Ηλεκτρικό φορτίο

- Φόρτιση με τριβή
- Αρνητικά φορτισμένη λαστιχένια ράβδος απωθεί γυάλινη θετικά φορτισμένη ράβδο
- Δύο ειδών φορτία
- Τα ομώνυμα απωθούνται
- Τα ετερώνυμα έλκονται
- Διατήρηση φορτίου
- Κβάντιση φορτίου

Οι τιμές φορτίου και μάζας των βασικών συστατικών της ύλης

	Ηλεκτρικό φορτίο	Μάζα
Πρωτόνιο (p)	$+1.6021892\times10^{-19}$ C	1.6726485×10^{-27} Kg
Νετρόνιο (n)	0	1.6749543×10^{-27} Kg
Ηλεκτρόνιο (e)	-1.6021892×10^{-19} C	9.109534×10^{-31} Kg

Παράδειγμα

Μία κοινή λάμπα διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα με ρυθμό 4 Cb το δευτερόλεπτο. Πόσα ηλεκτρόνια περνούν μέσα από την λάμπα σε αυτό το χρονικό διάστημα;

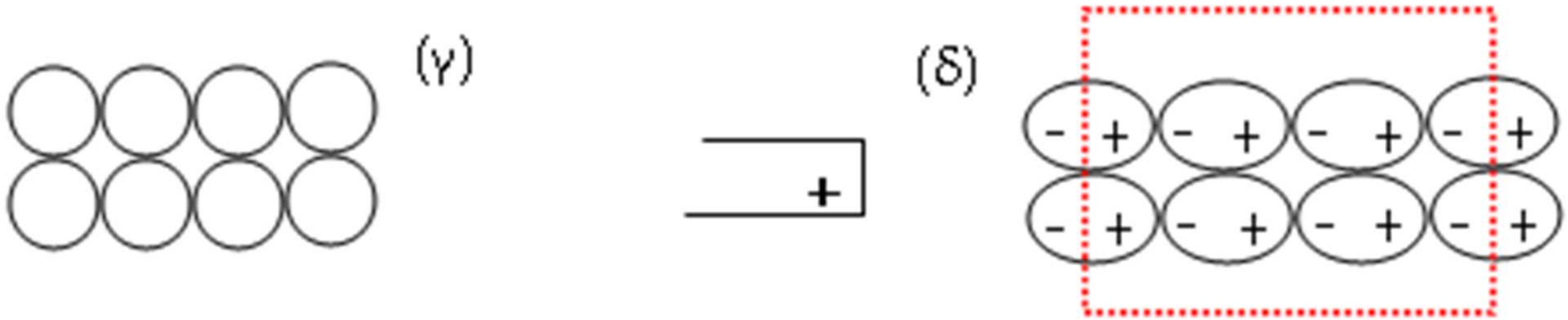
Απάντηση

Ένα ηλεκτρόνιο έχει φορτίο 1.6×10^{-19} C/ηλ. Σε ένα δευτερόλεπτο περνούν από την λάμπα 4 C. Άρα ο αριθμός ηλεκτρονίων N είναι

$$N = \frac{4\,C}{1.6\times10^{-19}\ C/\eta\lambda} = 2.5\times10^{19} \quad \text{ηλεκρονια}$$

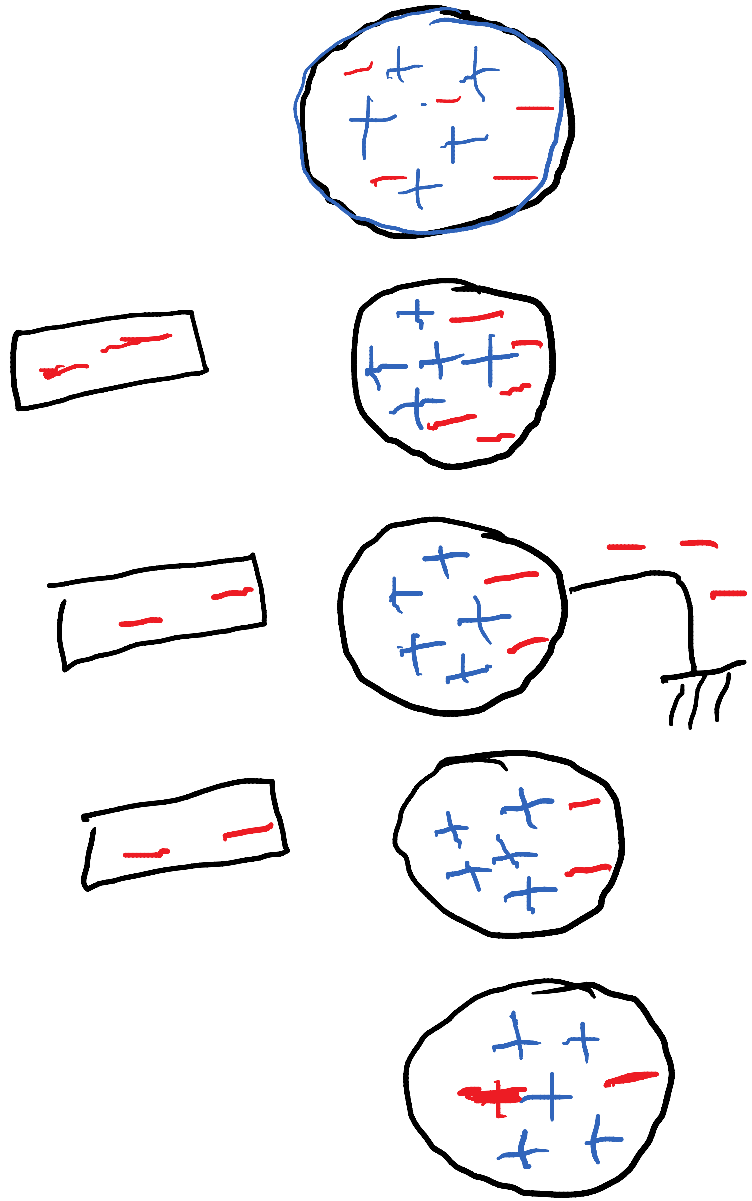
ηλεκτρόνια

Φόρτιση εξ επαγωγής

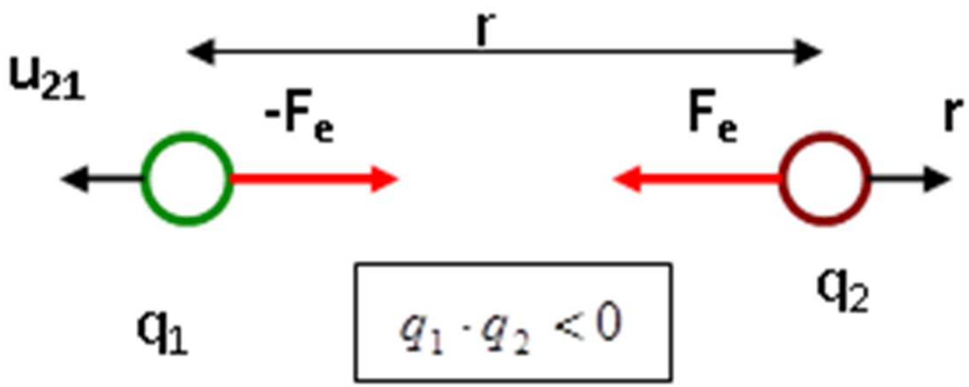


Σχήμα 1.1 (γ) Σχηματική απεικόνιση των μορίων ενός μονωτικού υλικού στην απουσία ηλεκτρικών φορτίων στον περιβάλλοντα χώρο. (δ) Όταν υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο στην περιοχή τα μόρια παραμορφώνονται και πολώνονται με αποτέλεσμα την εμφάνιση ηλεκτρικών φορτίων εξ επαγωγής στην επιφάνεια του υλικού.

- Φόρτιση αγωγού
- Φόρτιση αντικειμένων με επαγωγή



Νόμος Coulomb



Σχήμα 1.2 Η ηλεκτροστατική δύναμη που ασκείται μεταξύ δύο φορτίων q_1 και q_2.

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

$$k_e = 8.987 \times 10^9 \, N \cdot m^2 / C^2$$

$$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \, C^2 / N \cdot m^2$$

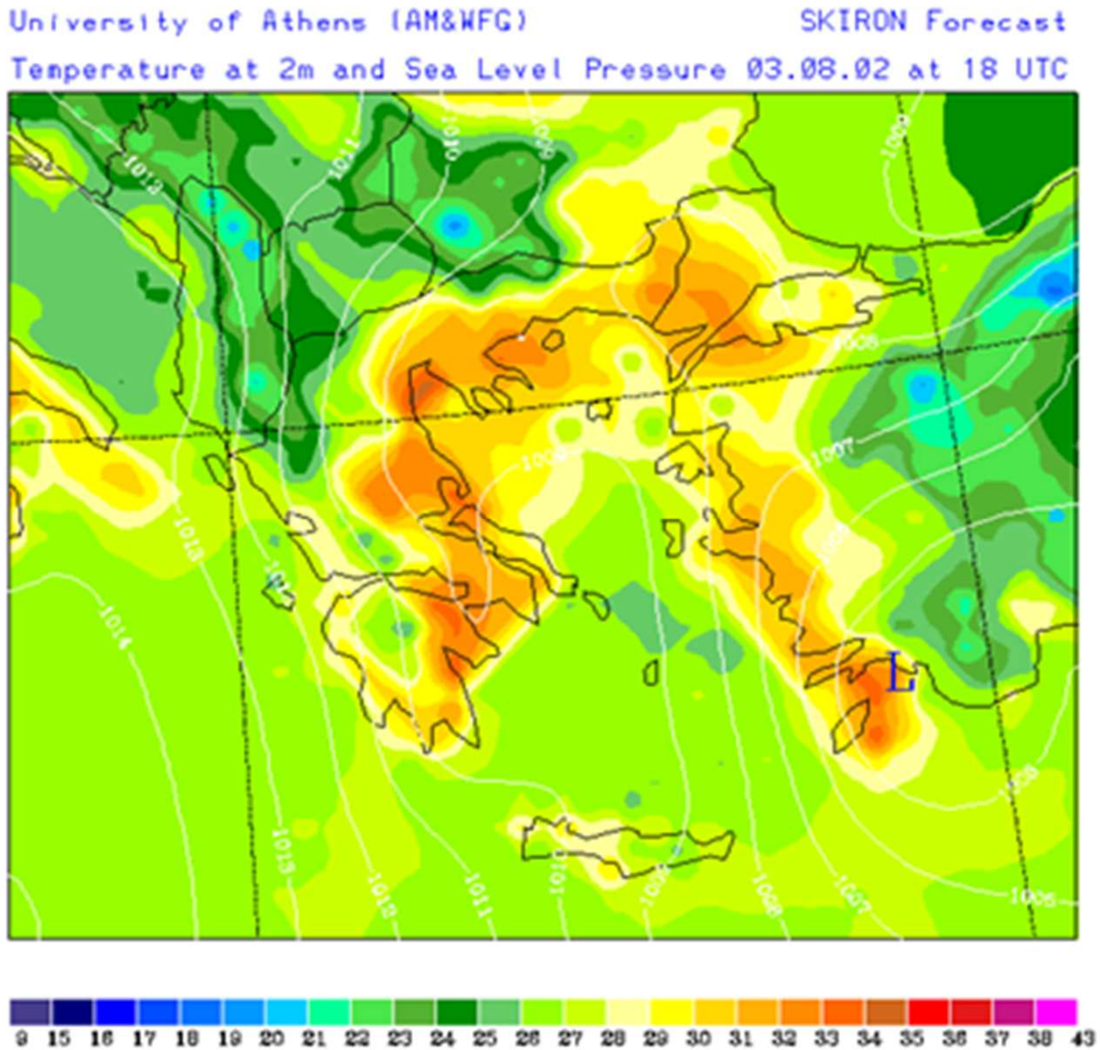
Διηλεκτρική σταθερά του κενού

Έννοια του πεδίου

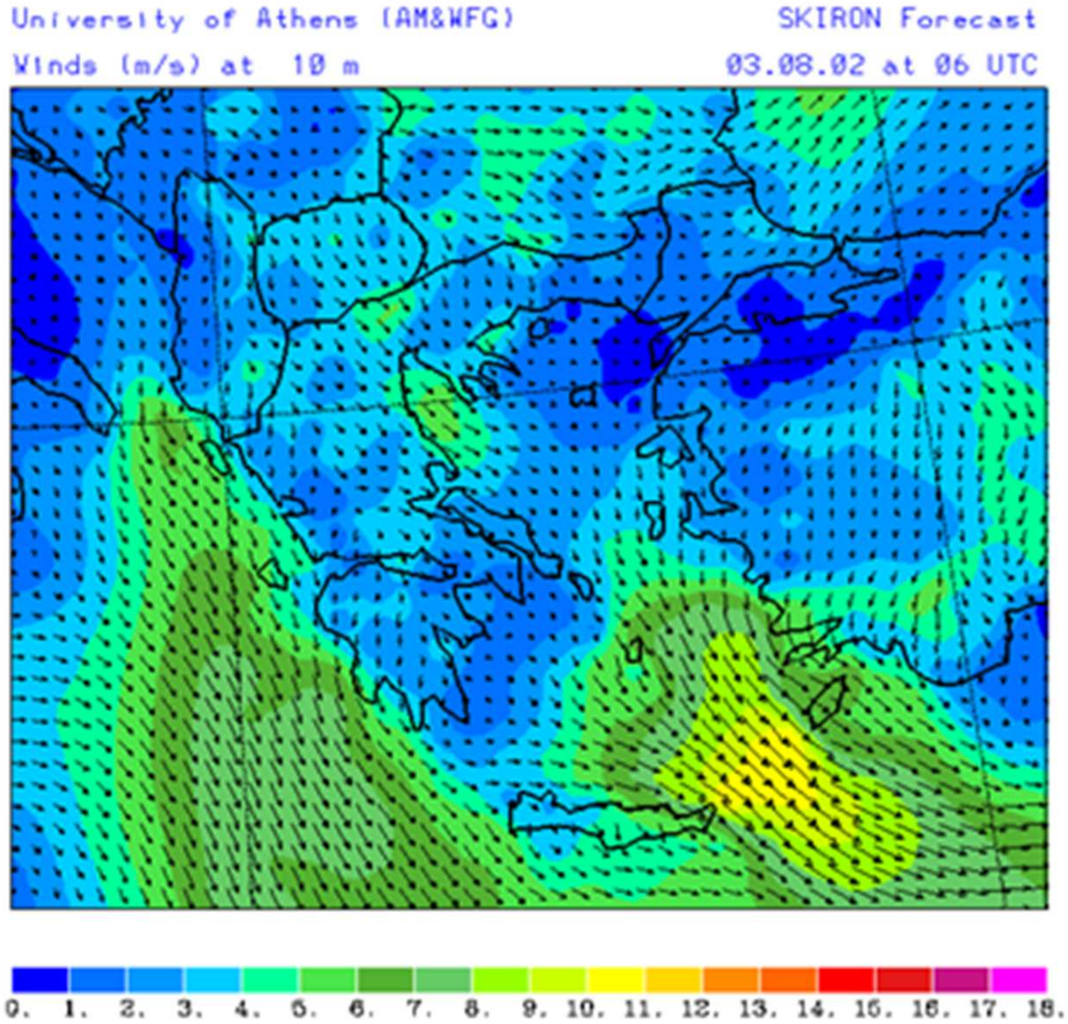
- Βαθμωτά πεδία

Πχ. Πεδίο θερμοκρασιών

Ισοβαρείς καμπύλε

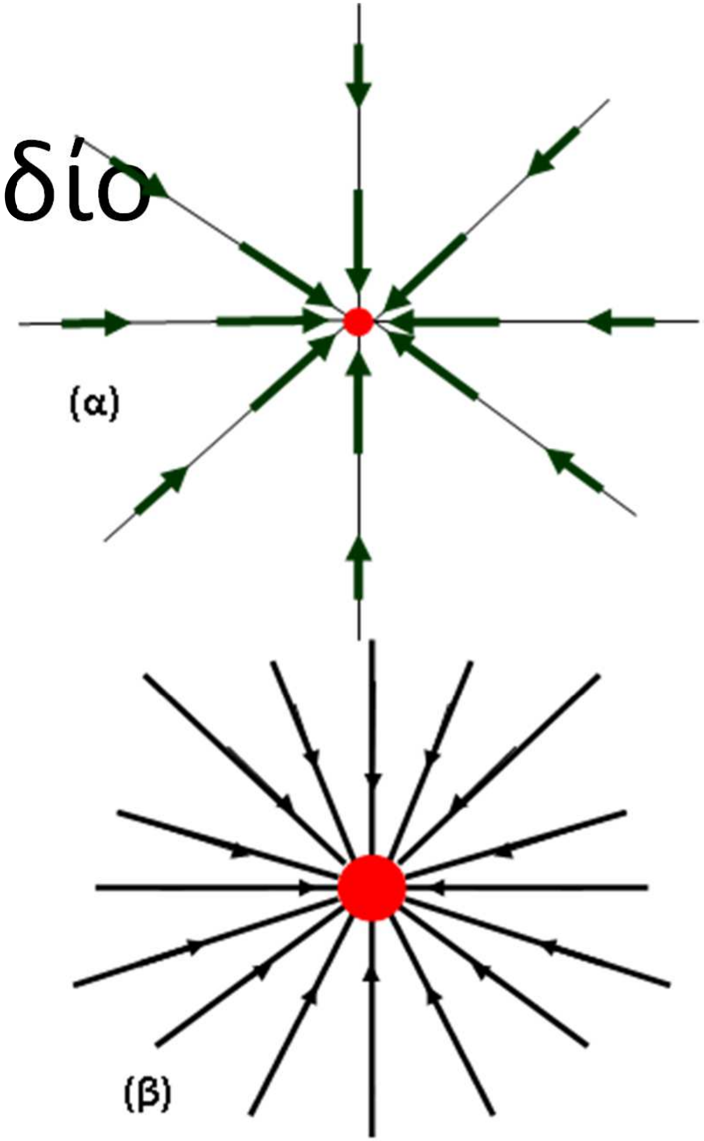


- Διανυσματικά πεδία



Βαρυτικό πεδίο

- Η βαρύτητα είναι μία κεντρική δύναμη
- Πάντα ελκτική
- Ομογενές πεδίο;
- Δυναμικές γραμμές
- Ιδιότητες δυναμικών γραμμών



Σχήμα 1.4 Σχηματική αναπαράσταση του βαρυτικού πεδίου (παράδειγμα κεντρικού πεδίου). **(α)** Με διανύσματα,

Ηλεκτρικό πεδίο

- Αναλογία με βαρυτικό πεδίο
- Δοκιμαστικό φορτίο
- Ένταση ηλεκτρικού πεδίου

$$\vec{g} = \frac{\overrightarrow{F_g}}{m}$$

$$\vec{E} = \frac{\overrightarrow{F_e}}{q_0} \qquad q_0 > 0$$

Ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου

$$\overrightarrow{F_e} = k_e \frac{qq_0}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\overrightarrow{F_e}}{q_0} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Σύνθεση ηλεκτρικών πεδίων

- Κάθε φορτίο δημιουργεί γύρω του το δικό του ηλεκτρικό πεδίο
- Σύνθεση ηλεκτρικών πεδίων από διακριτά ηλεκτρικά φορτία

$$\vec{E} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Παράδειγμα: Βρείτε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ενός σημειακού φορτίου Q σαν συνάρτηση της απόστασης από το φορτίο.

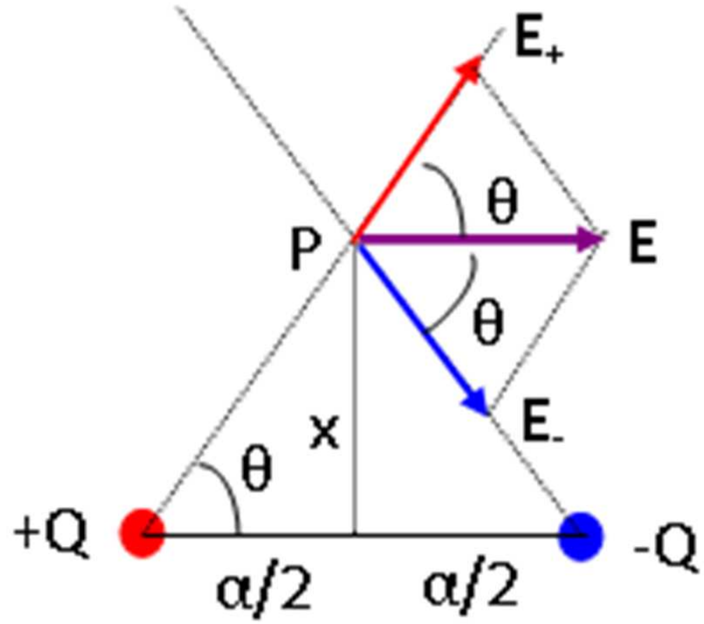
Απάντηση

*Για να βρούμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί το φορτίο Q σε μία θέση θα χρησιμοποιήσουμε σαν υπόθεμα ένα θετικό φορτίο q. Η δύναμη **F** που το Q ασκεί στο q είναι η δύναμη Coulomb. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου **E** στην θέση του q δίνεται από την σχέση*

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2}\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{u}}$$

*Το u είναι το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα και r είναι η απόσταση του υπό μελέτη σημείου από το φορτίο Q. Όταν το Q είναι θετικό η φορά του **E** είναι προς τα έξω.*

Ηλεκτρικό δίπολο λέγεται ένα σύστημα με ίσα κατά μέτρο αλλά αντίθετα φορτία q, τοποθετημένα σε σταθερή απόσταση μεταξύ τους α. Βρείτε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην μεσοκάθετο της α.

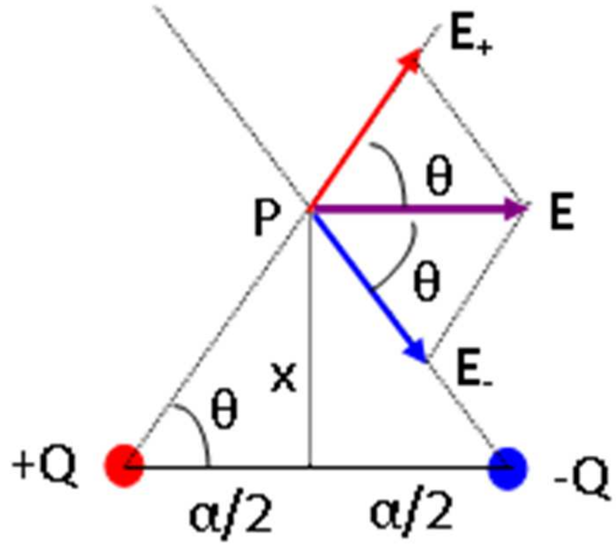


Σχήμα παραδείγματος 1.3.2

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{+} + \mathbf{F}_{-}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{+} + \mathbf{E}_{-}$$

$$\left|\overrightarrow{E_{+}}\right| = \left|\overrightarrow{E_{-}}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$



Σχήμα παραδείγματος 1.3.2

$$E = E_{+}\cos\theta + E_{-}\cos\theta = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\cos\theta$$

$$r^2 = x^2 + \left(a/2\right)^2$$

$$\cos\theta = \frac{a/2}{\sqrt{x^2 + \left(a/2\right)^2}}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(x^2 + \left(a/2\right)^2\right)^{-1}\frac{a/2}{\sqrt{x^2 + \left(a/2\right)^2}} = \frac{aQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(x^2 + \left(a/2\right)^2\right)^{-3/2}$$

- ***διπολική ροπή p***, *ορίζεται σαν ένα διάνυσμα με φορά από το αρνητικό προς το θετικό φορτίο και μέτρο:*

$$p \equiv aQ$$

Τελικά

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{x^3}$$

Συζήτηση για τον τύπο

Ηλεκτρικό πεδίο συνεχούς κατανομής φορτίου

$$\vec{E} = \lim_{N \to \infty} \left(k_e \sum_i^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \right) = \lim_{\Delta q_i \to 0} \left(k_e \sum_i^N \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \right) = k_e \int \frac{dq}{r^2}$$

- Πυκνότητα φορτίου (σε 3-διάστατα προβλήματα, και οι 3 διαστάσεις περίπου ίδιες)

$$\rho = \frac{Q}{V} \quad \left(C \cdot m^{-3} \right)$$

- Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου (μία διάσταση πολύ μικρότερη από τις άλλες 2)

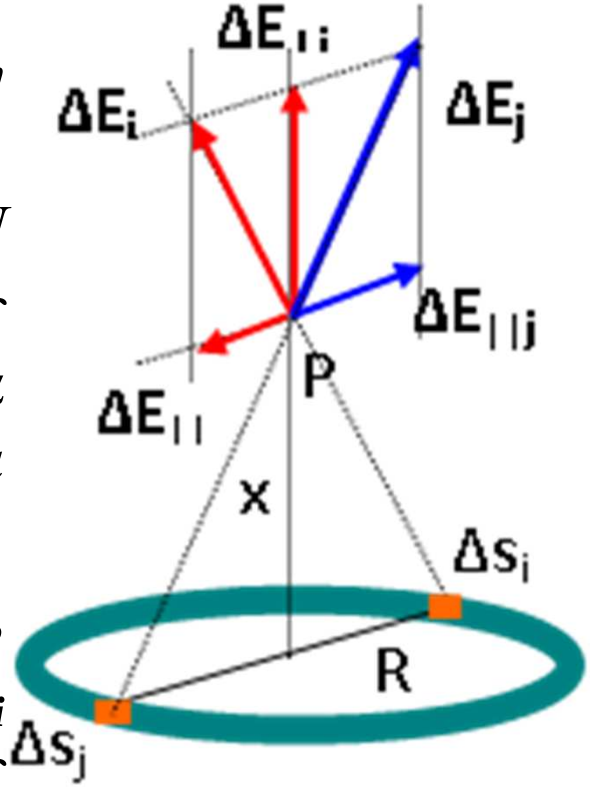
$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad \left(C \cdot m^{-2} \right)$$

- Γραμμική πυκνότητα φορτίου (μία διάσταση πολύ μεγαλύτερη από τις άλλες 2)

$$\lambda = \frac{Q}{l} \quad \left(C \cdot m^{-1} \right)$$

ΑΣΚΗΣΗ: Θεωρείστε κυκλικό δακτύλιο ακτίνας R ομοιόμορφα φορτισμένο με θετικό φορτίο Q. Υπολογίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίο πάνω στον άξονα του δακτυλίου

Έστω ότι θα υπολογίσουμε την ένταση ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P του άξονα. Μπορούμε να χωρίσουμε τον δακτύλιο σε N μικρά κομματάκια Δs_i *όπου το i παίρνει τιμές από το 1 μέχρι το N, έτσι ώστε το κάθε ένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί ότι κρατάει ένα μικρό, σχεδόν σημειακό φορτίο* Δq_i. *Βάζοντας στο P ένα δοκιμαστικό φορτίο q, πάνω του θα ασκηθούν δυνάμεις Coulomb* $\boldsymbol{F_i}$ *από όλα τα* q_i. *Πάλι έχουμε εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας.*



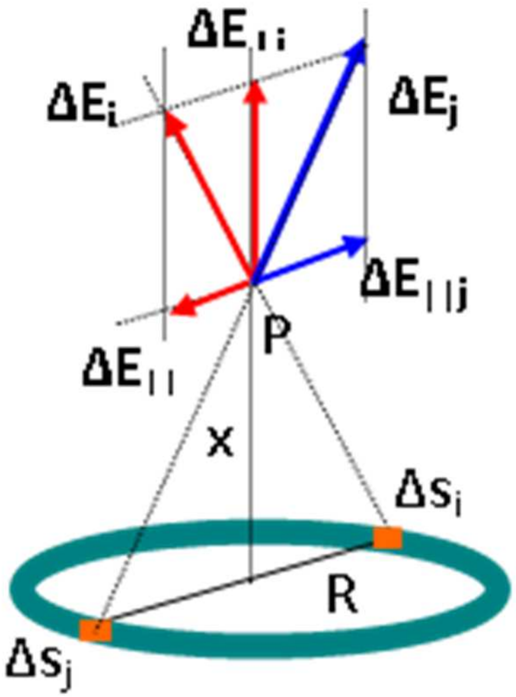
Σχήμα παραδείγματος 1.3.3

- $\lambda = Q/(2\pi R)$.

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

$$\Delta E_{\perp i} = \Delta E_i \cos\theta_i = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\Delta q_i}{r^2} \right) \frac{x}{r}$$

$$\Delta q_i = Q \frac{\Delta s_i}{2\pi R}$$



Σχήμα παραδείγματος 1.3.3

$$E \cong \sum_{i=1}^{N} \Delta E_{\perp i} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\Delta q_i}{r^2} \right) \frac{x}{r} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(Q \frac{\Delta s_i}{2\pi R} \right) \frac{1}{x^2 + R^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^2 + R^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \frac{Q}{2\pi R} \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta s_i \right) \Rightarrow$$

$$E = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+R^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\frac{Q}{2\pi R}\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta s_i\right)\right] =$$

$$\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+R^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\frac{Q}{2\pi R}\right)\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta s_i\right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(Q\frac{1}{2\pi R}\right)\frac{1}{x^2+R^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}(2\pi R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(x^2+R^2\right)^{-3/2}x$$

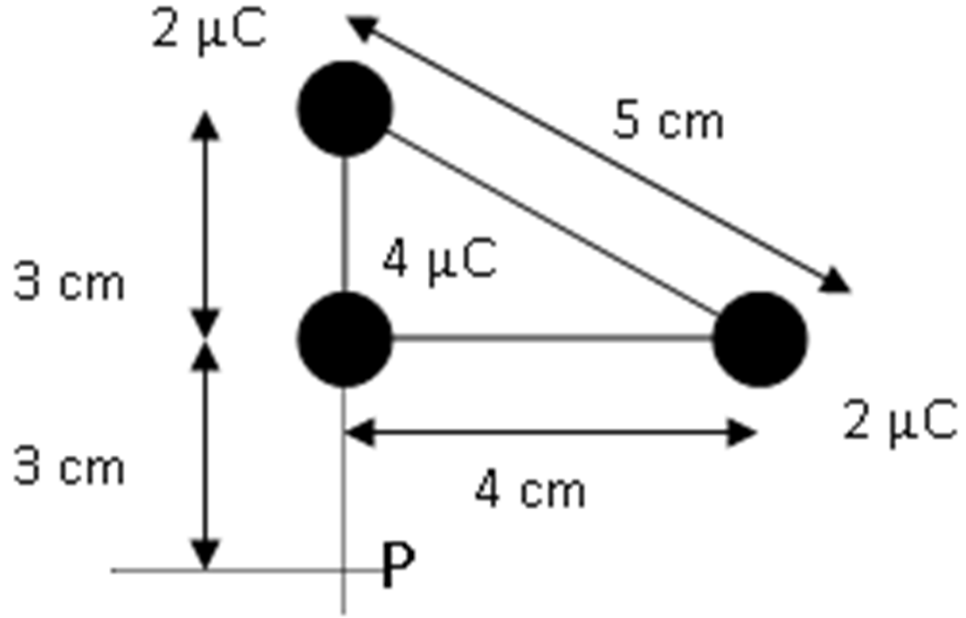
$$E = \int dE_\perp \equiv \lim_{\substack{\Delta s_i\to 0\\ N\to\infty}}\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta E_{\perp i}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(x^2+R^2\right)^{-3/2}x$$

Ολοκληρώματα

- *Αν το Δs_i τείνει να γίνει μηδέν, το συμβολίζουμε με* ds. *Ο αριθμός των όρων στο άθροισμα, Ν, τείνει να γίνει άπειρος, και το άθροισμα των συνεισφορών γίνεται ολοκλήρωμα.*

$$E = \int dE_{\perp} \equiv \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ N \to \infty}} \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta E_{\perp i} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \left(x^2 + R^2 \right)^{-3/2} x$$

Παράδειγμα:*Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P*



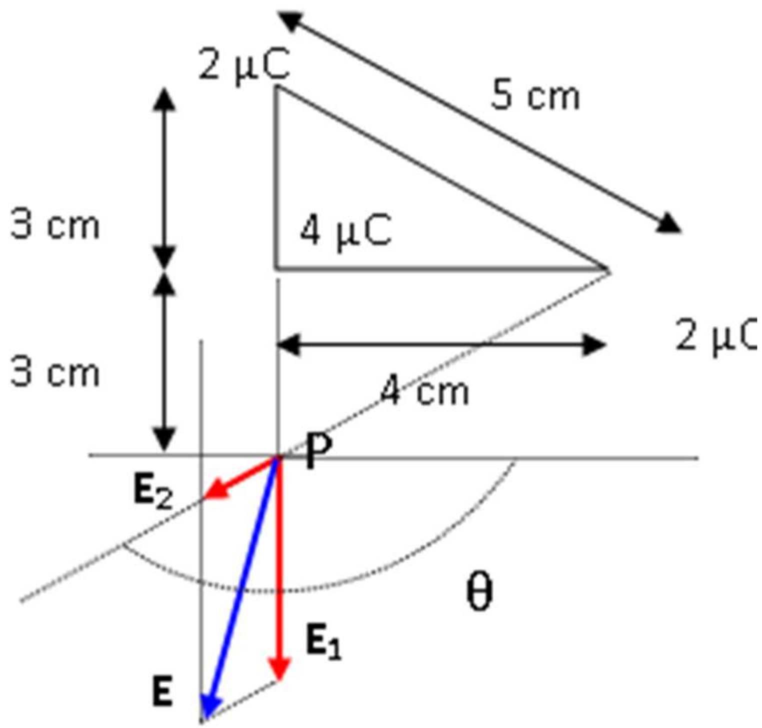
$$\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$$

$$E_1 = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{2\mu C}{6^2 cm^2} + \frac{4\mu C}{3^2 cm^2}\right) =$$

$$\left(9\times10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\right)\left(0.5\frac{10^{-6}C}{10^{-4}m^2}\right) \Rightarrow$$

$$E_1 = 4.5\times10^7\ \frac{N}{C}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\mu C}{5^2 cm^2} = 0.72\times10^7\ \frac{N}{C}$$

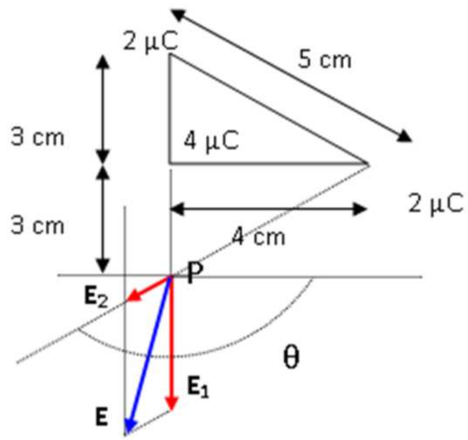


$$E_x = E_{2x} = E_2 \cos\theta = -\left(0.72\times10^7\right)\left(\frac{4}{5}\right)\frac{N}{C} = -5.76\times10^6\ \frac{N}{C}$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = E_1 + E_2 \sin\theta$$

$$= -4.5\times10^7\ \frac{N}{C} - \left(0.72\times10^7\right)\left(\frac{3}{5}\right)\frac{N}{C} = -4.93\times10^7\ \frac{N}{C}$$

$$E_x = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 49.6\times10^6\ \frac{N}{C}$$



$$\tan\phi = \frac{E_y}{E_x} = 8.56 \Rightarrow \phi = \tan^{-1} 8.56 = 83.3^\circ$$

Ασκηση συνολικό φορτίο

εκτρικό φορτίο *Q* είναι κατανεμημένο σε σφαιρικό όγκο ακτίνας *R* με πυκνότητα ρτίου ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης από το κέντρο, δηλαδή $\rho(r) = A \cdot r^2$ ολογίστε τη σταθερά *A* και στη συνέχεια βρείτε την ολική ενέργεια της κατανομής.

<u>ση</u>

συνολικό φορτίο Q στη σφαίρα είναι:

$$Q = \int \rho(r)dV = \int Ar^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{5} 4\pi A r^5 \Big]_0^R = \frac{4\pi}{5} AR^5$$

και λύνοντας ως προς *A*: $\boxed{A = \frac{5Q}{4\pi R^5}}$

Ερώτηση σύνθεση ηλεκτρικών πεδίων

- Τέσσερα ίσα φορτία αλλά διαφορετικού προσήμου τοποθετούνται στις κορυφές τετραγώνου. Πια διευθέτηση των φορτίων θα προκαλέσει ηλεκτρικό πεδίο με την μεγαλύτερη ένταση στο κέντρο του τετραγώνου;
- 1) Και τα τέσσερα φορτία θετικά. 2) Και τα τέσσερα φορτία αρνητικά. 3) Τρία φορτία θετικά και ένα αρνητικό. 4) Δυο φορτία θετικά και δυο αρνητικά. 5)Τρία φορτία αρνητικά και ένα θετικό.

Άσκηση Ν. Coulomb

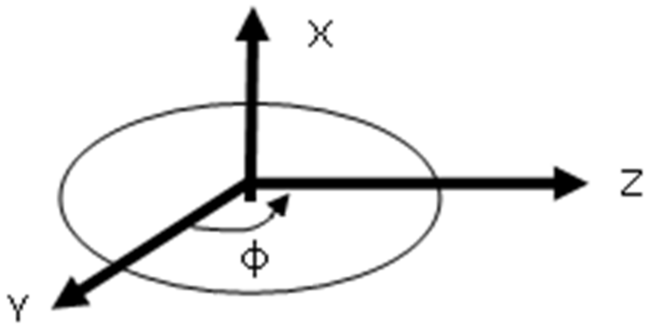
- Το σωματίδιο α είναι ένας πυρήνας ατόμου ηλίου. Αποτελείται από δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια. Να συγκριθεί η δύναμη Coulomb μεταξύ δύο σωματίων α με την βαρυτική έλξη μεταξύ τους. (Η παγκόσμια βαρυτική σταθερά έχει την τιμή $G = 6.67\times10^{-11}$ $N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$).

Άσκηση Ν. Coulomb

- Δύο σφαίρες από φελιζόλ, μάζας 10 g η καθεμία, κρέμονται με αβαρές νήμα μήκους 120 cm, από το ίδιο σημείο. Οι σφαίρες είναι φορτισμένες με το ίδιο φορτίο q και ισορροπούν σε απόσταση 40 cm μεταξύ τους. Βρείτε το φορτίο

Άσκηση Ηλεκτρικού πεδίου συνεχούς κατανομής φορτίου

- Ένας πολύ λεπτός μονωτικός δακτύλιος ακτίνας R φέρει γραμμική κατανομή φορτίου $\lambda(\phi)$ με πυκνότητα που μεταβάλλεται συναρτήσει της γωνίας ως όπου λ_0 είναι μια θετική σταθερά. Να βρείτε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο του δακτυλίου .



