

ΠΙΝΑΚΑΣ 23.1 Φορτία και μάζα του ηλεκτρονίου, του πρωτονίου και του νετρονίου

Σωματίδιο	Φορτίο (C)	Μάζα (kg)
Ηλεκτρόνιο (e)	$-1.6021917 \times 10^{-19}$	9.1095×10^{-31}
Πρωτόνιο (p)	$+1.6021917 \times 10^{-19}$	1.67261×10^{-27}
Νετρόνιο (n)	0	1.67492×10^{-27}

Στον Πίνακα 23.1 αναγράφονται τα ηλεκτρικά φορτία και οι μάζες του ηλεκτρονίου, του πρωτονίου και του νετρονίου.

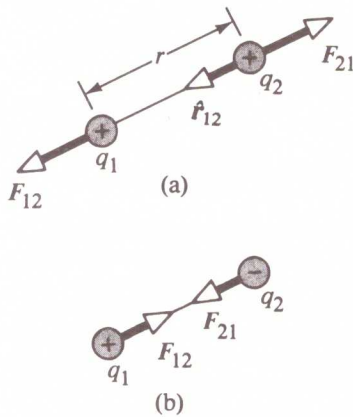
Όταν χρησιμοποιούμε τον νόμο του Coulomb δεν πρέπει να λησμονούμε ποτέ ότι η δύναμη είναι *διανυσματικό* μέγεθος. Να σημειωθεί επίσης ότι ο νόμος του Coulomb ισχύει ακριδώς μόνο για σημειακά φορτία ή σωματίδια. Εάν συμβολίσουμε με \hat{r}_{12} το μοναδιαίο διάνυσμα που κατευθύνεται από το φορτίο q_2 στο φορτίο q_1 , όπως φαίνεται στο Σχήμα 23.5, τότε, συμβολίζοντας με F_{12} την ηλεκτρική δύναμη που ασκεί το φορτίο q_2 πάνω στο q_1 , μπορούμε να γράψουμε τη διανυσματική σχέση

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (23.6)$$

Επειδή όμως ισχύει πάντοτε ο τρίτος νόμος του Newton, η ηλεκτρική δύναμη που ασκεί το φορτίο q_1 πάνω στο φορτίο q_2 είναι ίση σε μέτρο με τη δύναμη που ασκεί το φορτίο q_2 πάνω στο φορτίο q_1 αλλά αντίθετη σε κατεύθυνση, δηλαδή $F_{21} = -F_{12}$. Είναι προφανές από την Εξίσωση 23.6 ότι εάν τα q_1 και q_2 έχουν το ίδιο ηλεκτρικό φορτίο, το γινόμενο τους $q_1 q_2$ είναι θετικό και έτσι η δύναμη είναι απωστική, όπως στο Σχήμα 23.5a. Εάν όμως τα q_1 και q_2 έχουν αντίθετο ηλεκτρικό φορτίο, όπως στο Σχήμα 23.5b, τότε το γινόμενό τους είναι αρνητικό και η δύναμη είναι ελκτική.

Η Εξίσωση 23.6 δίνει τη δύναμη ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε φορτία με την παρουσία και πολλών άλλων φορτίων. Επομένως, η ολική δύναμη που ασκείται πάνω σε κάθε φορτίο ισούται με τη *διανυσματική* συνισταμένη των δυνάμεων που ασκεί καθένα από τα άλλα φορτία επάνω του. Αυτή είναι η αρχή της *επαλληλίας ή υπέρθεσης* στην ηλεκτροστατική και έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά. Λογουχάρη, εάν υπάρχουν τέσσερα φορτία, τότε η συνισταμένη δύναμη που υφίσταται το σώμα 1 λόγω της ύπαρξης των φορτίων 2, 3 και 4 είναι

$$F_1 = F_{12} + F_{13} + F_{14}$$



Σχήμα 23.5 Η δύναμη την οποία ασκεί ένα σημειακό φορτίο q_1 πάνω σε ένα άλλο σημειακό φορτίο q_2 που έχει απόσταση r από το πρώτο περιγράφεται από τον νόμο του Coulomb. Να σημειωθεί ότι η δύναμη στο q_1 είναι ίση αλλά αντίθετη προς τη δύναμη πάνω στο q_2 . (a) Όταν τα δύο φορτία είναι όμοια, τότε η δύναμη είναι απωστική. (b) Όταν τα φορτία είναι ανόμοια, τότε είναι ελκτική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.1 Υπολογίστε τη συνισταμένη δύναμη

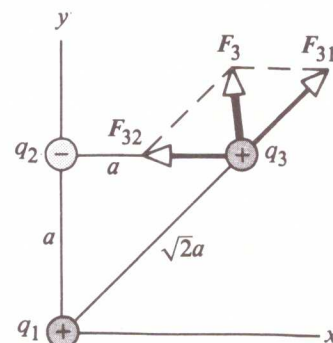
Θεωρήστε ότι τρία σημειακά φορτία κείνται στις κορυφές του τριγώνου, όπως στο Σχήμα 23.6. Τα φορτία $q_1 = q_3 = 5 \mu\text{C}$, $q_2 = -2 \mu\text{C}$ ($1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{C}$) και $a = 0.1 \text{m}$. Βρείτε τη συνισταμένη δύναμη στο q_3 .

