

Διάλεξη 3
**Συστηματικές μέθοδοι επίλυσης
κυκλωμάτων**



Ανάλυση κόμβων

- Βασίζεται στο νόμο ρευμάτων του Kirchhoff (KCL).
- Παρέχει μια γενική διαδικασία για την ανάλυση κυκλωμάτων με τις τάσεις των κόμβων ως μεταβλητές. Με τη χρήση των τάσεων κόμβων αντί των τάσεων των στοιχείων μειώνονται οι εξισώσεις που πρέπει να λύσουμε.

Διαδικασία:

- Βρίσκουμε τον αριθμό n των κόμβων του κυκλώματος.
- Επιλέγουμε έναν κόμβο ως κόμβο αναφοράς. Είναι χρήσιμο να επιλεγεί ο κόμβος στον οποίο συνδέονται 1) τα περισσότερα στοιχεία και 2) οι περισσότερες πηγές τάσης.
- Οι τάσεις των υπολοίπων $n-1$ κόμβων ορίζονται ως προς τον κόμβο αναφοράς. Πρέπει να βρεθούν $n-1$ γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις.
- Ορίζουμε ρεύματα και πολικότητες.



Ανάλυση κόμβων

- Μια πηγή τάσης μπορεί να συνδέεται μεταξύ του κόμβου αναφοράς και κάποιου από τους υπόλοιπους κόμβους ή μεταξύ δύο από τους υπόλοιπους κόμβους.
- Στη δεύτερη περίπτωση δημιουργεί πρόβλημα διότι δεν μπορεί να εκφραστεί το ρεύμα συναρτήσει της τάσης.
- Η πηγή τάσης με τους κόμβους που συνδέεται, όταν αυτοί δεν είναι κόμβοι αναφοράς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δημιουργούν έναν υπερκόμβο (ο κόμβος που θα προέκυπτε αν βραχυκυκλώναμε την πηγή τάσης).
- Γράφουμε μια εξίσωση-περιορισμό για κάθε πηγή τάσης συναρτήσει των τάσεων κόμβων. Κάθε τέτοια εξίσωση αποτελεί μία από τις απαραίτητες γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις. n_u πηγές δίνουν ισάριθμες εξισώσεις.



Ανάλυση κόμβων

- Για κάθε εξαρτημένη πηγή εκφράζουμε τη μεταβλητή ελέγχου συναρτήσει των κομβικών τάσεων.
- Εφαρμόζουμε τον KCL στους κόμβους και τους υπερκόμβους εκτός από τον κόμβο αναφοράς και δημιουργούμε τις υπόλοιπες $n-1-n_i$ γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις. Κάθε πηγή τάσης μειώνει τον αριθμό των κόμβων στους οποίους πρέπει να εφαρμόσουμε KCL.
- Ο KCL εφαρμόζεται στον υπερκόμβο με τη λογική ότι αφού το άθροισμα των ρευμάτων σε κάθε επιμέρους κόμβο είναι μηδέν τότε θα είναι μηδέν και για το συνδυασμό τους.
- Λύνουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν για να βρούμε τις κομβικές τάσεις.
- Χρησιμοποιούμε το νόμο Ohm για να εκφράσουμε τα ρεύματα κλάδων συναρτήσει των τάσεων κόμβων όπου χρειάζεται.

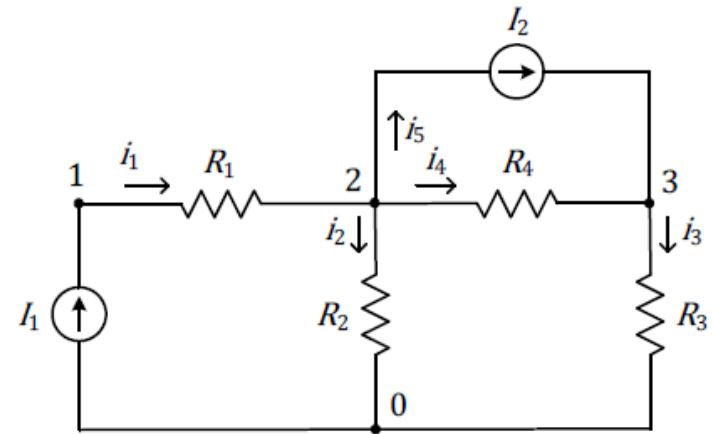


Παράδειγμα 3.1

Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα διπλανού του σχήματος.