Λύση

- Φορτίο από το ds

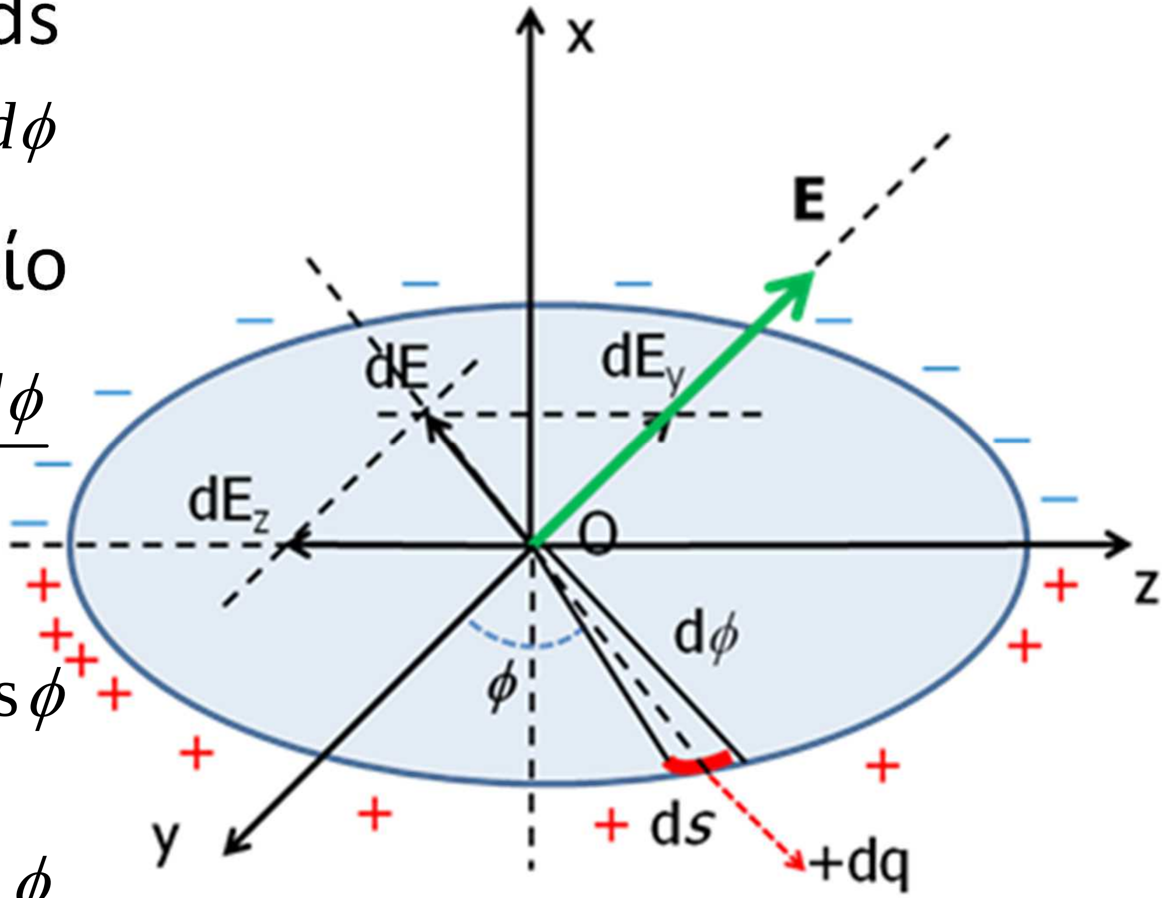
$$dq = \lambda ds = \lambda_0 \cos\phi R d\phi$$

- Δημιουργεί πεδίο

$$dE = k\frac{dq}{R^2} = k\frac{\lambda_0 R\cos\phi d\phi}{R^2}$$

$$dE_y = -k\frac{\lambda_0 \cos\phi d\phi}{R}\cos\phi$$

$$dE_z = -k\frac{\lambda_0 \cos\phi d\phi}{R}\sin\phi$$



- Βρίσκουμε τις x,y συνιστώσες του πεδίου

$$E_y = -k\frac{\lambda_0}{R}\int_0^{2\pi}\cos^2\phi d\phi = -k\frac{\lambda_0\pi}{R}$$

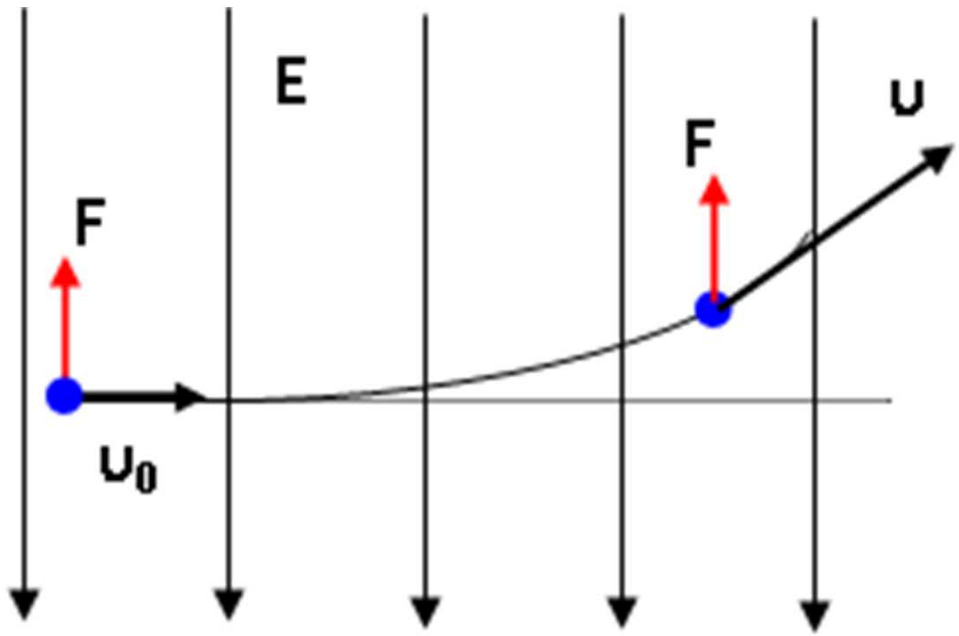
$$E_z = -k\frac{\lambda_0}{R}\int_0^{2\pi}\sin\phi\cos\phi d\phi = 0$$

- Συνολικά

$$E = k\frac{\lambda_0\pi}{R} = \frac{1}{4\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{R} \quad \text{ή διανυσματικά} \quad \vec{E} = -\frac{1}{4\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{R}\hat{j}$$

Άσκηση κίνηση σε ηλεκτρικό πεδίο

- Ένα ηλεκτρόνιο με ταχύτητα $\mathbf{u_0}$ μπαίνει σε περιοχή ομοιόμορφου ηλεκτρικού πεδίου **E**. Να περιγραφεί η κίνηση του αν (α) η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν και (β) αν η αρχική ταχύτητα είναι κάθετη στο ηλεκτρικό πεδίο.



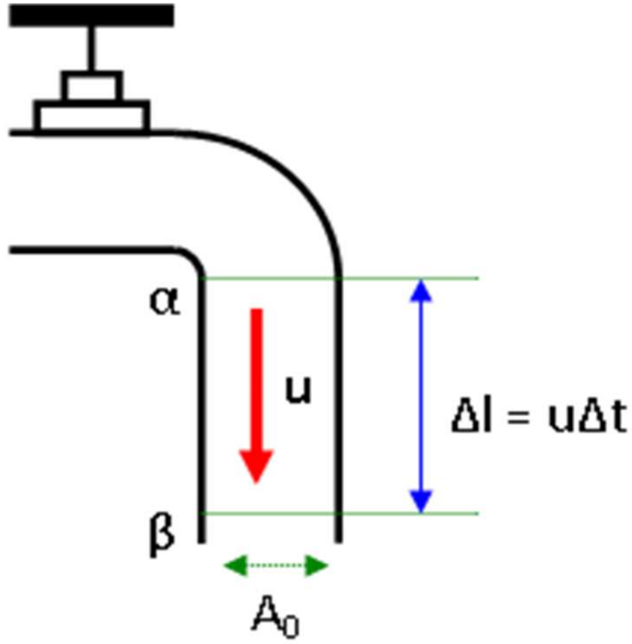
Σχήμα άσκησης 1.7

Άσκηση Φορτίο μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο

1. Ποιο φορτίο πρέπει να φέρει σωματίδιο μάζας 0.1 g, έτσι ώστε να παραμένει ακίνητο μέσα στο εργαστήριο, όταν αφεθεί σε ηλεκτρικό πεδίο που έχει φορά προς τα κάτω και ένταση 100 $N \cdot C^{-1}$;

Ροή διανυσματικού πεδίου

- Διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων
- Ροή νερού από βρύση
- Ροή διανυσματικού πεδίου ταχυτήτων

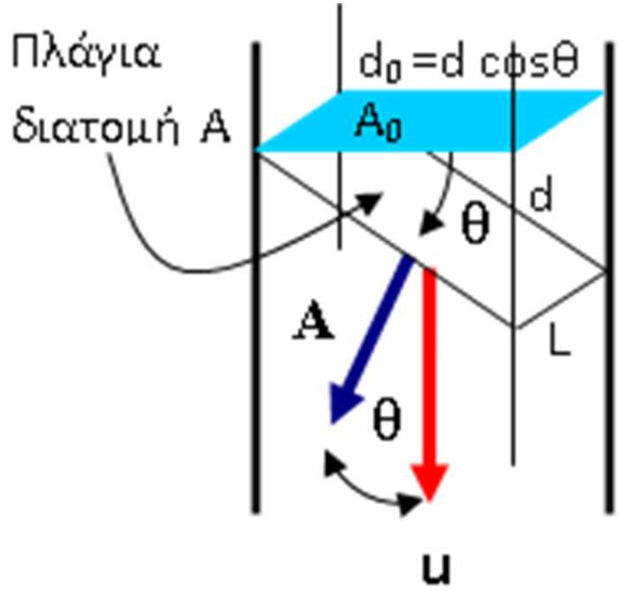


Σχήμα 1.6.α Επεξηγηματικό σχήμα για την έννοια της ροής νερού από μία βρύση. Τα σύμβολα επεξηγούνται στο κείμενο

$$\Phi_u = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A_0 \quad \Delta l}{\Delta t} = \frac{A_0 \cdot u \cdot \Delta t}{\Delta t} = A_0 \cdot u$$

Ροή από πλάγια τομή

Περνάει η ίδια ποσότητα νερού σε dt από κάθετη και πλάγια τομή.



Σχήμα 1.6.β Επεξήγηση της ροής νερού μέσα από πλάγια διατομή του σωλήνα. Τα σύμβολα

- $A_0 = Ld_0 = Ld\cos\theta = A\cos\theta$

$$\Phi_u = A_0 u = A\cos\theta \cdot u = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$$

Διάνυσμα επιφάνειας

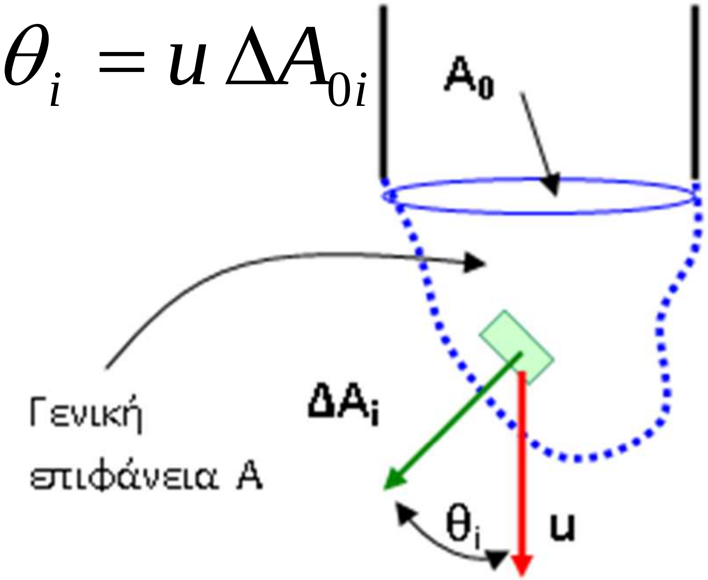
Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διάνυσμα σε μία επίπεδη επιφάνεια. Το διάνυσμα έχει διεύθυνση την κάθετο στην επιφάνεια. Μέτρο το εμβαδόν της επιφάνειας. Η φορά εξαρτάται από τον τύπο του προβλήματος. Για τις δικές μας ανάγκες στον ηλεκτρομαγνητισμό, όταν η επιφάνεια είναι κλειστή, όπως για παράδειγμα η επιφάνεια ενός μπαλονιού, η φορά του διανύσματος μίας στοιχειώδους επιφάνειας (που είναι επίπεδη) είναι από μέσα προς τα έξω.

Ροή νερού από τυχαία επιφάνεια

$$\Delta\Phi_i = \mathbf{u}\cdot\mathbf{\Delta A_i} = u\,\Delta A_i\cos\theta_i = u\,\Delta A_{0i}$$

$$\Phi_u \cong \sum_{i=1}^{N}\Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^{N} u\,\mathit{\Delta} A_{0i} =$$

$$u\left(\sum_{i=1}^{N}\mathit{\Delta} A_{0i}\right) = u\,A_0$$

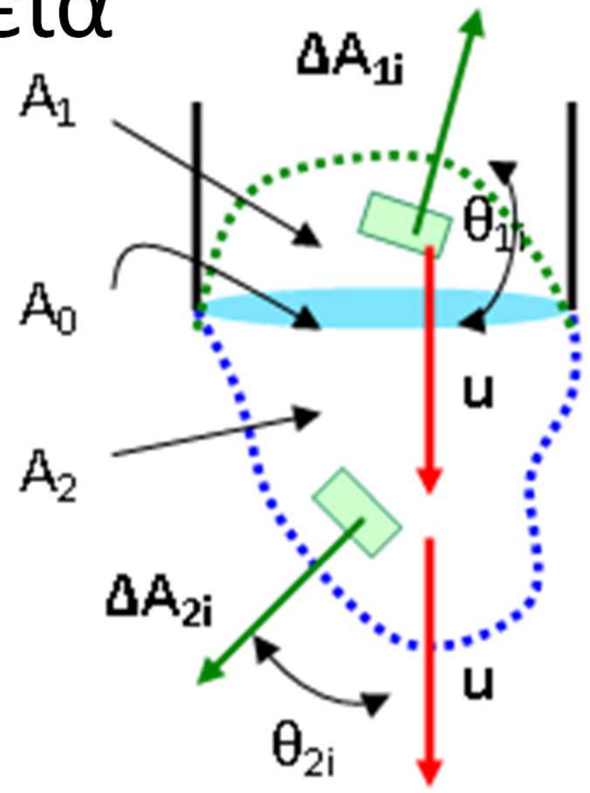


Σχήμα 1.6.γ Η ροή του νερού μέσα από μία γενική επιφάνεια. Τα σύμβολα επεξηγούνται στο κείμενο.

$$\Phi_u = \lim_{\substack{\Delta A\to 0\\ N\to\infty}}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{u}\cdot\mathbf{\Delta A}_i\right) \equiv \int_A \mathbf{u}\cdot\mathbf{dA} = u\cdot A_0$$

Ροή νερού μέσα από κλειστή επιφάνεια

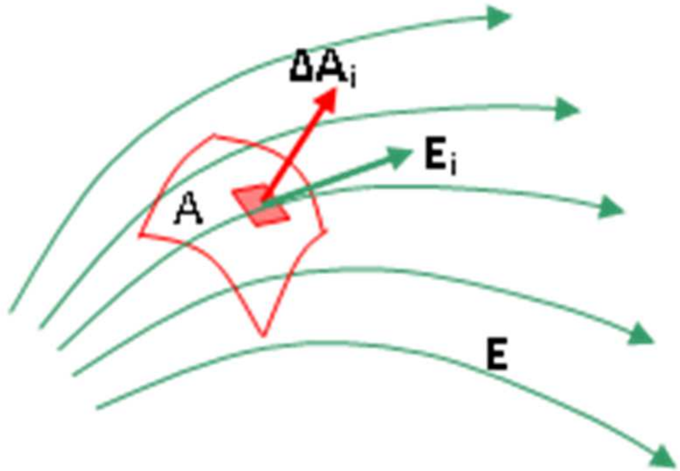
- Όσο νερό περνάει από το ένα «σουρωτήρι» περνάει και από το άλλο.
- Αν ότι μπαινει είναι αρνητικό και ότι βγαίνει θετικό, τότε το σύνολο της ροής νερού είναι μηδέν.
- Υπάρχει περίπτωση η ροη να μην είναι μηδέν;



Σχήμα 1.6.δ Η ροή του νερού μέσα από μία κλειστή επιφάνεια Α που αποτελείται από την ένωση των

Ροή ηλεκτρικού πεδίου

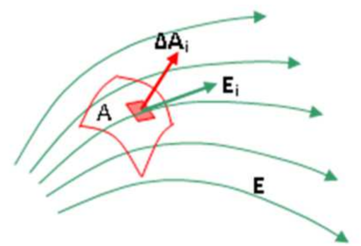
$$\Phi_E \equiv \lim_{\substack{\Delta A \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{\Delta A}_i \equiv \int_A \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA}$$



Σχήμα 1.7.α Ροή ηλεκτρικού πεδίου μέσα από επιφάνεια Α.

Νόμος Gauss

- Συσχετίζει την ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από μία κλειστή επιφάνεια με το συνολικό φορτίο μέσα στην επιφάνεια

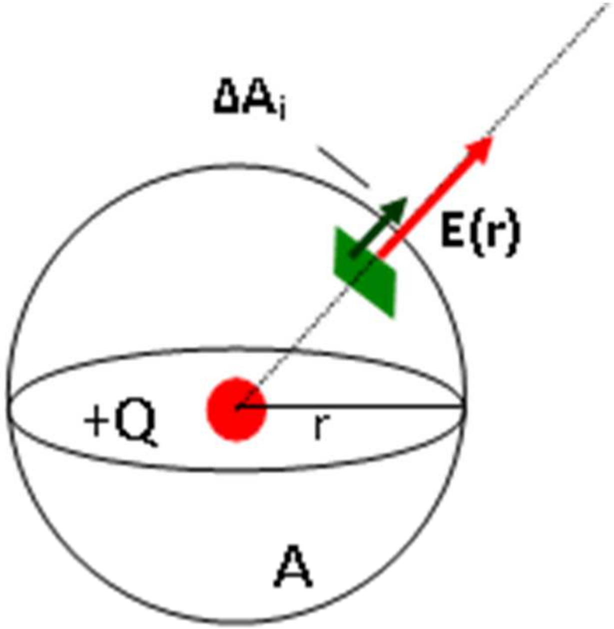


Σχήμα 1.7.α Ροή ηλεκτρικού πεδίου μέσα από επιφάνεια A.

$$\Phi_E \equiv \lim_{\substack{\Delta A \to 0 \\ N \to \infty}} \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{\Delta A}_i \right) \equiv \oint_A \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Πώς προκύπτει ο Ν. Gauss από τον Ν. Coulomb;

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

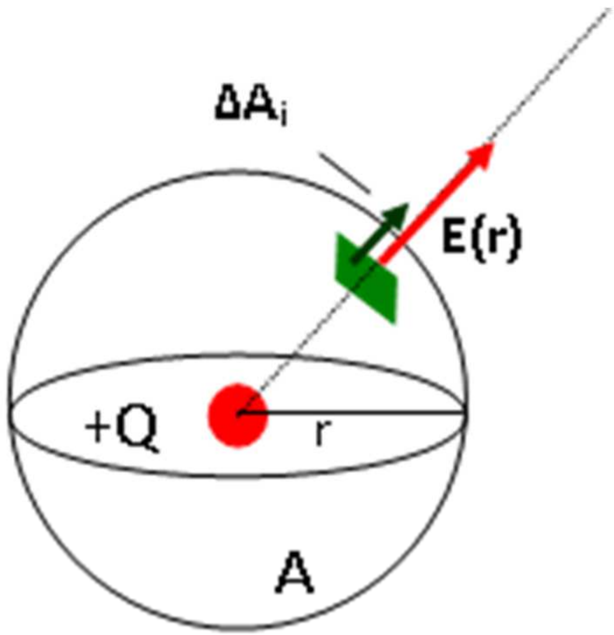


Σχήμα 1.7.β Ροή του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από ένα θετικό φορτίο μέσα από μία σφαιρική

$$\Phi_E = \lim_{\substack{\Delta A_i \to 0 \\ N \to \infty}} \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{A}_i \right) = \lim_{\substack{\Delta A_i \to 0 \\ N \to \infty}} \left(\sum_{i=1}^{N} E(r)\, \Delta A_i \right) =$$

$$E(r) \lim_{\substack{\Delta A_i \to 0 \\ N \to \infty}} \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta \mathrm{A}_i \right) \Rightarrow$$

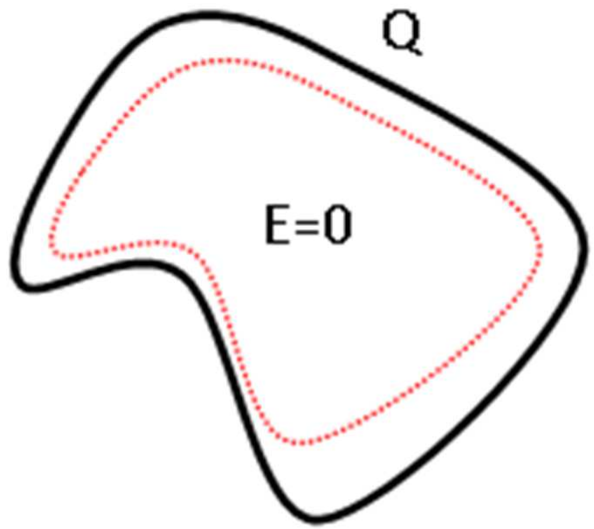
$$\Phi_E = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right) \left(4\pi r^2 \right) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



Σχήμα 1.7.β Ροή του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από ένα θετικό φορτίο μέσα από μία σφαιρική

Ηλεκτρικό πεδίο μέσα σε αγωγό

Σε έναν μονωμένο αγωγό, όλη η περίσσεια φορτίου κατανέμεται στην επιφάνεια του αγωγού. Στο εσωτερικό του αγωγού, το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν.



Σχήμα 1.8 Μονωμένος αγωγός με περίσσεια φορτίου. Η κόκκινη διακεκομμένη γραμμή είναι η

Ερωτήσεις

- Αρνητικό φορτίο τοποθετείται στον εσωτερικό χώρο της σφαιρικής κοιλότητας ενός κοίλου μεταλλικού στερεού αντικειμένου. Το εξωτερικό του στερεού γειώνεται, συνδέοντας ένα αγώγιμο σύρμα μεταξύ του στερεού και της γης.
- a) Επάγεται επί πλέον φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια του μεταλλικού αντικειμένου; Αν ναι, ποιο είναι το πρόσημο και το μέτρο του;
- b) Υπάρχει επί πλέον φορτίο στην εξωτερική επιφάνεια του μεταλλικού αντικειμένου; Αιτιολογήστε την απάντηση σας.
- c) Υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο στην κοιλότητα; Αιτιολογήστε την απάντηση σας.
- d) Υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο στο έξω από το μεταλλικό αντικείμενο; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.
- e) Θα μπορούσε κάποιος να μετρήσει ηλεκτρικό πεδίο, έξω από το μεταλλικό αντικείμενο, που να οφείλεται στο φορτίο ; Είναι λογικό να ισχυριστούμε, ότι ο γειωμένος αγωγός έχει την περιοχή από φαινόμενα που οφείλονται στο φορτίο ;

Απαντήσεις

- a) Ο νόμος του Gauss επιβάλει στο εσωτερικό ενός μετάλλου το . Για να συμβαίνει αυτό πρέπει φορτίο +*Q* να επάγεται στην εσωτερική επιφάνεια ώστε το πεδίο μέσα στο μέταλλο να είναι μηδέν.
- Άλλη λύση: Το δυναμικό στην εξωτερική (γειωμένη) επιφάνεια είναι μηδέν οπότε θα πρέπει το συνολικό φορτίο εντός να είναι μηδέν. Αυτό επιτυγχάνεται με επαγόμενο φορτίο +Q στην εσωτερική επιφάνεια
- b) Η εξωτερική επιφάνεια είναι γειωμένη, οπότε δεν υπάρχει υπερβάλλον φορτίο.
- c) Θεωρούμε Γκαουσσιανή σφαίρα με το –*Q* φορτίο στο κέντρο της και ακτίνα μικρότερη από την εσωτερική ακτίνα της μεταλλικής κοιλότητας. Αυτή η σφαίρα περικλείει συνολικό φορτίο –*Q* συνεπώς υπάρχει ηλεκτρική ροή στο εσωτερικό της και άρα υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο στην κοιλότητα.
- d) Στην ηλεκτροστατική κατάσταση το εντός αγωγού. Μια γκαουσσιανή σφαίρα με φορτίο στο κέντρο της και ακτίνα μεγαλύτερη από την εξωτερική ακτίνα του μεταλλικού αγωγού περικλείει μηδενικό συνολικό φορτίο (στο κέντρο και στην εσωτερική επιφάνεια του μετάλλου) συνεπώς από το νόμο του Gauss η ηλεκτρική ροή θα είναι μηδέν και επομένως και το εκτός του μετάλλου.
- e) Όχι, το στην περιοχή αυτή. Το φορτίο στο εσωτερικό έχει θωρακιστεί από τον γειωμένο αγωγό.

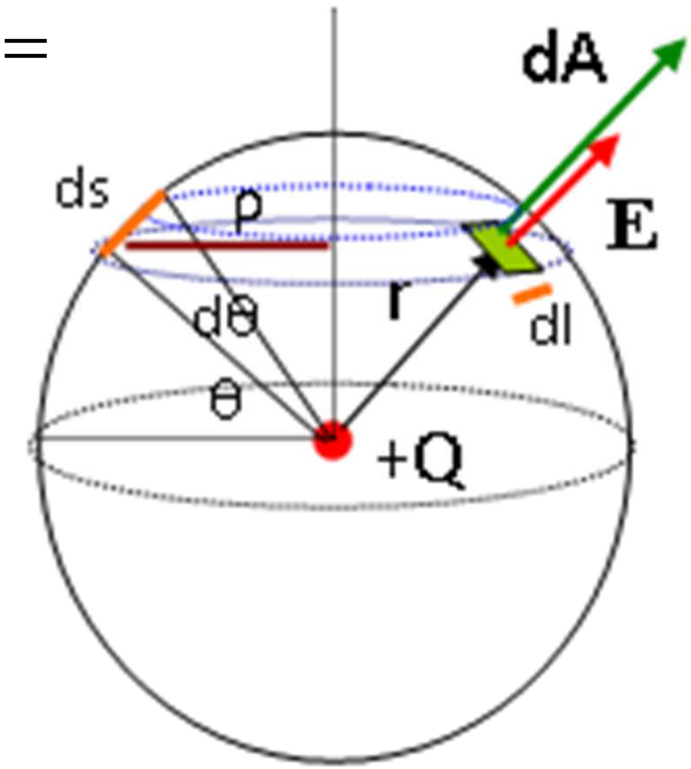
Παράδειγμα: Ξαναϋπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss.

$$\Phi_E \cong \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Delta A_i} = \sum_{i=1}^{N} E \cdot \Delta A_i =$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{\Delta A_i}\right) \cong$$

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$



Σχήμα παραδείγματος 1.4.1

Εφαρμογή νόμου Gauss

Βλέπουμε ότι με ένα πολύ απλό υπολογισμό καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Το κόλπο είναι μόνο να μαντέψουμε την σωστή μορφή της επιφάνειας που χρειαζόμαστε. Με τον υπολογισμό μας φθάσαμε στο μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου. Την κατεύθυνση την παίρνουμε από τα ποιοτικά επιχειρήματα που αναπτύξαμε στην αρχή.

Ερώτηση Ν. Gauss

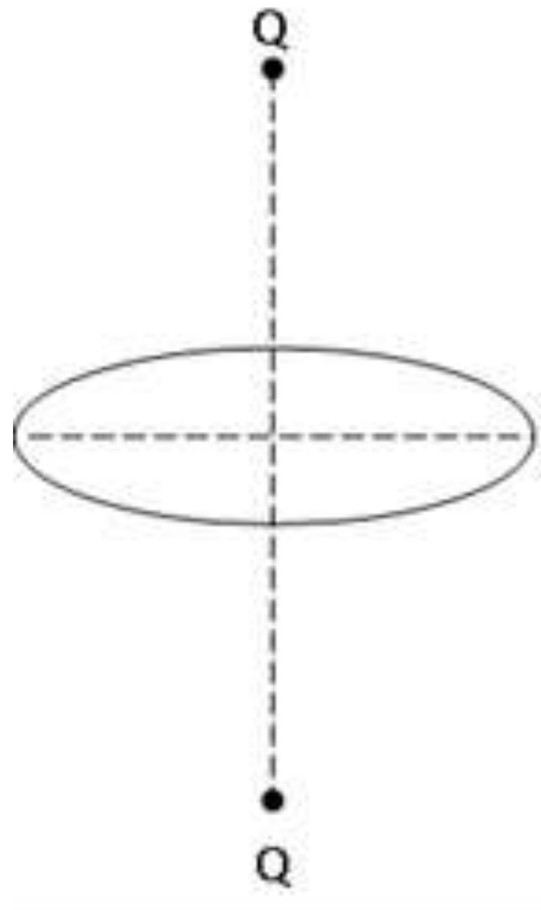
- Σημειακό φορτίο Q είναι στο κέντρο μιας σφαιρικής γκαουσσσιανής επιφάνειας S. Εάν ένα δεύτερο φορτίο Q τοποθετείται ακριβώς έξω από την επιφάνεια S, η ολική ηλεκτρική ροή μέσω της σφαιρικής επιφάνειας S είναι: 1) αμετάβλητη, 2) διπλάσια, 3) η μισή και 4) καμία από αυτές

Ερώτηση κατανομή φορτίου σε αγωγό

- Ένα φορτίο Q τοποθετείται σε ένα κοίλο μεταλλικό σφαιρικό φλοιό. Πως κατανέμεται το φορτίο αυτό στον μεταλλικό αγωγό;
- 1) Μισό στην εσωτερική επιφάνεια και μισό στην εξωτερική επιφάνεια. 2) Μέρος σε κάθε επιφάνεια κατ΄ αντίστροφη αναλογία προς τις δυο ακτίνες. 3) Μέρος σε κάθε επιφάνεια κατά μια πιο περιπλοκή εξάρτηση από τις δυο ακτίνες από ότι στην ερώτηση (2). 4) Όλο το φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια. 5) Όλο το φορτίο στην εξωτερική επιφάνεια.

Άσκηση: Ηλεκτρικό πεδίο διακριτών φορτίων

Δύο ίσα θετικά φορτία q βρίσκονται σε απόσταση 2α μεταξύ τους. Να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου, πάνω στο μεσοκάθετο επίπεδο, στην περιφέρεια του οποίου το μέτρο της έντασης του πεδίου των δύο φορτίων είναι μέγιστο.



Α. Σε κάθε σημείο P του μεσοκαθέτου επιπέδου, τα μέτρα των εντάσεων κάθε φορτίου είναι ίσα, αφού η απόσταση r είναι ίδια. Δηλαδή:

$$E = E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

Αν οι εντάσεις E_1 και E_2 αναλυθούν στις συνιστώσες τους, οι κάθετες αλληλοαναιρούνται καί μένουν να συνεισφέρουν στο ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

Αρα: $$E_P = 2E\cos\theta \Rightarrow E_P = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\cos\theta$$

Αλλά, $\cos\theta = R/r$ και $r^2 = R^2 + a^2$

Επομένως:

Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι η ένταση στο σημείο P εξαρτάται αποκλειστικά από την απόσταση R που είναι η ακτίνα του κύκλου. Επομένως για να βρεθεί η ακτίνα R στην οποία η ένταση παίρνει τη μέγιστη τιμή, αρκεί να προσδιοριστεί η τιμή του R για την οποία η συνάρτηση έχει μέγιστο.

$$E_p = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R}{(R^2+a^2)^{3/2}}$$

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της τελευταίας σχέσης και απαιτούμε να είναι ίση με μηδέν:

$$\frac{dE_p}{dR} = 0$$

$$\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(R^2+a^2)^{3/2} - R\cdot\frac{3}{2}\cdot 2R(R^2+a^2)^{1/2}}{(R^2+a^2)^3}\right] = 0$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Επειδή δε ηδεύτερη παράγωγος για R=α($2^{1/2}$) είναι αρνητική, πράγματι για την απόσταση αυτή η τιμή της έντασης γίνεται μεγίστη και είναι:

$$E_{\max} = \frac{qa}{2\sqrt{2}\cdot\pi\varepsilon_0\left(\frac{3}{2}a^2\right)^{3/2}}$$

$$E_p = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R}{(R^2+a^2)^{3/2}}$$

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της τελευταίας σχέσης και απαιτούμε να είναι ίση με μηδέν:

$$\frac{dE_p}{dR} = 0$$

$$\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(R^2+a^2)^{3/2} - R\cdot\frac{3}{2}\cdot 2R(R^2+a^2)^{1/2}}{(R^2+a^2)^3}\right] = 0$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Επειδή δε ηδεύτερη παράγωγος για R=α($2^{1/2}$) είναι αρνητική, πράγματι για την απόσταση αυτή η τιμή της έντασης γίνεται μεγίστη και είναι:

$$E_{\max} = \frac{qa}{2\sqrt{2}\cdot\pi\varepsilon_0\left(\frac{3}{2}a^2\right)^{3/2}}$$

Άσκηση: Ηλεκτρικό πεδίο συνεχούς κατανομής φορτίου

Ένα φορτίο είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα κατά μήκος μιας πολύ μακράς ευθείας γραμμής (γραμμής απείρου μήκους) η οποία είναι προσανατολισμένη κατά την διεύθυνση του άξονα των z. Αν η ποσότητα του φορτίου είναι λ (C/m) ποια είναι η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε φορτίο q τοποθετημένο κοντά στη γραμμή, πάνω στον άξονα των x;

Έστω x η απόσταση του φορτίου q από τον άξονα των z κατά την διεύθυνση του οποίου είναι κατανεμημένο το φορτίο. Για να υπολογίσουμε τη δύναμη θα ολοκληρώσουμε θεωρώντας ότι η φορτισμένη γραμμή αποτελείται από απειροστά ευθύγραμμα τμήματα, καθένα από τα οποία μπορεί να θεωρηθεί ως σημειακό φορτίο. Η στοιχειώδης δύναμη dF, που οφείλεται στο γραμμικό στοιχείο dz έχει συνιστώσες κατά την διεύθυνση x και κατά την διεύθυνση z. Προφανώς κατά την ολοκλήρωση η συνιστώσα z θα εξουδετερωθεί από την αντίστοιχη συνιστώσα του συμμετρικού ως προς την αρχή στοιχείου του dz. Ετσι η συνολική δύναμη θα έχει μόνο συνιστώσα x.

Το φορτίο του dz θα είναι: $dQ = \lambda dz$ και το θεωρούμε σημειακό. Ετσι,

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qdQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q\lambda Q}{r^2}$$

$$F_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q\lambda \cos\theta dz}{r^2}$$

Η ολική δύναμη είναι λοιπόν:

$$F_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q\lambda \cos\theta dz}{r^2}$$

Επειδή:

$$z = x \tan\theta$$

$$dz = x \sec^2\theta \cdot d\theta$$

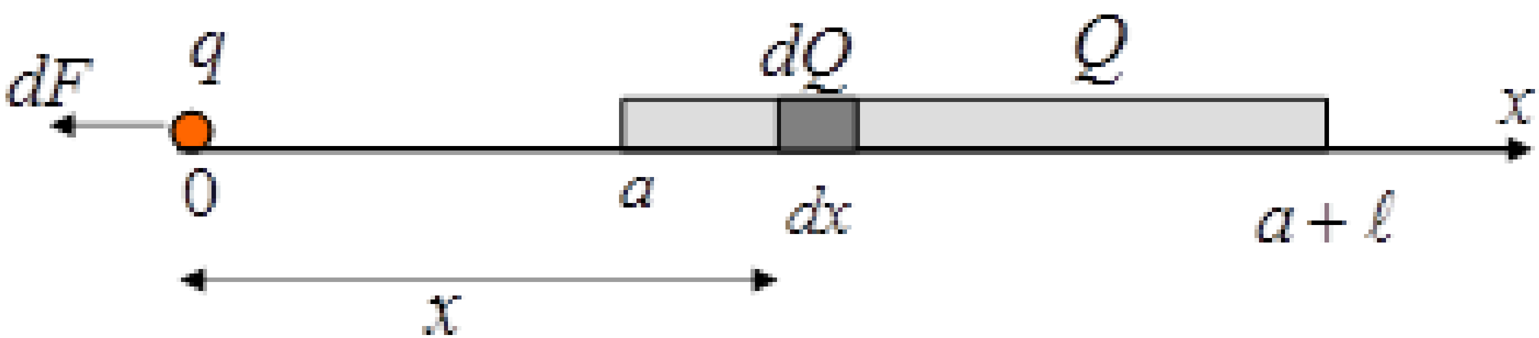
Και $r = x \cdot \sec\theta$

Το ολοκλήρωμα θα γίνει: $F_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q\lambda}{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot \cos\theta \cdot d\theta$

Και τελικά: $F_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q\lambda}{x} \cdot 2$ Δηλαδή: $F_x = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q\lambda}{x}$

Άσκηση: Ηλεκτρικό πεδίο συνεχούς κατανομής φορτίου

Μια ράβδος μήκους ℓ είναι ομοιόμορφα φορτισμένη θετικά με συνολικό ηλεκτρικό φορτίο Q και βρίσκεται κατά μήκος του θετικού άξονα x από το σημείο $x = a$ μέχρι $x = a + \ell$. Ένα θετικό σημειακό φορτίο q βρίσκεται στη αρχή του άξονα ($x = 0$). (α) Υπολογίστε το μέτρο και βρείτε την κατεύθυνση της δύναμης που ασκεί πάνω στο q η κατανομή του φορτίου Q. (β) Τι μορφή παίρνει η δύναμη, αν $a >> \ell$;



Η γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda = \dfrac{dQ}{dx}$ ισούται με $\lambda = \dfrac{Q}{\ell}$ λόγω ομοιόμορφης κατανομής του φορτίου Q πάνω στη ράβδο. Επομένως, το φορτίο dQ που αντιστοιχεί σε μήκος dx θα είναι

$$dQ = \frac{Q}{\ell}dx \qquad (1)$$

Έστω x η απόσταση μεταξύ q και dQ. Το φορτίο dQ ασκεί απωστική δύναμη dF επί του φορτίου q, η οποία κατευθύνεται προς τον αρνητικό άξονα x και από τον νόμο του Coulomb έχει μέτρο:

$$dF = k\frac{qdQ}{x^2} = k\frac{Q}{\ell}\frac{qdx}{x^2}\text{, λόγω της (1) , όπου } (k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0})$$

Η συνολική δύναμη είναι το διανυσματικό ολοκλήρωμα όλων των $\overrightarrow{dF}$, οι οποίες αφού έχουν την ίδια διεύθυνση και φορά, ολοκληρώνονται αλγεβρικά:

$$F=\int dF=k\frac{Qq}{\ell}\int_a^{a+\ell}\frac{dx}{x^2}=-k\frac{Qq}{\ell}\left[\frac{1}{x}\right]_a^{a+\ell}=k\frac{Qq}{\ell}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+\ell}\right)=k\frac{Qq}{a(a+\ell)}$$

Η δύναμη κατευθύνεται προς τον αρνητικό άξονα x, δηλαδή

$$\vec{F}=-k\frac{Qq}{a(a+\ell)}\hat{i}$$

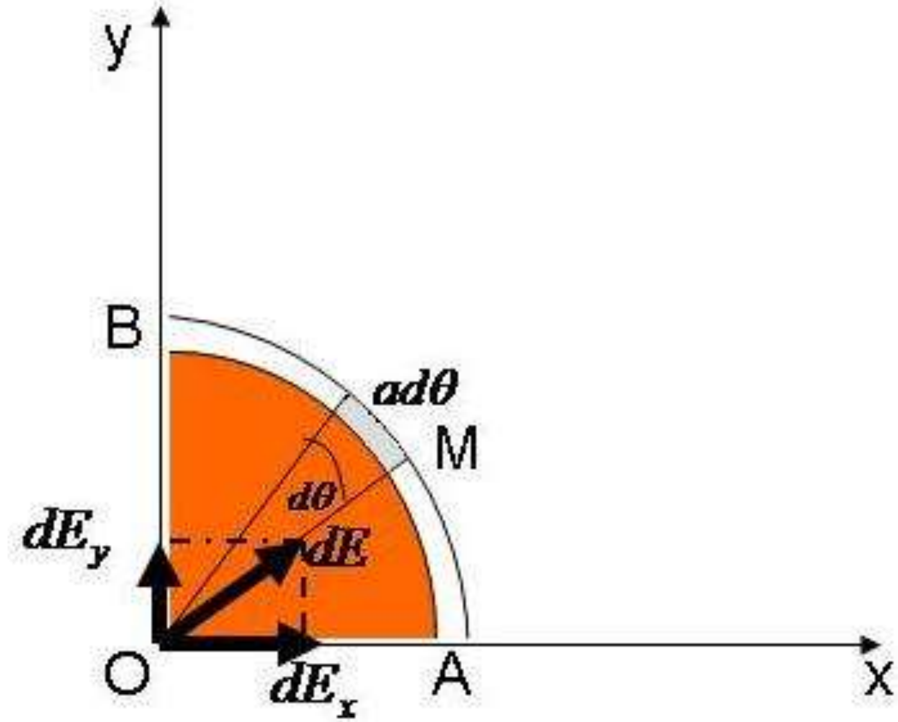
Αν α>>l (δηλαδή το φορτίο q βρίσκεται πολύ μακριά από τη ράβδο), τότε :

$$\vec{F}\approx-k\frac{Qq}{a^2}\hat{i}$$

δηλαδή η κατανομή του φορτίου της ράβδου συμπεριφέρεται σαν να ήταν ένα σημειακό φορτίο Q.