Λύση Προσδιορίστε πρώτα από όλα την κατεύθυνση των επιμέρους δυνάμεων που ασκούν τα φορτία q_1 και q_2 πάνω στο φορτίο q_3 . Το q_3 έλκει το q_2 , διότι έχουν αντίθετα φορτία, ενώ το q_3 απωθείται από το q_1 , διότι και τα δύο έχουν θετικό φορτίο.

Ας υπολογίσουμε τώρα το μέτρο των δυνάμεων οι οποίες δρουν πάνω στο q_3 . Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το q_2 πάνω στο q_3 είναι

$$\begin{aligned} F_{32} &= k \frac{|q_3||q_2|}{a^2} \\ &= \left(9.0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}\right) \frac{(5 \times 10^{-6} \text{C})(2 \times 10^{-6} \text{C})}{(0.1 \text{m})^2} \\ &= 9.0 \text{N} \end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 23.6, η F_{32} κατευθύνεται προς τα αριστερά, διότι τα q_3 και q_2 έχουν αντίθετα φορτία



Σχήμα 23.6 (Παράδειγμα 23.1). Η F_{31} είναι η δύναμη που ασκείται από το φορτίο q_1 πάνω στο φορτίο q_3 . Η F_{32} είναι η δύναμη που ασκείται από το φορτίο q_2 πάνω στο q_3 . Συνεπώς, η ολική δύναμη, F_3 , στην οποία υπόκειται το q_3 είναι το διανυσματικό άθροισμα $F_{31} + F_{32}$.

Το μέτρο τής δύναμης που ασκεί το q_1 πάνω στο q_3 είναι

$$\begin{aligned} F_{31} &= k \frac{|q_3||q_1|}{(\sqrt{2}a)^2} \\ &= \left(9.0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}\right) \frac{(5 \times 10^{-6} \text{ C})(5 \times 10^{-6} \text{ C})}{2(0.1 \text{ m})^2} \\ &= 11 \text{ N} \end{aligned}$$

Η δύναμη F_{31} είναι απωστική και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x . Επομένως οι συνιστώσες x και y τής F_{31} είναι ίσες και έχουν μέτρο $F_{31} \cos 45^\circ = 7.9 \text{ N}$. Η δύναμη F_{32} κατευθύνεται προς την αρνητική κατεύθυνση τού άξονα x . Έτσι, οι συνιστώσες x και y τής συνισταμένης δύναμης που ασκείται πάνω στο q_3 είναι

$$F_x = F_{31x} + F_{32} = 7.9 \text{ N} - 9.0 \text{ N} = -1.1 \text{ N}$$

$$F_y = F_{31y} = 7.9 \text{ N}$$

Εάν εκφράσουμε τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στο q_3 συναρτήσει μοναδιαίων διανυσμάτων, βρίσκουμε $F_3 = (-1.1\mathbf{i} + 7.9\mathbf{j}) \text{ N}$.

Άσκηση 1 Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση τής συνισταμένης δύναμης που ασκείται πάνω στο q_3 .

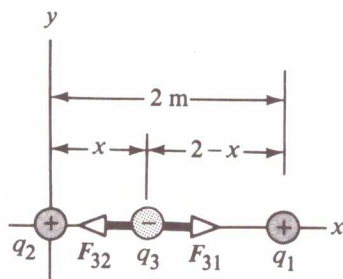
Απάντηση Είναι 8.0 N και σχηματίζει γωνία 98° με τον άξονα x .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.2 Πού είναι μηδενική η συνισταμένη;

Τρία φορτία κείνται πάνω στον άξονα x , όπως φαίνεται στο Σχήμα 23.7. Το θετικό φορτίο $q_1 = 15 \mu\text{C}$ κείται στη θέση $x = 2 \text{ m}$, το επίσης θετικό φορτίο $q_2 = 6 \mu\text{C}$ κείται πάνω στην αρχή τών συντεταγμένων. Πού πρέπει να τοποθετηθεί ένα αρνητικό φορτίο, το q_3 , στον άξονα x ώστε η συνισταμένη δύναμη που ασκείται επάνω του να είναι μηδενική;

