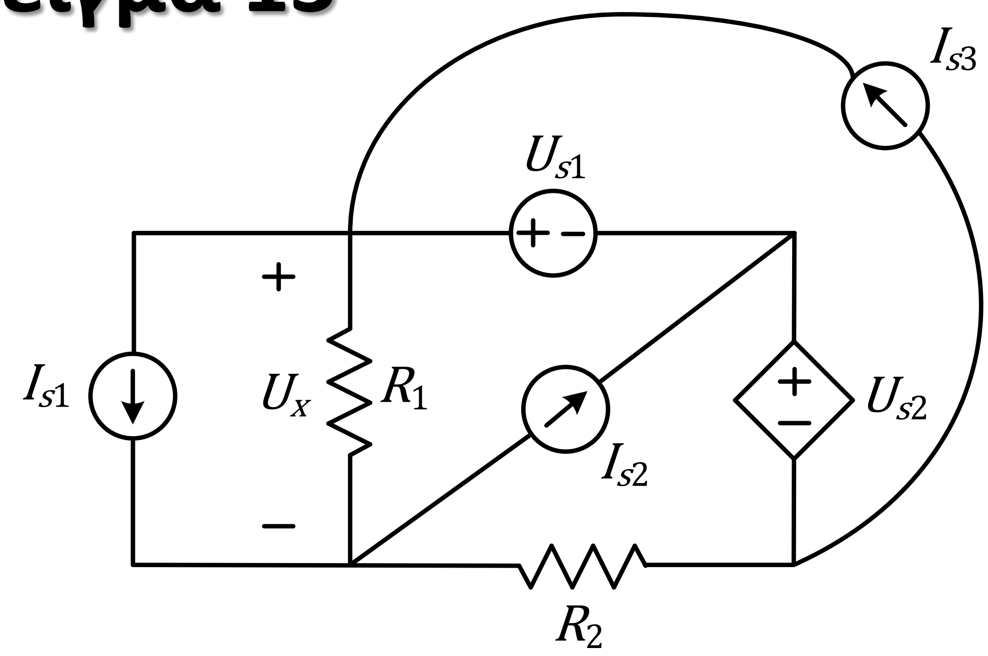
- Στην ομάδα διαχωρισμού b:
- Η R_3 δεν ανήκει στο δέντρο και επομένως η τάση της εκφράζεται συναρτήσει τάσεων κλάδων του δέντρου.

$$\frac{U_x}{R_1} + I_s = \frac{-U_x + U_s}{R_3} \Rightarrow \frac{U_x}{8} + \frac{U_x}{14} = \frac{-U_x + 100}{4} \Rightarrow U_x = 56\ \mathrm{V}$$

- Με αντικατάσταση στην παραπάνω βρίσκουμε επίσης ότι $u_2 = -60\ \mathrm{V}$.

Παράδειγμα 13

- Στο διπλανό σχήμα είναι $U_{s1} = 30$ V, $U_{s2} = 6U_x$, $I_{s1} = 1$ A, $I_{s2} = 3$ A, $I_{s3} = 2$ A, $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$.
- Να βρεθεί η U_x.