Άσκηση: Ηλεκτρικό πεδίο συνεχούς κατανομής φορτίου

Αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο -Q κατανέμεται ομοιόμορφα πάνω σε τμήμα στεφάνης σχήματος τεταρτοκύκλιου ακτίνας α. Το τεταρτοκύκλιο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και το κέντρο καμπυλότητάς του είναι στην αρχή των συντεταγμένων Ο. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο Ο.



Θεωρούμε στοιχειώδες τμήμα της στεφάνης μήκους dl σε σημείο Μ, το οποίο φέρει φορτίο dQ.

Η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι $\lambda = \dfrac{dQ}{dl}$ (1)

Λόγω ομοιόμορφης κατανομής του φορτίου είναι: $\lambda = -\dfrac{Q}{\pi a/2} = -\dfrac{2Q}{\pi a}$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει

$$dQ = -\frac{2Q}{\pi a}dl = -\frac{2Q}{\pi a}ad\theta = -\frac{2Q}{\pi}d\theta \qquad (3)$$

όπου $d\theta$ η στοιχειώδης γωνία που αντιστοιχεί στο τόξο dl.

Το ηλεκτρικό πεδίο dE στο σημείο Ο έχει μέτρο

$$dE = k\frac{dQ}{a^2} = k\frac{2Qd\vartheta}{\pi a^2},\ \text{λόγω της (3) και } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Έστω $\theta = \angle AOM$. Η x-συνιστώσα του ηλεκτρικού αυτού πεδίου θα είναι θετική, (αφού το φορτίο $dQ < 0$) και θα δίνεται από τη σχέση

$$dE_x = dE\cos\vartheta = k\frac{2Q\cos\vartheta d\vartheta}{\pi a^2} \qquad (4)$$

Ομοίως, η y-συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι θετική και θα ισούται με $dE_y = dE\sin\vartheta = k\frac{2Q\sin\vartheta d\vartheta}{\pi a^2}$ (5)

Οι συνιστώσες E_x και E_y του πεδίου στο Ο προκύπτουν από την ολοκλήρωση των (4) και (5) αντίστοιχα, δηλαδή:

$$E_x = \int dE_x = k\frac{2Q}{\pi a^2}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta d\vartheta = k\frac{2Q}{\pi a^2}\left[\sin\vartheta\right]_0^{\pi/2} = k\frac{2Q}{\pi a^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{\pi a^2} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 a^2}$$

$$E_y = \int dE_y = k\frac{2Q}{\pi a^2}\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta d\vartheta = k\frac{2Q}{\pi a^2}\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi/2} = k\frac{2Q}{\pi a^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{\pi a^2} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 a^2}$$

Επομένως:

$$E_x = E_y = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 a^2}$$

ή

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 a^2}(\hat{i} + \hat{j})$$

Η γωνία που σχηματίζει το ηλεκτρικό πεδίο στο Ο με τον θετικό άξονα x είναι $\varphi = 45^0$.

Θεωρούμε στοιχειώδες τμήμα της στεφάνης μήκους dl σε σημείο Μ, το οποίο φέρει φορτίο dQ.

Η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} \qquad (1)$$

Λόγω ομοιόμορφης κατανομής του φορτίου είναι:

$$\lambda = -\frac{Q}{\pi a/2} = -\frac{2Q}{\pi a} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει

$$dQ = -\frac{2Q}{\pi a}dl = -\frac{2Q}{\pi a}ad\theta = -\frac{2Q}{\pi}d\theta \qquad (3)$$

όπου $d\vartheta$ η στοιχειώδης γωνία που αντιστοιχεί στο τόξο dl.

Το ηλεκτρικό πεδίο dE στο σημείο Ο έχει μέτρο

$$dE = k\frac{dQ}{a^2} = k\frac{2Qd\vartheta}{\pi a^2}$$

, λόγω της (3) και $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Έστω $\theta = \widehat{AOM}$. Η x-συνιστώσα του ηλεκτρικού αυτού πεδίου θα είναι θετική, (αφού το φορτίο dQ) και θα δίνεται από τη σχέση

$$dE_x = dE\cos\vartheta = k\frac{2Q\cos\vartheta d\vartheta}{\pi a^2} \qquad (4)$$

Ομοίως, η y-συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι θετική και θα ισούται με

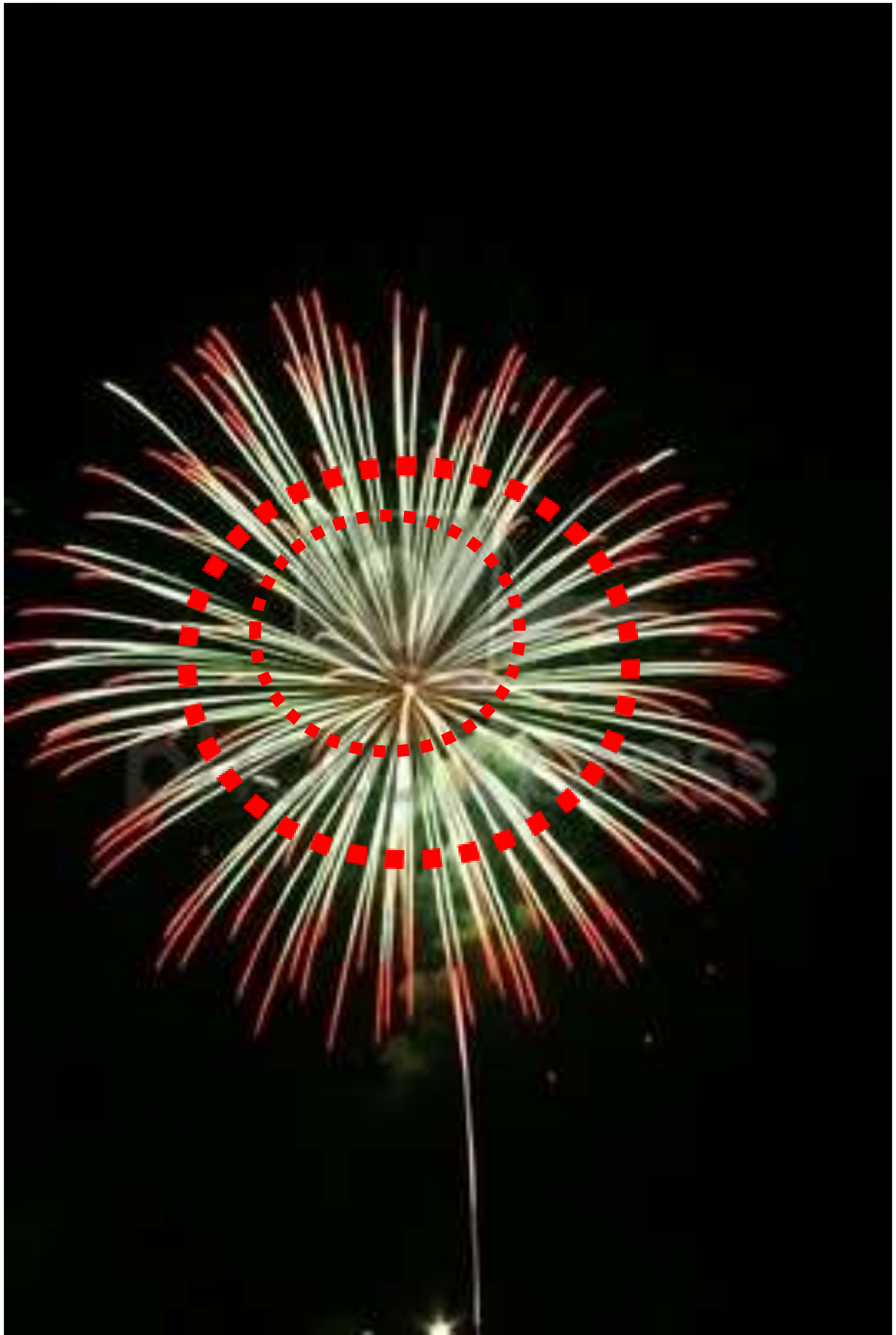
$$dE_y = dE\sin\vartheta = k\frac{2Q\sin\vartheta d\vartheta}{\pi a^2} \qquad (5)$$

Οι συνιστώσες E_x και E_y του πεδίου στο Ο προκύπτουν από την ολοκλήρωση των (4) και (5) αντίστοιχα, δηλαδή:

$$E_x = \int dE_x = k\frac{2Q}{\pi a^2}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta d\vartheta = k\frac{2Q}{\pi a^2}\left[\sin\vartheta\right]_0^{\pi/2} = k\frac{2Q}{\pi a^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{\pi a^2} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 a^2}$$

$$E_y = \int dE_y = k\frac{2Q}{\pi a^2}\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta d\vartheta = k\frac{2Q}{\pi a^2}\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi/2} = k\frac{2Q}{\pi a^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{\pi a^2} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 a^2}$$

Επομένως:



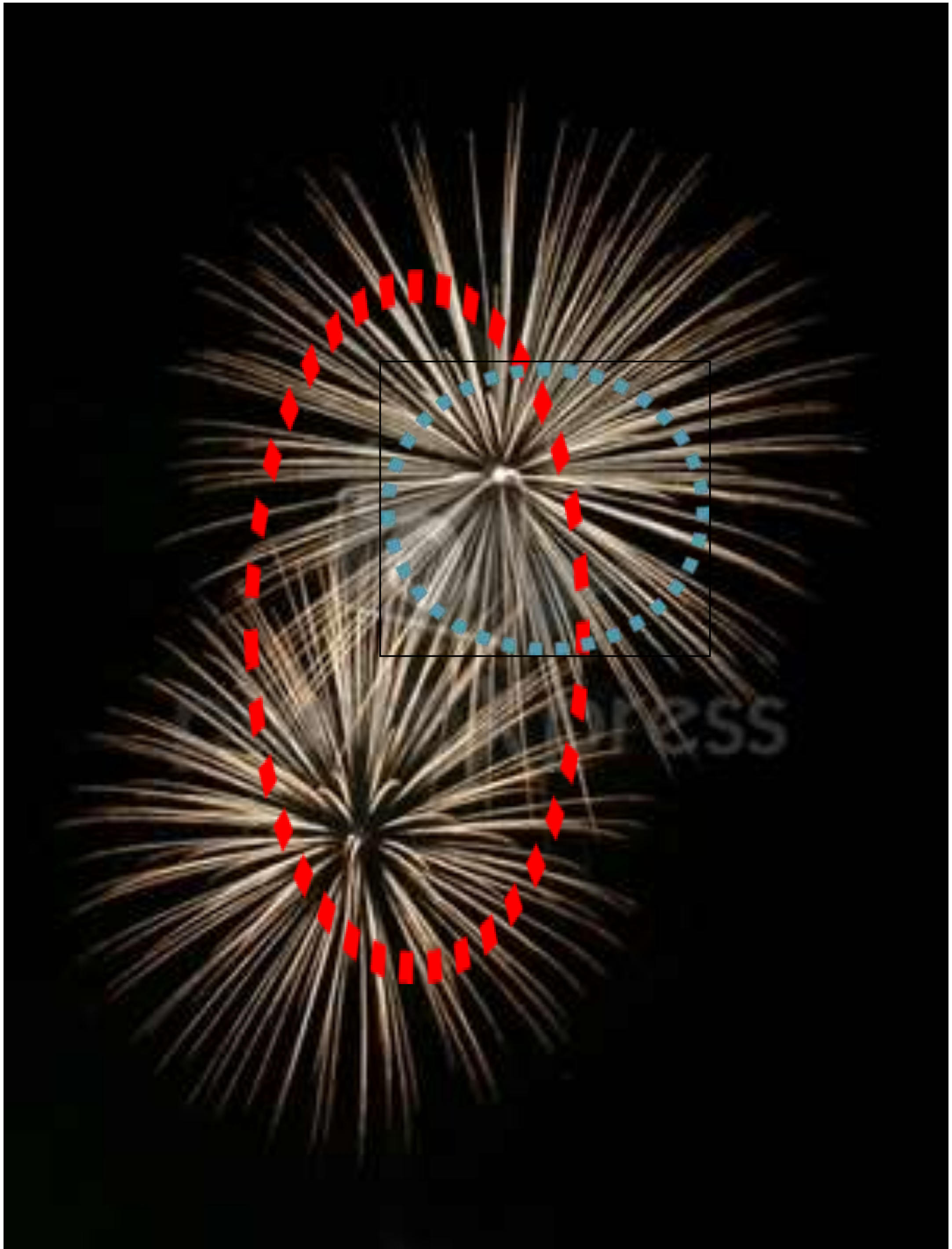
Ροή ηλεκτρικού πεδίου: Μηχανικό ανάλογο

Όσες σπίθες περνούν από την κλειστή επιφάνεια S1 περνούν και από την S2 (Ροή μη μηδενική)

Και για τις δύο επιφάνειες ισχύει ότι έγινε μία έκρηξη στο εσωτερικό τους (πηγή σπιθών)

Όσες σπίθες μπαίνουν στην κλειστή επιφάνεια S3 τόσες βγαίνουν (άρα συνολική ροή μηδεν)

Δεν υπάρχει έκρηξη στο εσωτερικό της επιφάνειας



Η ροή σπιθών μέσα από την κόκκινη κλειστή επιφάνεια (δύο πηγές σπιθών) είναι διπλάσια από την ροή σπιθών μέσα από την μπλέ κλειστή επιφάνεια (μία πηγή σπιθών

Νόμος του Gauss για «βεγγαλικά»

Συνδέσαμε τη ροή του διανυσματικού πεδίου των ταχυτήτων των σπιθών με την ποσότητα της πηγής

<u>Σε ένα δευτερόλεπτο</u>

Ροή σπιθών =

Άθροισμα σε όλη την επιφάνεια[(Πυκνότητα σπιθών) X (στοιχειώδη

$$\Phi_u = \int \rho_{spark} dA = N_{spark}$$

Οι 4 νόμοι του Maxwell

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

NOMOΣ GAUSS

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{ds} = 0$$

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = -\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}$$

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot\mathbf{dl} = \mu_0 I + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\Phi_E}{\partial t}$$

Άσκηση: Ροή ηλεκτρικού πεδίου

- *Θεωρείστε κλειστή επιφάνεια σχήματος ημισφαιρίου ακτίνας R (δηλαδή μία ημισφαιρική επιφάνεια που κλείνεται από μία επίπεδη επιφάνεια που περνάει από το κέντρο).*
  Στο κέντρο της σφαίρας και λίγο έξω από την επιφάνεια τοποθετείται θετικό φορτίο q. Βρείτε την ροή του ηλεκτρικού πεδίου (α) μέσα από την κυρτή ημισφαιρική επιφάνεια, και (β) μέσα από την επίπεδη κυκλική επιφάνεια

Άσκηση Ροή ηλεκτρικού πεδίου

Κύβος έχει τις ακμές του μήκους α=10 cm παράλληλες στους τρείς ορθογώνιους άξονες x,y,z. Η έδρα που είναι παράλληλη στο επίπεδο yz απέχει από αυτό το επίπεδο απόσταση α. Στον χώρο επικρατεί ηλεκτρικό πεδίο $E_x=b\cdot x^{1/2}$, $E_y=E_z=0$, $b=800\ N/C\cdot m^{1/2}$. (a) Βρείτε την ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από τον κύβο.

Άσκηση Ροή Ηλεκτρικού πεδίου

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ τέμνει μία επιφάνεια εμβαδού Α. Ποια είναι η ροή που διέρχεται από αυτή την επιφάνεια, αν η επιφάνεια βρίσκεται (α) στο επίπεδο yz, (β) στο επίπεδο xz, (γ) στο επίπεδο xy;

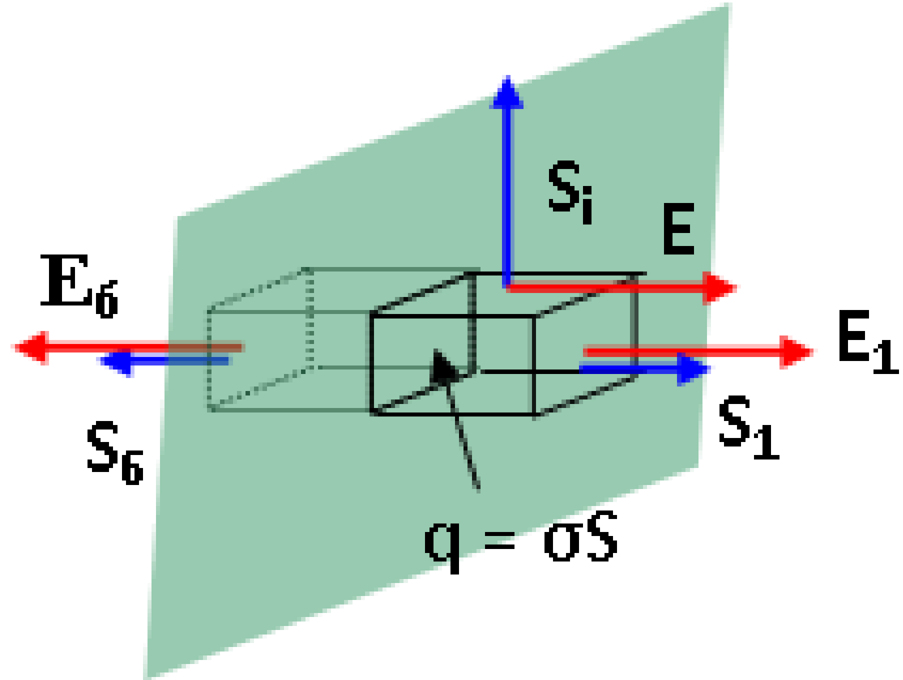
Παράδειγμα: Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο που παράγει φορτισμένο μεταλλικό φύλλο απείρων διαστάσεων. Υποθέστε ότι τα φορτία βρίσκονται σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{E_i} \cdot \mathbf{S_i} =$$

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{S}_1 + \mathbf{E}_6 \cdot \mathbf{S}_6 =$$

$$2ES = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

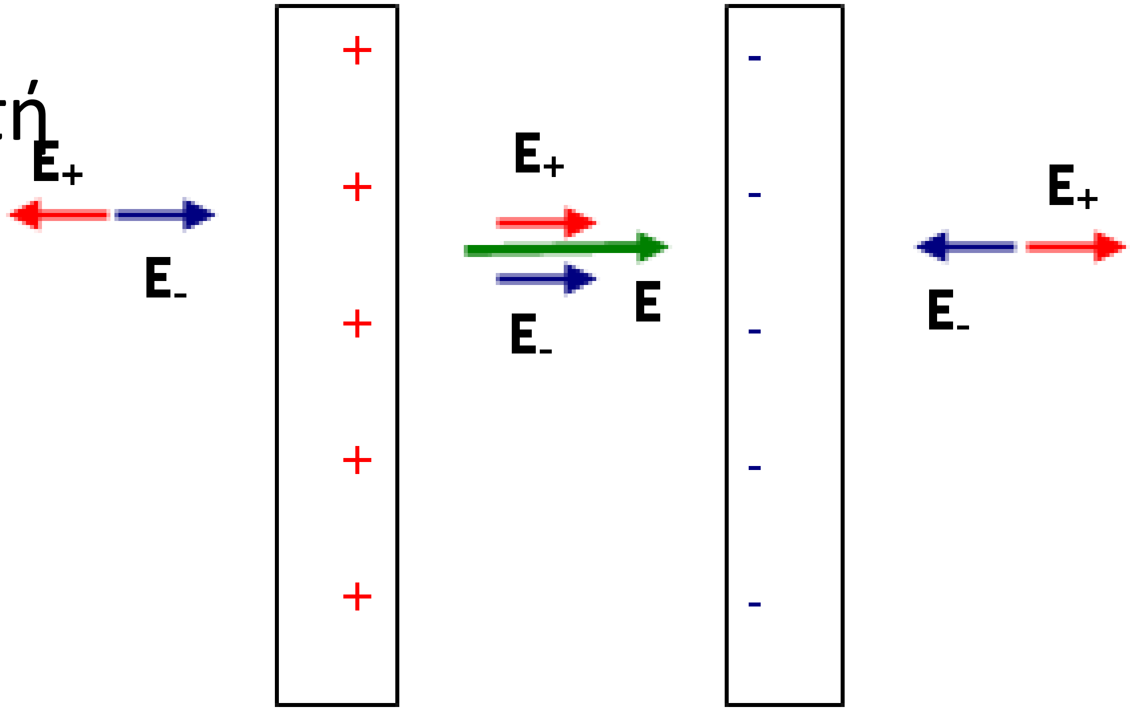
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



Σχήμα παραδείγματος 1.4.2

Τι γίνεται αν έχουμε ένα σύστημα δύο όμοιων μεταλλικών πλακών σε σταθερή απόσταση μεταξύ τους; Μία τέτοια διάταξη την ονομάζουμε επίπεδο πυκνωτή; Την κάθε πλάκα την ονομάζουμε οπλισμό του πυκνωτή. Φορτίζουμε τους οπλισμούς με ίση ποσότητα ετερώνυμων φορτίων. Ποια είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σύστημα

- Διάταξη Πυκνωτή



Σχήμα παραδείγματος 1.4.3

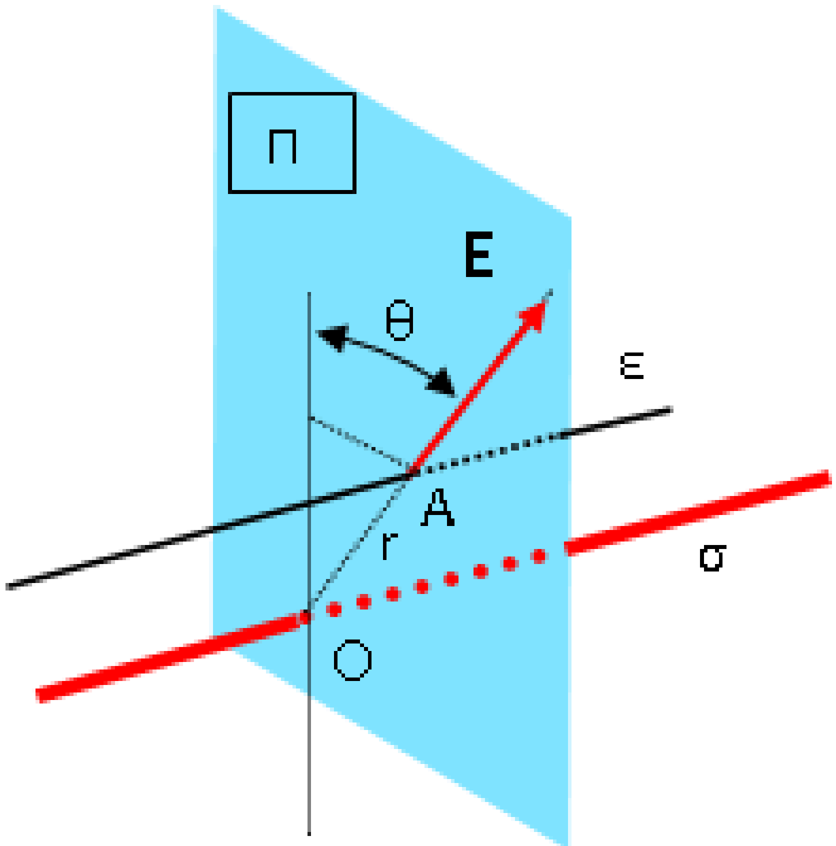
Ηλεκτρικό πεδίο σε πυκνωτή

- *Στα σημεία έξω από τους οπλισμούς τα ηλεκτρικά πεδία των κατανομών θετικών και αρνητικών φορτίων,* $\boldsymbol{E}_{+}$ *και* $\boldsymbol{E}_{-}$ *αντίστοιχα, έχουν το ίδιο μέτρο αλλά αντίθετες φορές. Έτσι το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο έξω από τους οπλισμούς είναι μηδέν.*
- *Στα σημεία ανάμεσα στους οπλισμούς τα δύο επί μέρους ηλεκτρικά πεδία έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια φορά, κατά συνέπεια το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς είναι ομογενές και έχει μέτρο το άθροισμα των μέτρων των* $\boldsymbol{E}_{+}$ *και* $\boldsymbol{E}_{-}$.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου ευθύγραμμου τμήματος απείρου μήκους

- Ποιοτικός προσδιορισμός του ηλεκτρικού πεδίου

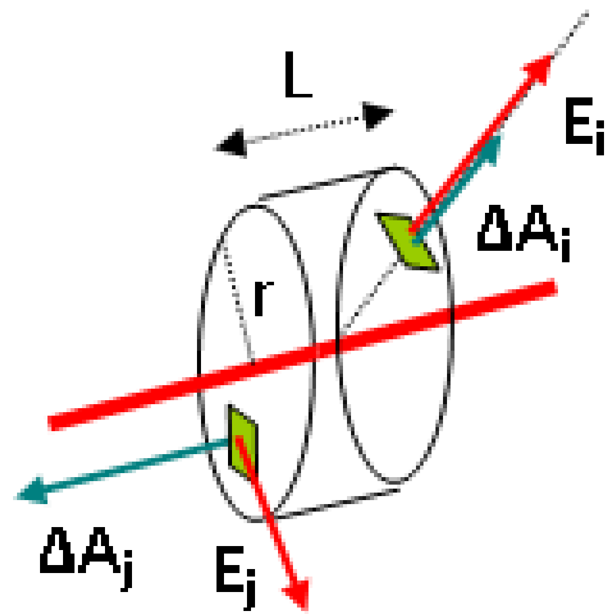


Σχήμα (α) παραδείγματος 1.4.4

Ηλεκτρικό πεδίο ευθύγραμμης κατανομής φορτίου

- Εφαρμογή του Ν. Gauss

- Προσδιορισμός της επιφάνειας Gauss



Σχήμα (β) παραδείγματος 1.4.4

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Phi_{\mathrm{E}} = \lim_{\substack{\Delta A\to 0\\ N\to\infty\\ \mathrm{M}\to\infty}} \left(\sum_{i=1}^{N+M} \mathbf{E_i}\cdot\mathbf{\Delta A_i} \right) = \\
&= \lim_{\substack{\Delta A\to 0\\ N\to\infty\\ \mathrm{M}\to\infty}} \left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{\Delta A_i} + \sum_{j=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{M}+N} \mathbf{E}_j\cdot\mathbf{\Delta A}_j \right) = \lim_{\substack{\Delta A\to 0\\ N\to\infty}} \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{E_i}\cdot\mathbf{\Delta A_i} \right) \\
&= \lim_{\substack{\Delta A\to 0\\ N\to\infty}} \left(\sum_{i=1}^{N} E\cdot \mathit{\Delta} A_i \right) = \mathrm{E} \lim_{\substack{\Delta A\to 0\\ N\to\infty}} \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{\Delta A_i} \right) = \mathrm{E}(2\pi r L) \\
&\Phi_{\mathrm{E}} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \quad \text{(Νόμος Gauss)}
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\Rightarrow E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}
$$

Ένα απείρως μακρύ μονωτικό κυλινδρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας a και εξωτερικής b έχει ομογενή πυκνότητα θετικού φορτίου ρ. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο ως συνάρτηση της απόστασης από τον άξονα του κυλινδρικού κελύφους.

Το σύστημα που εξετάζουμε έχει κυλινδρική συμμετρία επομένως το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι κάθετο στον άξονα του κυλίνδρου και το μέτρο του θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση από τον άξονα του κυλίνδρου. Θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Gauss για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο το χώρο. Η επιφάνεια Gauss που διαλέγουμε είναι κύλινδρος ύψους L με άξονα τον άξονα του φορτισμένου κυλίνδρου και ακτίνα r. Η επιλογή αυτή σημαίνει ότι το $\vec{E} // d\vec{S}$ στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου, οπότε $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS$ ενώ το $\vec{E} \perp d\vec{S}$ στις δυο βάσεις του κυλίνδρου και $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

R<a $$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

a<r<b $$q = \rho V = \rho(\pi r^2 L - \pi a^2 L)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(2\pi r L) = \frac{\rho(\pi r^2 L - \pi a^2 L)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho(r^2 - a^2)}{2\varepsilon_0 r}$$

R>b $$q = \rho V = \rho(\pi b^2 L - \pi a^2 L)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(2\pi r L) = \frac{\rho(\pi b^2 L - \pi a^2 L)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho(b^2 - a^2)}{2\varepsilon_0 r}$$

Άσκηση: Ν. Gauss

1. Κύβος έχει τις ακμές του μήκους α=10 cm παράλληλες στους τρείς ορθογώνιους άξονες x,y,z. Η έδρα που είναι παράλληλη στο επίπεδο yz απέχει από αυτό το επίπεδο απόσταση α. Στον χώρο επικρατεί ηλεκτρικό πεδίο $E_x=b\cdot x^{1/2}$, $E_y=E_z=0$, $b=800\ N/C\cdot m^{1/2}$. (a) Βρείτε την ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από τον κύβο και **(β) Το φορτίο μέσα στον κύβο.**

Άσκηση: Ν. Gauss

Μεταξύ δύο ομοαξονικών κυλινδρικών επιφανειών απείρου μήκους και ακτίνων α και b, υπάρχει φορτισμένος χώρος με πυκνότητα φορτίου:

$\rho(r)=0$ για $r<a$

$\rho(r)=3kr$ για $a \leq r \leq b$ και

$\rho(r)=0$ για $r>b$

Όπου k σταθερά.

Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου.

Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας της κατανομής φορτίου, η ένταση εμφανίζει ακτινική συμμετρία. Ο νόμος του Gauss εφαρμοζόμενος για τις τρείς περιοχές του χώρου δίνει:

$$r < a \qquad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \Rightarrow E_1 2\pi r l = 0 \Rightarrow E_1 = 0$$

$$a < r < b \qquad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \Rightarrow E_2 2\pi r l = \tfrac{1}{\varepsilon_0} \int_V 3krdV$$

Αλλά για κυλινδρική κατανομή: $dV = 2\pi l \cdot dl$ Οπότε:

$$E_2 2\pi r l = \tfrac{16k\pi l}{\varepsilon_0} \int_a^r r^2 dr = \tfrac{2k\pi l}{\varepsilon_0} \left(r^3 - a^3 \right) \Rightarrow E_2 = \tfrac{k}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\left(r^3 - a^3\right)}{r}$$

$r > b$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\Rightarrow E_3 2\pi rl = \tfrac{1}{\varepsilon_0} \int_a^b 3kr 2\pi rl \cdot dr = \tfrac{6k\pi l}{\varepsilon_0} \int_a^b r^2 dr \Rightarrow$$

$$E_3 = \frac{k}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\left(b^3 - a^3\right)}{r}$$

Έργο ηλεκτροστατικής δύναμης

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Delta l}$$

$$W \cong \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F_i} \cdot \mathbf{\Delta l_i}$$

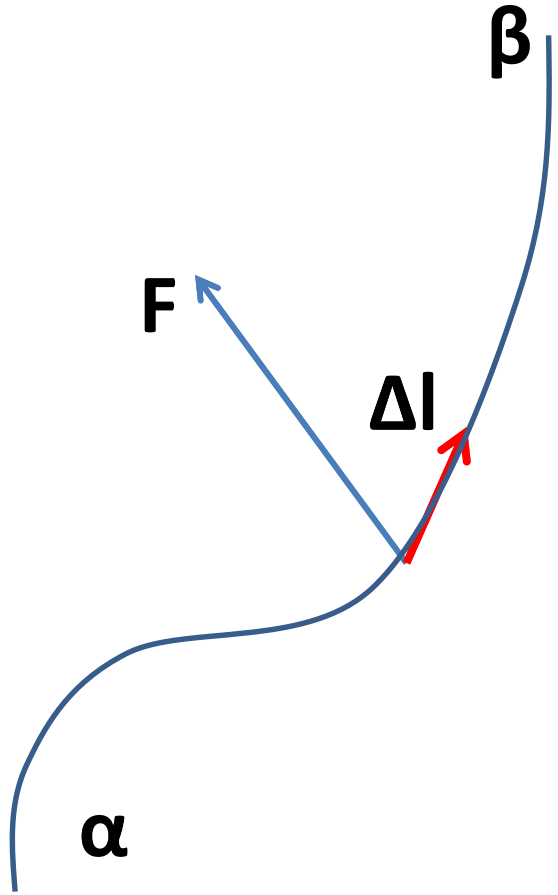
- Η <u>μετατόπιση</u> **Δl** περιγράφεται από ένα διάνυσμα που αρχίζει από το σημείο αναχώρησης Α και τελειώνει στο σημείο προορισμού Β. Το μέτρο του είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο σημεία.

Έργο και ενέργεια

- Γνωρίζουμε από την μηχανική

Ορισμός έργου

$$W_{\alpha\beta} = \lim_{\substack{\Delta l \to 0 \\ N \to \infty}} \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F_i} \cdot \mathbf{\Delta l_i} \right) = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl}$$



Θεώρημα έργου-ενέργειας

$$W_{\alpha\beta} = K_{\beta} - K_{\alpha} = \Delta K$$

Μόνο για διατηρητικές δυνάμεις

$$W_{\alpha\beta} = U_{\alpha} - U_{\beta} = -\Delta U$$

Ένα σύντομο φρεσκάρισμα της μνήμης

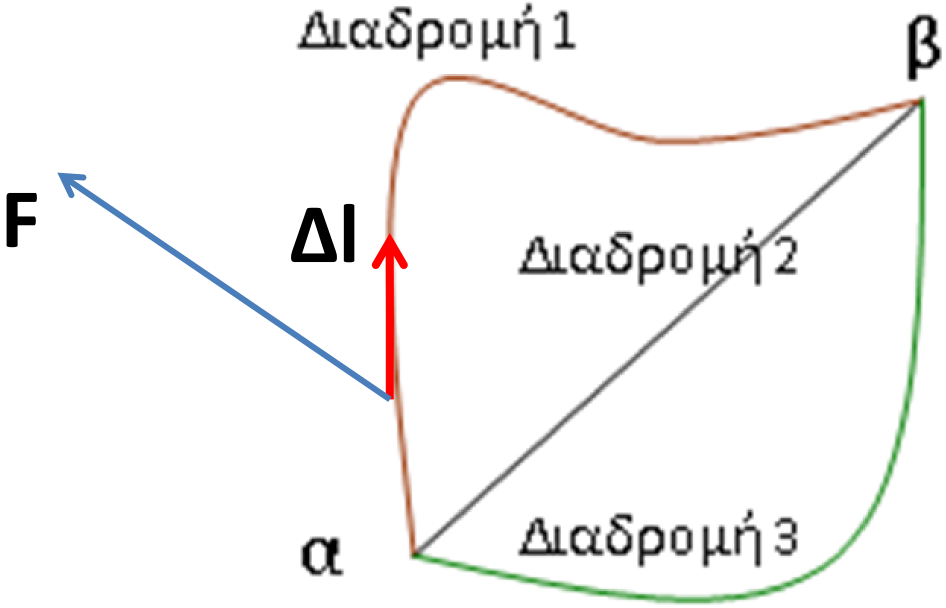
- Μία δύναμη λέγεται **διατηρητική** όταν το έργο που παράγει κατά την μετακίνηση από την αρχική θέση α στην τελική θέση β είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που ακολουθήθηκε. Ή αλλιώς, το έργο που παράγει μία διατηρητική δύναμη κατά την κίνηση σε μία κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.
- Το έργο που παράγει μία διατηρητική δύναμη εξαρτάται, επομένως, μόνο από την αρχική και την τελική θέση. Μπορούμε τότε να εισάγουμε μία συνάρτηση της θέσης μόνο ώστε να ισχύει η σχέση

$$W_{\alpha\beta} = U_{\alpha} - U_{\beta} = -\Delta U$$

- Την συνάρτηση αυτή καλούμε **δυναμική ενέργεια**.