Λύση Εφόσον το q_3 είναι αρνητικό και τα q_1 και q_2 είναι θετικά, οι δυνάμεις F_{31} και F_{32} είναι ελκτικές, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 23.7. Εάν συμβολίσουμε με x τη θέση τού q_3 πάνω στον άξονα, τότε τα μέτρα τών δυνάμεων F_{31} και F_{32} είναι

$$F_{31} = k \frac{|q_3||q_1|}{(2-x)^2} \quad \text{και} \quad F_{32} = k \frac{|q_3||q_2|}{x^2}$$



Σχήμα 23.7 (Παράδειγμα 23.2) Θέτουμε τρία σημειακά φορτία πάνω στο άξονα x . Το φορτίο q_3 είναι αρνητικό, ενώ τα q_1 και q_2 είναι θετικά. Εάν η ολική δύναμη πάνω στο q_3 είναι μηδενική, τότε η δύναμη που ασκεί το q_1 πάνω στο q_3 είναι ίση και αντίθετη προς τη δύναμη που ασκεί το q_2 πάνω στο q_3 .

Για να είναι μηδενική η συνισταμένη πάνω στο q_3 , η F_{32} πρέπει να είναι ίση και αντίθετη προς την F_{31} , δηλαδή

$$k \frac{|q_3||q_2|}{x^2} = k \frac{|q_3||q_1|}{(2-x)^2}$$

Απαλείφουμε τα k και q_3 και βρίσκουμε ότι

$$(2-x)^2|q_2| = x^2|q_1|$$

$$(4 - 4x + x^2)(6 \times 10^{-6} \text{ C}) = x^2(15 \times 10^{-6} \text{ C})$$

Λύνουμε τη δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση και βρίσκουμε ότι $x = 0.775 \text{ m}$. Γιατί είναι απαράδεκτη η άλλη λύση;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.3 Το άτομο τού υδρογόνου

Η απόσταση μεταξύ τού ηλεκτρονίου και τού πρωτονίου στο άτομο τού υδρογόνου είναι κατά μέσον όρο $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$. Βρείτε το μέτρο τής ηλεκτρικής δύναμης ανάμεσα στα δύο αυτά σωματίδια και υπολογίστε τη βαρυτική έλξη ανάμεσά τους.

Λύση Χρησιμοποιούμε τον νόμο τού Coulomb και βρίσκουμε ότι το μέτρο τής ηλεκτρικής δύναμης είναι

$$\begin{aligned} F_e &= k \frac{|e|^2}{r^2} = 9.0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2} \\ &= 8.2 \times 10^{-8} \text{ N} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τα δεδομένα τού Πίνακα 23.1 και τον νόμο τής βαρυτικής έλξης τού Newton και βρίσκουμε ότι το μέτρο τής βαρυτικής έλξης είναι

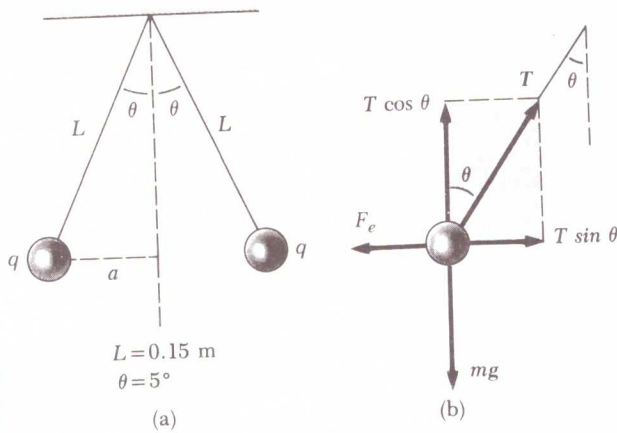
$$\begin{aligned} F_g &= G \frac{m_e m_p}{r^2} \\ &= \left(6.7 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}\right) \\ &\quad \times \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2} \\ &= 3.6 \times 10^{-47} \text{ N} \end{aligned}$$

Ο λόγος $F_e/F_g \approx 3 \times 10^{39}$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η βαρυτική δύναμη ανάμεσα στα σωματίδια, στο επίπεδο τού ατόμου, είναι εντελώς αμελητέα σε σύγκριση με την ηλεκτρική δύναμη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.4 Βρείτε το φορτίο που έχουν οι σφαίρες

Δύο μικρές σφαίρες, η καθένα μάζας $3 \times 10^{-2} \text{ kg}$, είναι ηλεκτρικά φορτισμένες και ισορροπούν καθώς είναι αναρτημένες από νήματα, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 23.8a. Το μήκος καθενός νήματος είναι 0.15 m και η γωνία που σχηματίζει το καθένα με την κατακόρυφο είναι $\theta = 5^\circ$. Υπολογίστε το φορτίο υποθέτοντας ότι είναι το ίδιο και στη μία και στην άλλη σφαίρα.