Επιλέγουμε τον κόμβο αναφοράς (0), όπως φαίνεται στο σχήμα.

Οι κόμβοι 1, 2 και 3 θεωρούμε ότι έχουν τάσεις u_1, u_2, u_3 αντίστοιχα ως προς τον κόμβο αναφοράς. Εφαρμόζουμε KCL στους κόμβους αυτούς.



Για τον κόμβο 1: $I_1 = i_1$

Για τον κόμβο 2: $i_1 = i_2 + i_4 + i_5 \Rightarrow I_1 = \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_2 - u_3}{R_4} + I_2$

Για τον κόμβο 3: $i_4 + i_5 = i_3 \Rightarrow \frac{u_2 - u_3}{R_4} + I_2 = \frac{u_3}{R_3}$

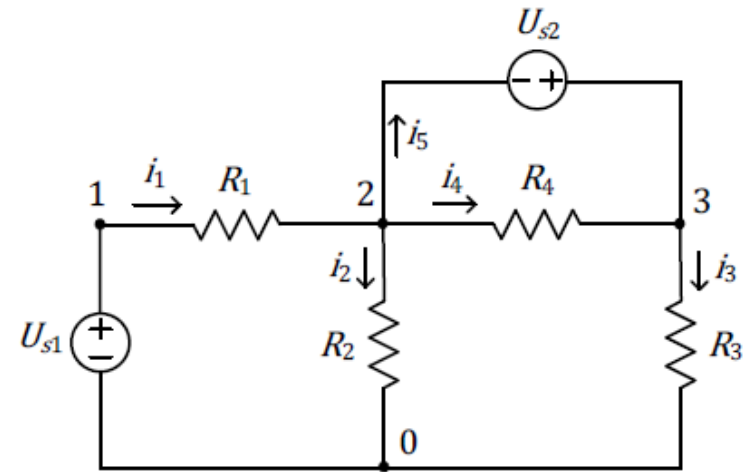


Παράδειγμα 3.2

Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα διπλανού του σχήματος.

Επιλέγουμε τον κόμβο αναφοράς (0), όπως φαίνεται στο σχήμα.

Οι κόμβοι 1, 2 και 3 θεωρούμε ότι έχουν τάσεις u_1, u_2, u_3 αντίστοιχα ως προς τον κόμβο αναφοράς.



Η πηγή τάσης που έχει το ένα άκρο της συνδεδεμένο στον κόμβο αναφοράς δεν δημιουργεί πρόβλημα. Λαμβάνουμε εύκολα από αυτή την εξίσωση:

$$u_1 = U_{S1}$$

Επειδή η τάση U_{S2} δεν συνδέεται με την τάση αναφοράς χρειάζεται περαιτέρω ανάλυση, επομένως πραγματοποιώ τα παρακάτω βήματα:



Παράδειγμα 3.2

Μεταξύ των κόμβων 2 και 3 θα ισχύει:

$$u_2 - u_3 = -U_{S2}$$

Οι κόμβοι 2 και 3 θεωρούμε ότι σχηματίζουν έναν υπερκόμβο, στον οποίο εφαρμόζουμε KCL και έχουμε:

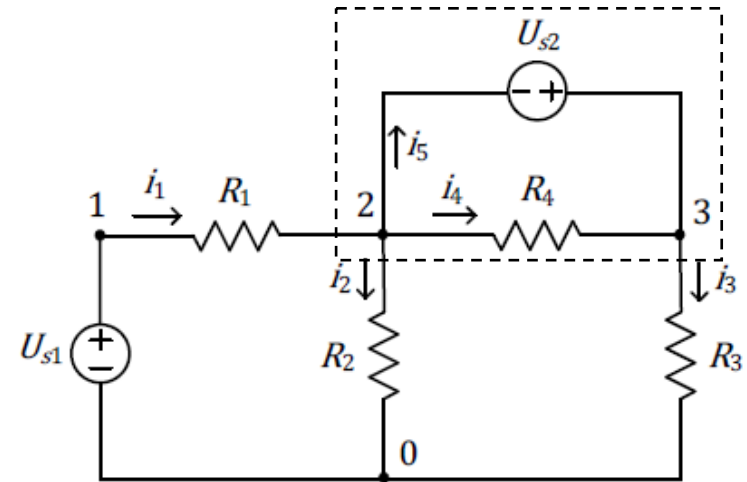
$$i_1 = i_2 + i_3 \Rightarrow$$

$$\frac{u_1 - u_2}{R_1} = \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_3}{R_3}$$

Επομένως:

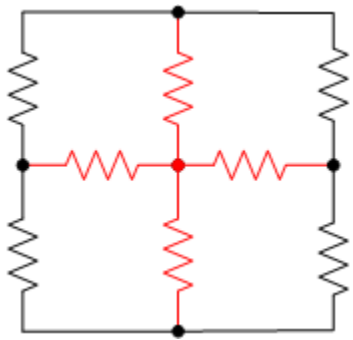
$$\frac{U_{S1} - u_2}{R_1} = \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_2 + U_{S2}}{R_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{\frac{U_{S1}}{R_1} - \frac{U_{S2}}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

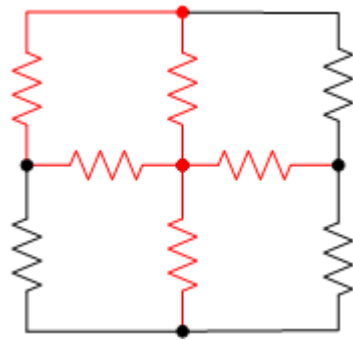


Ανάλυση βρόγχων

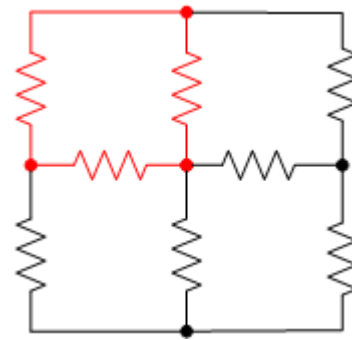
- Αν ξεκινήσουμε από έναν κόμβο του κυκλώματος και διαγράψουμε μια συνεχή διαδρομή στο κύκλωμα χωρίς να περάσουμε από κάποιο κόμβο ή στοιχείο δεύτερη φορά και καταλήξουμε στον ίδιο κόμβο απ' όπου ξεκινήσαμε, τότε η διαδρομή που διαγράψαμε ονομάζεται **βρόχος**.
- **Ελάχιστος βρόχος** είναι αυτός που δεν περικλείει άλλους βρόχους (Σχήμα γ).



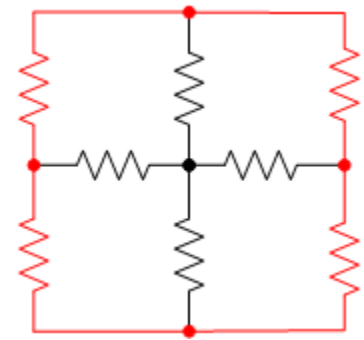
(α)



(β)



(γ)



(δ)



Ανάλυση βρόγχων

➤ Βασίζεται στο νόμο τάσεων του Kirchhoff (KVL).