Για διατηρητικές δυνάμεις

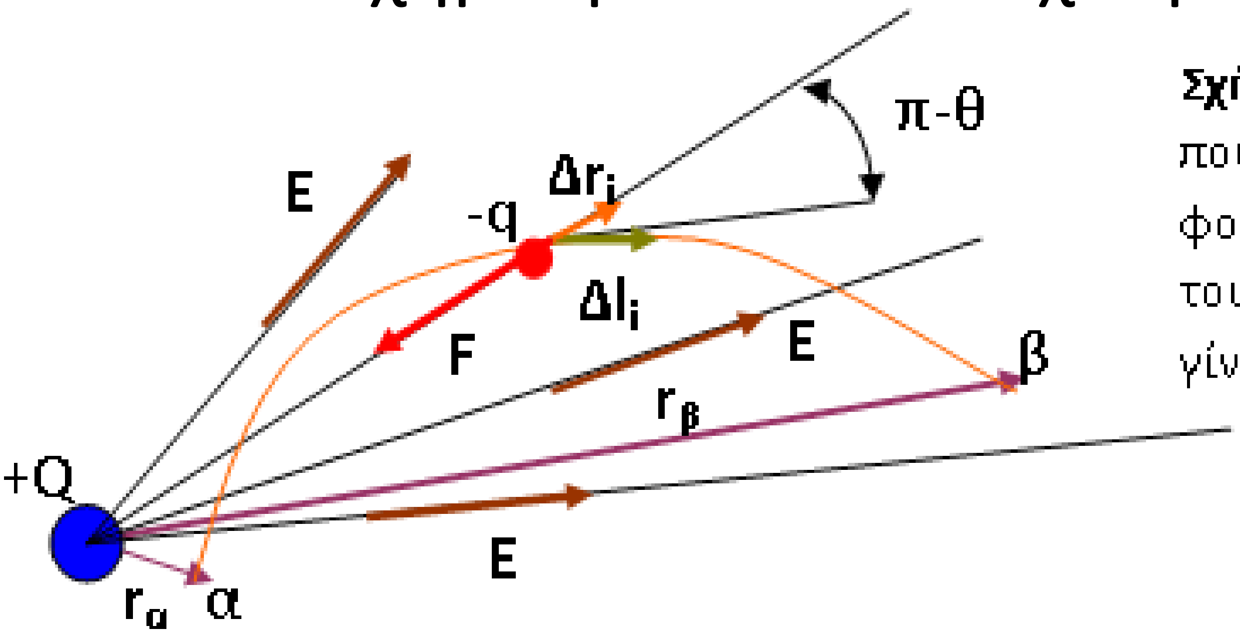
- Για κίνηση από (α) σε (β)



Σχήμα 1.9 Το έργο που παράγει η δύναμη F είναι ανεξάρτητο από την διαδρομή που ακολουθήθηκε

Έργο σε ηλεκτρικό πεδίο

Από το σχήμα φαίνεται να έχουμε αρνητικό έργο



Σχήμα 1.10 Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από σημειακό φορτίο είναι ακτινικό. Η κίνηση του δοκιμαστικού φορτίου −q γίνεται κατά την φορά α προς β.

Κεντρικές δυνάμεις είναι διατηρητικές (βαρύτητα, Coulomb)

$$W_{\alpha\beta} = \lim_{\substack{\Delta l \to 0 \\ N \to \infty}} \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\Delta} \mathbf{l}_i \right) = \lim_{\substack{\Delta l \to 0 \\ N \to \infty}} \left(\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \Delta l_i \cdot \cos\theta_i \right) = \ldots. = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_\alpha} - \frac{1}{r_\beta} \right) < 0$$

Δυναμική ενέργεια συστήματος φορτίων

- Ορίζω την δυναμική ενέργεια $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r}$
- Στην περίπτωση του πεδίου σημειακού φορτίου ορίζουμε ως σημείο αναφοράς ένα σημείο που βρίσκεται σε άπειρη απόσταση (παρατηρείστε ότι στο σημείο αυτό η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν) οπότε **η δυναμική ενέργεια σε ένα σημείο α**, U_α, **είναι το έργο που παράγει η ηλεκτροστατική δύναμη για να μετακινήσει το δοκιμαστικό φορτίο από το σημείο α μέχρι το άπειρο.**

$$W_{\alpha\to\beta} = U_\alpha - U_\beta \qquad \Rightarrow \qquad W_{\alpha\to\infty} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r_\alpha}$$

Πρόσημο δυναμικής ενέργειας

- Η δυναμική ενέργεια που έχει ένα δοκιμαστικό φορτίο q όταν βρίσκεται στο πεδίο ενός **ετερώνυμου** φορτίου Q είναι **αρνητική.**

- Η δυναμική ενέργεια ενός δοκιμαστικού φορτίου q που βρίσκεται στο πεδίο ενός **ομώνυμου** φορτίου Q είναι **θετική**.

Δυναμική ενέργεια συστήματος φορτίων

- Ξεκινάμε με κενό χώρο. Όλα τα φορτία που μας ενδιαφέρουν είναι σε άπειρη απόσταση και δεν μας επηρεάζουν. Κατόπιν, παίρνουμε ένα στοιχειώδες φορτίο και το φέρνουμε στην τελική του θέση. Δεν καταναλίσκουμε κανένα έργο για αυτή την μετακίνηση επειδή δεν υπάρχουν δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο φορτίο. Όταν μετακινήσουμε το δεύτερο στοιχειώδες φορτίο στην τελική του θέση, πρέπει να ασκήσουμε δύναμη πάνω στο φορτίο επειδή πρέπει να αντιταχθούμε στην δύναμη Coulomb που τείνει να επιταχύνει το φορτίο μας είτε ελκτικά είτε απωστικά. Άρα παράγουμε έργο και αυτό αποθηκεύεται σαν δυναμική ενέργεια στο ηλεκτρικό πεδίο του συστήματος μας. Το τρίτο στοιχειώδες φορτίο δέχεται δυνάμεις από τα δύο πρώτα φορτία και άρα έχει δυναμική ενέργεια που οφείλεται ξεχωριστά στα ηλεκτρικά πεδία των δύο πρώτων φορτίων. Η διαδικασία συνεχίζεται έτσι μέχρι όλο το φορτίο να καταλάβει την τελική του θέση.

Διαφορετική προσέγγιση

- Η δυναμική ενέργεια μπορεί ισοδύναμα να περιγραφεί ως:
- το έργο που παράγει μία ηλεκτροστατική δύναμη για να μετακινηθεί ένα φορτίο από το σημείο (α) στο άπειρο

ή

- Το έργο της δύναμης που ασκεί ένας πειραματιστής για να μετακινήσει ένα φορτίο από το άπειρο στο σημείο (α)

$$W_{\alpha\beta} = U_\alpha - U_\beta = -\Delta U$$

- Ας υποθέσουμε ότι το συνολικό φορτίο αποτελείται από **δύο ομώνυμα** φορτία. Βάζουμε το πρώτο στην τελική του θέση. Ξεκινάμε τώρα την μετακίνηση του δεύτερου φορτίου από το άπειρο μέχρι την τελική του θέση.
- η αρχική θέση α είναι στο άπειρο και η τελική του θέση είναι στο β. Το έργο που παράγει η δύναμη Coulomb κατά την μετακίνηση από το άπειρο στο σημείο β είναι αρνητικό.

$$W_{\infty\to\beta} = U_\infty - U_\beta \qquad \Rightarrow \quad U_\beta = -W_{\infty\to\beta} > 0$$

Ηλεκτρικό δυναμικό

Το δυναμικό V είναι η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου. Αν σε ένα ηλεκτρικό πεδίο τοποθετήσουμε ένα δοκιμαστικό φορτίο q το οποίο έχει δυναμική ενέργεια U, τότε το δυναμικό στο σημείο αυτό θα είναι V=U/q.

$$V_\beta - V_\alpha = \frac{U_\beta - U_\alpha}{q} \Leftrightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

Για να είμαστε ακριβείς μπορούμε μόνο να μιλάμε για διαφορές δυναμικής ενέργειας και κατά συνέπεια και δυναμικού

Μονάδα μέτρησης του δυναμικού είναι το 1 Volt (V). Από την παραπάνω εξίσωση βλέπουμε ότι 1 V = 1 J/Cb

Υπολογισμός διαφοράς δυναμικού

Μπορούμε τώρα να συσχετίσουμε την διαφορά δυναμικού με το ηλεκτρικό πεδίο και το παραγόμενο από την ηλεκτροστατική δύναμη έργο.

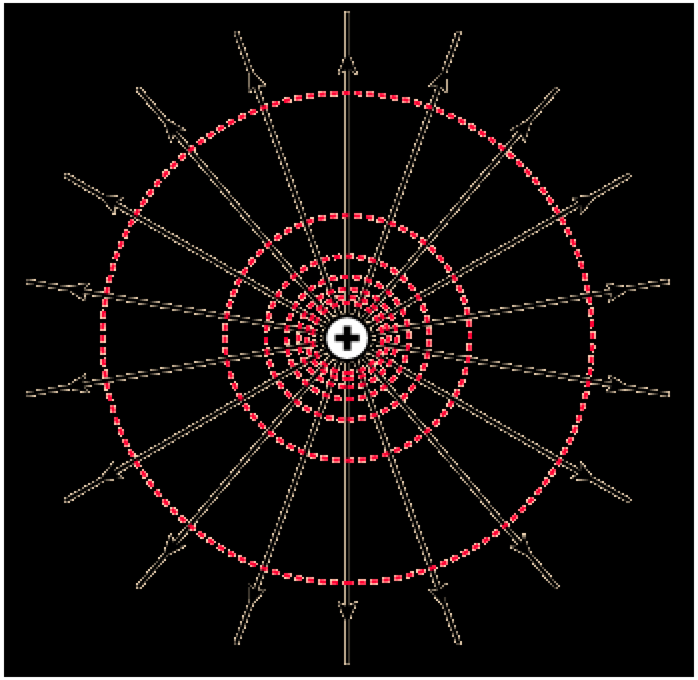
$$V_\beta - V_\alpha = -\frac{U_\alpha - U_\beta}{q} = -\frac{W_{\alpha\beta}}{q} = -\frac{1}{q}\int_\alpha^\beta \mathbf{F}_{el}\cdot\mathbf{dl} = -\int_\alpha^\beta \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}$$

Διαβάζουμε: **«Δυναμικό στο β ως προς δυναμικό στο α»** και γράφουμε $V_{\beta\alpha} \equiv V_\beta - V_\alpha$

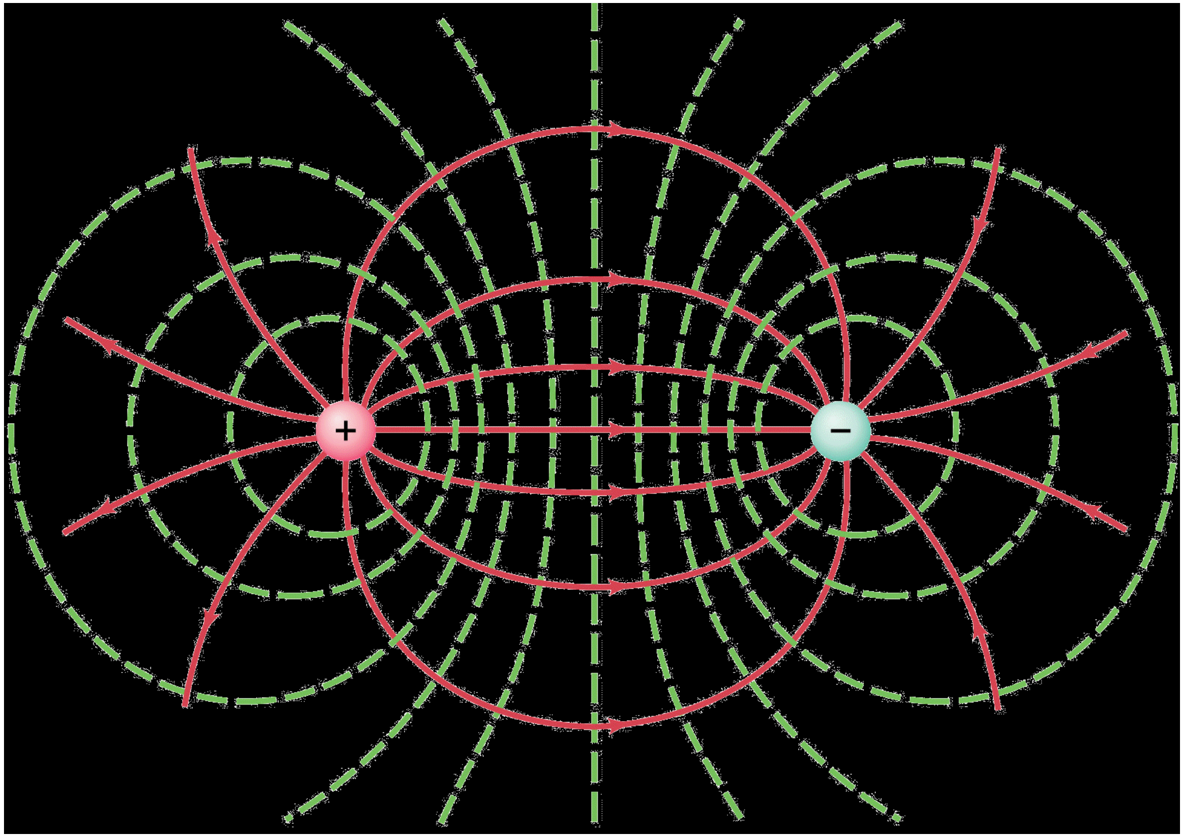
Ισοδυναμικές επιφάνειες

- Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν ίδιο δυναμικό
- Δεν απαιτείται έργο για την μετακίνηση πάνω σε ισοδυναμική επιφάνεια
- Αν μόνο το αρχικό και τελικό σημείο της μετακίνησης είναι στην ίδια ισοδυναμική πειφάνεια το συνολικό απαιτούμενο έργο είναι μηδέν
- Οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι κάθετες στο $\vec{E}$

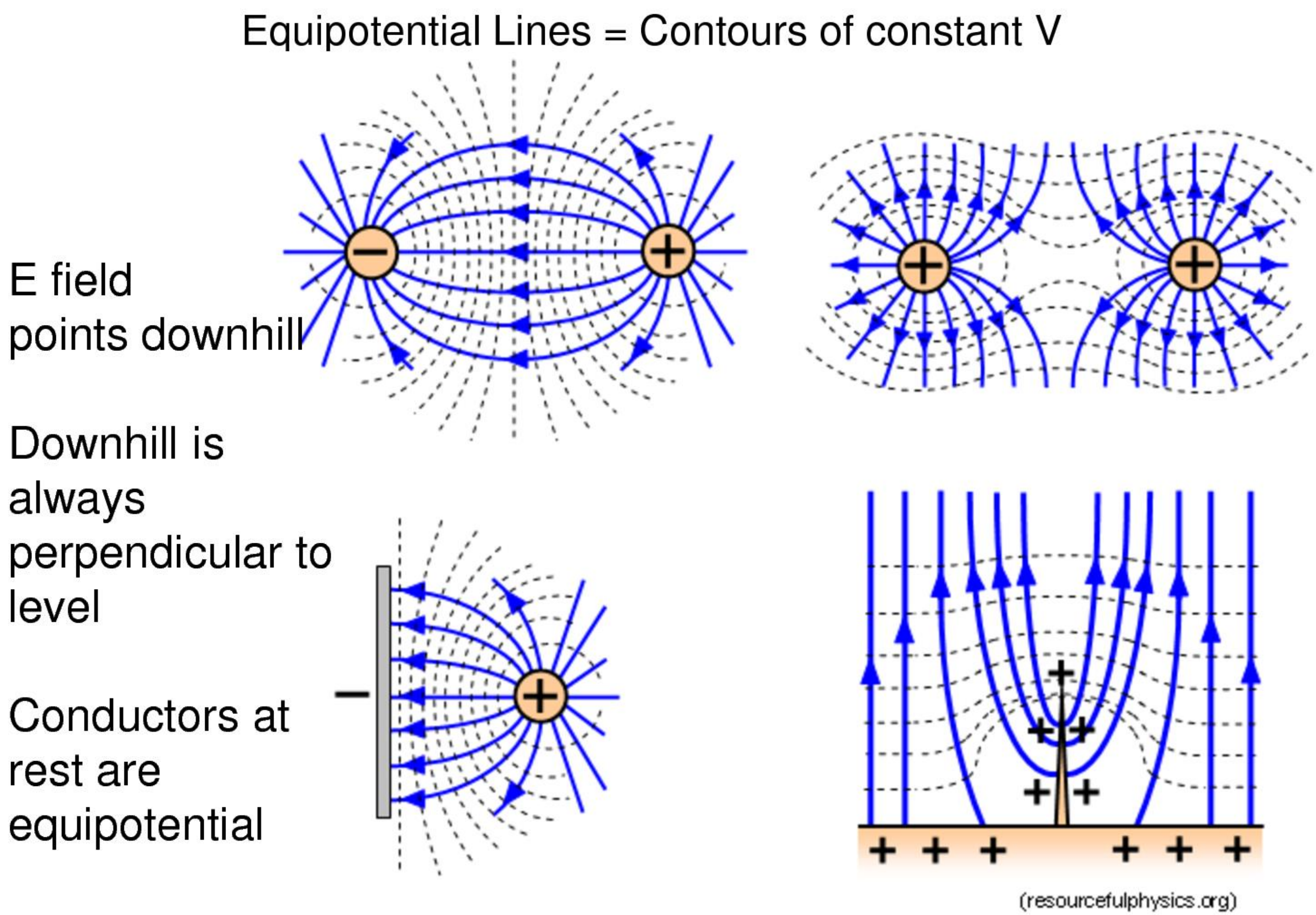
Μορφές ηλεκτρικού πεδίου και ισοδυναμικών επιφανειών



Μορφές ηλεκτρικού πεδίου και ισοδυναμικών επιφανειών



Μορφές ηλεκτρικού πεδίου και ισοδυναμικών επιφανειών



Εξαγωγή του E από το ηλεκτρικό δυναμικό

- Είδαμε ότι $$V_\beta - V_\alpha = -\int_\alpha^\beta \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}$$

- Μπορώ να γράψω $$V_\beta - V_\alpha = \int_\alpha^\beta dV \;= -\int_\alpha^\beta \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}$$

- άρα $\mathrm{dV} = \mathbf{-\ E}\cdot\mathbf{dl}$
- Αν E έχει μόνο Ex συνιστώσα,

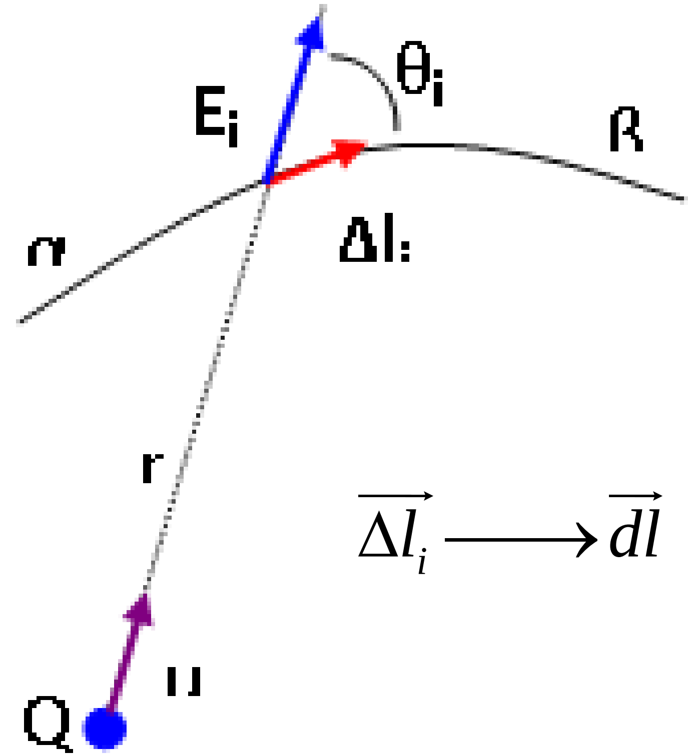
$$\mathrm{dV} = -\ \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = -E_x dx \Rightarrow E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Παράδειγμα: Υπολογισμός δυναμικού

Βρείτε το δυναμικό που δημιουργείται από σημειακό φορτίο σε κάθε σημείο του χώρου.

Γνωρίζουμε ότι

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{u}}$$



$$\overrightarrow{\Delta l_i} \longrightarrow \overrightarrow{dl}$$

Σχήμα

παραδείγματος1.5.1

- Γράφουμε τα προηγούμενα

$$V_\beta - V_\alpha = -\int_\alpha^\beta \vec{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_\alpha^\beta \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{u}} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Όμως $\hat{\mathbf{u}} \cdot \overrightarrow{dl} = udl\cos\theta = (1)(dl\cos\theta) = dr$

Άρα

$$V_\beta - V_\alpha = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\alpha^\beta \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

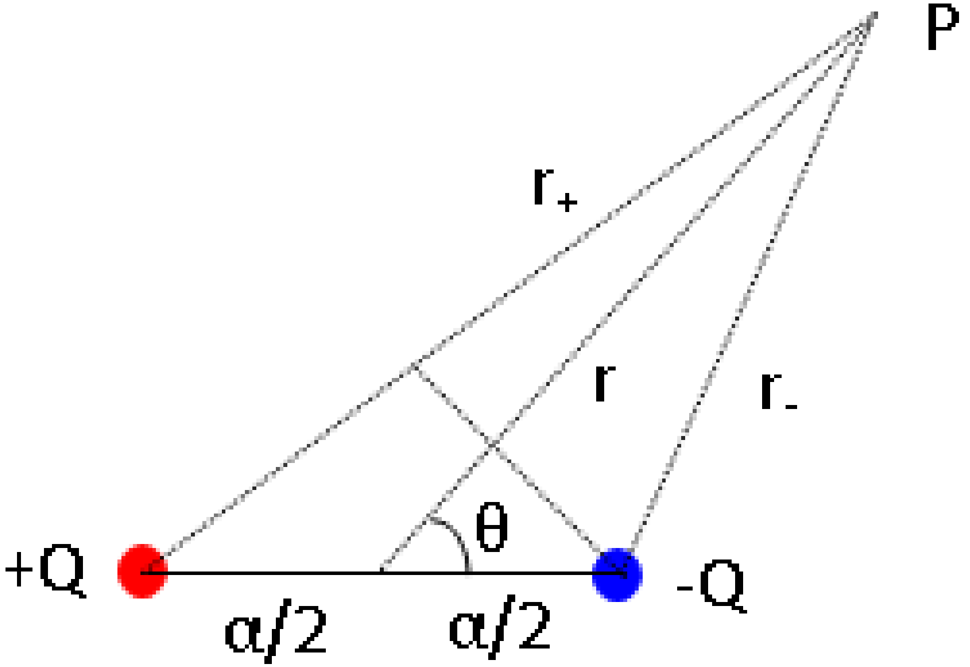
Συνήθως το σημείο αναφοράς το παίρνουμε στο άπειρο, $r_A \to \infty$ και $V_A=0$,

Έτσι, τελικά

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

Παράδειγμα: Υπολογισμός δυναμικού

- *Βρείτε το δυναμικό ηλεκτρικού διπόλου*



Σχήμα παραδείγματος 1.5.1

- Θεωρώ μία μετακίνηση από το P μέχρι το άπειρο $a \longrightarrow P \qquad \beta \longrightarrow \infty$

$$V_\infty - V_P \cong -\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F_i} \cdot \mathbf{\Delta l_i} \Rightarrow$$

$$V_P \cong \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F_i} \cdot \mathbf{\Delta l_i} = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{F}_i^{+} + \mathbf{F}_i^{+}\right) \cdot \mathbf{\Delta l_i} \Rightarrow$$

$$V_P \cong \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{+} \cdot \mathbf{\Delta l_i} + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{-} \cdot \mathbf{\Delta l_i} = V_P^{+} + V_P^{-}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ.
ΑΛΓΕΒΡΙΚΟ
ΑΘΡΟΙΣΜΑ

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_- - r_+}{r_- \cdot r_+}$$

- Για αποστάσεις του P πολύ μεγαλύτερες από το μέγεθος του διπόλου

$$r_+ - r_- = a\cos\theta$$

Το μεσοεπίπεδο είναι ισοδυναμική επιφάνεια με δυναμικό μηδεν

και

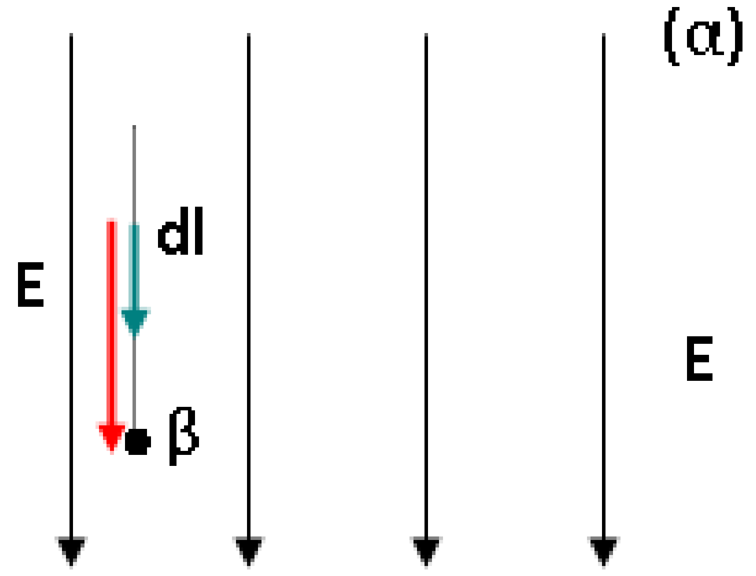
$$r_- \cdot r_+ = r^2$$

Τελικά

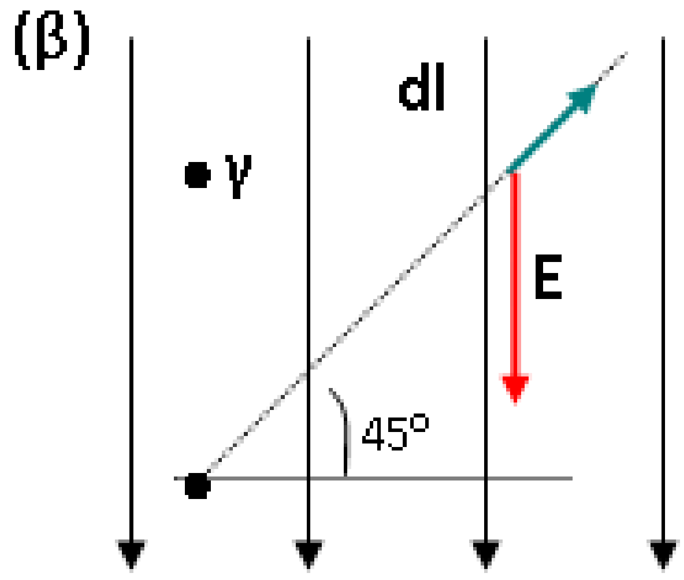
$$V_P = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{a\cos\theta}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p}{r^2}\cdot\cos\theta$$

Παράδειγμα: Υπολογισμός δυναμικού

Υπολογίστε την διαφορά δυναμικού κατά την μετακίνηση φορτίου από την θέση α στην θέση β στα σχήματα 1.11 και 1.12 (κατ᾽ευθείαν και μέσω του γ)



Σχήμα 1.11 Παράδειγμα 1.5.3.α



Σχήμα 1.12 Παράδειγμα 1.5.3.β

Τι περιμένουμε να δούμε

- Το ηλεκτρικό πεδίο είναι διατηρητικό. Κατά συνέπεια το έργο που παράγει η ηλεκτροστατική δύναμη είναι ανεξάρτητο από την διαδρομή που θα ακολουθήσουμε. Εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση. Άρα, και η διαφορά δυναμικού θα εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση.

Χρησιμοποιούμε την σχέση $V_\beta - V_\alpha = -\int_\alpha^\beta \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}$

(α) Ε και dl ομόρροπα $\Delta V = V_\beta - V_\alpha = -Ed$

Από τον ορισμό

$$V_\beta - V_\alpha = \frac{U_\beta - U_\alpha}{q} \Leftrightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

Βλέπουμε ότι το δυναμικό στο β είναι χαμηλότερο από το δυναμικό στο α. Πράγματι ένα θετικό φορτίο (ας πούμε ένα θετικό ιόν με κάποια μάζα) που θα βρισκόταν μέσα στο πεδίο και θα έκανε την κίνηση από το α στο β, θα επιταχυνόταν, θα κέρδιζε δηλαδή σε κινητική ενέργεια με ταυτόχρονη μείωση της δυναμικής του ενέργειας, πράγμα που ισοδυναμεί με μείωση του ηλεκτρικού δυναμικού μεταξύ των σημείων α και β (β) Κίνηση από το α μέσω του γ στο β.

$$\Delta V = V_\beta - V_\alpha = \left(V_\gamma - V_\alpha\right) + \left(V_\beta - V_\gamma\right)$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ α και γ είναι αντίθετη από το αποτέλεσμα του (α) επειδή η κίνηση από το α στο γ γίνεται σε κατεύθυνση αντίθετη από την φορά του ηλεκτρικού πεδίου. Η κίνηση από το γ στο β είναι κάθετη στο **E**, άρα το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν άρα δεν υπάρχει διαφορά δυναμικού μεταξύ γ και β. Κινούμαστε πάνω σε ισοδυναμική επιφάνεια.

$$\Delta V = V_\beta - V_a = \left(V_\gamma - V_\alpha\right) + \left(V_\beta - V_\gamma\right) = Ed > 0$$

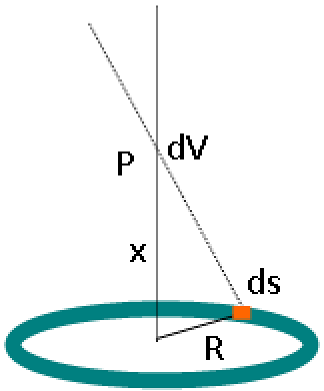
- Αν η κίνηση τώρα γίνει κατευθείαν από το α στο β, τότε

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{\Delta l_i} = E\cdot\Delta l_i \cdot\cos\left(135^\circ\right) = -E\cdot\Delta l_i \cdot\cos\left(45^\circ\right)$$

$$\Delta V \equiv V_\beta - V_\alpha = -\lim_{\substack{\Delta l\to 0\\ N\to\infty}}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{E}\cdot\mathbf{\Delta l_i}\right) = E\lim_{\substack{\Delta l\to 0\\ N\to\infty}}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathit{\Delta} l_i\cos 45^\circ\right) = Ed > 0$$

Παράδειγμα. Υπολογισμός ηλεκτρικού δυναμικού συνεχούς κατανομής φορτίου

Να βρείτε το δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου πάνω στον άξονα του και σε απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου.



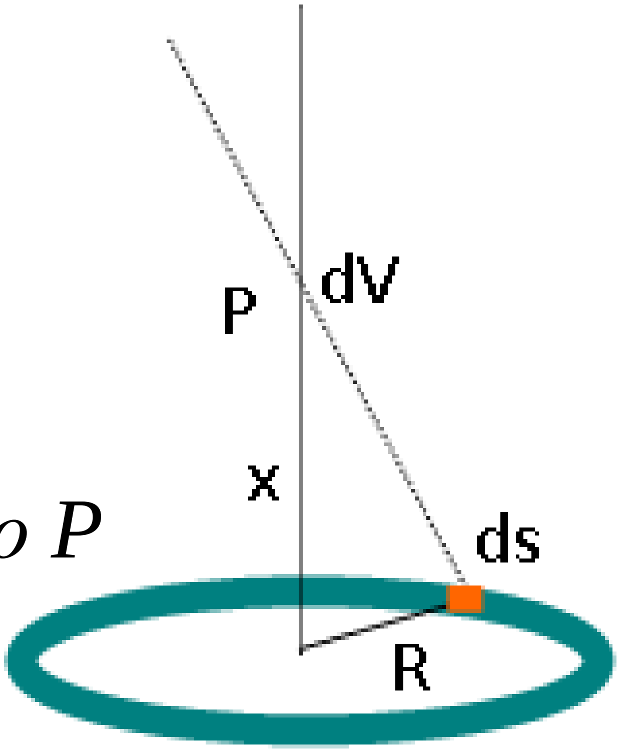
Υπολογίσαμε την ένταση ηλεκτρικού πεδίου πάνω στον άξονα του δακτυλίου. Εδώ θα επαναλάβουμε την μεθοδολογία για να υπολογίσουμε το δυναμικό. Η βασική διαφορά στον υπολογισμό προέρχεται από το γεγονός ότι το **δυναμικό είναι βαθμωτό μέγεθος και άρα η άθροιση (ολοκλήρωση) είναι αλγεβρική, ενώ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι διανυσματικό μέγεθος και επομένως κάνουμε διανυσματική άθροιση (ολοκλήρωση).**

Το δυναμικό στο σημείο P που οφείλεται σε ένα στοιχειώδες φορτίο dq είναι

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

$$dq = Q\frac{ds}{2\pi R}$$

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$



Άρα γράφουμε για το δυναμικό στο P

$$V = \lim_{\substack{ds \to 0 \\ N \to \infty}} \left(\sum \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \frac{ds}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \right) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \frac{1}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \lim_{\substack{ds \to 0 \\ N \to \infty}} \left(\sum ds \right) \Rightarrow$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

Πώς υπολογίζεται η ένταση ηλεκτρικού πεδίου από το ηλεκτρικό δυναμικό;

- Γνωρίζουμε από παλαιότερα ότι

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(x^2 + R^2\right)^{-3/2} x$$

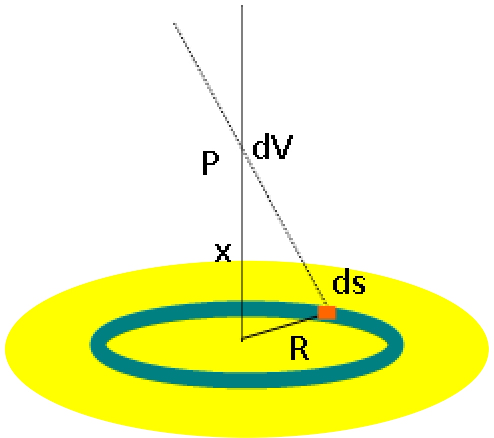
- Τώρα βρήκαμε ότι

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

- Ισχύει η σχέση; $E = -\dfrac{dV}{dx}$

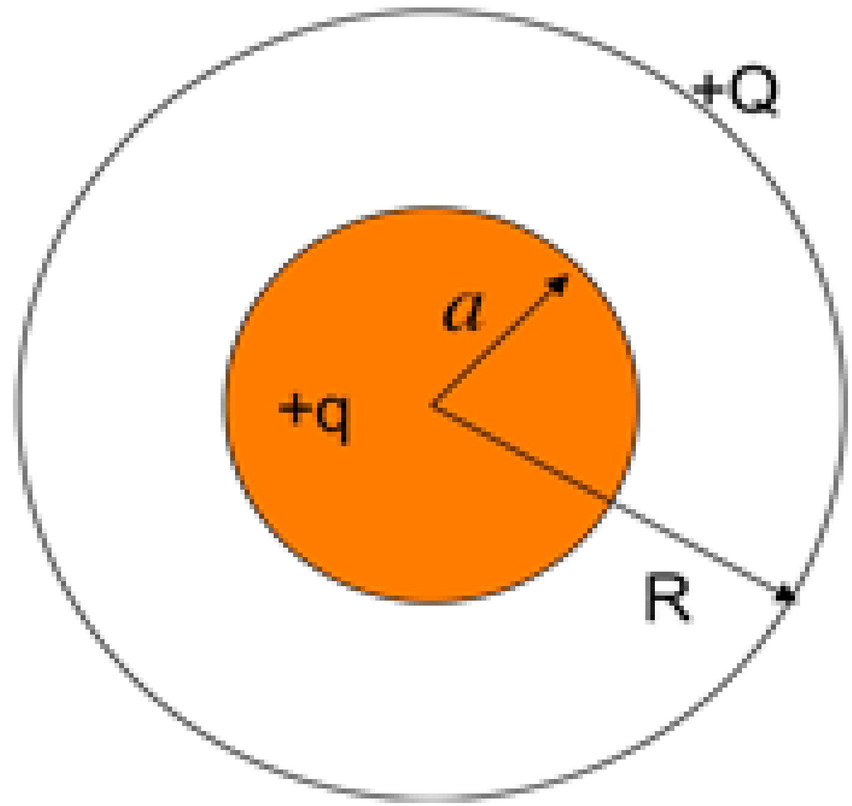
Παράδειγμα. Υπολογισμός ηλεκτρικού δυναμικού συνεχούς κατανομής φορτίου

Να βρείτε το δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου πάνω στον άξονα του και σε απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου.



Παράδειγμα: Υπολογισμός διαφοράς δυναμικού

- Μια αγώγιμη σφαίρα ακτίνας α είναι ομόκεντρη με έναν μεγαλύτερο λεπτό σφαιρικό φλοιό ακτίνας R. Αν τα φορτία των σφαιρών έχουν τιμές +q και +Q αντίστοιχα, να βρεθεί η διαφορά δυναμικού Vα-VR μεταξύ των δύο σφαιρών.



Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss, παίρνοντας σαν επιφάνεια Gauss σφαίρα ακτίνας r, της οποίας το κέντρο συμπίπτει με το κέντρο των δύο σφαιρών ($a < r < R$).

$$\int \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{+q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int EdA\cos 0 = \frac{+q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\int dA = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο έχει ακτινική κατεύθυνση προς τα έξω.