Λύση Από το ορθογώνιο τρίγωνο τού Σχήματος 23.8a



Σχήμα 23.8 (Παράδειγμα 23.4) (α) Δύο όμοιες και ομώνυμα φορτισμένες σφαίρες, με το ίδιο φορτίο q_1 , ισορροπούν ενώ είναι αναρτημένες από λεπτά νήματα. (β) Το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος για μία από τις σφαίρες.

βλέπουμε ότι $\sin \theta = a/L$. Υπολογίζουμε την απόσταση a χρησιμοποιώντας το μήκος του νήματος και τη γωνία με την κατακόρυφο

$$a = L \sin \theta = (0.15 \text{ m}) \sin 5^\circ = 0.013 \text{ m}$$

Η απόσταση, λοιπόν, ανάμεσα στις δύο σφαίρες είναι $2a = 0.026 \text{ m}$.

Οι δυνάμεις που δρουν πάνω στη σφαίρα φαίνονται στο Σχήμα 23.8b. Εφόσον και η μία και η άλλη σφαίρα ισορροπεί, το άθροισμα των οριζόντιων συνιστωσών των δυνάμεων οι οποίες δρουν πάνω σε καθεμία από αυτές πρέπει να είναι μηδέν, όπως και το άθροισμα των κατακορύφων.

$$(1) \quad \sum F_x = T \sin \theta - F_e = 0$$

$$(2) \quad \sum F_y = T \cos \theta - mg = 0$$

Βλέπουμε από την (2) ότι $T = mg/\cos \theta$. Αντικαθιστούμε λοιπόν το T στην (1) και βρίσκουμε ότι η ηλεκτρική δύναμη F_e είναι

$$(3) \quad F_e = mg \tan \theta \\ = (3 \times 10^{-2} \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)\tan(5^\circ) \\ = 2.57 \times 10^{-2} \text{ N}$$

Γνωρίζουμε όμως από τον νόμο του Coulomb (Εξίσωση 23.1) ότι η ηλεκτρική δύναμη ανάμεσα στα φορτία έχει μέτρο

$$F_e = k \frac{|q|^2}{r^2}$$

όπου $r = 2a = 0.026 \text{ m}$ και $|q|$ είναι η απόλυτη τιμή του φορτίου κάθε σφαίρας. Ας σημειωθεί ότι ο όρος $|q|$ είναι υψωμένος στο τετράγωνο διότι υποθέσαμε ότι οι δύο σφαίρες έχουν ακριβώς το ίδιο φορτίο q . Λύνουμε λοιπόν ως προς q και βρίσκουμε ότι

$$|q|^2 = \frac{F_e r^2}{k} = \frac{(2.57 \times 10^{-2} \text{ N})(0.026 \text{ m})^2}{9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2}$$

$$|q| = 4.4 \times 10^{-8} \text{ C}$$

Άσκηση 2 Εάν το φορτίο των σφαιρών είναι αρνητικό, υπολογίστε τον αριθμό των ηλεκτρονίων στον οποίο αντιστοιχεί το φορτίο αυτό ($-4.4 \times 10^{-8} \text{ C}$).

Απάντηση 2.7×10^{11} ηλεκτρόνια.

23.4 ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Στο Κεφάλαιο 14 ορίσαμε ότι η ένταση του βαρυτικού πεδίου, ή απλούστερα το βαρυτικό πεδίο g σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου, ισούται με το πηλίκον τής βαρυτικής δύναμης F η οποία ασκείται πάνω σε μια δοκιμαστική μάζα m_0 , που βρίσκεται στο σημείο αυτό, διά τής μάζας αυτής, m_0 . Δηλαδή, $g = F/m_0$. Κατά τον ίδιο τρόπο λοιπόν μπορούμε να ορίσουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο (ή η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου) σε ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου ισούται με το πηλίκον τής δύναμης την οποία υφίσταται ένα «δοκιμαστικό» θετικό φορτίο q_0 , το οποίο βρίσκεται στο σημείο αυτό, διά τού φορτίου αυτού, q_0^* .