Μεθοδολογία:

- ✓ Καθορίζουμε τον αριθμό ανεξαρτήτων βρόγχων στο κύκλωμα. Ορίζουμε από ένα ρεύμα για κάθε βρόχο. Ορίζουμε φορά.
- ✓ Αν το κύκλωμα έχει l ανεξάρτητους βρόχους απαιτούνται l γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις για να βρούμε τα ρεύματα βρόγχων.
- ✓ Γράφουμε μια εξίσωση-περιορισμό για κάθε πηγή ρεύματος που ανήκει μόνο σε έναν βρόχο συναρτήσεως των ρευμάτων βρόγχων. n_i πηγές δίνουν n_i εξισώσεις.
- ✓ Αν υπάρχουν πηγές ρεύματος που ανήκουν σε δύο βρόχους ταυτόχρονα, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε έναν υπερβρόχο (ο βρόχος που θα προέκυπτε αν ανοιχτοκυκλώναμε την πηγή ρεύματος). Από την πηγή προκύπτει μια επιπλέον εξίσωση για τα ρεύματα.



Ανάλυση βρόγχων

➤ Βασίζεται στο νόμο τάσεων του Kirchhoff (KVL).

Μεθοδολογία:

- ✓ Για κάθε εξαρτημένη πηγή εκφράζουμε τη μεταβλητή ελέγχου συναρτήσει των ρευμάτων βρόγχων.
- ✓ Εφαρμόζουμε τον KVL για να δημιουργήσουμε τις υπόλοιπες γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις.
- ✓ Λύνουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν για να βρούμε τα άγνωστα ρεύματα βρόγχων.
- ✓ Υπολογίζουμε τάσεις με το νόμο του Ohm.



Παράδειγμα 3.6

Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα διπλανού του σχήματος. Παρατηρούμε ότι χρειάζονται 3 εξισώσεις!

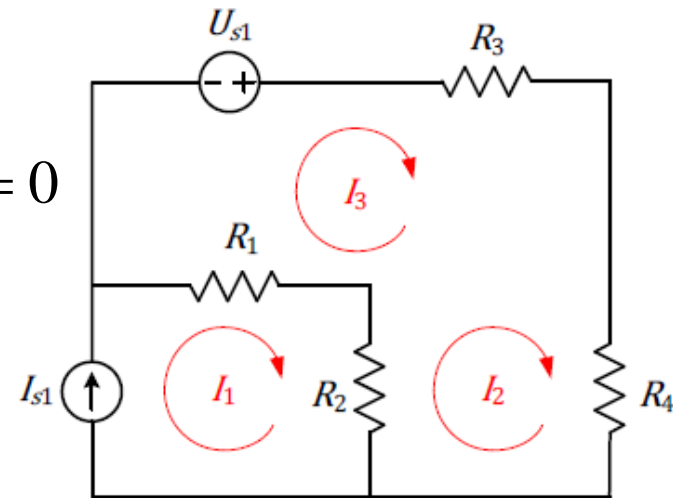
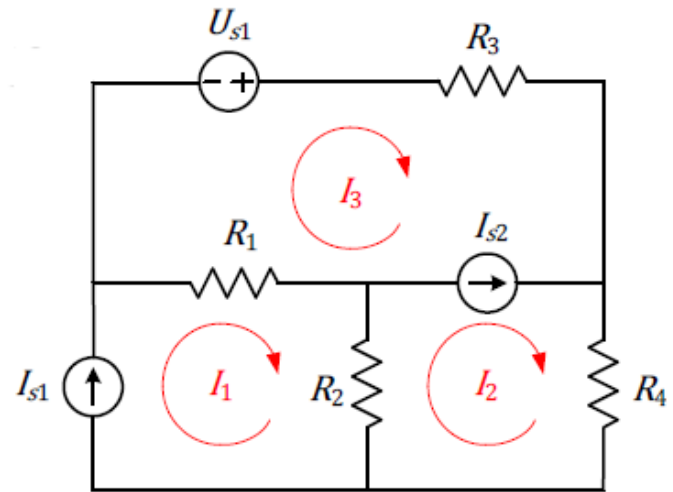
Για τον βρόγχο 1: $I_1 = I_{S1}$