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο σφαιρών βρίσκεται από την παρακάτω έκφραση

$$V_a - V_R = \int_a^R \vec{E} \bullet d\vec{r} = \int_a^R Edr\cos 0 = \int_a^R Edr = \int_a^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^R \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)$$

Δηλαδή δεν εξαρτάται από το φορτίο του εξωτερικού φλοιού

Παράδειγμα: Υπολογισμός διαφοράς δυναμικού

- Σφαιρική σταγόνα νερού, που φέρει φορτίο , έχει δυναμικό στην επιφάνειά της. (α) Πόση είναι η ακτίνα της σταγόνας; (β) Αν δύο τέτοιες σταγόνες, με το ίδιο φορτίο και ακτίνα, ενωθούν για να σχηματίσουν μια μόνο σφαιρική σταγόνα, ποιο είναι το δυναμικό στην επιφάνεια της νέας σταγόνας που σχηματίστηκε μ' αυτό τον τρόπο;

(α) Το δυναμικό στην επιφάνεια της σφαίρας είναι ίδιο με την περίπτωση που όλο το φορτίο βρίσκεται στο κέντρο της σφαιρικής κατανομής, δηλαδή,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \Rightarrow R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{V}$$

Με αντικατάσταση

$$R = \frac{9x10^9 x3x10^{-11}}{500} N.m^2.C^{-2}\frac{C}{V} = 5.4x10^{-4} m = 0.54mm$$

(β) Έστω η ακτίνα της νέας σταγόνας. Ο όγκος της θα είναι διπλάσιος του όγκου της μιας. Επομένως:

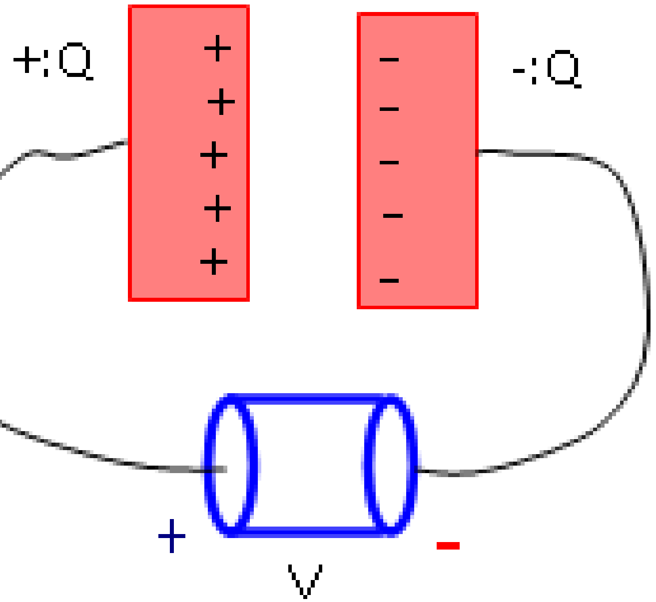
$$\frac{4}{3}\pi R_1^3 = 2.\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R_1^3 = 2R^3 \Rightarrow R_1 = (2)^{\frac{1}{3}} R = 1.26R$$

Εξάλλου, το φορτίο της νέας σταγόνας είναι 2Q, λόγω της αρχής διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου. Άρα το δυναμικό στην επιφάνεια της νέας σταγόνας θα είναι:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{(2)^{\frac{1}{3}}R} = 794V.$$

Πυκνωτές

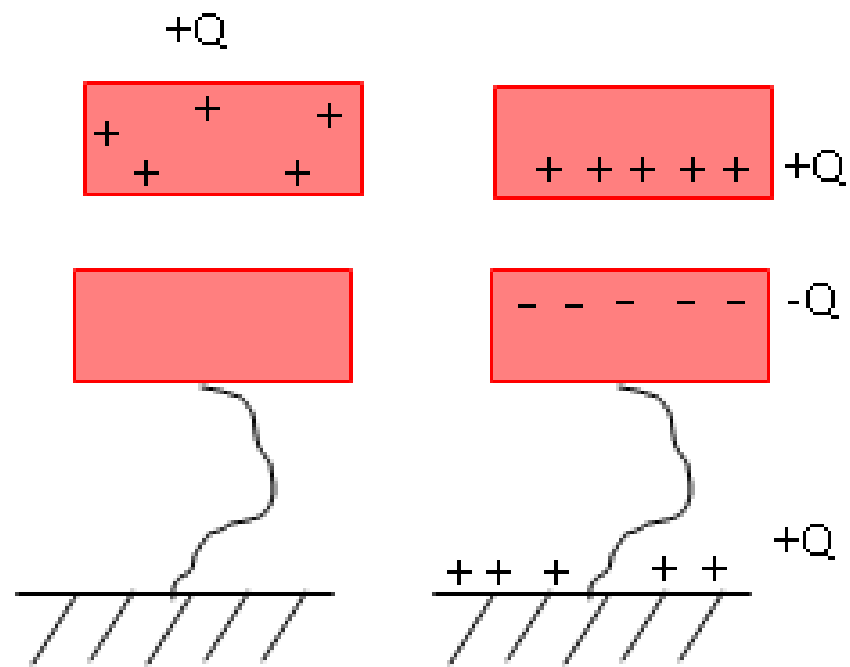
- Μεταλλικά σώματα (τυχαίου σχήματος) που συνδέονται με τους πόλους μίας μπαταρίας
- Φορτίο πυκνωτή = φορτίο ενός οπλισμού
- Δυναμικό πυκνωτή η διαφορά δυναμικού των οπλισμών



Σχήμα 1.13.α Σύστημα πυκνωτή και μπαταρίας. Ο πυκνωτής φορτίζεται με φορτίο Q. Ανάμεσα στους οπλισμούς επικρατεί διαφορά δυναμικού V.

Πυκνωτές

- Φόρτιση πυκνωτή με το χέρι
- Εμφάνιση ίσου και αντίθετου φορτίου στους δύο οπλισμούς
- Μπορούμε να προσθέτουμε φορτίο απεριόριστα;



Σχήμα 1.13.β Αριστερά, τοποθετούμε θετικά φορτία +Q στον ένα οπλισμό, ενώ ο άλλος είναι ουδέτερος και γειωμένος. Δεξιά, ο δεύτερος οπλισμός φορτίζεται με φορτίο -Q εξ επαγωγής.

Χωρητικότητα

- Ορισμός $$C \equiv \left|\frac{Q}{V}\right|$$
- Μονάδα 1Farad=1 C/V
- Ένας σφαιρικός μονωμένος αγωγός αποτελεί πυκνωτή (σφαιρικό) αν θεωρήσουμε τον άλλο οπλισμό σφαιρικό κέλυφος σε ακτίνα άπειρη

$$V = V_R - V_\infty = \frac{kQ}{R} - 0 = \frac{kQ}{R}$$

Άρα $$C \equiv \left|\frac{Q}{V}\right| = \frac{Q}{kQ/R} = \frac{R}{k} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Μέγεθος Farad

- Για να έχουμε C=1F, Η σφαίρα πρέπει να έχει ακτίνα

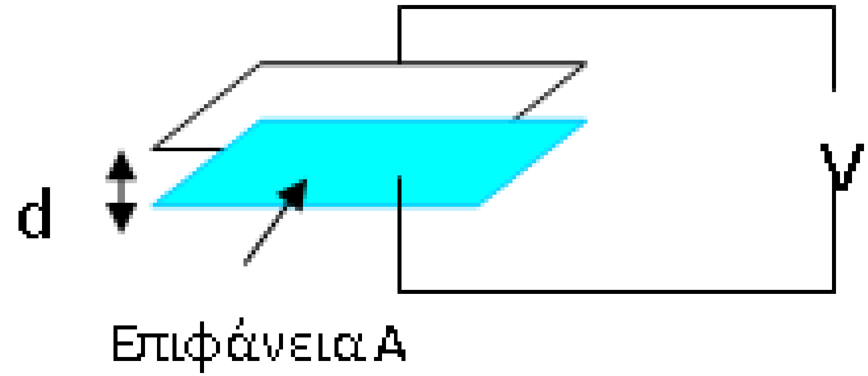
$$\left.\begin{aligned} &C = 4\pi\varepsilon_0 R \Rightarrow R = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0} = kC = \left(9\times10^9\, NC^{-2}m^2\right)\left(1F\right) \\ &1F = 1C/V = 1C/\left(JC^{-1}\right) = 1J^{-1}C^2 = 1N^{-1}m^{-1}C^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 9\times10^9\, m$$

- Πooooολύ μεγάλη!!

Επίπεδοι πυκνωτές

Οι οπλισμοί είναι δύο επίπεδες παράλληλες πλάκες με εμβαδόν A και Φορτίο +Q , -Q



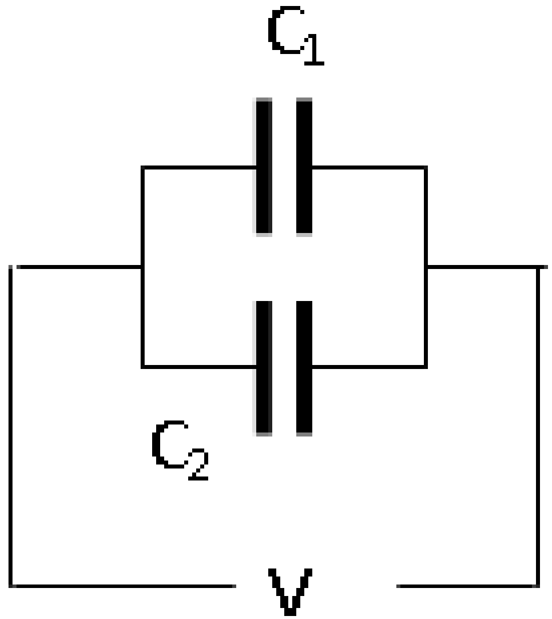
Σχήμα 1.13.γ Παράδειγμα επίπεδου πυκνωτή

$$E = 2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad V = Ed = \sigma\frac{d}{\varepsilon_0} = \left(\frac{\mathrm{Q}}{A}\right)\frac{d}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 \mathrm{A}}{d}$$

Συνδεσμολογία πυκνωτών παράλληλα

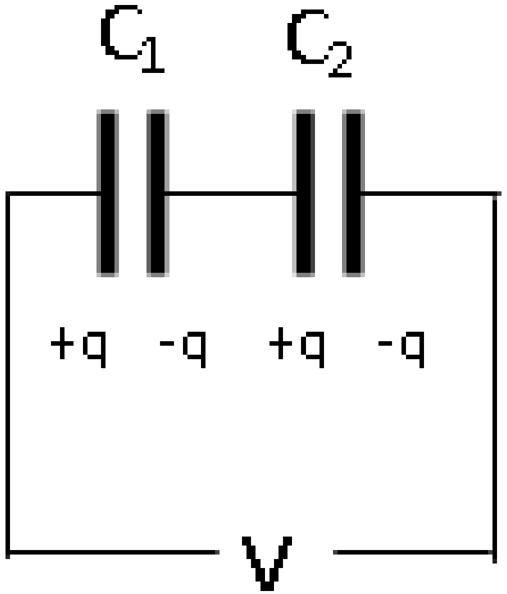
- Ίδια τάση στους οπλισμούς
- Τι είναι ένας ισοδύναμος πυκνωτής (Ceq, ίδιο V, άθροισμα φορτίων)



$$\left.\begin{array}{l} Q_{eq} = Q_1 + Q_2 \\ Q_{eq} = C_{eq} V \quad Q_1 = C_1 V \quad Q_2 = C_2 V \end{array}\right\} \Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2$$

Συνδεσμολογία πυκνωτών σε σειρά

- Ίδιο φορτίο
- Τι είναι ο ισοδύναμος πυκνωτής; (Ceq, ίδιο q)



$$\left.\begin{array}{l} V = \dfrac{Q}{C_{eq}} \quad V_1 = \dfrac{Q}{C_1} \quad V_2 = \dfrac{Q}{C_2} \\ V = V_1 + V_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

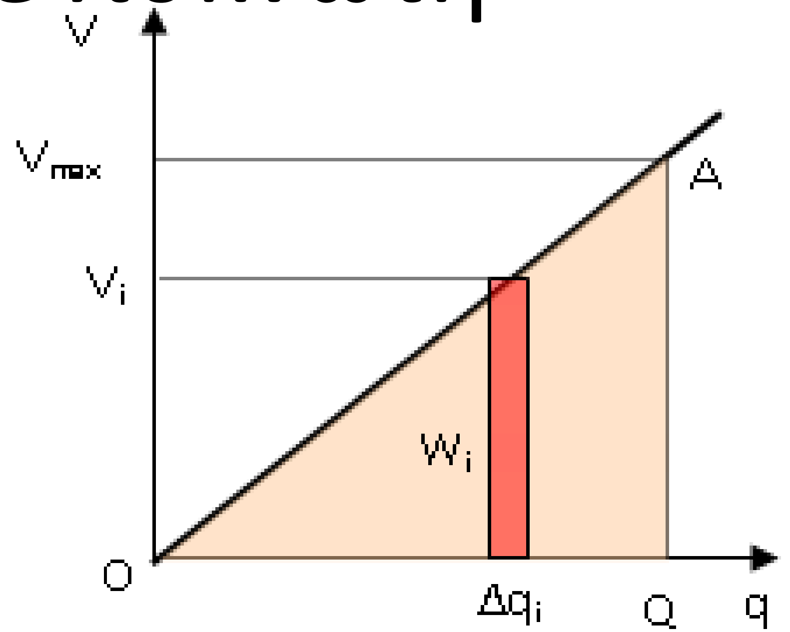
Ενέργεια σε πυκνωτή

- Αρχίζω από αφόρτιστο πυκνωτή και μεταφέρω ένα στοιχειώδες dq κάθε φορά

$$dW = Vdq = \frac{q}{C}dq$$

$$W = U = \int_0^{V_{\max}} Vdq = \int_0^{Q} \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C}$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}V_{\max}Q = \frac{1}{2}CV_{\max}^2$$



Σχήμα 1.17 Το έργο που παρήχθη κατά την φόρτιση του πυκνωτή είναι το εμβαδόν του σκιασμένου τριγώνου OQA.

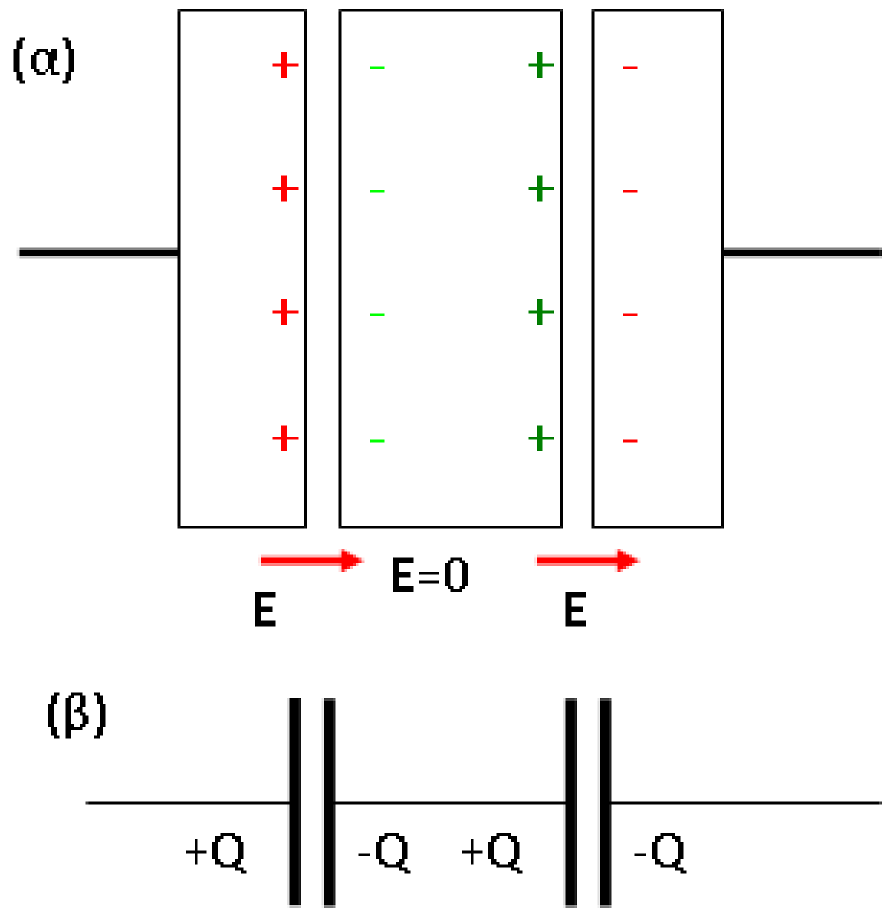
Πυκνότητα ενέργειας

- Είναι ο λόγος την αποθηκευμένης ενέργειας προς τον όγκο που καταλαμβάνει το ηλεκτρικό πεδίο
- Στην ειδική περίπτωση του επίπεδου πυκνωτή έχω

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} \\ C &= \mu_0 \frac{A}{d} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{V}{d}\right)^2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

- Η τελευταία σχέση είναι γενικό αποτέλεσμα

Εισαγωγή μεταλλικής πλάκας ανάμεσα στους οπλισμούς

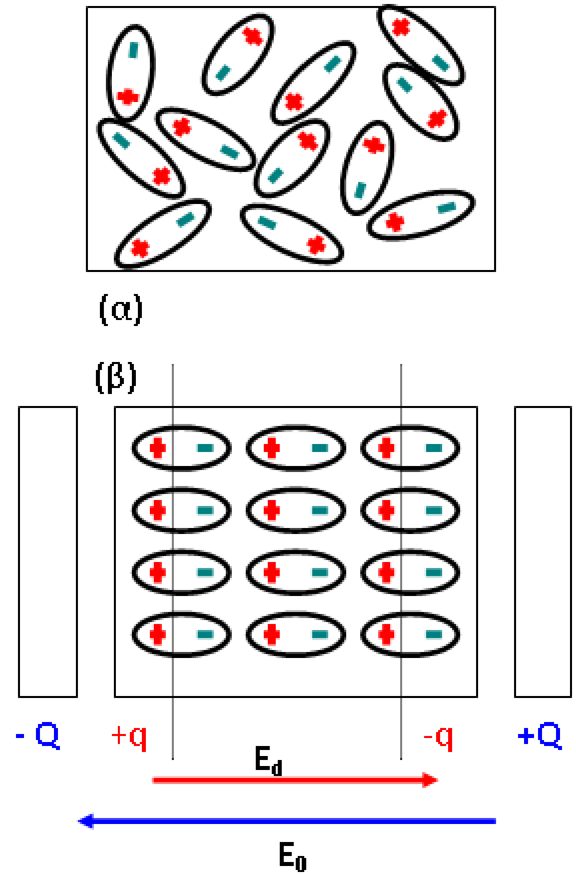


Σχήμα 1.14 (α) Εισαγωγή **μεταλλικής** πλάκας ανάμεσα στους οπλισμούς ενός πυκνωτή (β) Ισοδύναμο κύκλωμα πυκνωτών

Καταλήγουμε με δύο πυκνωτές συνδεδεμένους σε σειρά, ίδια επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ αλλά με πολύ μικρότερα διάκενα d1, d2

Εισαγωγή διηλεκτρικής πλάκας ανάμεσας τους οπλισμούς

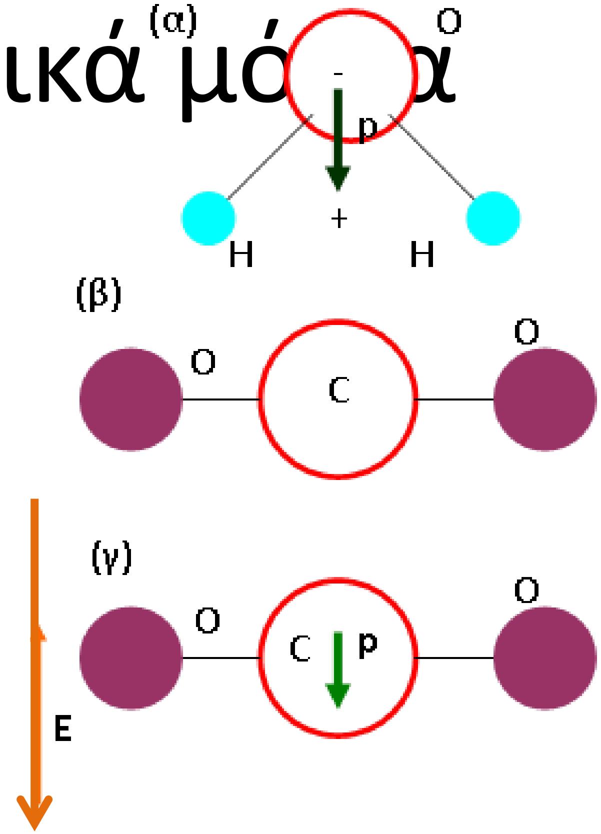
- Μονωτικά υλικά (αέρας, χαρτί, κενό, πλαστικό, τεφλόν, κλπ)
- Εγκατάσταση εσωτερικού ηλεκτρικού πεδίου λόγω του διηλεκτρικού αντίθετο προς το κύριο
- E=E0-Ed



Σχήμα 1.16 Διηλεκτρικό με πολικά μόρια μέσα σε πυκνωτή. (α) Απουσία ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}_0$. Τα μόρια έχουν τυχαίους προσανατολισμούς και άρα μηδενική συνολική διπολική ροπή. (β) Στην παρουσία $\mathbf{E}_0$, τα μόρια του διηλεκτρικού προσανατολίζονται (πολώνονται). Έτσι δημιουργούν επαγόμενο καθαρό φορτίο q στην επιφάνεια του διηλεκτρικού και άρα επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_d$. Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον πυκνωτή είναι $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0+\mathbf{E}_d$

Πολικά και μη πολικά μό α

- Τα πολικά έχουν διπολική ροπή, δηλ. η πλεόν πιθανή θέση της πλεόν πιθανής πιθανότητας εύρεσης των αρνητικών φορτίων δεν ταυτίζεται με το κέντρο βάρους των θετικών
- Σε ηλεκτρικό πεδίο προσανατολίζονται
- Τα μη πολικά επίσης δεν έχουν διπολική ροπή, όμως προσανατολίζονται εξ επαγωγής όταν βρεθούν μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο



Σχήμα 1.15 (α) Παράδειγμα πολικού μορίου. Νερό (H_2O). Έχει διπολική ροπή **p** (β) Παράδειγμα μη πολικού μορίου στην απουσία ηλεκτρικού πεδίου (διοξείδιο του άνθρακος (CO_2). Δεν έχει διπολική ροπή. (γ) Παράδειγμα μη πολικού μορίου στην παρουσία ηλεκτρικού πεδίου. Έχει αποκτήσει διπολική ροπή **p** εξ επαγωγής..

Χωρητικότητα πυκνωτή με διηλεκτρικό

- Φορτισμένος πυκνωτής αλλά όχι συνδεδεμένος (φορτίο Q, δυναμικό V0)
- Όταν εισάγεται διηλεκτρικό το δυναμικό του μειώνεται (αφού μειώνεται το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς)

$$V = \frac{V_0}{\kappa}$$

κ: σχετική διηλεκτρική σταθερά

- Το φορτίο του παραμένει το ίδιο

Χωρητικότητα πυκνωτή με διηλεκτρικό

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{V_0 / \kappa} = \kappa C_0$$

- Για επίπεδο πυκνωτή

$$C = \frac{Q}{V} = \kappa C_0 = \kappa \frac{\varepsilon_0 \mathrm{A}}{d} = \frac{\varepsilon \mathrm{A}}{d}$$

- $\varepsilon=\varepsilon_0\kappa$ όπου ε η διηλεκτρική σταθερά του μέσου

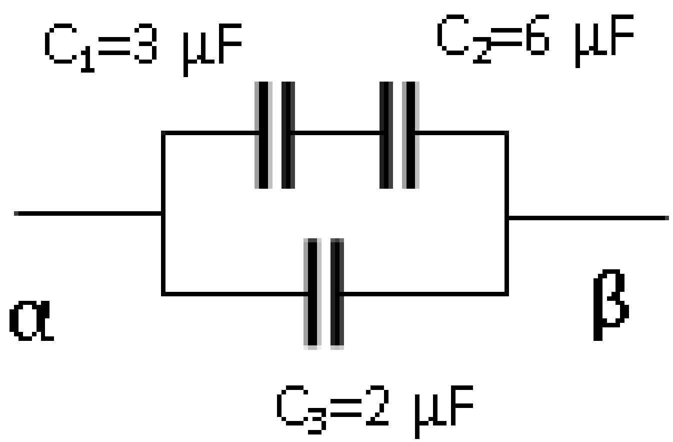
Διηλεκτρικές σταθερές

Διηλεκτρική σταθερά του κενού: $\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}\ C^2/\ N{\cdot}m^2$

Υλικό	**Σχετική Διηλεκτρική σταθερά κ**	**Αντοχή του διηλεκτρικού (V/m)** **Είναι η μέγιστη ένταση πεδίου χωρίς εκκενώσεις**
Κενό	1.000000	3 $X10^6$
Αέρας	1.000599	24 $X10^6$
Χαρτί	3.7	16 $X10^6$
Βακελίτη	4.9	24 $X10^6$
Τεφάλ	2.1	60 $X10^6$
Έλαιο σιλικόνης	2.5	15 $X10^6$
Τιτανιούχο στρόντιο	233	8 $X10^6$

Παράδειγμα

- Υπολογίστε την ισοδύναμη χωρητικότητα της συνδεσμολογίας



$$C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{3 \cdot 6}{3+6} \mu F = 2\,\mu F$$

$$C = C_{12} + C_3 = 2\mu F + 2\mu F = 4\mu F$$

(β) Αν τα άκρα της συνδεσμολογίας συνδεθούν με πηγή 12 V, υπολογίστε την τάση και το φορτίο κάθε πυκνωτή.

Αν η συνδεσμολογία συνδεθεί με μπαταρία 12 V ο πυκνωτής C_1 θα είναι σε δυναμικό 12 V και το φορτίο του θα είναι

$$Q_1 = C_1 V = 24 \ \mu Cb$$

Ο ισοδύναμος πυκνωτής C_{23} βρίσκεται επίσης υπό τάση 12 V και φορτίο

$$Q = C_{23} V = 48 \ \mu Cb$$

Ο πυκνωτής C_2 έχει φορτίο 48 μCb και βρίσκεται υπό τάση

$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = 8\,V$$

Ομοίως, ο πυκνωτής C_3 έχει φορτίο 48 μCb και βρίσκεται υπό τάση $V_3 = 4\,V$

Εφαρμογή

- *Ένας επίπεδος πυκνωτής έχει τετραγωνικούς οπλισμούς ακμής 20* cm.*Οι δύο ολισμοί απέχουν 1* mm *μεταξύ τους και χωρίζονται από ένα φύλλο χαρτί διηλεκτρικής σταθεράς 3.7. (α) Ποια είναι η χωρητικότητα του; (β) Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο που μπορεί να συγκρατήσει αν το μέγιστο ηλεκτρικό πεδίο που μπορεί να εφαρμοσθεί χωρίς να καταρρεύσει το διηλεκτρικό είναι 16* MV/m. *(γ) Ποια είναι η αποθηκευμένη ενέργεια σε αυτή την περίπτωση; (δ) Ποια είναι η πυκνότητα ενέργειας;*

(α) Υπάρχει διηλεκτρικό μεταξύ των οπλισμών. Η διηλεκτρική σταθερά που δίνεται είναι καθαρός αριθμός, άρα πρόκειται για τη σχετική διηλεκτρική σταθερά κ (κ=3.7). Η χωρητικότητα έχει αυξηθεί και είναι

$$C = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d} = 3.7 \cdot \left(8.854 \cdot 10^{-12} C^2 / N \cdot m^2\right) \frac{0.2^2 m^2}{10^{-3} m} = 1.31 \cdot 10^{-9} \frac{C^2}{N \cdot m} = 1.31 nF$$

(β) Στον πυκνωτή μπορεί να εφαρμοσθεί ένα μέγιστο δυναμικό

$$V_{\max} = E_{\max} d = \left(16 \times 10^6 \frac{V}{m}\right) \cdot \left(10^{-3} m\right) = 16 kV$$

Το μέγιστο φορτίο που μπορεί να κρατήσει είναι

$$Q_{\max} = CV_{\max} = \left(1.3 \times 10^{-9} F\right)\left(16 \times 10^3 V\right) = 20.8 \times 10^{-6} Cb = 20.8 \mu C$$

•

(γ) Η αποθηκευμένη ενέργεια

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\mathrm{CV}^2 = 0.5\left(1.31\times10^{-9}F\right)\left(16\times10^{3}V\right)^2 = 167.7\times10^{-3}J$$

(δ) Επειδή έχουμε και διηλεκτρικό η πυκνότητα ενέργειας είναι μεγαλύτερη από ότι χωρίς κατά τον παράγοντα της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς, κ

$$u = \frac{1}{2}\kappa\varepsilon_0 E^2 = 0.5\cdot 3.7\cdot\left(8.854\cdot10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2}\right)\left(16\times10^{6}\frac{V}{m}\right)^2 = 4.19\frac{kJ}{m^3}$$

Για να ελέγξουμε το αποτέλεσμα μπορούμε να πάμε και από τον ορισμό

- $u = \dfrac{\text{Αποθηκευμενη ενεργεια}}{\text{Ογκος}} = \dfrac{167.7\times10^{-3}J}{(0.2\,m)^2\cdot10^{-3}m} = 4.19\dfrac{kJ}{m^3}$

Εφαρμογή

- *Οι οπλισμοί ενός επίπεδου πυκνωτή βρίσκονται σε κενό και σε απόσταση 2 mm μεταξύ τους. Ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με 0.047 μC. Το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή είναι 4×10^6 V/m. (α) Ποιο είναι το δυναμικό του πυκνωτή; (β) Πόση είναι η χωρητικότητα του; (γ) Πόση είναι η επιφάνεια του κάθε οπλισμού;*

(α) $V = Ed = \left(4\times10^{6}V/m\right)\left(2\times10^{-3}m\right) = 8\times10^{3}V$

(β) $C = \dfrac{q}{V} = 5.9\times10^{-12}F = 5.9\ pF$

(γ) $A = \dfrac{dC}{\varepsilon_0} = 13.3cm^2$

Εφαρμογή

- *Ένας επίπεδος πυκνωτής μπορεί να αποθηκεύσει μέγιστη ενέργεια U_α αν μεταξύ των οπλισμών του υπάρχει αέρας. Ποια μέγιστη ενέργεια μπορεί να αποθηκεύσει ο πυκνωτής αν αντί για αέρα γεμίσουμε το χώρο μεταξύ των οπλισμών με τεφλόν; Η διηλεκτρική αντοχή του αέρα, δηλαδή το μέγιστο ηλεκτρικό πεδίο που μπορούμε να εφαρμόσουμε χωρίς να καταστραφεί το διηλεκτρικό (ο αέρας) είναι 3×10^6 V/m. Η σχετική διηλεκτρική σταθερά του τεφλόν και η διηλεκτρική του αντοχή είναι 2.3 και 60×10^6 V/m αντίστοιχα.*

- Η μέγιστη ενέργεια που μπορεί να αποθηκεύσει ο πυκνωτής μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού είναι U_{tef}. Θα έχουμε

$$\frac{U_{tef}}{U_a}=\frac{\frac{1}{2}CV_{\max}^2}{\frac{1}{2}C_0V_0^2}=\frac{(\kappa C_0)}{C_0}\left(\frac{E_{tef,\max}\cdot d}{E_{a,\max}\cdot d}\right)^2=2.3\left(\frac{60}{3}\right)^2=920$$

- Άρα με την εισαγωγή του Teflon αυξάνεται η μέγιστη ενέργεια που μπορεί να αποθηκευθεί στον πυκνωτή κατά 920 φορές.

Άσκηση

- Θεωρείστε επίπεδο πυκνωτή με φορτίο Q και εμβαδόν κάθε οπλισμού A. Υπολογίστε την δύναμη που ο κάθε οπλισμός ασκεί στον άλλο. Απάντηση: $\left(F = Q^2 / 2\varepsilon_0 \mathrm{A}\right)$
- Έστω x τυχαία απόσταση των οπλισμών $C = \dfrac{\varepsilon_0 \mathrm{A}}{x}$
- Εξ ορισμού το έργο $$W = \int_o^d F dx$$
- Έργο για φόρτιση πυκνωτη $$W = \frac{1}{2} C V^2$$

Ερώτηση

- Ένας φορτισμένος πυκνωτής με παράλληλους επίπεδους οπλισμούς παραμένει συνδεδεμένος με μία μπαταρία ενόσω εισάγουμε ένα διηλεκτρικό ανάμεσα στους οπλισμού. Πώς θα μεταβληθούν τα C,Q, E, ΔV

Άσκηση: Χωρητικότητα Κυλινδρικού πυκνωτή

- Κυλινδρικά κελύφη (εσωτ. Ακτίνα α, εξωτερική ακτίνα b, ύψος L, φορτίο Q)

$$E = \frac{2k\lambda}{r}$$

$$V_b - V_a = -\int_a^b E_r dr = -2k\lambda \int_a^b \frac{dr}{r} = -2k\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{Q}{|V|} = \frac{Q}{2k\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{L}{2k \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Άσκηση: Χωρητικότητα Σφαιρικού πυκνωτή

- Σφαιρικά κελύφη (εσωτ. Ακτίνα α, εξωτερική ακτίνα b, φορτίο Q)

$$E = \frac{kQ}{r^2}$$

$$V_b - V_a = -\int_a^b E_r dr = -kQ\int_a^b \frac{dr}{r^2} = -kQ\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

$$V = \left|V_b - V_a\right| = kQ\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = kQ\frac{b-a}{ab}$$

$$C = \frac{Q}{|V|} = \frac{ab}{k(b-a)}$$

άσκηση

- Επίπεδος πυκνωτής μπορεί να φορτισθεί με φορτίο 3C προτού δημιουργηθεί σπινθήρας, όταν μεταξύ των οπλισμών υπάρχει αέρας. Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο αν μεταξύ των οπλισμών τοποθετηθεί (α) γυαλί (κ=5), (β) πολυαιθυλένιο (κ=2.3).

Άσκηση

- Δείτε τον πυκνωτή του σχήματος με τατράγωνους οπλισμούς πλευράς L. Βρείτε μία έκφραση για την χωρητικότητα του πυκνωτή συναρτήσει του L,d, κ1,κ2,κ3

Γενικά

- Κίνηση ηλεκτρονίων μέσα σε αγωγό με την επήρρεια ηλεκτρικού πεδίου ή στην απουσία ηλεκτρικού πεδίου.
- Ηλεκτρικό πεδίο μέσα σε αγωγό.
- Μηχανικό ανάλογο
- Ταχύτητα κίνησης ηλεκτρονίων (10^6 m/s, ταχύτητα διολίσθησης 0.001 m/s, ταχύτητα διάδοσης σήματος c)
- Φορείς κίνησης (ρεύματος)

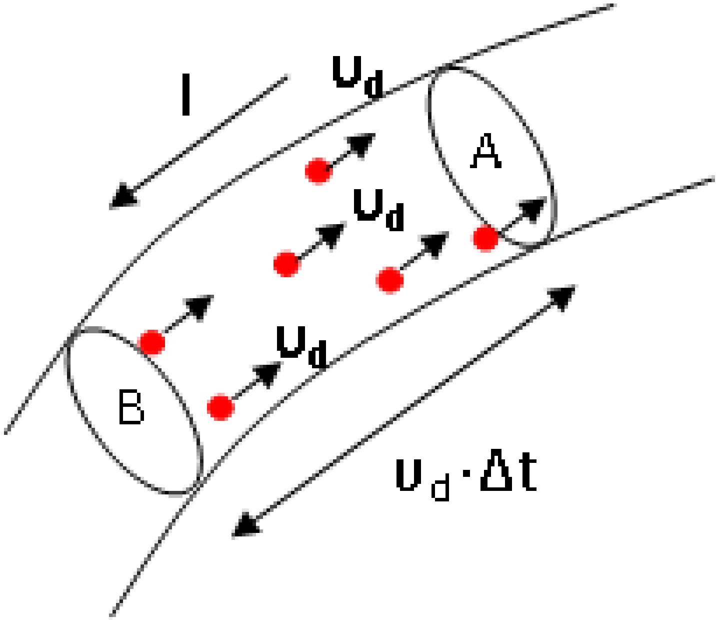
Ηλεκτρικό ρεύμα

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

- 1 A (Ampere) =1 $Cb \cdot s^{-1}$
- **Η σύμβαση που έχει γίνει, η οποία έχει ιστορικές ρίζες, είναι ότι το ρεύμα ρέει προς την κατεύθυνση που θα εκινείτο ένα θετικό φορτίο. Βέβαια, τέτοιο πράγμα δεν υπάρχει, τουλάχιστον στους μεταλλικούς αγωγούς. Αυτό που μπορούμε να πούμε είναι ότι η κατεύθυνση του ρεύματος (πού δείχνει το βέλος) είναι αντίθετο στην κατεύθυνση διολίσθησης των ηλεκτρονίων.**

Μία έκφραση για το ρεύμα

- Πόσα ηλεκτρόνια (N) θα περάσουν από την διατομή A σε χρόνο Δt;
- Αριθμός ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου n
- Όγκος $A(\upsilon_d \Delta t)$



$$Q = Ne = \left(A \cdot \Delta t \cdot \upsilon_d \cdot n\right) e$$

$$I = \frac{|Q|}{\Delta t} = e \cdot A \cdot n \cdot \upsilon_d$$

<u>Σχήμα 2.1</u> Αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I. Τα ηλεκτρόνια στον όγκο AB περνούν από την διατομή A σε χρόνο Δt.

Πυκνότητα ρεύματος, αγωγιμότητα

- Μεγαλύτερη λεπτομέρεια στο πώς κινούνται τα ηλεκτρόνια μέσα σε αγωγό. Μπορεί σε ένα σημείο της διατομής του αγωγού να περνούν περισσότερα και σε άλλο λιγότερα ηλεκτρόνια

- Πυκνότητα ρεύματος $$j \equiv \frac{I}{A} = ne\upsilon_d \quad \mathbf{j} = ne\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{d}}$$

$$I = \int_A \vec{j} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Παράδειγμα

- *Θεωρείστε έναν χάλκινο κυλινδρικό αγωγό ακτίνας 2 mm που διαρρέεται από ρεύμα έντασης 5 A. (α) Υπολογίστε την πυκνότητα ρεύματος (β) Υπολογίστε την ταχύτητα διολίσθησης των ηλεκτρονίων. Δίνεται η πυκνότητα του χαλκού, 8.95 g/cm^3*

Απάντηση

$$(\alpha)\ \text{Το εμβαδόν της διατομής του αγωγού είναι}$$

$$S = \pi R^2 = 3.14 \cdot (2\,mm)^2 = 12.6\,mm^2 = 12.6 \times 10^{-6}\,m^2$$

$$\text{Η πυκνότητα ρεύματος είναι}$$

$$j = \frac{I}{S} = \frac{5\,A}{12.56\,mm^2} = 0.4\,A \cdot mm^{-2} = 4 \times 10^5\,A \cdot m^{-2}$$

(β) Έχουμε υπολογίσει την πυκνότητα ρεύματος, γνωρίζουμε το φορτίο του ηλεκτρονίου, άρα χρειαζόμαστε τον n, *τον αριθμό ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου.*

Από τον περιοδικό πίνακα των στοιχείων βρίσκουμε ότι ο χαλκός έχει ένα ηλεκτρόνιο ανά άτομο στην εξωτερική στοιβάδα. Η γραμμομοριακή μάζα του χαλκού M = 63.5 g/mole. *Επίσης το μόριο του χαλκού είναι μονοατομικό.*

<u>*Υπενθύμιση*</u> *Ένα γραμμομόριο* (mole) *υλικού είναι ποσότητα υλικού που περιέχει* N_A *μόρια, όπου* $N_A = 6.023\times10^{23}$ *μόρια*/mole *είναι ο αριθμός του* Avogadro.