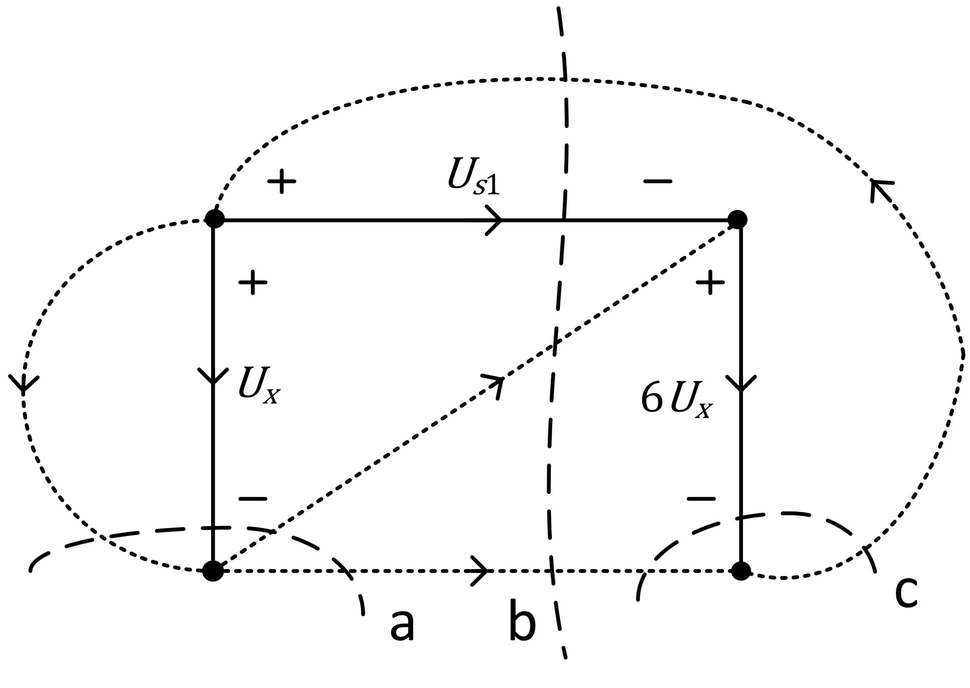


Απάντηση:

- Για τις ομάδες διαχωρισμού b και c δεν γράφουμε εξίσωση λόγω των πηγών τάσης.
- Για την ομάδα a:

$$I_{s1} + \frac{U_x}{R_1} - I_{s2} - \frac{U_x + U_{s1} + 6U_x}{R_2} = 0$$

$$\Rightarrow U_x = -\frac{32}{3}\ \text{V}$$

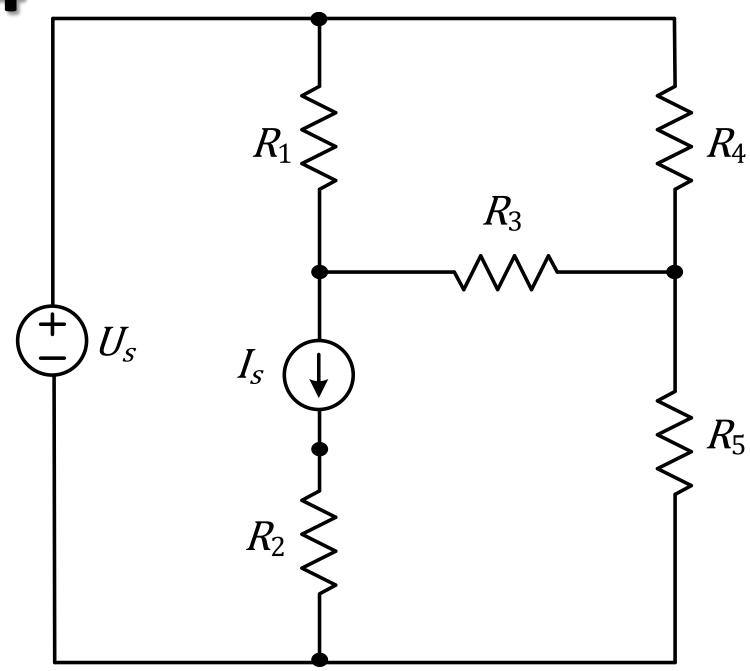


Γενικευμένη ανάλυση βρόχων

- Επιλέγουμε δέντρο όπως πριν.
- Τώρα όμως αναθέτουμε ρεύμα σε κάθε δεσμό. Κάθε δεσμός έχει κόμβους στα άκρα του και κάθε δυο κόμβοι πρέπει να συνδέονται με κάποιο τρόπο μέσω του δέντρου. Έτσι κάθε δεσμός σχετίζεται με ένα βρόχο που περιέχει αυτό το δεσμό και μια μοναδική διαδρομή μέσω του δέντρου.
- Κάθε βρόχος που περιέχει έναν μόνο δεσμό και κάποιους κλάδους δέντρου ονομάζεται θεμελιώδης βρόχος.
- Σχεδιάζουμε ένα ρεύμα για κάθε θεμελιώδη βρόχο. Κάθε ρεύμα δεσμού μπορεί να θεωρηθεί και ως ρεύμα ενός βρόχου. Σε κάθε δεσμό που περιέχει πηγή ρεύματος το ρεύμα της πηγής είναι το ρεύμα δεσμού.
- Εφαρμόζουμε KVL κατά μήκος κάθε θεμελιώδους βρόχου χωρίς πηγή ρεύματος. Το ρεύμα κάθε κλάδου ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων βρόχου των θεμελιωδών βρόχων που περιέχουν τον κλάδο αυτό.

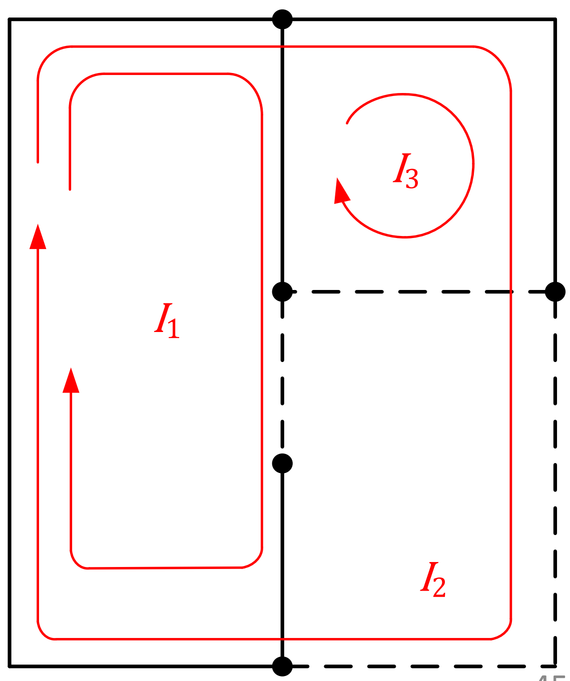
Παράδειγμα 14

- Στο διπλανό σχήμα είναι $U_s = 7\ \mathrm{V}$, $I_s = 7\ \mathrm{A}$, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = 2\ \Omega$, $R_5 = 1\ \Omega$. Να υπολογιστούν τα ρεύματα βρόχων.



Απάντηση:

- Επιλέγουμε να τοποθετήσουμε την πηγή ρεύματος σε δεσμό και την πηγή τάσης σε κλάδο δέντρου. Άρα ένα δυνατό δέντρο είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα.
- Το ρεύμα στον βρόχο που ορίζεται από το δεσμό της πηγής ρεύματος καθορίζεται από αυτή και είναι $7\ \mathrm{A}$. Δεν μπορεί να ρέει άλλο ρεύμα μέσω αυτού του δεσμού.
- Το ρεύμα που σχετίζεται με το δεσμό R_3 συμβολίζεται με I_3.