το διάνυσμα τού ηλεκτρικού πεδίου E (ή, αλλιώς, το διάνυσμα τής έντασης τού ηλεκτρικού πεδίου) σε ένα τυχαίο σημείο τού χώρου είναι εξ ορισμού ίσο προς το πηλίκον τής δύναμης η οποία ασκείται πάνω σε ένα δοκιμαστικό θετικό φορτίο q_0 , που βρίσκεται στο σημείο αυτό, διά τού φορτίου αυτού, q_0 :

$$E \equiv \frac{F}{q_0} \quad (23.7)$$

Ορισμός τού ηλεκτρικού πεδίου

* Σημ. μεταφρ. Το φορτίο αυτό, q_0 , θα τό αποκαλούμε «δοκιμαστικό» φορτίο, διότι θα τό χρησιμοποιούμε για να ανιχνεύουμε την ύπαρξη ηλεκτρικού πεδίου που δημιούργησαν άλλα ηλεκτρικά φορτία.

Ας θεωρήσουμε ότι ένα σημειακό φορτίο q έχει απόσταση r από το δοκιμαστικό φορτίο q_0 . Σύμφωνα με τον νόμο του Coulomb, η δύναμη στην οποία υπόκειται το δοκιμαστικό φορτίο δίνεται από τον νόμο του Coulomb και είναι

$$F = k \frac{qq_0}{r^2} \hat{r}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο που βρίσκεται το δοκιμαστικό φορτίο είναι εξ ορισμού $E = F/q_0$. Βρίσκουμε λοιπόν ότι το φορτίο q δημιουργεί στο σημείο που βρίσκεται το q_0 ηλεκτρικό πεδίο που είναι

$$E = k \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (23.8)$$

όπου το \hat{r} είναι μοναδιαίο διάνυσμα που κατευθύνεται από το q προς το q_0 (Σχήμα 23.10). Εάν το q είναι θετικό, όπως στο Σχήμα 23.10a, το πεδίο κατευθύνεται ακτινικά απομακρυνόμενο από το φορτίο. Εάν το q είναι αρνητικό, το πεδίο κατευθύνεται ακτινικά προς το φορτίο. (Σχήμα 23.10b).

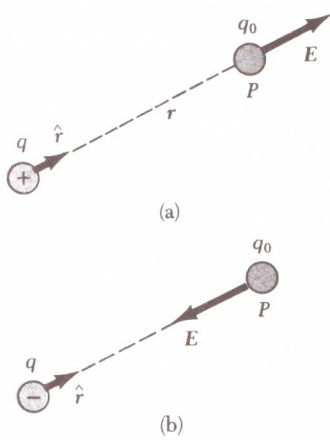
Εάν θέλουμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο το οποίο δημιουργούν πολλά ηλεκτρικά φορτία σε ένα σημείο P , υπολογίζουμε πρώτα το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί στο P το καθένα από τα φορτία και κατόπιν τα αθροίζουμε όλα (προφανώς διανυσματικά). Με άλλα λόγια,

το ολικό (ή συνιστάμενο) ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από μια ομάδα φορτίων είναι η διανυσματική συνισταμένη των ηλεκτρικών πεδίων καθενός φορτίου ξεχωριστά.

Η επαλληλία αυτή είναι κατευθείαν αποτέλεσμα της ιδιότητας της επαλληλίας των ηλεκτρικών δυνάμεων. Έτσι, το ηλεκτρικό πεδίο, στο σημείο P , μιας ομάδας φορτίων (δεν λαμβάνεται υπ' όψιν το πεδίο που δημιουργείται από το δοκιμαστικό φορτίο q_0) είναι

$$E = k \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (23.9)$$

όπου r_i είναι η απόσταση του φορτίου q_i από το σημείο P όπου βρίσκεται το δοκιμαστικό φορτίο q_0 , και \hat{r}_i είναι μοναδιαία διανύσματα που κατευθύνονται από το q_i προς το P .



Σχήμα 23.10 Ένα δοκιμαστικό θετικό φορτίο q_0 βρίσκεται στο σημείο P και έχει απόσταση r από το φορτίο q . (a) Εάν το q είναι θετικό, τότε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P έχει ακτινική κατεύθυνση που απομακρύνεται από το q . (b) Εάν το q είναι αρνητικό, τότε το ηλεκτρικό πεδίο στο P έχει ακτινική κατεύθυνση προς το q .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.5 Ηλεκτρική δύναμη σε ένα πρωτόνιο

Βρείτε την ηλεκτρική δύναμη που ασκεί πάνω σε ένα πρωτόνιο ηλεκτρικό πεδίο 2×10^4 N/C το οποίο κατευθύνεται προς τον θετικό άξονα x .