Η δεύτερη πηγή ρεύματος ανήκει σε 2 βρόγχους. Άρα από τον κλάδο της πηγής I_{S2}

$$I_2 - I_3 = I_{S2}$$

Ορίζουμε έναν **υπερβρόγχο** όπου θα ισχύει:

$$-U_{S1} + I_3 R_3 + I_2 R_4 + (I_2 - I_1) R_2 + (I_3 - I_1) R_1 = 0$$



Επιλογή μεθόδου

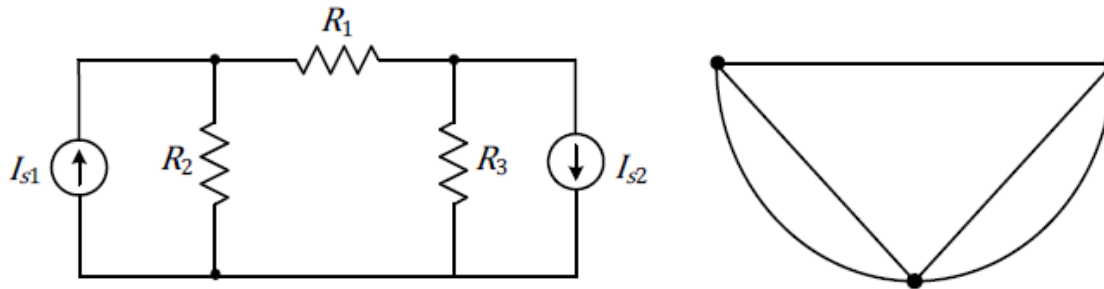
- Ένα βασικό κριτήριο είναι ο **αριθμός των εξισώσεων**. Ένα κύκλωμα με n κόμβους οδηγεί σε $n-1$ KCL εξισώσεις. Με κάθε υπερκόμβο μειώνονται αυτές κατά μία. Αν το κύκλωμα έχει l ελάχιστους βρόχους, τότε έχουμε l το πολύ KVL εξισώσεις. Κάθε υπερβρόχος μειώνει τον αριθμό κατά μία.
- Αν υπάρχουν **εξαρτημένες πηγές** τότε οι μεταβλητές ελέγχου τους μπορεί να παίξουν ρόλο στην επιλογή. Εξαρτημένη πηγή τάσης ελεγχόμενη από κομβική τάση δεν απαιτεί επιπλέον εξίσωση στην ανάλυση κόμβων. Εξαρτημένη πηγή ρεύματος ελεγχόμενη από ρεύμα βρόχου δεν απαιτεί επιπλέον εξίσωση στην ανάλυση βρόχων. Γενικά εξετάζουμε αν η μεταβλητή ελέγχου μπορεί να εκφραστεί πιο εύκολα συναρτήσει ρευμάτων βρόχων ή τάσεων κόμβων.
- Πηγές ρεύματος στην περιφέρεια βρόχου αντιμετωπίζονται εύκολα στην ανάλυση βρόγχων. Πηγές τάσης που συνδέονται στον κόμβο αναφοράς αντιμετωπίζονται εύκολα στην ανάλυση κόμβων.
- Όταν ο αριθμός εξισώσεων είναι ίδιος, τότε θα μπορούσαμε να εξετάσουμε αν στα ζητούμενα της άσκησης υπάρχουν τάσεις ή ρεύματα.



Γενικευμένη ανάλυση κόμβων

- **Γράφος ενός κυκλώματος:** Δείχνει τους κλάδους και τους κόμβους του κυκλώματος και πώς είναι συνδεδεμένοι, ενώ δεν φαίνονται τα ακριβή στοιχεία που συνδέονται στους κλάδους.

Παράδειγμα:



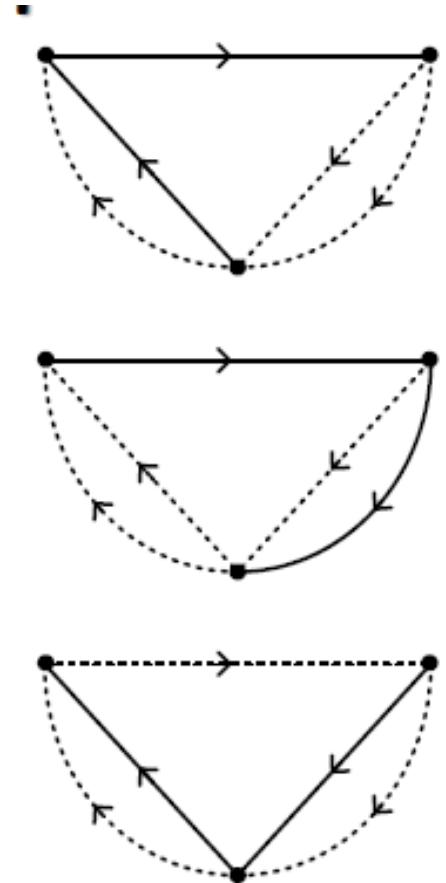
- ✓ **Κόμβος:** Κοινό σημείο σύνδεσης δύο ή περισσότερων στοιχείων.
- ✓ **Κλάδος:** Μια διαδρομή που συνδέει δύο κόμβους μεταξύ τους και περιέχει ένα μόνο στοιχείο.
- ✓ **Βρόχος:** Μια κλειστή διαδρομή.
- ✓ **Δέντρο:** Μια ομάδα κλάδων που συνδέει όλους τους κόμβους μεταξύ τους χωρίς να περιλαμβάνει βρόχους. Μπορούν να επιλεγούν πολλά διαφορετικά δέντρα για το ίδιο κύκλωμα.



Γενικευμένη ανάλυση κόμβων

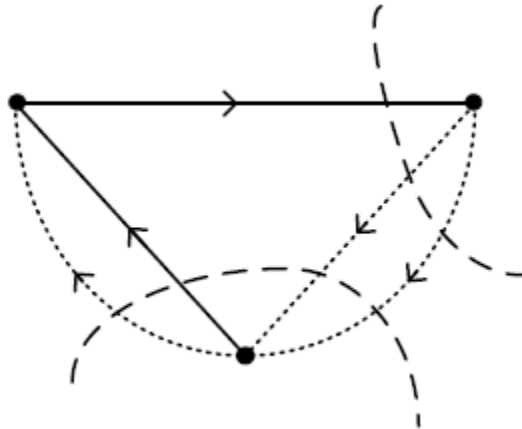
Μερικά από τα δέντρα που είναι δυνατό να επιλεγούν φαίνονται στο σχήμα (οι διαδρομές που έχουν σχεδιαστεί με συμπαγείς γραμμές).

- ✓ Στους κλάδους έχει δοθεί τυχαίος προσανατολισμός (δείχνει φορά αναφοράς για ρεύματα και πολικότητα για τάσεις).
- ✓ Αφού επιλεγεί ένα δέντρο, οι κλάδοι που δεν ανήκουν σε αυτό ονομάζονται δεσμοί.
- ✓ Κατά την επιλογή του δέντρου οι κλάδοι με πηγές τάσης να επιλέγονται ως κλάδοι του δέντρου ενώ οι κλάδοι με πηγές ρεύματος ως δεσμοί.
- ✓ Οι κλάδοι με τάσεις που ελέγχουν εξαρτημένες πηγές τάσης να τοποθετούνται στο δέντρο, αν αυτό είναι δυνατό, ενώ οι κλάδοι με ρεύματα που ελέγχουν εξαρτημένες πηγές ρεύματος να επιλέγονται ως δεσμοί. Γενικά οι τάσεις συνδέονται με κλάδους δέντρου ενώ τα ρεύματα με δεσμούς.



Γενικευμένη ανάλυση κόμβων

- ✓ Στο γράφο μπορούν να σχεδιαστούν τομές που να διαχωρίζουν νοητά έναν ή περισσότερους κόμβους από τον υπόλοιπο γράφο. Οι κλάδοι που κόβονται αποτελούν μια ομάδα που ονομάζεται ομάδα διαχωρισμού (cut-set).
- ✓ Μία ομάδα διαχωρισμού που περιλαμβάνει μόνο έναν κλάδο δέντρου και κάποιους δεσμούς ονομάζεται θεμελιώδης. Αφού υπάρχουν $n-1$ κλάδοι δέντρου υπάρχουν και ισάριθμες θεμελιώδεις ομάδες διαχωρισμού.
- ✓ Ο KCL μπορεί να εφαρμοστεί όχι μόνο σε κάθε κόμβο ξεχωριστά αλλά και σε μια ομάδα διαχωρισμού που μπορεί να περιλαμβάνει περισσότερους κόμβους.