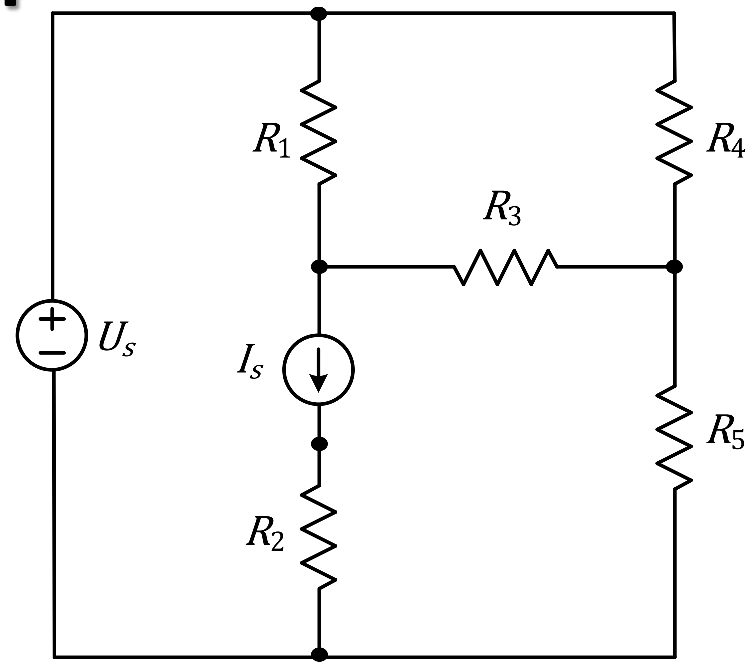
Παράδειγμα 14

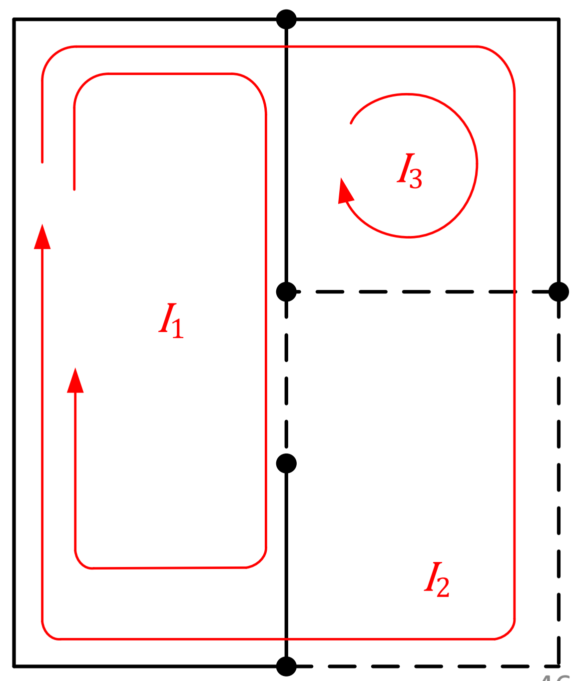
- Από τους κλάδους δέντρου μπορούν να διέρχονται περισσότερα του ενός ρεύματα.
- Το ρεύμα που ρέει στο δεσμό R_5 συμβολίζεται με I_2. Ο μόνος δυνατός βρόχος που μπορεί να ρέει είναι αυτός που φαίνεται στο σχήμα. Δεν είναι ελάχιστος βρόχος.
- Πρέπει να γράψουμε τις KVL εξισώσεις στους βρόχους.
- Αγνοούμε βρόχους που περιέχουν πηγές ρεύματος.