Λύση Γνωρίζουμε ότι το φορτίο του πρωτονίου είναι

$$+e = +1.6 \times 10^{-19} \text{ C},$$

Επομένως η ηλεκτρική δύναμη επάνω του είναι

$$F = eE = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(2 \times 10^4 \text{ N/C}) \\ = 3.2 \times 10^{-15} \text{ N}$$

όπου το i είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο κατευθύνεται προς τα θετικά του άξονα x . Το βάρος του πρωτονίου είναι $mg = (1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 1.6 \times 10^{-26} \text{ N}$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι στην περίπτωση αυτή η βαρυτική δύναμη είναι αμελητέα σε σύγκριση με την ηλεκτρική δύναμη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.6 Το ηλεκτρικό πεδίο δύο φορτίων

Ένα φορτίο $q_1 = 7 \mu\text{C}$ είναι τοποθετημένο στην αρχή των συντεταγμένων και ένα άλλο φορτίο $q_2 = -5 \mu\text{C}$ βρίσκεται πάνω στον άξονα x σε απόσταση 0.3 m από το πρώτο (Σχήμα 23.11). Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που έχει συντεταγμένες (0, 0.4) m.

Λύση Ας βρούμε πρώτα τα μέτρα των ηλεκτρικών

πεδίων που δημιουργεί το κάθε φορτίο. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 23.11, στο σημείο P υπάρχει το πεδίο E_1 , που δημιουργεί το φορτίο των $7 \mu\text{C}$, και το πεδίο E_2 , που δημιουργεί το φορτίο των $-5 \mu\text{C}$. Τα μέτρα τους είναι

$$E_1 = k \frac{|q_1|}{r_1^2} = \left(9.0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{(7 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.4 \text{ m})^2}$$

$$= 3.94 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$E_2 = k \frac{|q_2|}{r_2^2} = \left(9.0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{(5 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.5 \text{ m})^2}$$

$$= 1.8 \times 10^5 \text{ N/C}$$

Το διάνυσμα E_1 έχει μόνο συνιστώσα y . Το διάνυσμα E_2 έχει συνιστώσα x , που είναι $E_2 \cos \theta = \frac{3}{5}E_2$, και αρνητική συνιστώσα y , που είναι $-E_2 \sin \theta = -\frac{4}{5}E_2$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$E_1 = 3.94 \times 10^5 \mathbf{j} \text{ N/C}$$

$$E_2 = (1.1 \times 10^5 \mathbf{i} - 1.4 \times 10^5 \mathbf{j}) \text{ N/C}$$

Το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο στο P είναι η διανυσματική επαλληλία (πρόσθεση) των E_1 και E_2

$$E = E_1 + E_2 = (1.1 \times 10^5 \mathbf{i} + 2.5 \times 10^5 \mathbf{j}) \text{ N/C}$$

Βρίσκουμε λοιπόν ότι το μέτρο του E είναι $2.7 \times 10^5 \text{ N/C}$ και η κατεύθυνσή του σχηματίζει γωνία $\phi = 66^\circ$ με τον θετικό άξονα x .

Άσκηση 3 Βρείτε την ηλεκτρική δύναμη που ασκεί το συνιστάμενο πεδίο πάνω σε ένα δοκιμαστικό φορτίο $2 \times 10^{-8} \text{ C}$ το οποίο κείται στο σημείο P .

Απάντηση Είναι $5.4 \times 10^{-3} \text{ N}$ και έχει την κατεύθυνση του E .

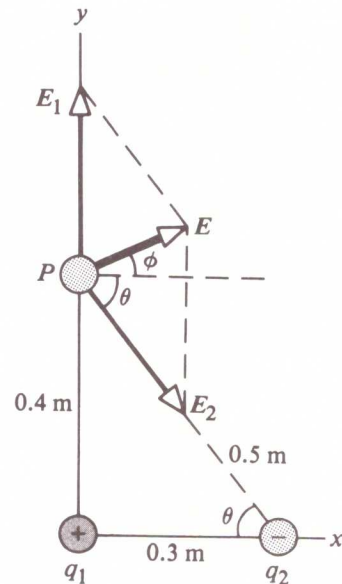
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.7 Το ηλεκτρικό πεδίο ενός διπόλου

Ορίζουμε ότι ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δύο ίσα αλλά αντίθετα φορτία $\pm q$ που έχουν μεταξύ τους απόσταση $2a$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 23.12. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο E που δημιουργείται από τα φορτία του διπόλου στο σημείο P , το οποίο κείται πάνω στον άξονα y . Το P απέχει y από την αρχή των συντεταγμένων. Υποθέστε ότι $y \gg a$.