Ο αριθμός των γραμμομορίων ανά μονάδα όγκου είναι

$$n_m = \frac{\rho\left(g/cm^3\right)}{M\left(g/mole\right)} = \frac{\rho}{M}\left(mole/cm^3\right)$$

Ο αριθμός των ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου είναι

$$n = 1(\eta\lambda / \alpha\tau) \cdot 1(\alpha\tau / \mu o\rho\iota o) \cdot \mathrm{N}_{\mathrm{A}}(\mu o\rho\iota\alpha / mole) \cdot n_m(mole / cm^3)$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές έχουμε

$$n = 6.023\times10^{23} \cdot \frac{8.95}{63.5} \quad \eta\lambda / cm^3 = 0.85\times10^{23}\eta\lambda / cm^3 = 0.85\times10^{29}\eta\lambda / m^3$$

$$\upsilon_d = \frac{j}{ne} = \frac{\left(4\times10^5\ A/m^2\right)}{\left(0.85\times10^{29}\eta\lambda / m^3\right)\left(1.6\times10^{-19}\ C/\eta\lambda\right)} = 2.94\times10^{-5}\ m/s$$

Εφαρμογή

Υπολογίστε τη ένταση του ρεύματος στην περίπτωση που $6{\times}10^{11}$ ηλεκτρόνια διέρχονται από μία ορισμένη διατομή ενός αγωγού σε κάθε δευτερόλεπτο.

$$I = \frac{\left(6\times10^{11}\,\eta\lambda\right)\cdot\left(1.6\times10^{-19}\,C/\eta\lambda\right)}{1\,s} = 9.6\times10^{-8}\,C/s = 9.6\times10^{-8}\ A = 96\,nA$$

Εφαρμογή

Μία χάλκινη ράβδος έχει διατομή 100 cm² και διαρρέεται από ρεύμα πυκνότητας 1000 A/cm². (α) Ποιο είναι το ολικό ρεύμα στην ράβδο; (β) Πόσο φορτίο διαρρέει μία διατομή της ράβδου ανά δευτερόλεπτο;

$$I = jA = \left(1000\, A / cm^2\right)\left(100\, cm^2\right) = 10^5\ A$$

$$\Delta q = I \Delta t \Rightarrow Q = It = \left(10^5\ A\right)\left(1 s\right) = 10^5\, Cb$$

Αντίσταση

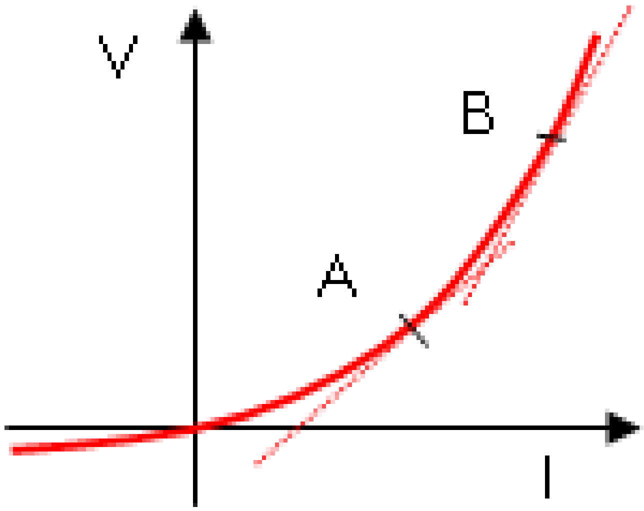
- Αγωγοί, μονωτές, διαφορετική συμπεριφορά όταν εφαρμοσθεί διαφορά δυναμικού

$$R = \frac{|V|}{|I|}$$

- Ohm (Ω). $1\Omega = 1\text{Volt}\cdot\text{Ampere}^{-1} = 1\ \text{V}\cdot\ \text{A}^{-1}$

Σχέση V-I

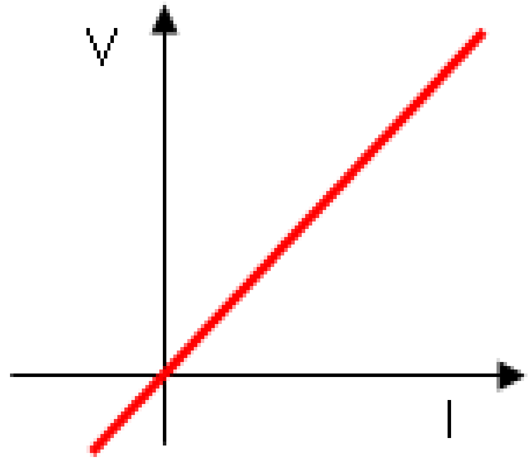
Η αντίσταση είναι η κλίση της καμπύλης



Σχήμα 2.2.α Χαρακτηριστική καμπύλη V-I μίας διόδου.

Νόμος του Ohm

Για μία κατηγορία υλικών, που λέγονται ωμικά υλικά, και περιλαμβάνουν τα μέταλλα, το ρεύμα που διαρρέει το σώμα είναι ανάλογο της διαφοράς δυναμικού στα άκρα, έχουν δηλαδή, **σταθερή αντίσταση**.



Σχήμα 2.2.β Χαρακτηριστική ευθεία V-I ενός ωμικού υλικού.

σ: Ειδική αγωγιμότητα

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

$$V = El \qquad j = \frac{I}{A}$$

$$j = \sigma E \Rightarrow \frac{I}{A} = \sigma \frac{V}{l} \Rightarrow V = \left(\frac{l}{\sigma \mathrm{A}} \right) \mathrm{I} = RI$$

Ο νόμος του Ohm γράφεται $R = \frac{V}{I}$

Όπου αντίσταση είναι $R = \rho \frac{l}{A}$

(χαρακτηριστικό της συγκεκριμένης αντίστασης

Και η ειδική αντίσταση
(χαρακτηριστικό του υλικού) $\rho = \frac{1}{\sigma}$

Τιμές Ειδικής αντίστασης

Τιμές ειδικής αντίστασης	
Υλικό	**Ειδική αντίσταση (Ω·m)**
Σίδερο	10×10^{-8}
Χαλκός	1.7×10^{-8}
Άνθρακας	3500×10^{-8}
Πυρίτιο	640
Γυαλί	10^{12}
Χαλαζίας	10^{16}

Παράδειγμα

Ένα σύρμα φτιαγμένο από κράμα Νικελίου Χρωμίου έχει μήκος 1 m και διατομή 1 mm^2. Εφαρμόζουμε τάση 3 V στα άκρα του και μετράμε το ρεύμα που το διαρρέει και είναι 6 A. Πόση είναι η αγωγιμότητα του υλικού αυτού;

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{L}{RA} \qquad\qquad R = \frac{V}{I} = \frac{3V}{6A} = 0.5\Omega$$

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{L}{RA} = \frac{1m}{(0.5\Omega)\left(10^{-6} m^2\right)} = 2\times10^{6}\left(\Omega m\right)^{-1}$$

Ηλεκτρική ενέργεια και ισχύς

- Γενική σχέση για την κατανάλωση ισχύος από φορτίο που διέρχεται μέσα από ηλεκτρικό πεδίο

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta\left(V \cdot q\right)}{\Delta t} = V \cdot \frac{\Delta q}{\Delta t} = V \cdot I$$

- Αν το φορτίο κινείται μέσα σε υλικό αντίστασης R, καταναλώνει ενέργεια (θερμικές ή ωμικές απώλειες)

$$P = \frac{V^2}{R} = R \cdot I^2$$

Παράδειγμα

Μία αντίσταση έχει ταξινομηθεί σαν 27 Ω, ¼ W. Ποια είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση λειτουργίας της αντίστασης; Ποια είναι το μέγιστο ρεύμα που μπορεί να περάσει μέσα από την αντίσταση;

<u>Λύση</u>

Οι αντιστάσεις (στοιχεία ηλεκτρονικών κυκλωμάτων) συνήθως ταξινομούνται με βάση την τιμή της ηλεκτρικής τους αντίστασης και της μέγιστης ισχύος που μπορούν να υποστούν.

Αφού $P = RI^2$ *, μέγιστη ισχύς συνεπάγεται και μέγιστο ρεύμα.*

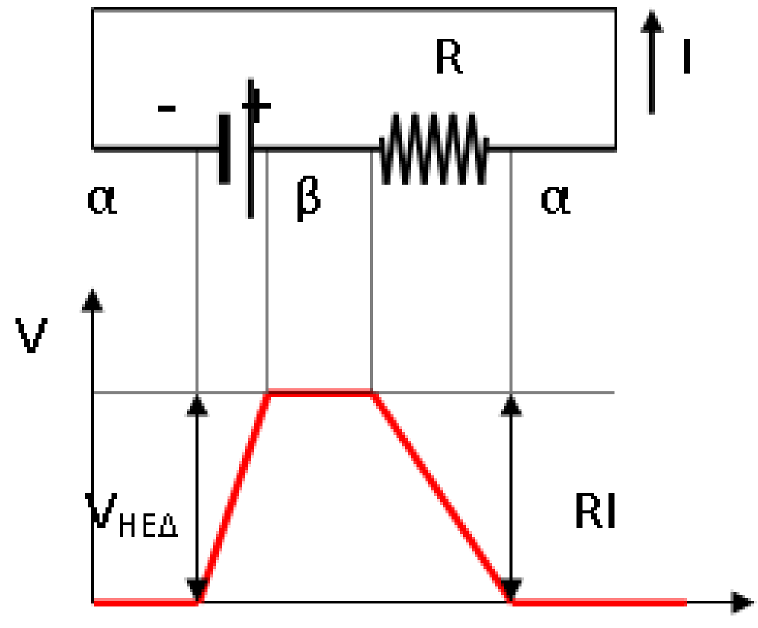
Επίσης, επειδή, $P = V^2/R$ *, μέγιστη ισχύς συνεπάγεται και μέγιστη τάση λειτουργίας. Άρα έχουμε ότι*

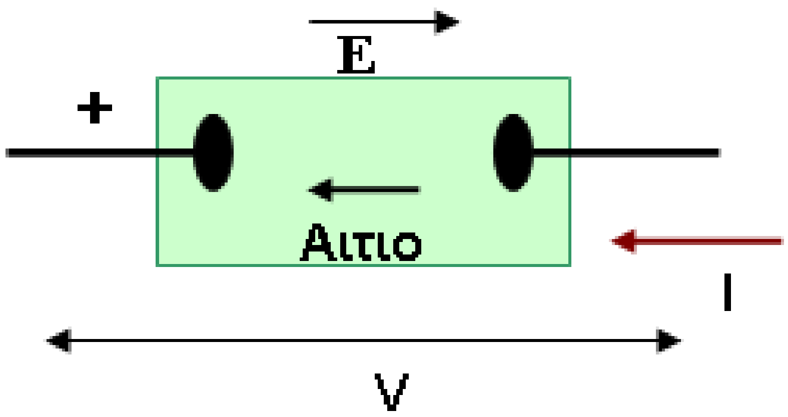
$$I_{\max} = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{0.25W}{27\,\Omega}} = 0.096\,A$$

$$V_{\max} = \sqrt{PR} = \sqrt{(0.25W)(27\,\Omega)} = 2.6V$$

Ηλεκτρεγερτική δύναμη

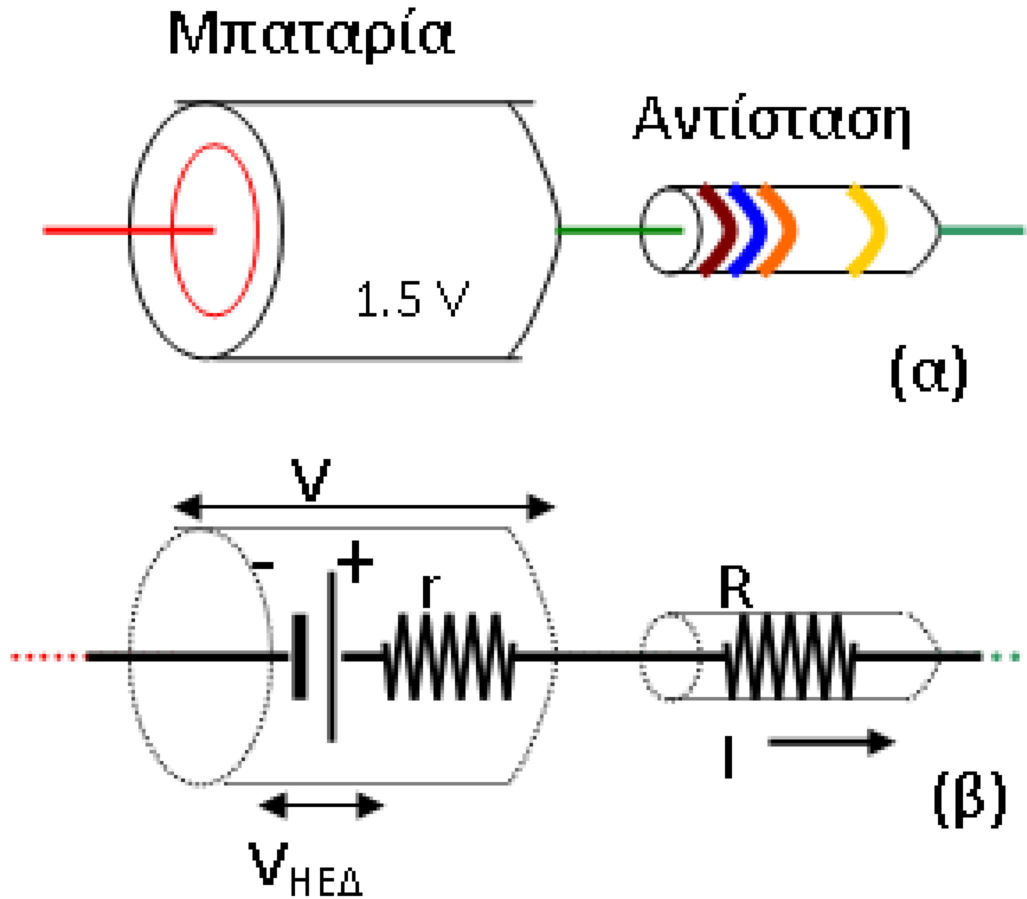
- Υποτιθέμενο θετικό φορτίο διαρρέει κύκλωμα από ψηλότερο σε χαμηλότερο δυναμικό
- Πώς θα συντηρηθεί η κίνηση;





Σχήμα 2.3.β Διάγραμμα που δείχνει τις μεταβολές δυναμικού σε ένα κύκλωμα με ΗΕΔ και αντίσταση. Ένα υποθετικό θετικό φορτίο που κινείται κατά την φορά του ρεύματος έχει επίσης τις ίδιες μεταβολές σε δυναμική

Εσωτερική αντίσταση και αντίσταση φόρτου



- Στο κύκλωμα

$$V_{\mathrm{HE\Delta}} - rI - RI = 0$$

$$I = \frac{V_{\mathrm{HE\Delta}}}{R + r}$$

Σχήμα 2.4 (α) Τα στοιχεία ενός κυκλώματος όπως φαίνονται στην πραγματικότητα. (β) Το ίδιο κύκλωμα με σύμβολα.

Ο ρυθμός παροχής ενέργειας ανά δευτερόλεπτο από την μπαταρία **ισούται** με τον ρυθμό κατανάλωσης της ενέργειας ανά δευτερόλεπτο από τις αντιστάσεις, εσωτερική και εξωτερικές

$$V_{\mathrm{H}\mathrm{E}\Delta} \cdot I = R \cdot I^2 + r \cdot I^2$$

$$V_{\mathrm{H}\mathrm{E}\Delta} = \frac{(R + r) \cdot I^2}{I} \equiv \frac{P}{I}$$

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) ορίζεται σαν τον λόγο της παρεχόμενης ισχύος προς το ρεύμα που εγκαθίσταται.

ΗΕΔ και πολική τάση

- Πολική τάση V

$$V = V_{\text{ΗΕΔ}} - rI$$

Η **ΗΕΔ** είναι μία **διαφορά δυναμικού** και μετριέται σε Volt.

Η ΗΕΔ συμβολίζεται με ένα βέλος που κατευθύνεται **από τον αρνητικό στον θετικό πόλο.**

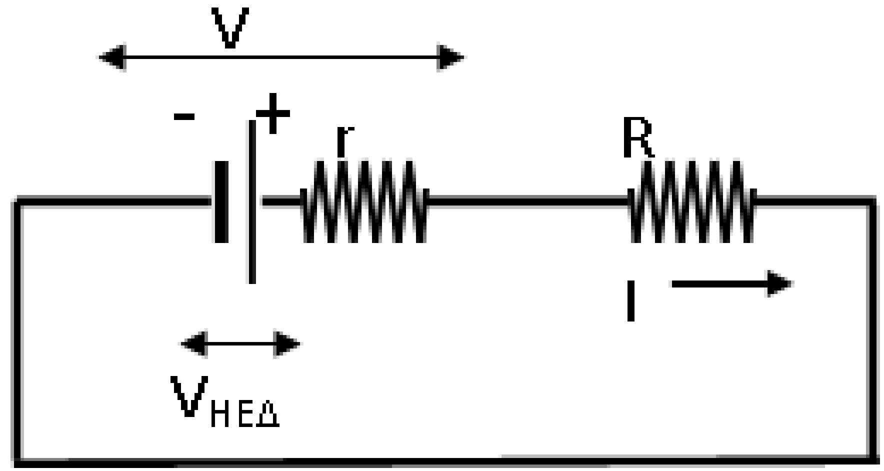
Παράδειγμα

Δίνεται μία μπαταρία 12 V. Η διαφορά δυναμικού στους πόλους της μπαταρίας όταν συνδεθεί σε εξωτερικό κύκλωμα είναι V = 9.7 όταν αποδίδει ισχύ 20 W στην αντίσταση φόρτου R. (α) Προσδιορίστε την R (β) Προσδιορίστε την εσωτερική αντίσταση r.

Λύση

Εννοούμε μία μπαταρία με ηλεκτρεγερτική δύναμη $V_{HE\Delta}$ =12 V (Δηλαδή, η μπαταρία δημιουργεί 12 W ισχύος για κάθε 1 A ρεύματος που παρέχει)

Στα άκρα της αντίστασης φόρτου επικρατεί διαφορά δυναμικού V. Αφού της αποδίδεται ισχύς P=20 W, θα ισχύει ότι



$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{(9.7V)^2}{20W} = 4.7\,\Omega$$

$$I = \frac{P}{V} = \frac{20W}{9.7V} = 2.06\,A$$

$$V_{ΗΕΔ} = RI + rI \Rightarrow r = \frac{V_{ΗΕΔ} - V}{I} = \frac{(12-9.7)V}{2.06\,A} = 1.11\Omega$$

Παράδειγμα

- *Αν μία λάμπα έχει ένδειξη 60 W, 220 V, τι ρεύμα τραβάει; Ποια είναι η αντίσταση του νήματος*

$$P = VI \Rightarrow I = \frac{P}{V} = \frac{60}{220} A = 0.27 A$$

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{P} = 807\,\Omega$$

Παράδειγμα

Ένας λαμπτήρας φακού συνδέεται με μία μπαταρία που διατηρεί μία σταθερή διαφορά δυναμικού 1.5 V στα άκρα του. Εάν το ρεύμα που διαρρέει τον λαμπτήρα είναι 0.3 A, ποια είναι η αντίσταση του λαμπτήρα; Ποιο θα είναι το μέτρο του ρεύματος που θα διαρρεύσει τον λαμπτήρα αν η αντίσταση του αντικατασταθεί από άλλη με την μισή τιμή;

$$R = \frac{V}{I} = 5\,\Omega \qquad\qquad I = \frac{V}{R}$$

Για δεδομένη διαφορά δυναμικού όταν η αντίσταση υποδιπλασιασθεί, το ρεύμα θα γίνει διπλάσιο.

Παράδειγμα

- *Μία εξαντλημένη μπαταρία φακού των 3 V έχει μία εσωτερική αντίσταση 10 Ω. Υπολογίστε την ισχύ που καταναλώνεται σε μία λάμπα με αντίσταση 4 Ω και τροφοδοτείται από την συγκεκριμένη μπαταρία. Επαναλάβετε τον υπολογισμό για μία καινούργια μπαταρία (η εσωτερική αντίσταση μίας καινούργιας μπαταρίας είναι πρακτικά μηδέν). Η αντίσταση της λάμπας είναι ανεξάρτητη από το ρεύμα.*

Λύση

Η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος είναι 14 Ω (αντιστάσεις σε σειρά). Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι

$$I = (3\,V)/(14\,\Omega) = 0.21\,A$$

Άρα η ισχύς που καταναλώνεται στην λάμπα είναι

$$P = RI^2 = (4\Omega)(0.21A)^2 = 0.176W$$

Όταν η μπαταρία είναι καινούργια τότε η εσωτερική αντίσταση είναι μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι

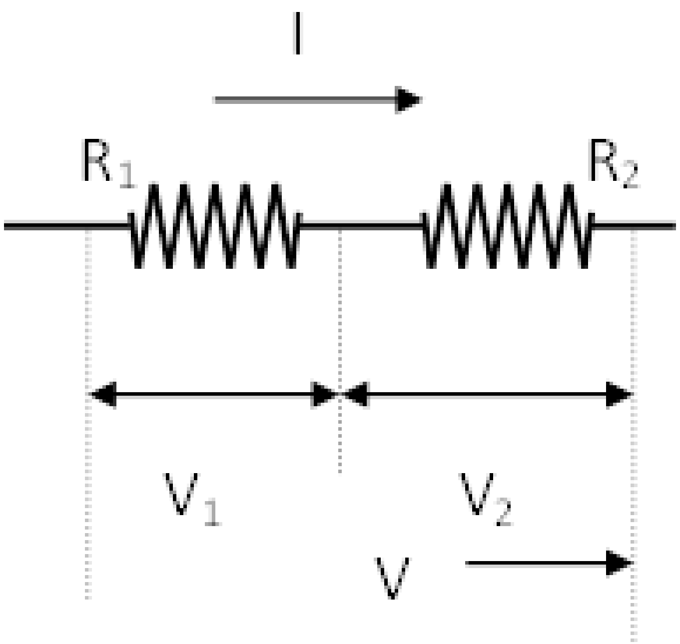
$$I = (3\,V)/(4\,\Omega) = 0.75\,A$$

και η ισχύς που καταναλώνεται στην λάμπα είναι

$$P = RI^2 = (4\Omega)(0.75\,A)^2 = 2.25\,W$$

Συνδεσμολογία αντιστάσεων σε σειρά

$$V = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I$$



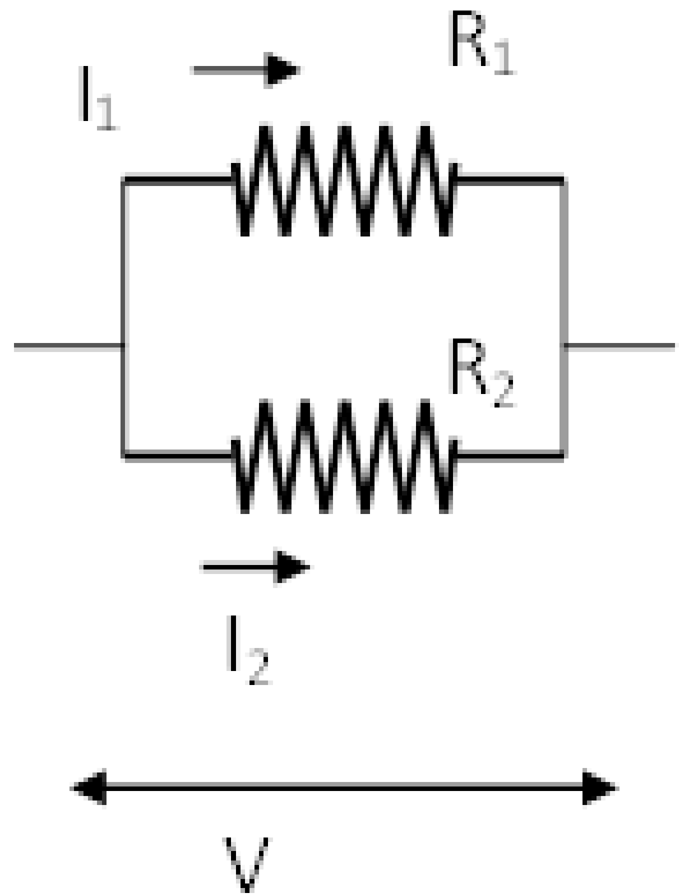
$$R = R_1 + R_2$$

Συνδεσμολογία αντιστάσεων παράλληλα

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow$$

$$\frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



Κανόνες του Kirchhoff - Έννοιες

- **Βρόχος** είναι μία κλειστή διαδρομή σε ένα κύκλωμα. Ένα φορτίο αρχίζει και τερματίζει στο ίδιο σημείο. Σε έναν βρόχο μπορούν να υπάρχουν και πυκνωτές. Όμως σε αυτή την περίπτωση μιλάμε για μεταβαλλόμενα ρεύματα που δεν μας ενδιαφέρουν πολύ σε αυτό το εισαγωγικό επίπεδο. (Θα δούμε πάντως κάποια απλά παραδείγματα στα επόμενα). Όταν η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή δεν μεταβάλλεται τότε ο πυκνωτής συμπεριφέρεται σαν ανοικτός διακόπτης του κυκλώματος.
- **Κόμβος** σε ένα κύκλωμα είναι ένα σημείο όπου συναντώνται τρία ή περισσότερα ρεύματα. Είναι το κοινό σημείο δύο ή περισσότερων βρόχων.
- **Κλάδος** ενός κυκλώματος είναι ένα κομμάτι κυκλώματος ανάμεσα σε δύο κόμβους.

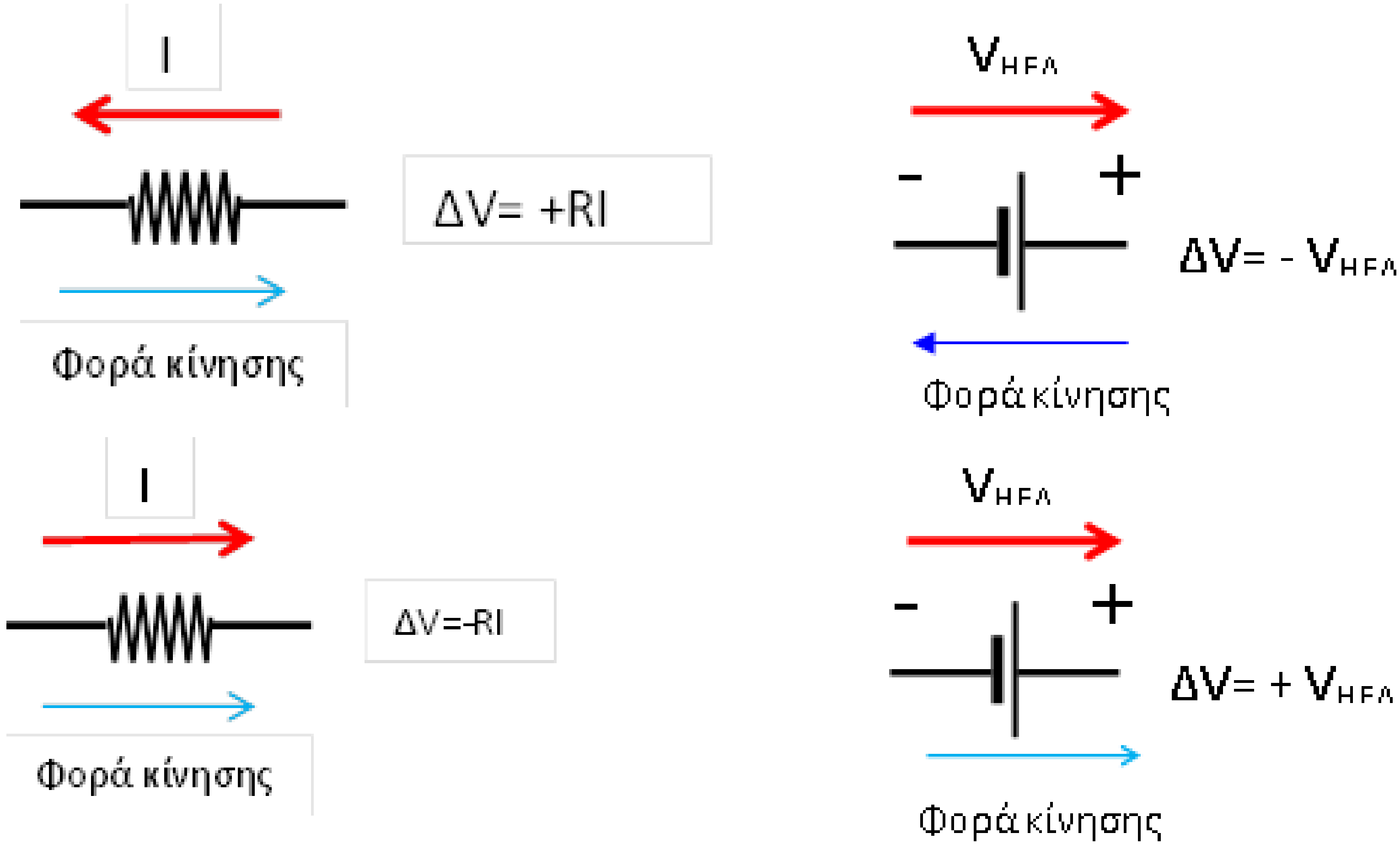
Κανόνες του Kirchhoff

1. Το άθροισμα των ρευμάτων που κατευθύνονται σε έναν κόμβο πρέπει να ισούται με το άθροισμα των ρευμάτων που απομακρύνονται από τον κόμβο.
2. Το αλγεβρικό άθροισμα των μεταβολών δυναμικού γύρω από έναν βρόχο είναι μηδέν.

- Ένα **θετικό** φορτίο που εξ ορισμού κινείται κατά την φορά του ρεύματος, όταν περνάει από μία αντίσταση χάνει ενέργεια και δυναμικό ($\Delta V<0$) ενώ όταν περνάει από ΗΕΔ κερδίζει ενέργεια, και άρα αυξάνει το δυναμικό ($\Delta V>0$).

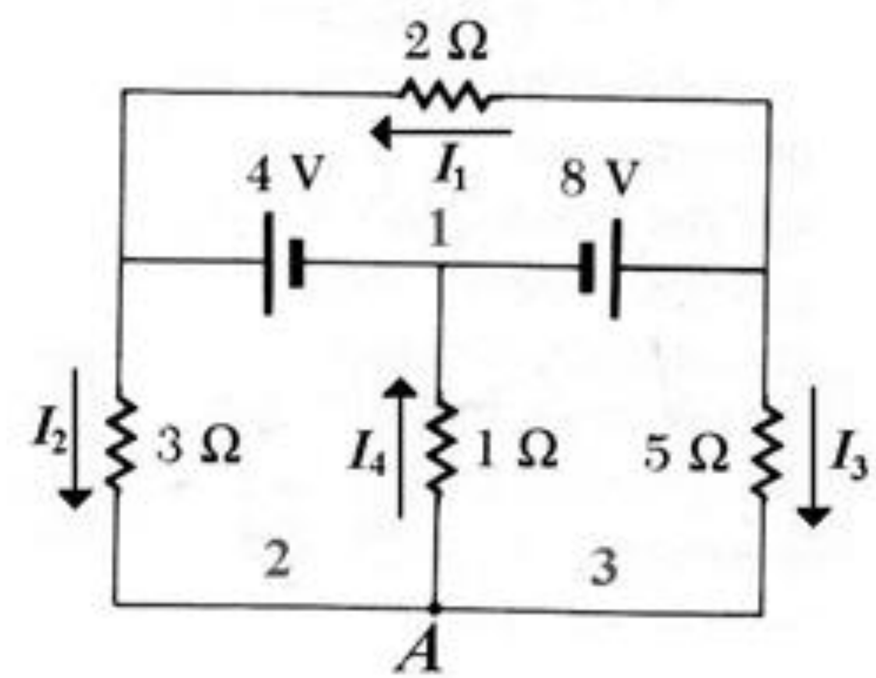
$$\Delta U = +q\Delta V$$

Πρόσημα στους κανόνες του Kirchhoff



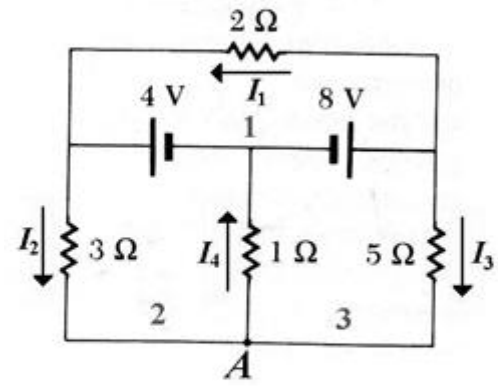
Εφαρμογή

Να προσδιορισθούν οι τιμές του ρεύματος που διαρρέουν τις αντιστάσεις του παρακάτω κυκλώματος



Λύση

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο Kirchhoff στον βρόχο 1 έχουμε:



$$8V - I_1 \cdot 2\Omega - 4V = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{4V}{2\Omega} = 2\text{A}$$

Για τους βρόχους 2 και 3 έχουμε αντίστοιχα

$$4V - I_2 \cdot 3\Omega - I_4 \cdot 1\Omega = 0$$

$$8V - I_3 \cdot 5\Omega - I_4 \cdot 1\Omega = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας επί 2 και αφαιρώντας κατά μέλη

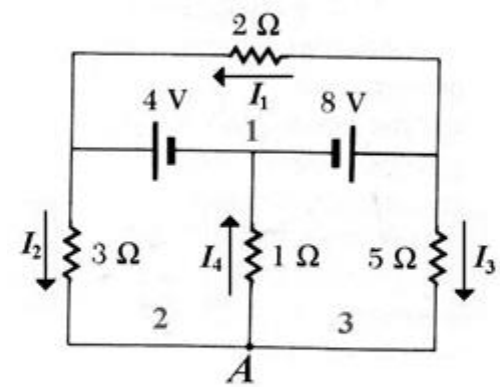
$$-I_2 \cdot 6\Omega - I_4 \cdot 2\Omega + I_3 \cdot 5\Omega + I_4 \cdot 1\Omega = 0 \Rightarrow$$

$$-I_2 \cdot 6\Omega - I_4 \cdot 1\Omega + I_3 \cdot 5\Omega = 0$$

- Εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στον εξωτερικό βρόχο προκύπτει ότι

$$-I_1 \cdot 2\Omega - I_2 \cdot 3\Omega + I_3 \cdot 5\Omega = 0 \Rightarrow -I_2 \cdot 3\Omega + I_3 \cdot 5\Omega = 4V$$

Τέλος, από τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο Α προκύπτει



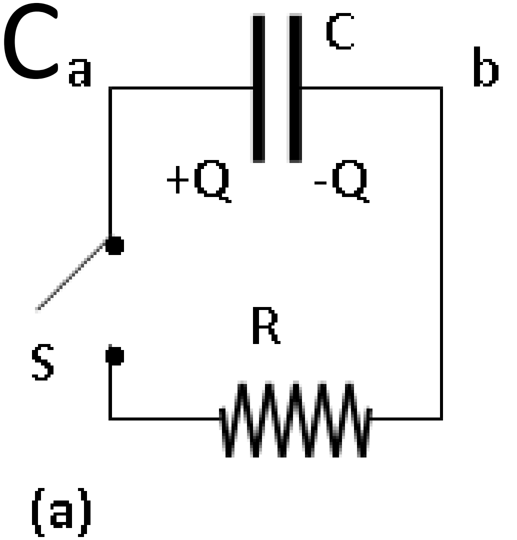
$$I_2 + I_3 = I_4$$

Τελικά

$$I_2 = \frac{16}{23} A \qquad I_3 = \frac{28}{23} A \qquad I_4 = \frac{44}{23} A$$

Κυκλώματα RC

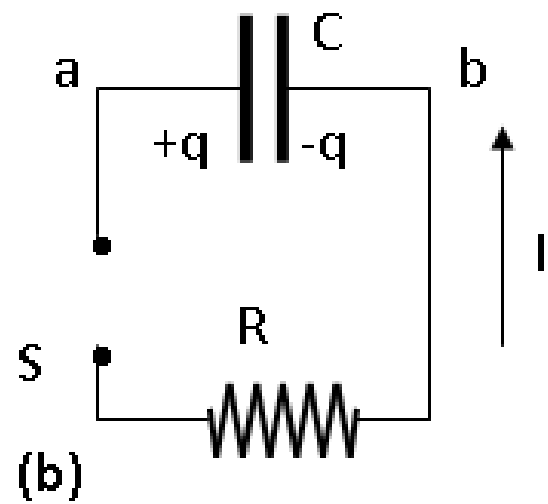
- Αποφόρτιση πυκνωτή



$$RI - \frac{q}{C} = 0$$

$$I = -{dq}/{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}q$$



$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt \quad \Rightarrow \int \frac{dq}{q} = \int -\frac{1}{RC}dt = -\frac{1}{RC}\int dt \Rightarrow$$

$$\ln q = -\frac{t}{RC} \Rightarrow e^{\ln q} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow q = Ae^{-\frac{t}{RC}} \qquad A = Q = CV_C$$

$$q = Qe^{-\frac{t}{RC}} = CV_C \; e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(Qe^{-\frac{t}{RC}} \right) = \frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = I_{\max}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\mathrm{I_{max}} = \mathrm{Q}/\mathrm{RC}$$

- Σταθερά χρονου $\tau = RC$

Γραφήματα φόρτισης, εκφόρτισης πυκνωτού

Εκφόρτιση

$$q = CV = CV_C \, e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow$$

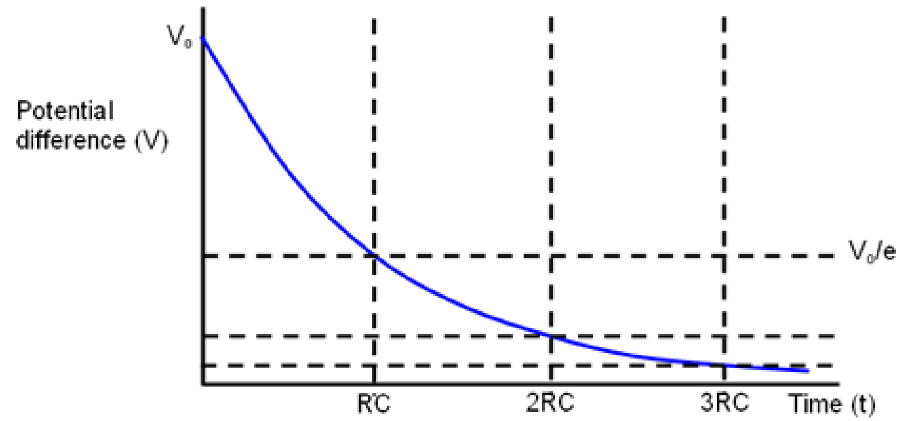
$$V = V_C \, e^{-\frac{t}{RC}}$$

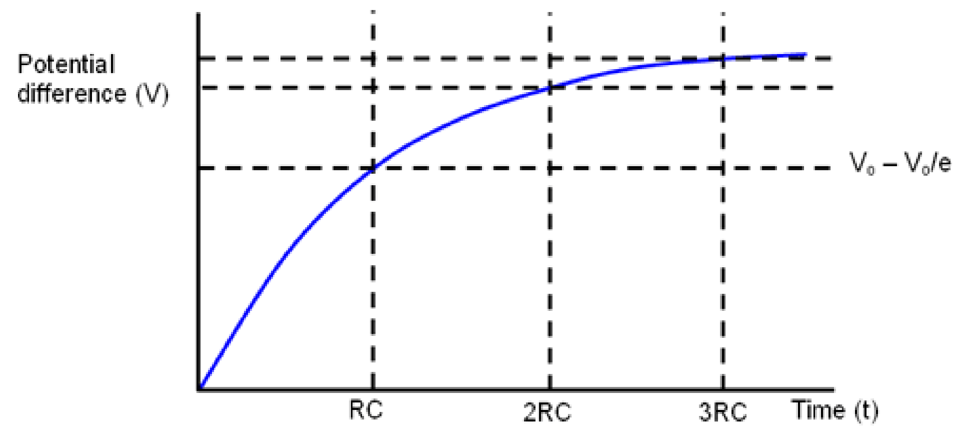
Σε χρόνο τ=RC

$$V = V_C \, e^{-\frac{\tau}{\tau}} = V_C \, e^{-1} = \frac{V_C}{e} \approx \frac{V_C}{2.71}$$