Γενικευμένη ανάλυση κόμβων

- ✓ Αν το δέντρο έχει n κόμβους, τότε απαιτούνται $n-1$ κλάδοι για να δημιουργηθεί ένα δέντρο. Αν οι κλάδοι του κυκλώματος είναι b , τότε ο αριθμός των δεσμών είναι $l=b-n-1=b-n+1$.
- ✓ Αναθέτουμε μια μεταβλητή τάσης σε κάθε έναν από τους κλάδους του δέντρου (η πολικότητα ορίζεται από το βέλος). Αν ένας κλάδος περιέχει πηγή τάσης τότε η τάση του λαμβάνει την τιμή της τάσης της πηγής αυτής. Αν ένας κλάδος περιέχει τάση ελέγχου εξαρτημένης πηγής, τότε η τάση του λαμβάνει αυτή την τιμή.
- ✓ Δεν γράφεται εξίσωση KCL στην περίπτωση κλάδου δέντρου με πηγή τάσης, άρα δεν μας ενδιαφέρει η θεμελιώδης ομάδα διαχωρισμού που ορίζεται από αυτόν τον κλάδο.
- ✓ Ο αριθμός των αγνώστων είναι ίσος με τους κλάδους του δέντρου, δηλαδή με $n-1$, μείον τον αριθμό των πηγών τάσεων και τον αριθμό όσων τάσεων ελέγχου έχουν συμπεριληφθεί στο δέντρο.



Γενικευμένη ανάλυση κόμβων

- ✓ Ο αριθμός των εξισώσεων που απαιτούνται λαμβάνονται μέσω KCL στις θεμελιώδεις ομάδες διαχωρισμού που απομένουν, δηλαδή αυτές που ορίζονται από κλάδο δέντρου που δεν περιέχει πηγή τάσης.
- ✓ Κάθε ρεύμα στις KCL εξισώσεις εκφράζεται συναρτήσει των τάσεων που έχουμε ορίσει.
- ✓ Αν υπάρχει εξαρτημένη πηγή ελεγχόμενη από ρεύμα πρέπει να γράψουμε μια επιπλέον εξίσωση που να συσχετίζει το ρεύμα ελέγχου με τις τάσεις που ορίσαμε



Γενικευμένη ανάλυση βρόγχων

- ✓ Επιλέγουμε δέντρο όπως πριν.
- ✓ Τώρα όμως αναθέτουμε ρεύμα σε κάθε δεσμό. Κάθε δεσμός έχει κόμβους στα άκρα του και κάθε δυο κόμβοι πρέπει να συνδέονται με κάποιο τρόπο μέσω του δέντρου. Έτσι κάθε δεσμός σχετίζεται με ένα βρόχο που περιέχει αυτό το δεσμό και μια μοναδική διαδρομή μέσω του δέντρου.
- ✓ Κάθε βρόχος που περιέχει έναν μόνο δεσμό και κάποιους κλάδους δέντρου ονομάζεται θεμελιώδης βρόχος.
- ✓ Σχεδιάζουμε ένα ρεύμα για κάθε θεμελιώδη βρόχο. Κάθε ρεύμα δεσμού μπορεί να θεωρηθεί και ως ρεύμα ενός βρόχου. Σε κάθε δεσμό που περιέχει πηγή ρεύματος το ρεύμα της πηγής είναι το ρεύμα δεσμού.
- ✓ Εφαρμόζουμε KVL κατά μήκος κάθε θεμελιώδους βρόχου χωρίς πηγή ρεύματος. Το ρεύμα κάθε κλάδου ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων βρόχου των θεμελιωδών βρόχων που περιέχουν τον κλάδο αυτό.