Λύση Εφόσον το P ισαπέχει από τα δύο φορτία, τα δύο πεδία E_1 και E_2 που δημιουργούνται από τα ίσα αλλά αντίθετα φορτία έχουν το ίδιο μέτρο. Το συνιστάμενο πεδίο είναι $E = E_1 + E_2$ και το μέτρο του E_1 ή του E_2 είναι

$$E_1 = E_2 = k \frac{q}{r^2} = k \frac{q}{y^2 + a^2}$$

Οι συνιστώσες y αλληλοαναιρούνται και οι συνιστώσες x είναι ίσες και έχουν την ίδια κατεύθυνση. Επομένως, το συνιστάμενο πεδίο E είναι παράλληλο προς τον άξονα x και το μέτρο του είναι $2E_1 \cos \theta$. Από το Σχήμα 23.12 βλέπουμε ότι $\cos \theta = a/r = a/(y^2 + a^2)^{1/2}$. Επομένως

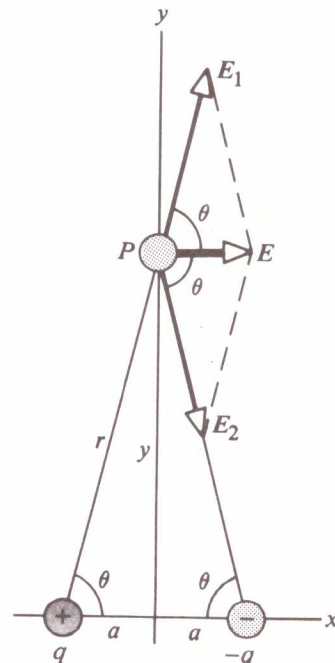


Σχήμα 23.11 (Παράδειγμα 23.6) Το ολικό ηλεκτρικό φορτίο E στο σημείο P είναι το διανυσματικό άθροισμα $E_1 + E_2$, όπου E_1 είναι το πεδίο που δημιουργείται από το θετικό φορτίο q_1 και E_2 είναι το πεδίο που δημιουργείται από το αρνητικό φορτίο q_2 .

$$E = 2E_1 \cos \theta = 2k \frac{q}{(y^2 + a^2)} \frac{a}{(y^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$= k \frac{2qa}{(y^2 + a^2)^{3/2}}$$

Αλλά $y \gg a$. Επομένως, εάν αγνοήσουμε το a^2 στον παρονομαστή, βρίσκουμε



Σχήμα 23.12 (Παράδειγμα 23.7) Το ολικό ηλεκτρικό πεδίο E στο σημείο P που δημιουργείται από δύο ίσα αλλά αντίθετα φορτία (δηλαδή ένα ηλεκτρικό δίπολο) ισούται με το διανυσματικό άθροισμα $E_1 + E_2$. Το θετικό φορτίο δημιουργεί το πεδίο E_1 , ενώ το E_2 δημιουργείται από το αρνητικό φορτίο $-q$.

$$E = k \frac{2qa}{y^3} \quad (23.10)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το πεδίο ενός διπόλου πάνω σε ένα απομακρυσμένο σημείο τού κάθετου άξονα συμμετρίας του μεταβάλλεται ως $1/r^3$, ενώ το αντίστοιχο πεδίο ενός σημειακού φορτίου μεταβάλλεται πιο αργά ως $1/r^2$, όπως ήδη ξέρουμε. Αυτό συμβαίνει διότι, για απομακρυσμένα σημεία, τα πεδία δύο ίσων αλλά αντίθετων φορτίων αλληλοαναιρούνται. Όπως θα δούμε κατά τη λύση τού Προβλήματος 61, η συμπεριφορά τού $1/r^3$

περιγράφει το πεδίο για οποιοδήποτε απομακρυσμένο σημείο, ακόμη και πάνω στον άξονα x . Το ηλεκτρικό πεδίο διπόλου περιγράφει ικανοποιητικά το πεδίο πολλών μορίων, όπως λ.χ. τού HCl.

Όπως θα δούμε αργότερα, τα ουδέτερα άτομα και μόρια συμπεριφέρονται σαν δίπολα όταν τά τοποθετήσουμε μέσα σε ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Επί πλέον, μερικά μόρια, όπως λ.χ. τού HCl, είναι μόνιμα δίπολα. (Το μόριο τού HCl αποτελείται από ένα ιόν H^+ και ένα ιόν Cl^-). Θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά των υλικών που αποτελούνται από τέτοια δίπολα στο Κεφάλαιο 26.

23.5 ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΦΟΡΤΙΟΥ

Στο προηγούμενο υποκεφάλαιο δείξαμε πώς υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο το οποίο δημιουργούν σημειακά φορτία χρησιμοποιώντας τον νόμο τού Coulomb. Χρησιμοποιήσαμε την αρχή τής επαλληλίας για την περίπτωση τού ηλεκτροστατικού πεδίου πολλών φορτίων. Έτσι λοιπόν βρήκαμε το συνιστάμενο πεδίο που δημιουργείται από μια ομάδα σημειακών φορτίων, υπολογίζοντας το διανυσματικό άθροισμα τών ηλεκτροστατικών πεδίων τα οποία δημιουργούνται από το καθένα σημειακό φορτίο ξεχωριστά.