$$(I_2+I_3)R_4 + I_3R_3 + (I_3 - I_1)R_1 = 0$$
$$(I_2 + I_3)R_4 + I_2R_5 - U_s = 0$$

- Άρα

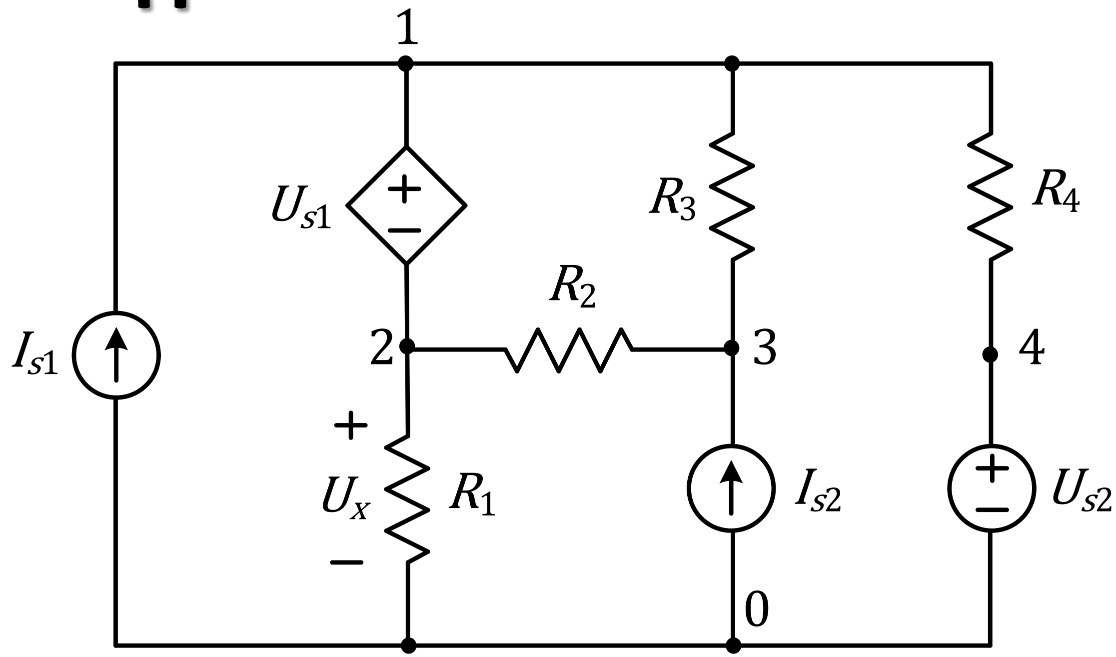
$$I_2 = 2 \text{ A}, I_3 = 0.5 \text{ A}$$





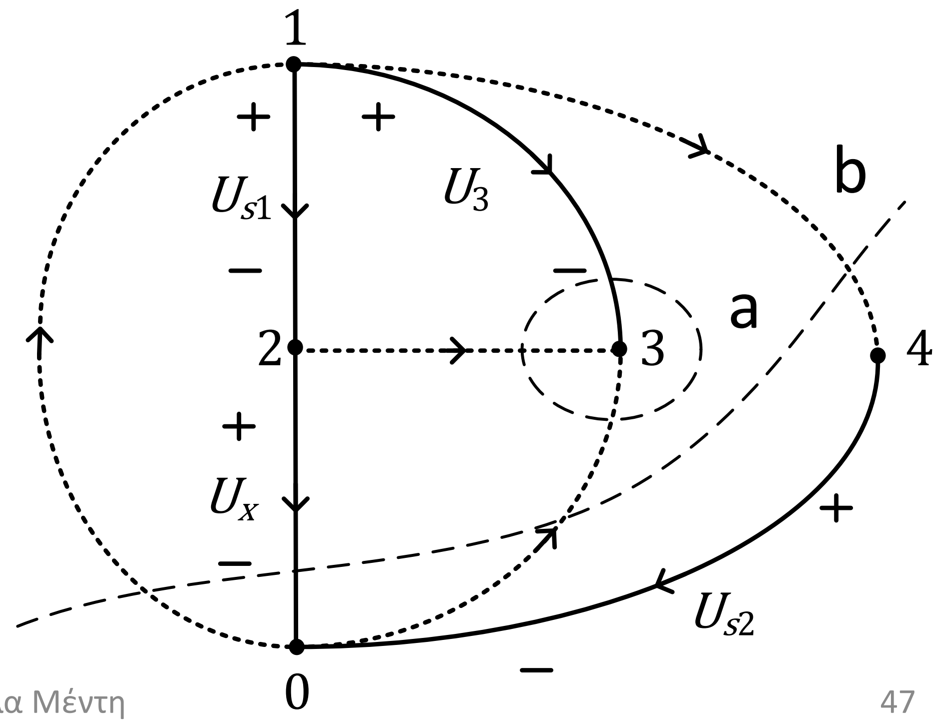
Παράδειγμα 15

- Στο διπλανό κύκλωμα: $I_{s1} = I_{s2} = 1\ \mathrm{mA}$, $U_{s1} = 2U_x$, $U_{s2} = 10\ \mathrm{V}$, $R_1 = R_2 = 1\ \mathrm{k\Omega}$, $R_3 = R_4 = 5\ \mathrm{k\Omega}$.
- Να βρεθεί η τάση στα άκρα της R_4.