Φόρτιση

$$V = V_C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$





Παράδειγμα

- *Πυκνωτής με χωρητικότητα C=250 pF είναι φορτισμένος με φορτίο 25 nC. Ένα βολτόμετρο με εσωτερική αντίσταση 1 MΩ συνδέεται με τον πυκνωτή. (α) Ποια είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος; (β) Ποιο είναι το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή αμέσως μετά την σύνδεση του βολτόμετρου; (γ) Πόσο φορτίο έχει απομείνει στον πυκνωτή μετά από 1ms;*

Λύση

Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος δίνεται από την σχέση 2.25

$$\tau = RC = \left(1\times10^{6}\ \Omega\right)\left(250\times10^{-12}\ F\right) = 250\times10^{-6} s = 0.25\, ms$$

(β) *Η μέγιστη ένταση ρεύματος συνάγεται από την σχέση 2.24*

$$\mathrm{I_{max}} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{RC}} = \frac{\mathrm{Q}}{\tau} = \frac{25\times10^{-9}\ C}{250\times10^{-6} s} = 1\times10^{-4} A = 0.1 mA$$

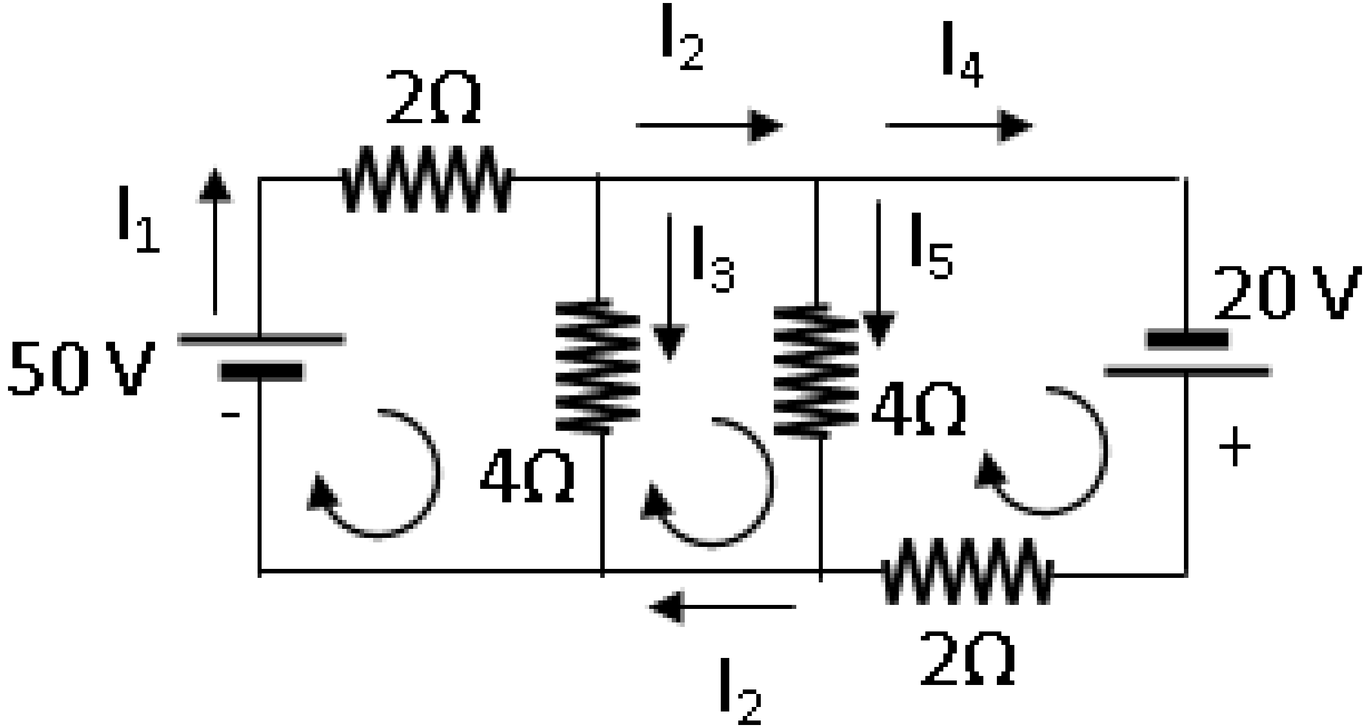
(γ) Θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση 2.22 για να βρούμε εναπομείναν φορτίο

$$q = Qe^{-\frac{t}{\tau}} = \left(25\times10^{-9}\ C\right)e^{-\frac{10^{-3}}{0.25\times10^{-3}}} \Rightarrow$$

$$q = \left(25\times10^{-9}\ C\right)\cdot 0.018 = 0.46\times10^{-9}\ C = 460\ pC$$

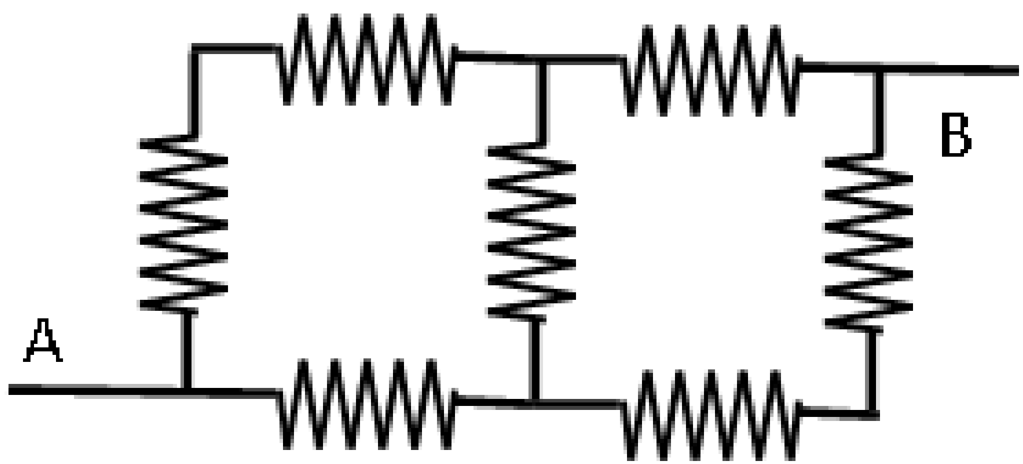
Παράδειγμα

- *Για το παράπλευρο κύκλωμα υπολογίστε την ισχύ που καταναλώνεται σε κάθε αντίσταση*



Παράδειγμα

Αν όλες οι αντιστάσεις έχουν την ίδια τιμή, υπολογίστε την ισοδύναμη αντίσταση μεταξύ των σημείων A και B.



Παράδειγμα

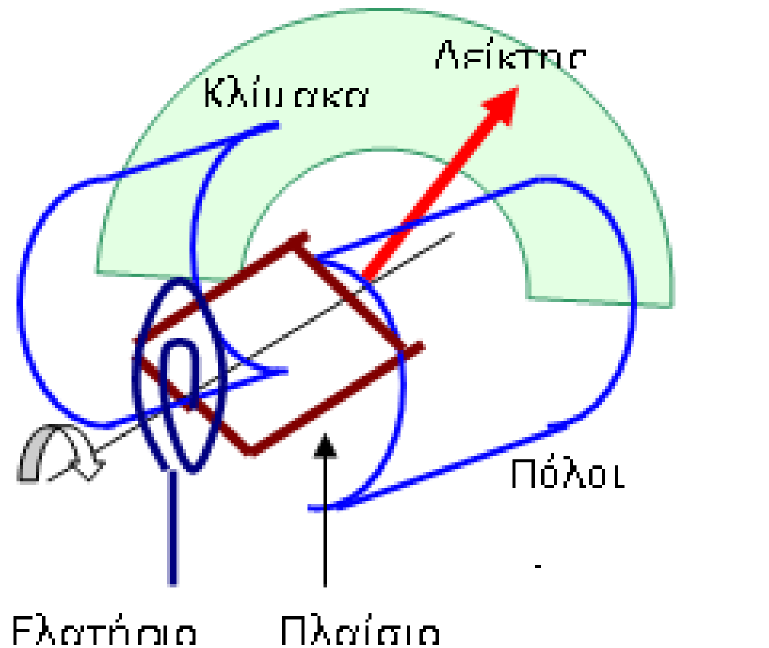
- *Ένα βολτόμετρο συνδέεται στους πόλους μίας μπαταρίας και έχει ένδειξη 11 V. Εάν συνδέσουμε μία αντίσταση φόρτου 10 Ω στην ίδια μπαταρία ρέει ρεύμα 1 A. Υπολογίστε την εσωτερική αντίσταση της μπαταρίας.*

Παράδειγμα

Θεωρείστε το κύκλωμα του σχήματος 2.6. Βρείτε την τιμή του ρεύματος σαν κλάσμα του ρεύματος I_{max} *μετά από 2τ, 5τ, 10τ. Επίσης υπολογίστε την ισχύ που απελευθερώνεται σαν θερμότητα στις ίδιες χρονικές στιγμές αν R=1 MΩ, C=750 pF, και Q=6 μC.*

Όργανα ηλεκτρικών μετρήσεων

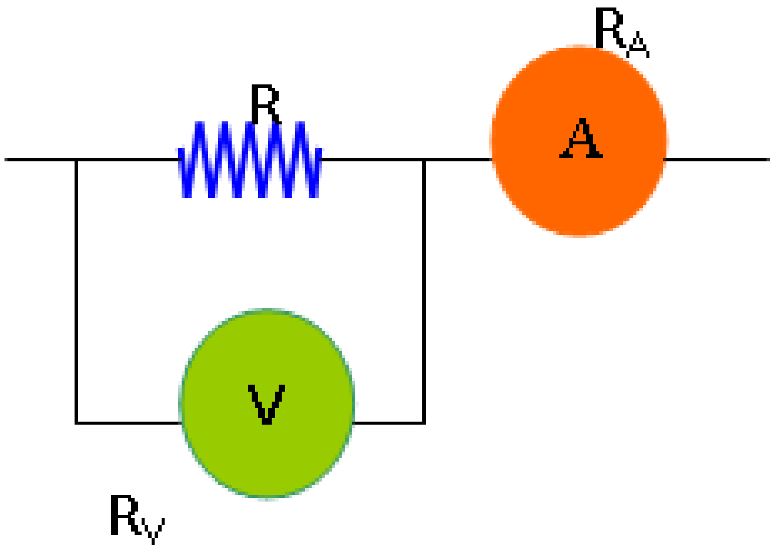
- Αρχή λειτουργίας γαλβανόμετρου
- Στην ίδια αρχή βασίζονται και τα (αναλογικά) βολτόμετρα και αμοπερόμετρα



Σχήμα 2.7 Σχηματική παράσταση ενός γαλβανόμετρου

Συνδεσμολογία αμπερόμετρων, βολτόμετρων

- Βολτόμετρο Μεγάλη εσωτερική αντίσταση
- Αμπερόμετρο: Μικρή εσωτερική αντίσταση



<u>Σχήμα 2.8</u>

Συνδεσμολογία αμπερομέτρου (A) και βολτομέτρου (V) σε κύκλωμα. R_A και R_V είναι οι εσωτερικές αντιστά-

Γνωριμία με μαγνητικά φαινόμενα

- Ιδιότητες μαγνητών από την αρχαιότητα
- Μελέτες Ampere, Oersted, Faraday αρχές 19^{ου} αι.
- Πείραμα Oersted με μαγνητική βελόνα σε ρευματοφόρο αγωγό
- Ακολουθούν Maxwell και Hertz. Τέλη 19^{ου} αι.
- Υπάρχει η σύνδεση ηλεκτρικών και μαγνητικών φαινομένων.
- Τα μαγνητικά φαινόμενα οφείλονται σε κινήσεις ηλεκτρονίων και σε μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία.

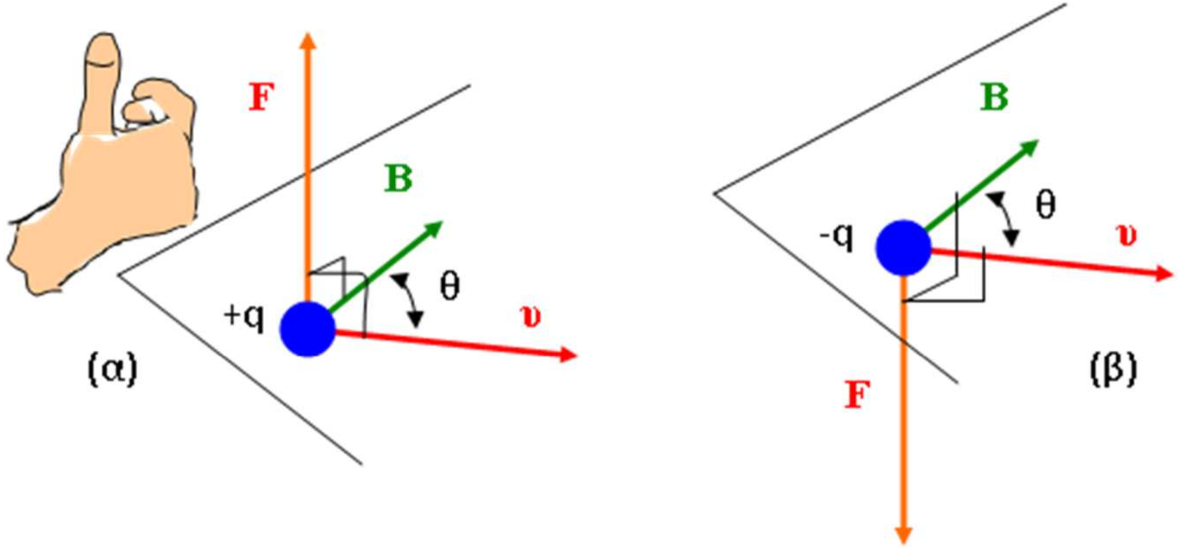
Ιδιότητες μαγνητών

- Πυξίδες
- Βόρειος-Νότιος πόλος, έλξη-άπωση
- Δεν μπορούν να ξεχωρίσουν
- Μαγνητικό πεδίο της γης. Που οφείλεται;
- Υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα;

Από μελέτη κινούμενων φορτίων σε μαγνητικό πεδίο

Διάνυσμα μαγνητικής επαγωγής Β

$$\mathbf{F} = q\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B}$$



Σχήμα 3.1 Εύρεση της κατεύθυνσης της δύναμης που ασκείται σε κινούμενο φορτίο από μαγνητικό πεδίο με την μέθοδο του κανόνα του δεξιού χεριού. (α) Θετικό φορτίο, (β) Αρνητικό φορτίο.

Δύναμη Lorentz

Μονάδες μαγνητικής επαγωγής

- 1 T = 1 N·Cb^{-1}·sec·m^{-1} ή 1 Tesla = 1 Newton/(Ampere·meter)
- 1 Tesla = 10^4 Gauss

Χαρακτηριστικά Μαγνητικά πεδία:

- Γης B=0.5 Gauss
- Συμβατικού ηλεκτρομαγνήτη με πυρήνα μαλακού σίδερου 2.5 T
- Υπεραγώγιμων ηλεκτρομαγνητών 10-20 T

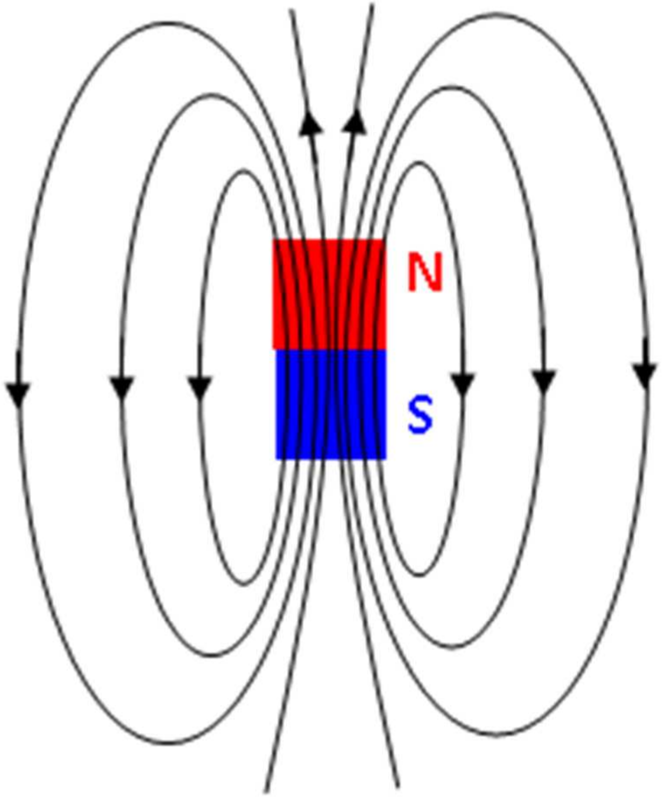
Δύναμη Lorentz

$$\mathbf{F}_L = q\left(\mathbf{E} + \boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B}\right)$$

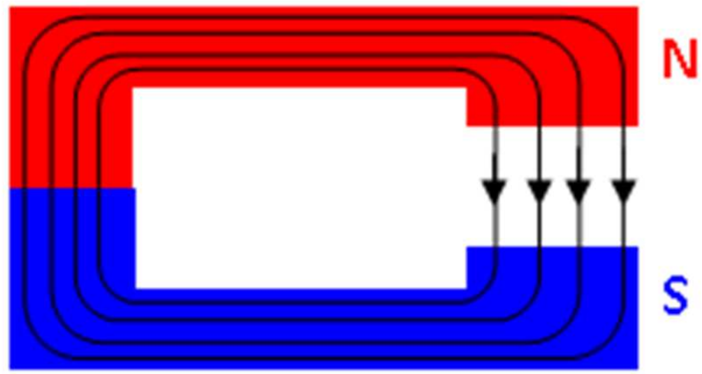
Απεικόνιση μαγνητικού πεδίου

- Γραμμές μαγνητικού πεδίου, ιδιότητες
- Πυρήνας
- Ομογενές μαγνητικό πεδίο

(α)



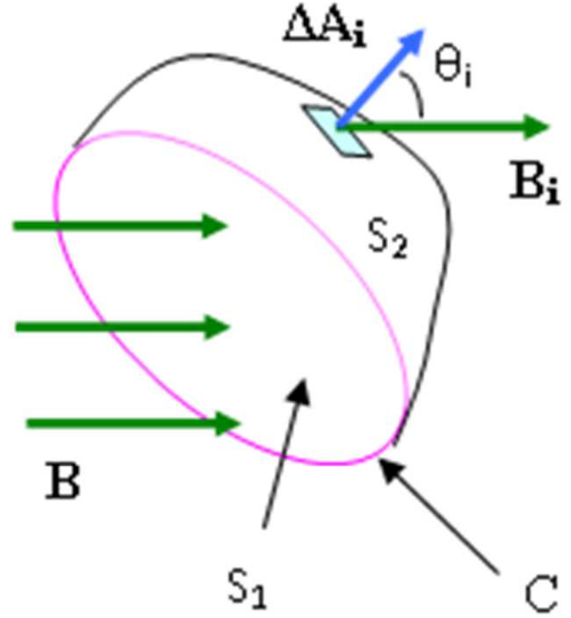
(β)



Μαγνητική ροή

$$\Phi_B \equiv \int_A \mathbf{B} \cdot \mathbf{dA}$$

Μονάδα μέτρησης της ροής μαγνητικού πεδίου
1Wb (Weber) = 1 T·m^2



Σχήμα 3.3 Ορισμός της ροής μαγνητικού πεδίου. Η ίδια ροή περνάει από τις επιφάνειες S$_1$ και S$_2$.

Νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό

- Υπενθύμιση: Νόμος Gauss για ηλεκτρισμό

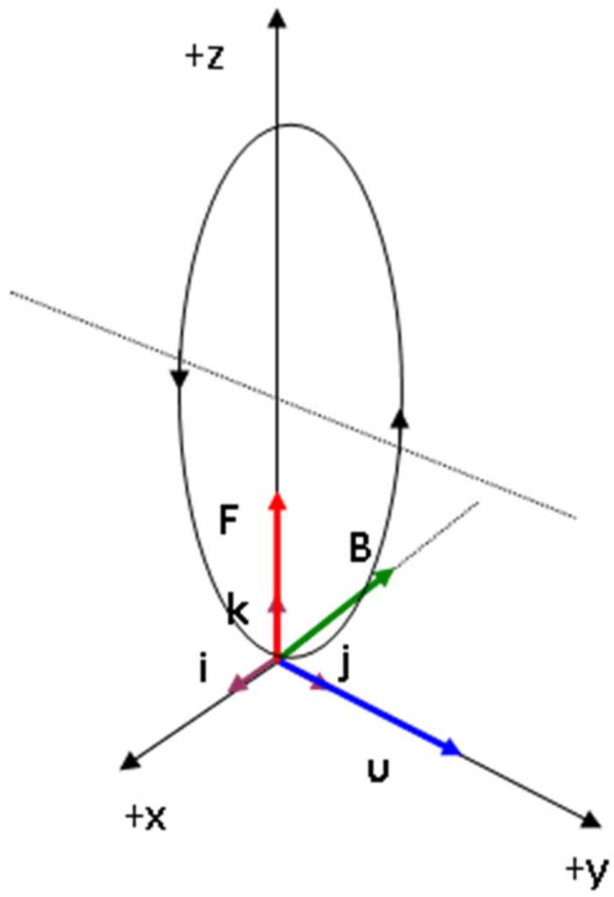
$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_B = \oint_A \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = 0 \qquad \text{για μαγνητισμό}$$

- Αντικατοπτρίζει την απουσία μονοπόλων

Παράδειγμα

- Ένα φορτισμένο σωμάτιο με μάζα $m=10^{-6}$ kg και φορτίο $q=2.0\times10^{-5}$ C έχει αρχική ταχύτητα $\mathbf{\upsilon}=(2.0\times10^{3})\mathbf{j}$ m/s και εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Προσδιορίστε την επιτάχυνση όταν το πεδίο $\mathbf{B}=-0.5\mathbf{i}$ T.



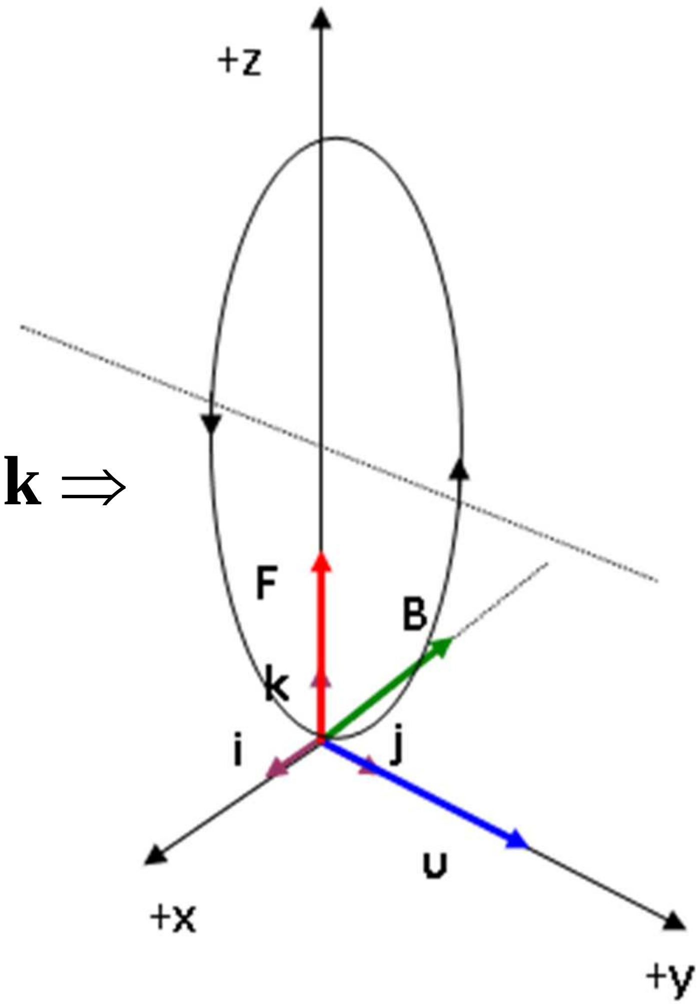
Λύση

$$\mathbf{F} = q\upsilon B\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m = (q\upsilon B/m)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\left(2\times10^{-5}C\right)\left(2\times10^{3}m/s\right)\left(0.5T\right)}{10^{-6}kg}\mathbf{k} \Rightarrow$$

$$\mathbf{a} = (2\times10^{4}\mathbf{k}) \quad m/s^2$$



Παράδειγμα

Ένα συρμάτινο κυκλικό πλαίσιο με ακτίνα R=0.1 m βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B = 0.2 T. Ποια είναι η ροή του μαγνητικού πεδίου που περνάει μέσα από το πλαίσιο όταν η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου είναι (α) παράλληλη στο επίπεδο του πλαισίου, (β) κάθετη στο επίπεδο του πλαισίου, (γ) σχηματίζει γωνία 30° με το επίπεδο του πλαισίου;

Λύση

Επίπεδη επιφάνεια

$$\Phi_B = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{B}\cdot\mathbf{\Delta A_i} = \mathbf{B}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{\Delta A_i}\right) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

(α) $\Phi_{\mathrm{B}} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = 0 \quad T\cdot m$

(β) $\Phi_{\mathrm{B}} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = BA = (0.2T)\left(\pi\cdot 0.1^2 m\right) =$

$6.28\times10^{-3} \quad T\cdot m$

(γ) $\Phi_{\mathrm{B}} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = BA\cos 60 =$

$(0.2T)\left(\pi\cdot 0.1^2 m\right)\cdot 0.5 = 3.14\times10^{-3} \quad T\cdot m$

Παράδειγμα

Ένα ορθογώνιο πλαίσιο με πλευρές a *και* b *που κείται στο επίπεδο xy βρίσκεται σε χώρο μαγνητικού πεδίου* $\boldsymbol{B}=0.1\boldsymbol{i}+0.005\boldsymbol{k}$. *Υπολογίστε την ροή μαγνητικού πεδίου που το διαπερνάει.*

Λύση

Αφού το πλαίσιο κείται στο επίπεδο xy και έχει εμβαδόν ab, μαθηματικά παριστάνεται με ένα διάνυσμα **A** κάθετο στο επίπεδο xy. Έστω αυτή είναι η κατεύθυνση z με μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{k}}$. Άρα $\mathbf{A} = ab\hat{\mathbf{k}}$. Το μαγνητικό πεδίο είναι επίσης ένα σταθερό διάνυσμα. Άρα εδώ τα πράγματα είναι απλά. Η μαγνητική ροή είναι

$$\Phi_m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \left(0.1\mathbf{i} + 0.005\mathbf{k}\right) \cdot \left(ab\mathbf{k}\right) = 0.005ab$$

Παράδειγμα

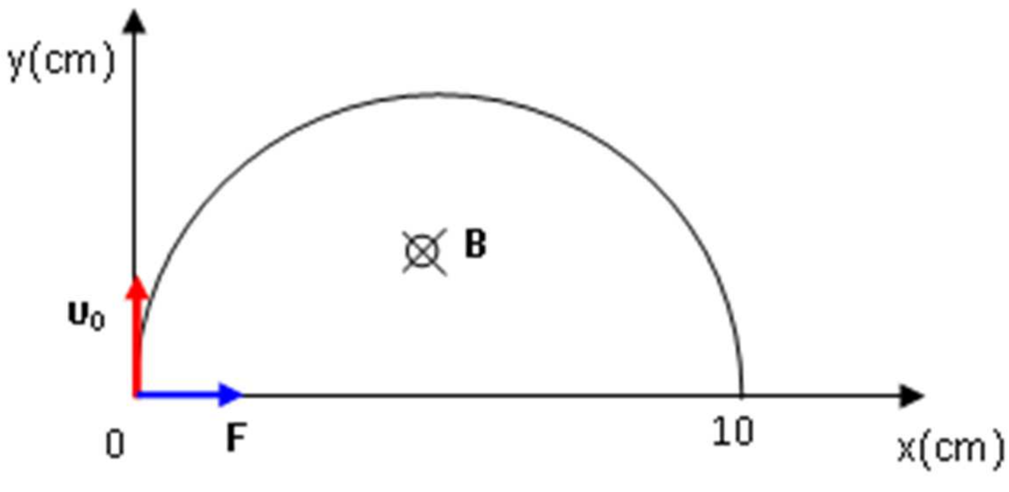
- *Ένα ηλεκτρόνιο έχει αρχική ταχύτητα* $\upsilon_0 = 5\times10^5\mathbf{j}$ m/s *όταν περνάει από την αρχή των αξόνων. Προσδιορίστε το μαγνητικό πεδίο που απαιτείται ώστε το ηλεκτρόνιο να περάσει από το σημείο (10.0, 0 ,0) cm.*

Λύση

$$e\upsilon_0 B = \frac{m\upsilon_0^2}{R} \Rightarrow B = \left(\frac{m}{e}\right)\frac{\upsilon_0}{R} =$$

$$= \frac{1}{1.76\times10^{11} C/kg}\,\frac{5\times10^{5} m/s}{5\times10^{-2} m}$$

$$= 5.7\times10^{-5} T$$

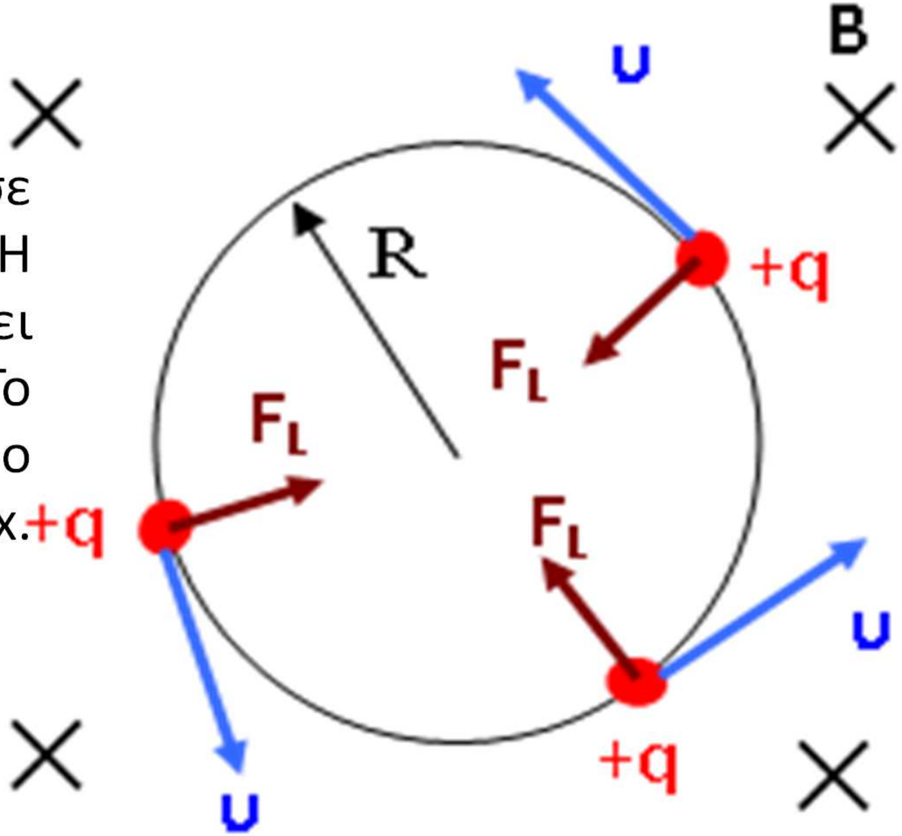


Κίνηση φορτίων σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

<u>Απλούστερη περίπτωση</u>

Κίνηση θετικού φορτίου μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Η ταχύτητα είναι αρχικά και παραμένει κάθετη στο μαγνητικό πεδίο. Το μαγνητικό πεδίο μπαίνει στο επίπεδο της σελίδας και συμβολίζεται με το x. Η τροχιά του φορτίου είναι κυκλική.

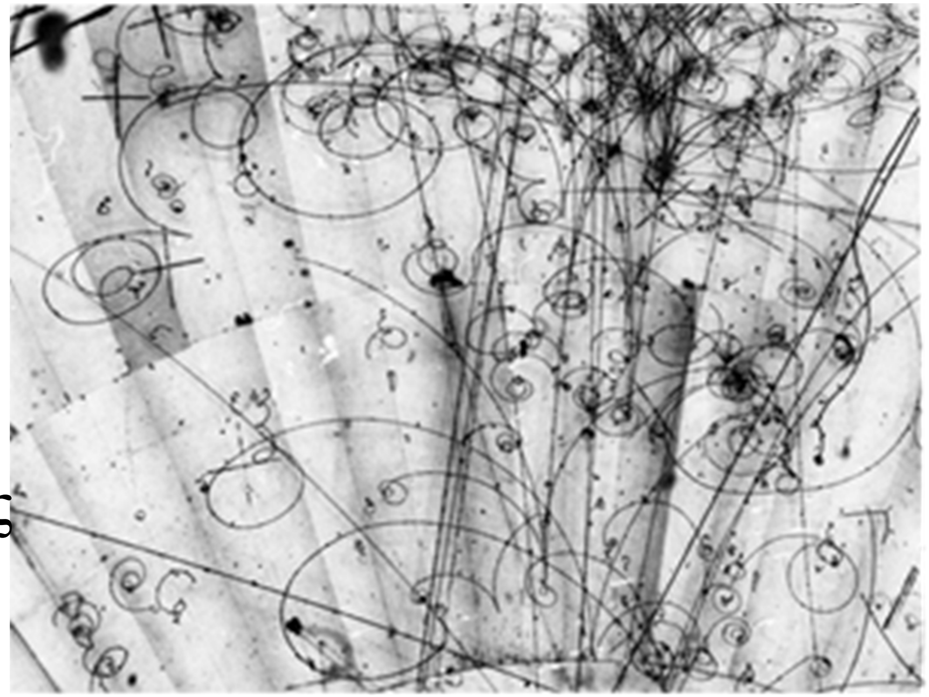


$$q\upsilon B = \frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{R} = \frac{qB}{m}$$

ω: Συχνότητα κυκλότρου

Θάλαμος φυσαλίδων

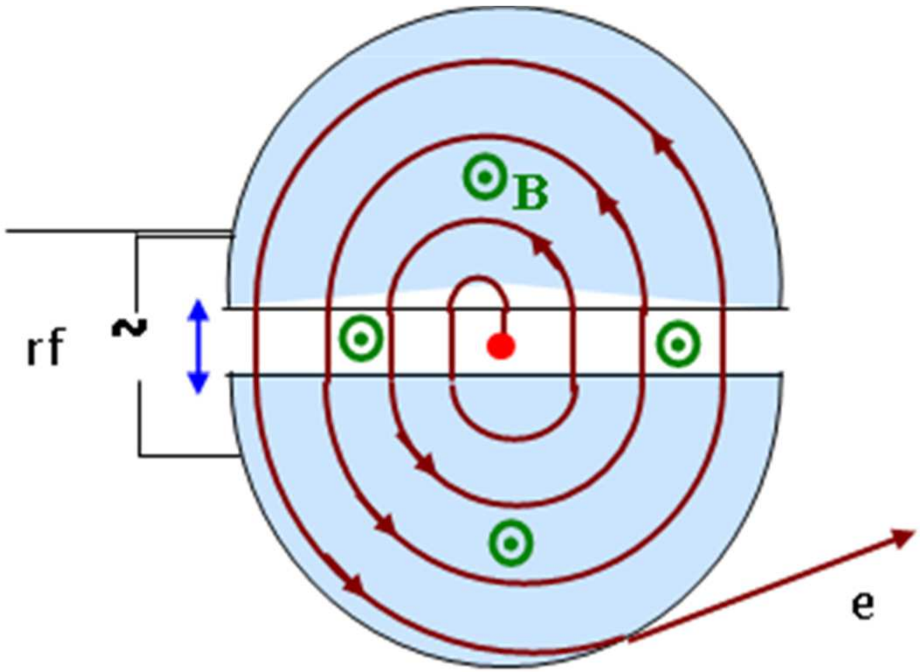
Εικόνα από θάλαμο φυσαλίδων. Οι γραμμές είναι τροχιές φορτισμένων σωματιδίων. Λόγω ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων με το μέσον του θαλάμου, τα σωμάτια χάνουν ενέργεια και άρα μειώνεται η ακτίνα περιστροφής τους. Στην μέση και κάτω μπορείτε να δείτε την παραγωγή ενός ζεύγους ηλεκτρονίου ποζιτρονίου.