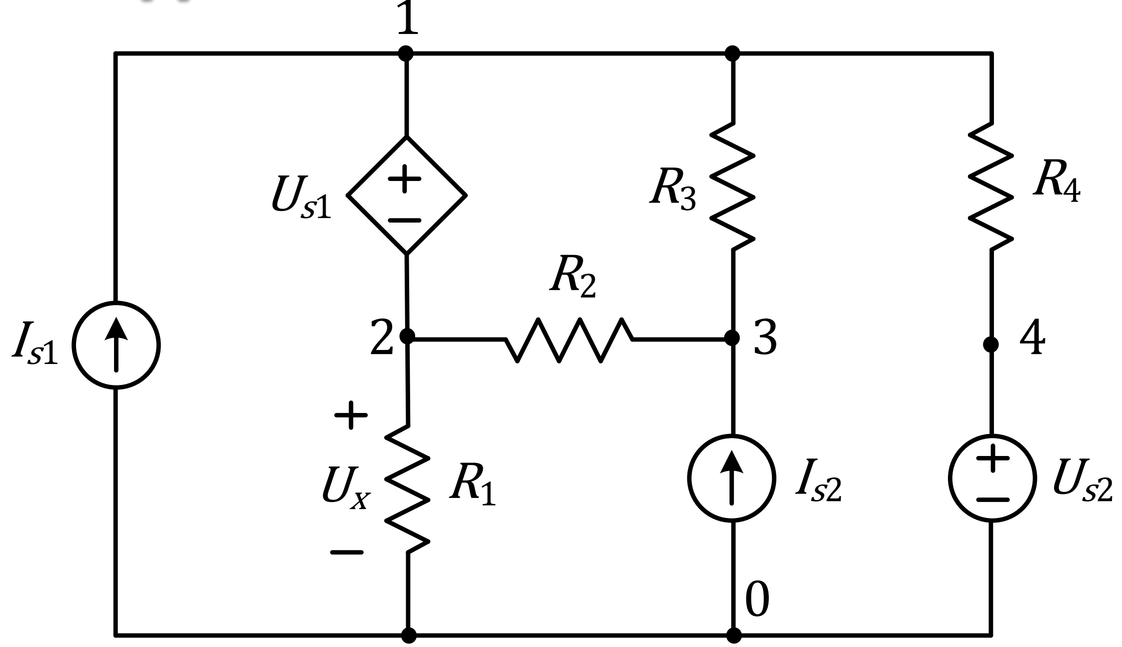


Απάντηση:

- Το δέντρο θα έχει $n - 1 = 4$ κλάδους. Υπάρχουν επομένως 4 δυνατές θεμελιώδεις ομάδες διαχωρισμού όμως λόγω των πηγών τάσης αρκεί να ασχοληθούμε μόνο με τις a, b.



Παράδειγμα 15



- Για την ομάδα a:

$$\frac{U_3}{R_3} + \frac{-U_{s1} + U_3}{R_2} + I_{s2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{U_3}{R_3} + \frac{-2U_x + U_3}{R_2} + I_{s2} = 0$$

- Για την ομάδα b:

$$-I_{s1} + \frac{U_x}{R_1} - I_{s2} + \frac{U_{s1} + U_x - U_{s2}}{R_4} = 0$$

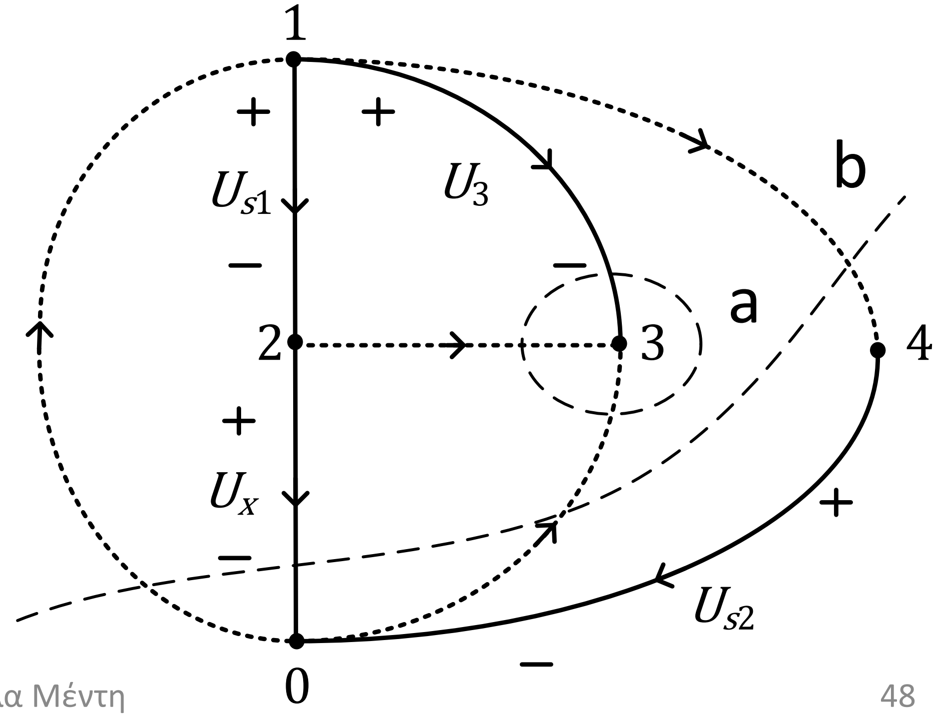
$$\Rightarrow -I_{s1} + \frac{U_x}{R_1} - I_{s2} + \frac{3U_x - U_{s2}}{R_4} = 0$$

- Προκύπτει ότι

$$U_x = 2.5\text{ V}, U_3 = 3.3\text{ V}$$

- Τελικά

$$U_4 = 2U_x + U_x - U_{s2} = -2.5\text{ V}$$



Παράδειγμα 15

- Το κύκλωμα έχει $b - n + 1 = 8 - 5 + 1 = 4$ δεσμούς, άρα προκύπτουν ισάριθμες εξισώσεις βρόχων.
- Λόγω των πηγών ρεύματος:

$$I_1 = I_{s1}$$
$$I_3 = I_{s2}$$

- Από το βρόχο 2:

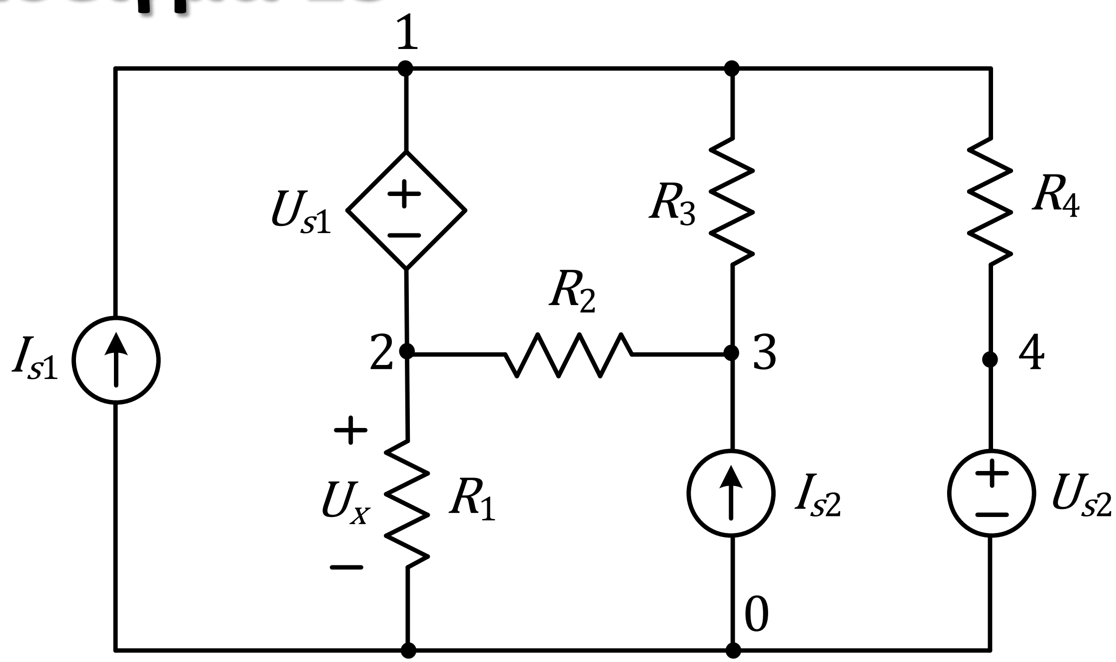
$$U_{s1} = I_2 R_2 + (I_2 - I_3) R_3 = 0$$

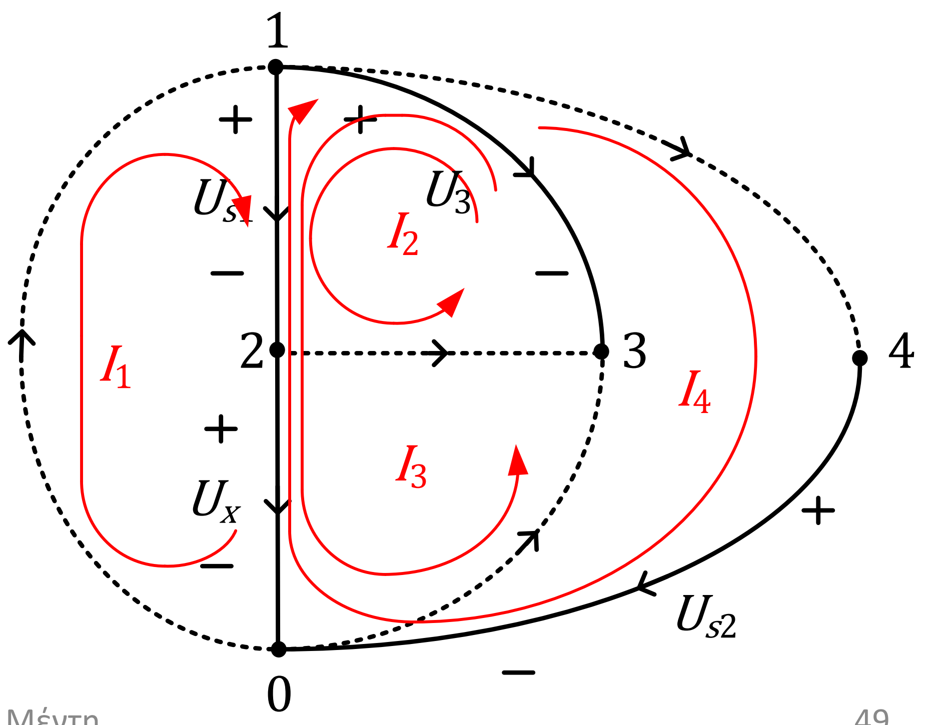
- Από το βρόχο 4:

$$I_4 R_4 + U_{s2} - U_x - U_{s1} = 0$$
$$\Rightarrow I_4 R_4 + U_{s2} - 3U_x = 0$$

- Επίσης

$$U_x = (I_1 + I_3 - I_4) R_1$$
$$= (I_{s1} + I_{s2} - I_4) R_1$$





Παράδειγμα 15

- Προκύπτει ότι

$$I_1 = 1\ \mathrm{mA}$$

$$I_2 = -\frac{5}{6}\ \mathrm{mA}$$

$$I_3 = 1\ \mathrm{mA}$$

$$I_4 = -0.5\ \mathrm{mA}$$

- Προσοχή: Τα ρεύματα αυτά δεν είναι τα ίδια με αυτά που θεωρήσαμε στο Παράδειγμα 6, γι' αυτό διαφέρουν οι τιμές.

- Τελικά

$$U_4 = I_4 R_4 = -2.5\ \mathrm{V}$$