Έπιταχυντής σωματιδίων - Κύκλοτρον

Ανακαλύφθηκε το 1932 από τον Ernest O. Lawrence στο Berkeley

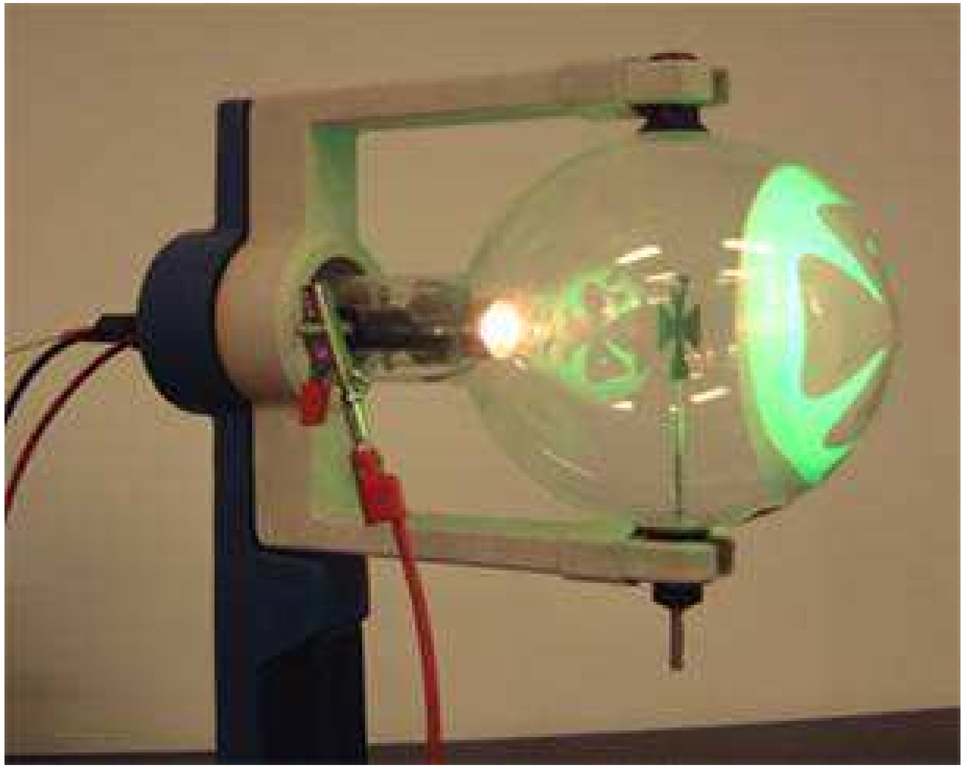
Σχηματική παράσταση ενός κυκλότρου. Το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στη σελίδα και έχει φορά από την σελίδα προς τον αναγνώστη. Συμβολίζεται από τους κύκλους με την τελεία στη μέση. Θετικά ιόντα από μία πηγή ιόντων στο κέντρο επιταχύνονται από ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στα δύο D (ημικύκλια)



Παράκαμψη - Καθοδικές ακτίνες

Έτσι ανακαλύφθηκαν τα ηλεκτρόνια που τα ονόμασαν «καθοδικές ακτίνες»

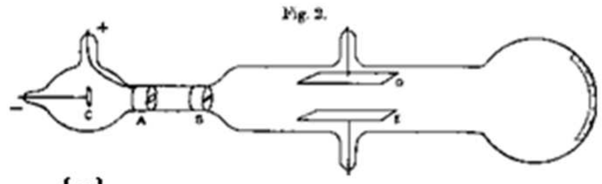
William Crookes 1875



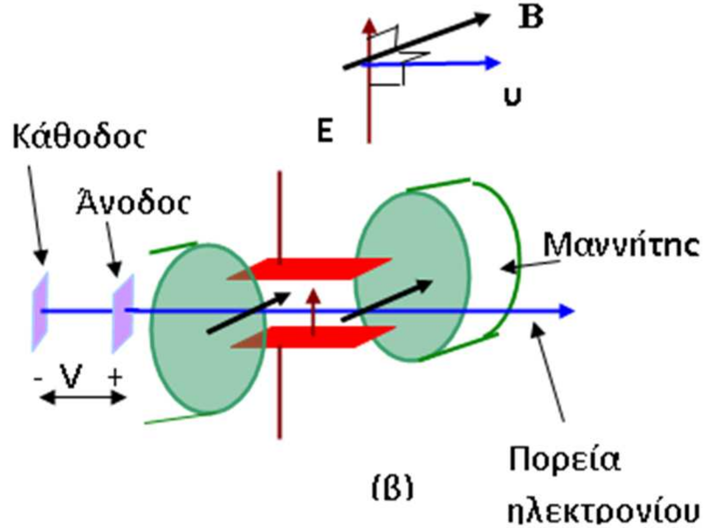
Μέτρηση e/m ηλεκτρονίου

(α) Ο καθοδικός σωλήνας που χρησιμοποίησε ο J.J. Thomson για την ανακάλυψη του ηλεκτρονίου, όπως σχεδιάσθηκε στην πρωτότυπη δημοσίευση (1897)

(β) Σχηματική παράσταση του πειράματος. Το ηλεκτρικό πεδίο, το μαγνητικό πεδίο και η ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι μεταξύ τους κάθετα.



(α)



(β)

$$\Delta U = \Delta K \Rightarrow Ve = \frac{1}{2} m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2Ve}{m}}$$

$$eE = e\upsilon B \Rightarrow E = \upsilon B = B\sqrt{\frac{2Ve}{m}} \Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{1}{2V}\left(\frac{E}{B}\right)^2$$

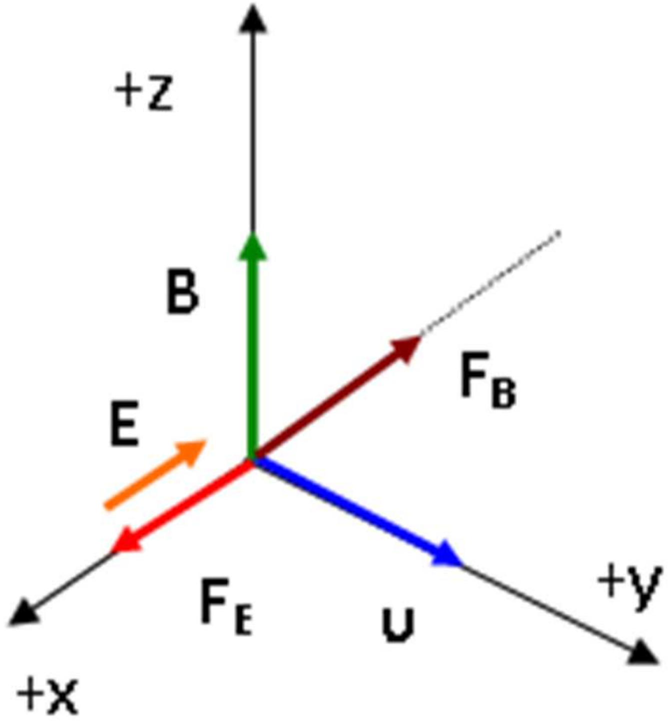
Ανακάλυψη ηλεκτρονίου

e/m = 1.76×10^{11} Cb/kg

Παράδειγμα

*πό έναν επιταχυντή παίρνουμε αρνητικά ιόντα υδρογόνου (ένα πρωτόνιο και δύο ηλεκτρόνια). (α) Ποια είναι η ταχύτητα των ιόντων της δέσμης όταν αυτά δεν αποκλίνουν περνώντας μέσα από ένα ηλεκτρικό πεδίο 1.5×10^5 V/m και ένα μαγνητικό πεδίο 0.2 T; Η διάταξη είναι τέτοια ώστε τα **E**, **B**, **υ** να είναι κάθετα μεταξύ τους. Προσδιορίστε τις φορές των διανυσμάτων (β) Ποια είναι η ακτίνα της τροχιάς υπό την επίδραση μόνο του μαγνητικού πεδίου; (γ) Βρείτε την συχνότητα κυκλότρου της κίνησης.*

Λύση



(α) $\boldsymbol{F_E = Eq}$

(β) $\upsilon = \dfrac{E}{B} = \dfrac{1.5\times10^{5}\ V/m}{0.2T} = 7.5\times10^{5}\, m/s$

$$F_L = F_C \Rightarrow q\upsilon B = \frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m\upsilon}{qB} = \frac{\left(1.67\times10^{-27}\,kg\right)}{\left(1.6\times10^{-19}\,C\right)}\frac{\left(7.5\times10^{5}\,m/s\right)}{\left(0.2\,T\right)} \Rightarrow$$

$$R = 3.91\ cm$$

(γ) $\omega = \dfrac{qB}{m} \Rightarrow R = \dfrac{m\upsilon}{qB} = \dfrac{\left(1.6\times10^{-19}\,C\right)\left(0.2\,T\right)}{\left(1.67\times10^{-27}\,kg\right)} = 1.9\times10^{7}\,s^{-1}$

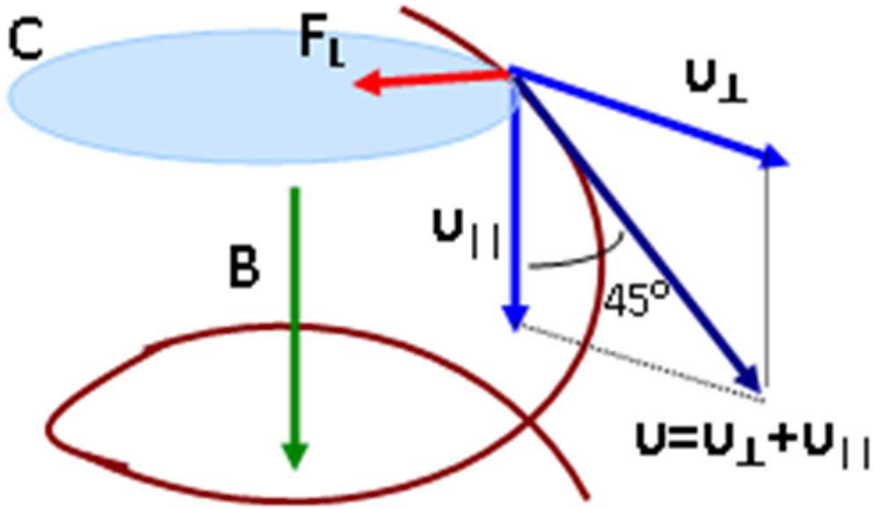
Παράδειγμα

Ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο μέτρου 1 T έχει κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα κάτω. Ένα ηλεκτρόνιο με ταχύτητα 2.0×10^7 m/s *κινείται με ταχύτητα 45° ως προς τις γραμμές του πεδίου. Πόση κατακόρυφη απόσταση θα καλύψει το ηλεκτρόνιο στον χρόνο που χρειάζεται για να κάνει μία πλήρη περιστροφή;*

Λύση

$$\mathbf{F_L} = e\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B} = e\left(\boldsymbol{\upsilon}_{\perp} + \boldsymbol{\upsilon}_{\parallel}\right)\times\mathbf{B} =$$

$$e\boldsymbol{\upsilon}_{\perp}\times\mathbf{B} + e\boldsymbol{\upsilon}_{\parallel}\times\mathbf{B} = e\boldsymbol{\upsilon}_{\perp}\times\mathbf{B}$$



Σχήμα Παράδειγμα 3.3.2

Η κυκλική κίνηση θα έχει συχνότητα κυκλότρου

$$\omega = eB/m$$

Η $\boldsymbol{\upsilon}_{\perp}$ επηρεάζει την ακτίνα του κύκλου C. Αντίθετα, στην κατακόρυφη διεύθυνση το ηλεκτρόνιο εκτελεί ομαλή ευθύγραμμη κίνηση με ταχύτητα μέτρου
$\upsilon_{||} = \upsilon\cdot\cos 45^{\circ} = 0.707\cdot\upsilon$

$T=2\pi/\omega=(2\pi m)/(eB).$
$L=T\,\upsilon_{||}.$

Άσκηση

- Μία δέσμη πρωτονίων με ταχύτητα υ μπαίνει σε περιοχή μαγνητικού πεδίου B=1.5 T και εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας 0.5 m. (α) Ποια είναι η ταχύτητα των πρωτονίων της δέσμης; (β) Πόσο χρόνο θα χρειασθεί για να διαγράψει ένα ημικύκλιο;

Λύση

$$e\upsilon_0 B = \frac{m\upsilon_0^2}{R} \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{e}{m}BR = \frac{1.6\times10^{-19}\,C}{1.67\times10^{-27}\,kg}\left(1.5\,T\right)\left(0.5\,m\right) = 7.18\times10^{7}\ m/s$$

$$\omega = \frac{eB}{m} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{m\pi}{eB} = \frac{1.67\times10^{-27}\,kg}{1.6\times10^{-19}\,C}\times\frac{3.14}{1.5\,T} = 2.18\times10^{-8}\,s$$

Άσκηση

Φορτίο 9.2×10^{-9} C κινείται σε περιοχή με μαγνητικό πεδίο **B** = 0.5**i** T. Σε κάποια στιγμή η ταχύτητα του φορτίου είναι **υ** = (3**i**+16**j**-8**k**) $\times10^4$ m/s. Υπολογίστε την δύναμη **F** που υφίσταται το φορτίο (κατά μέτρο και φορά).

<u>Λύση</u>

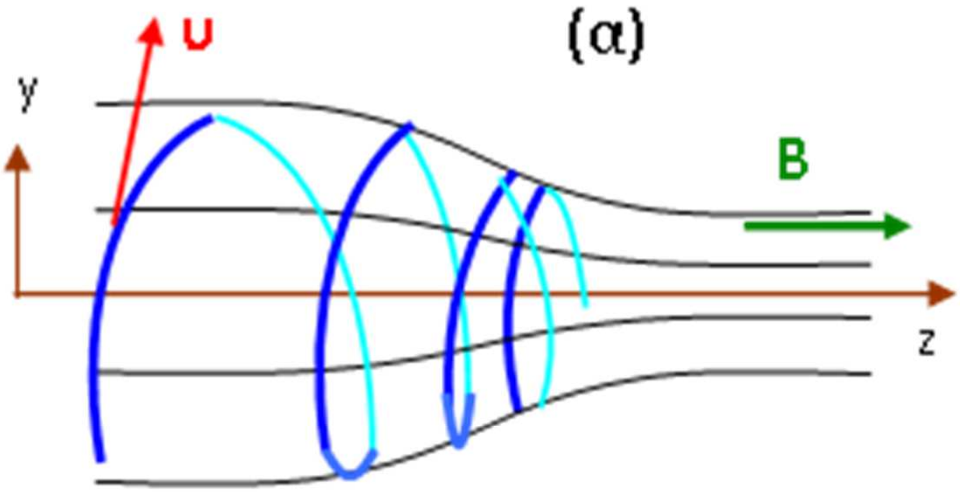
$$q\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B}=\left(9.2\times10^{-9}C\right)\left(\left(3\hat{\mathbf{i}}+16\hat{\mathbf{j}}-8\hat{\mathbf{k}}\right)\times10^{4}m/s\right)\times\left(0.5\hat{\mathbf{i}}T\right)=$$

$$\left(9.2\times10^{-9}C\right)\left(\left(3\times0.5\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}}+16\times0.5\,j\times\hat{\mathbf{i}}-8\times0.5\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}}\right)\times10^{4}mT/s\right)=$$

$$\left(9.2\times10^{-5}\right)\left(16\times0.5\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}}-8\times0.5\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}}\right)N=\left(9.2\times10^{-5}\right)\left(-8\hat{\mathbf{k}}-4\hat{\mathbf{j}}\right)N\Rightarrow$$

$$\mathbf{F}=-\left(73.6\hat{\mathbf{k}}+36.8\hat{\mathbf{j}}\right)\times10^{-5}N$$

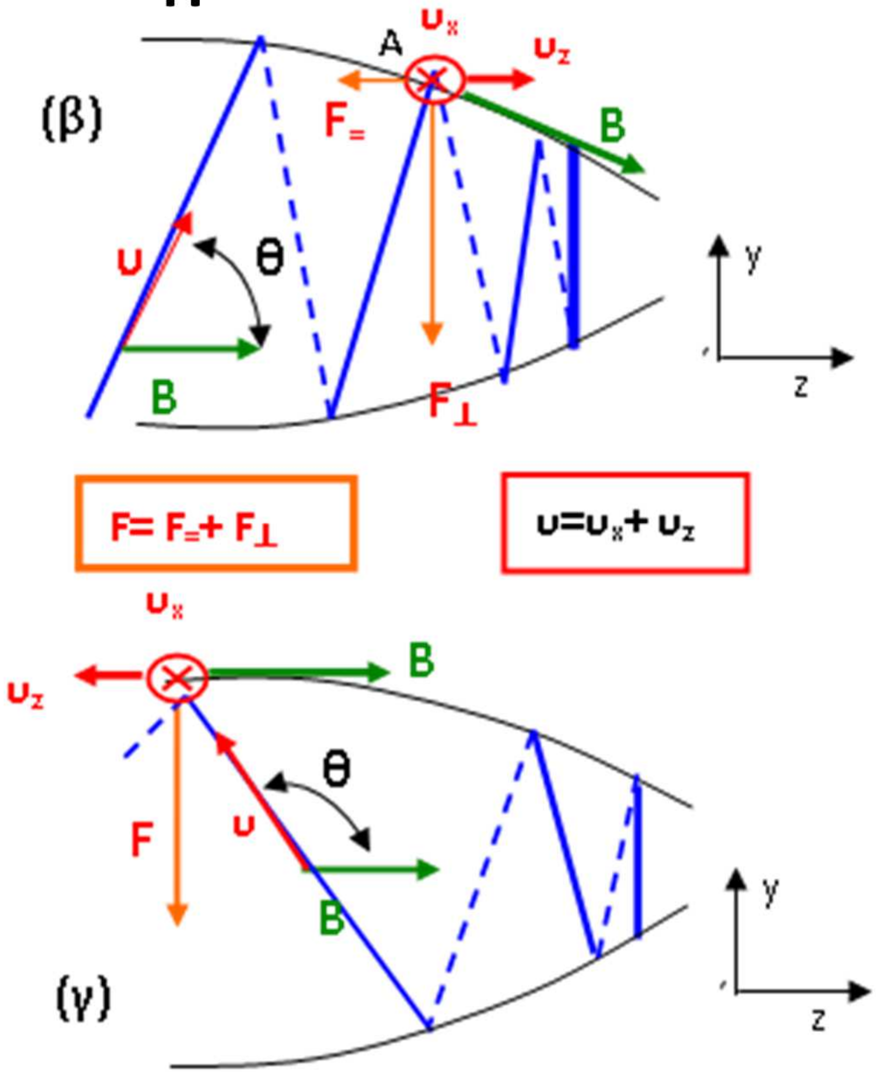
ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΟΥ ΣΕ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ



Σχήμα 3.8 (α) Κίνηση φορτίου σε ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο. Ας πούμε μία ‘καλλιτεχνική’

Κατοπτρικό σημείο

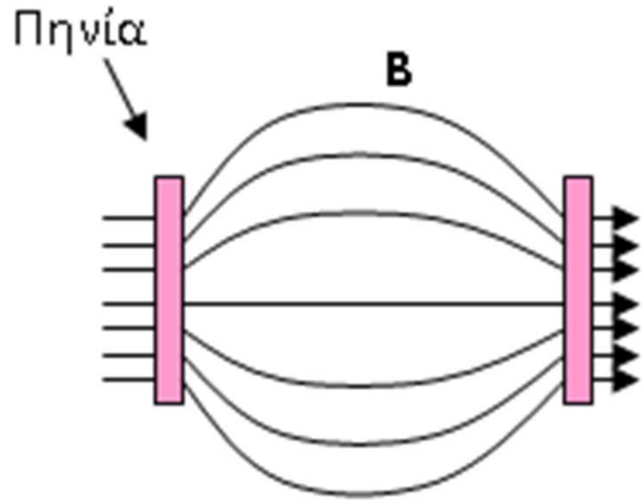
- (β) Άποψη της κίνησης από το πλάι. Βέβαια η τροχιά (μπλε γραμμές) πρέπει να είναι ελαφρά καμπυλωμένη. Το φορτίο κινείται προς τα δεξιά και φθάνει στο δεξιό άκρο στο σημείο αναστροφής ή κατοπτρικό σημείο. (γ) Το φορτίο συνεχίζει την κίνηση του από το κατοπτρικό σημείο. Τώρα η κίνηση είναι προς τα αριστερά



Μαγνητική φιάλη (παγίδα)

Εφαρμογή στην
Πυρηνική σύντηξη

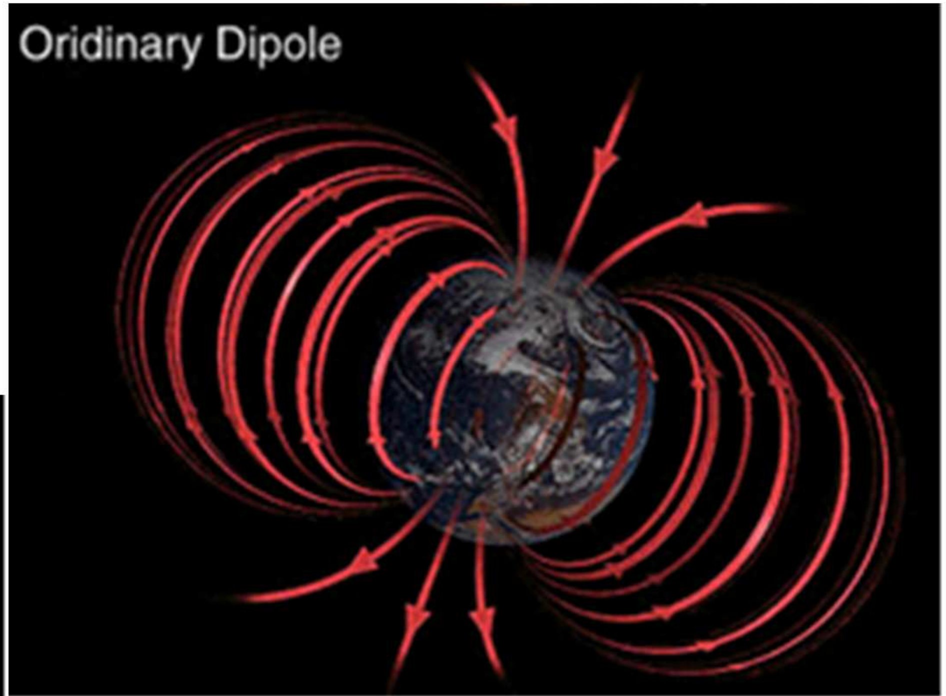
TOKAMAC
ITER

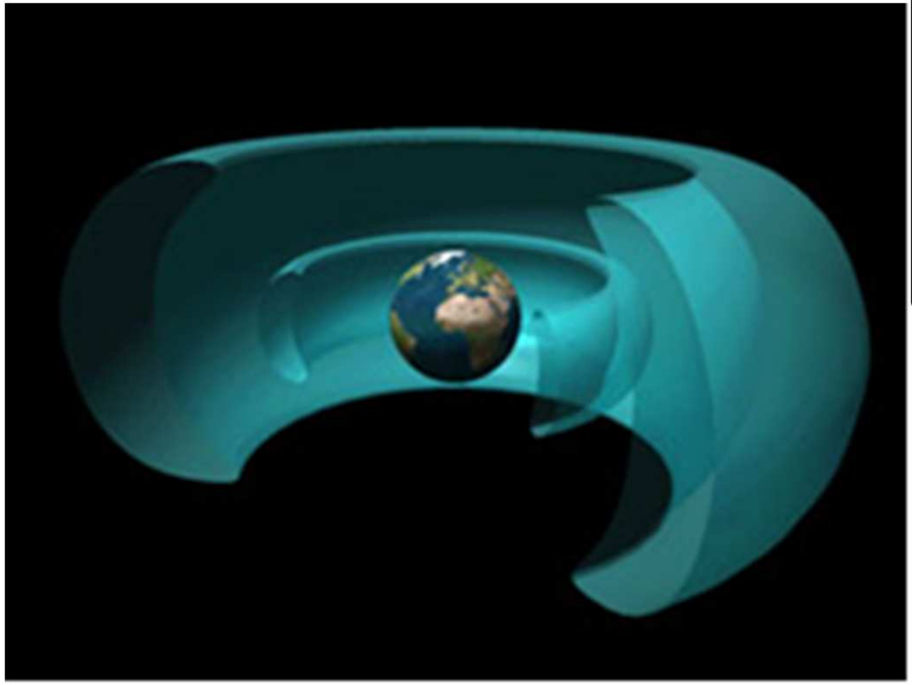


Σχήμα 3.9 Σχηματική παράσταση μίας μαγνητικής παγίδας

Μαγνητικό πεδίο της Γης

(α) Το μαγνητικό πεδίο της γης. Είναι το πεδίο ενός μαγνητικού διπόλου





. (β) Η παγίδευση φορτισμένων σωματιδίων από το ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο δίνει γέννηση στις δύο τοροειδείς ζώνες ακτινοβολίας Van Allen.

Ζώνες Van Allen

- Αυτές οι δύο περιοχές ονομάσθηκαν «ζώνες ακτινοβολίας Van Allen» από το όνομα του ανθρώπου που τις ανακάλυψε από μετρήσεις των διαστημοπλοίων Explorer1 και Pioneer3 το 1958 και φαίνονται από μία καλλιτεχνική οπτική γωνία στο σχήμα 3.10.β. Πρόκειται για δύο ζώνες σε σχήμα ντόνατ. Από αυτές η εσωτερική αποτελείται κατά κύριο λόγο από ενεργητικά πρωτόνια που προέρχονται από την αλληλεπίδραση των κοσμικών ακτινών με τα ανώτατα όρια της ατμόσφαιρας. Η εξωτερική ζώνη αποτελείται κυρίως από ενεργητικά ηλεκτρόνια που προέρχονται από τις κοσμικές ακτίνες.

•

Δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό

$\mathbf{F_e}$=e $\boldsymbol{\upsilon}_\mathbf{d} \times\mathbf{B}$

$\mathbf{F}$=N$\mathbf{F_e}$

e: φορτίο ηλεκτρονίου (αρνητικό)

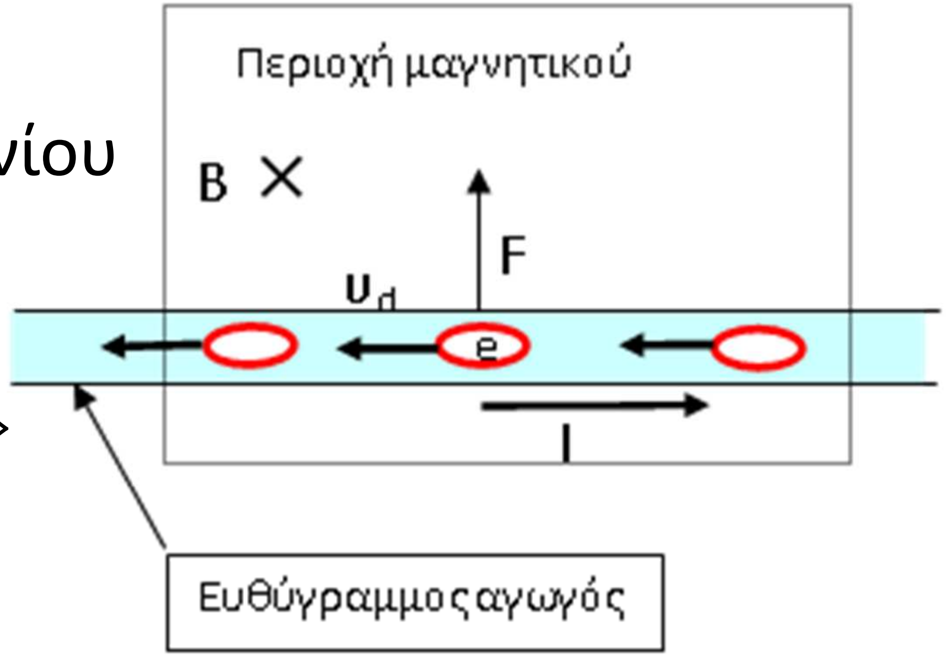
$$I = ne\upsilon_d A$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e N = (e\boldsymbol{\upsilon}_\mathbf{d} \times \mathbf{B})(nAL) \Rightarrow$$

$$\mathbf{F} = neAL(-\upsilon_d \mathbf{i} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{F} = I\ L\mathbf{i} \times \mathbf{B} = I\ \mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

Καθετότητα L και B
F=ILB



Σχήμα 3.11 Μαγνητική δύναμη που ασκείται σε ρευματοφόρο αγωγό. Η παραμόρφωση του αγωγού έχει τονισθεί υπερβολικά.

Μαγνητική δύναμη πάνω σε αγωγό τυχαίου σχήματος

Κάθε στοιχειώδες τμήμα του αγωγού το θεωρούμε ευθύγραμμο

$$\mathbf{\Delta F_i} = I\,\mathbf{\Delta l_i} \times \mathbf{B_i}$$

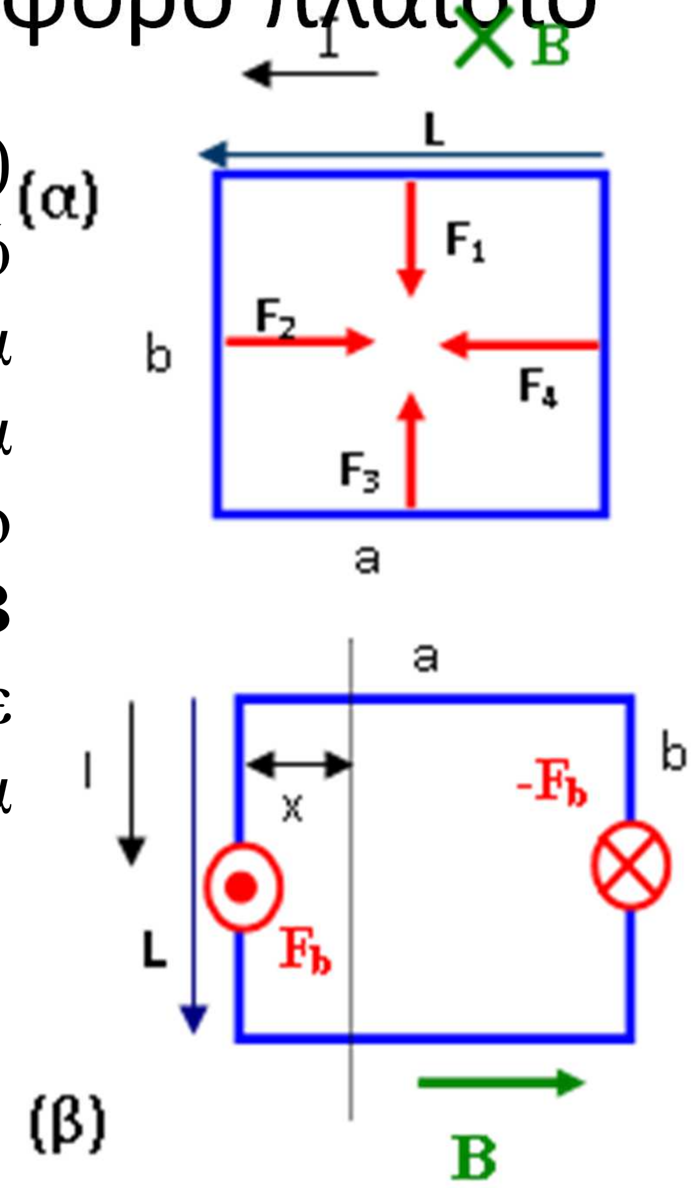
$$F \cong \sum_{i=1}^{N} \Delta F_i = I \sum_{i=1}^{N} \Delta l_i B_i \sin\theta_i$$

Η μαγνητική δύναμη σε κλειστό αγωγό είναι 0

$$\mathbf{F} = I\left(\lim_{\substack{\Delta l \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{\Delta l}_i \times \mathbf{B}_i\right) = I\left(\lim_{\substack{\Delta l \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{\Delta l}_i\right) \times \mathbf{B}_i = 0$$

Δύναμη σε ρευματοφόρο πλαίσιο

Πλαίσιο σε μαγνητικό πεδίο. (α) Η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου **B** είναι κάθετη στη σελίδα και έχει φορά προς τα μέσα Συμβολίζεται με το σύμβολο x. Το **B** κάθετο στο πλαίσιο (β) **B** παράλληλο στο πλαίσιο. Έχουμε ζεύγος δυνάμεων που τείνει να περιστρέψει το πλαίσιο.



Η συνολική δύναμη είναι μηδέν

Ροπή σε ρευματοφόρο πλαίσιο

$$\tau = \tau_{\alpha\rho} + \tau_{\delta\varepsilon} = F_b x + F_b\left(a - x\right)$$

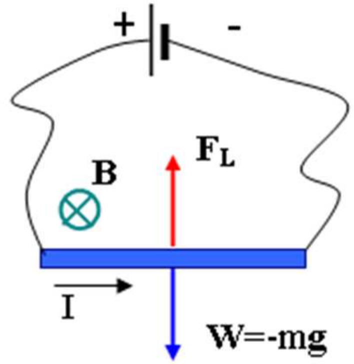
$$= F_b a = \left(IbB\right)a = IAB$$

$$\boxed{\text{Μαγνητική ροπή } \boldsymbol{\mu} = I\mathbf{A}}$$

- Τελικά $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$

Παράδειγμα

Οριζόντιο σύρμα με μήκος 0.5 m και μάζας 10 g κρεμιέται από λεπτά και εύκαμπτα μεταλλικά νήματα μέσα σε οριζόντιο μαγνητικό πεδίο B= 0.2 T. Το σύρμα και το μαγνητικό πεδίο είναι μεταξύ τους κάθετα. Προσδιορίστε το ρεύμα που πρέπει να διαρρέει το σύρμα ώστε να μην υπάρχουν τάσεις στα μεταλλικά νήματα.



$$F_L = W \Rightarrow ILB = mg \Rightarrow I = \frac{mg}{LB} = \frac{10\times10^{-3}kg\cdot 9{,}81m/s^2}{0.5m\cdot 0.2T} \quad \Rightarrow \quad I = 0.98\,A$$

Παράδειγμα

- *Ένα ορθογώνιο πλαίσιο (2.0×4.0) cm² έχει n=10 σπείρες, βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο 0.5 T και διαρρέεται από ρεύμα έντασης 5 A. (α) Βρείτε ποια είναι η μέγιστη τιμή της ροπής πάνω στο πηνίο, (β) Ποια είναι η μαγνητική ροπή του πηνίου;*

Λύση

$$\tau = n\left(\mathrm{IAB}\right) = 10 \cdot \left(5\,\mathrm{A}\right) \cdot \left(8 \times 10^{-4}\, m^2\right) \cdot \left(0.5 T\right) = 0.02\, N \cdot m$$

$$\mu = n\left(\mathrm{IA}\right) = 10 \cdot \left(5\,\mathrm{A}\right) \cdot \left(8 \times 10^{-4}\, m^2\right) = 0.04\,\mathrm{A} \cdot m^2$$

Άσκηση

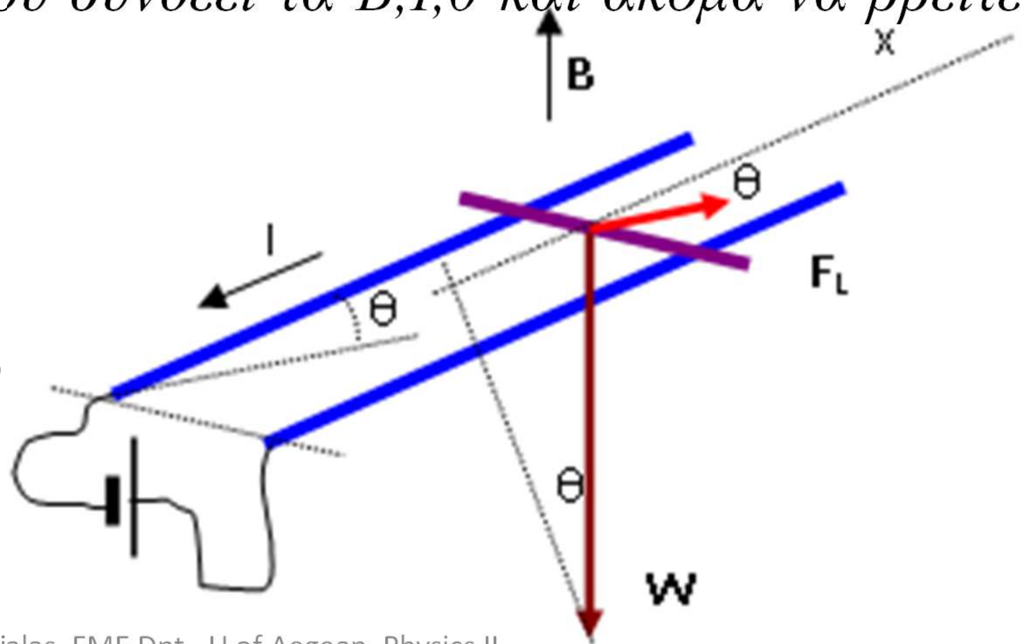
Μεταλλικό οριζόντιο σύρμα μάζας m και μήκους L ολισθαίνει κάθετα πάνω σε δύο παράλληλες μεταλλικές ράβδους που σχηματίζουν γωνία θ με την οριζόντια κατεύθυνση. Οι δύο μεταλλικές ράβδοι και το σύρμα συνδέονται με μπαταρία που διατηρεί ρεύμα I μέσα από το κύκλωμα. Το σύστημα των ράβδων βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο πεδίο B. Αν ισορροπεί το σύρμα, να προσδιορίσετε τη σχέση που συνδέει τα B,I,θ και ακόμα να βρείτε την φορά του B και του I.

Λύση

$$W_x = F_{Lx}$$

$$\Rightarrow mg\sin\theta = ILB\cos\theta$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{ILB}{mg}$$

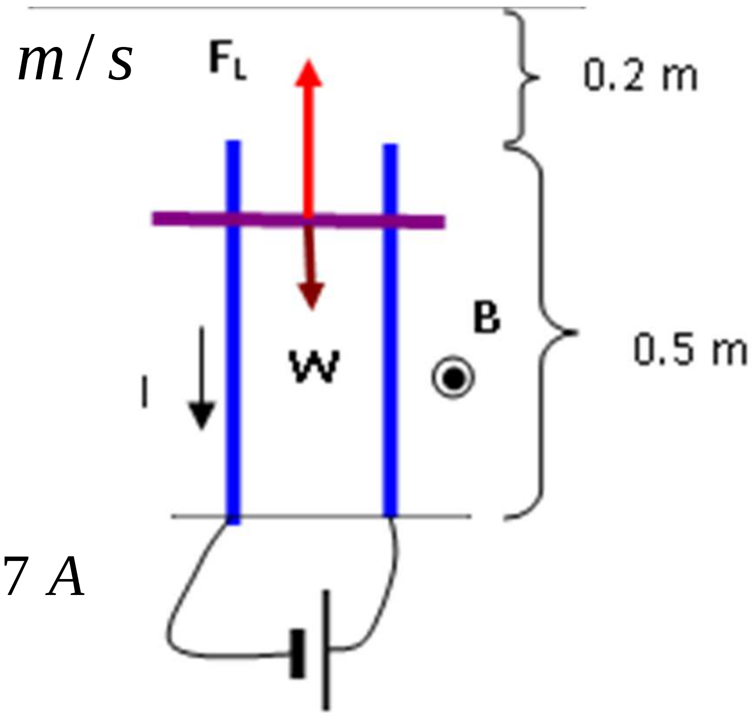


Άσκηση

Δύο κατακόρυφες μεταλλικές ράβδοι 0.5 m που απέχουν μεταξύ τους 0.1 m συνδέονται από τα κάτω άκρα τους με συσσωρευτή. Το συνολικό μήκος των ράβδων είναι μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο 0.2 T κάθετο στο επίπεδο των ράβδων. Ένα οριζόντιο σύρμα μάζας 10 g μπορεί να ολισθήσει χωρίς τριβές πάνω στις ράβδους κλείνοντας το κύκλωμα με την μπαταρία. Υπολογίστε την φορά και το μέτρο του ρεύματος ώστε το σύρμα να εξακοντισθεί μέχρι να φθάσει σε ύψος 0.7 m. Υποθέστε ότι το σύρμα αρχικά ακουμπάει στο έδαφος και ότι παραμένει οριζόντιο καθ' όλη την διάρκεια της κίνησης.

Λύση

$$\upsilon = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times 10\times 0.2}\ m/s = 2\ m/s$$



$$a = \frac{\upsilon^2}{2x} = \frac{(2\ m/s)^2}{2\times 0.5\,m} = 4\ ms^{-2}$$

$$F_L - W = ma \Rightarrow ILB = m(g+a) \Rightarrow$$

$$I = \frac{m(g+a)}{LB} = \frac{(0.01\,kg)(10+4)\,ms^{-2}}{(0.1\,m)(0.2\,T)} = 7\ A$$