Πολλές φορές, όμως, τα φορτία βρίσκονται πολύ κοντά το ένα στο άλλο σε σχέση με την απόσταση που έχουν από το σημείο υπολογισμού τού ηλεκτρικού πεδίου. Στις περιπτώσεις αυτές μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κατανομή φορτίου είναι συνεχής. Με άλλα λόγια, θεωρούμε ότι το πυκνό αυτό σύστημα φορτίων είναι ισοδύναμο με μια συνεχή κατανομή φορτίων, με το ίδιο συνολικό φορτίο κατανομημένο στην ίδια περιοχή τού χώρου ή μιας επιφάνειας.

Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από μια συνεχή κατανομή φορτίου, ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Χωρίζουμε την κατανομή φορτίου σε μικρά μέρη, καθένα από τα οποία περιέχει ένα μικρό φορτίο Δq , όπως φαίνεται στο Σχήμα 23.13. Κατόπιν χρησιμοποιούμε τον νόμο τού Coulomb για να υπολογίσουμε το πεδίο που δημιουργεί στο σημείο P καθένα από τα φορτία Δq . Τέλος, βρίσκουμε το συνολικό πεδίο αθροίζοντας διανυσματικά τα επιμέρους πεδία (εφαρμόζουμε, δηλαδή, την αρχή τής επαλληλίας).

Το φορτίο Δq , που έχει απόσταση r από το σημείο P , δημιουργεί στο P ηλεκτρικό πεδίο ίσο προς

$$\Delta E = k \frac{\Delta q}{r^2} \hat{r}$$

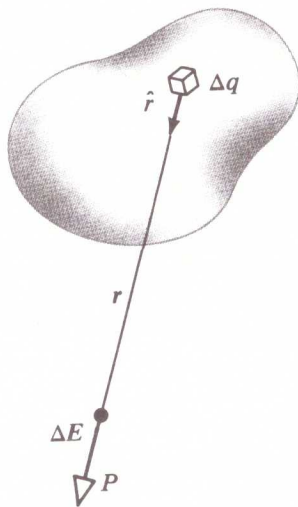
όπου \hat{r} είναι μοναδιαίο διάνυσμα που κατευθύνεται από το φορτίο στο P . Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν στο P όλα τα ηλεκτρικά φορτία είναι, προσεγγιστικά, ίσο με

$$E \approx k \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

όπου ο δείκτης i περιγράφει το μέρος i τού φορτίου. Εάν τώρα η απόσταση ανάμεσα στα φορτία είναι μικρή σε σύγκριση με την απόστασή τους από το P , μπορούμε κατά προσέγγιση να πούμε ότι η κατανομή φορτίου είναι συνεχής. Έτσι, το συνιστάμενο πεδίο στο P , στο όριο που $\Delta q_i \rightarrow 0$, είναι

$$E = k \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = k \int \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (23.11)$$

Συνεχής κατανομή ηλεκτρικού φορτίου



Σχήμα 23.13 Το ηλεκτρικό πεδίο στο P , που παράγεται από μια συνεχή κατανομή ηλεκτρικού φορτίου, είναι το διανυσματικό άθροισμα όλων τών πεδίων που δημιουργούνται από το κάθε τμήμα Δq τής κατανομής φορτίου.

Το ηλεκτρικό πεδίο συνεχούς κατανομής φορτίου

Πρέπει όμως να είμαστε προσεκτικοί όταν υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα διανυσμάτων, όπως είναι η Εξίσωση 23.11. Για τον λόγο αυτό, θα λύσουμε πολλά παραδείγματα. Στα παραδείγματα αυτά θα υποθέτουμε ότι το φορτίο είναι κατανομημένο ομοιόμορφα (δηλαδή ομογενώς) πάνω σε μία γραμμή ή σε μια επιφάνεια ή μέσα σε έναν χώρο. Πολύ διευκολυνόμαστε στους υπολογισμούς μας αυτούς αν χρησιμοποιήσουμε την έννοια της πυκνότητας φορτίου.

Εάν ένα φορτίο Q είναι ομοιόμορφα κατανομημένο σε έναν χώρο V , τότε η χωρική πυκνότητα φορτίου ή, απλούστερα, η πυκνότητα φορτίου ρ ορίζεται ως

$$\rho \equiv \frac{Q}{V} \quad (23.12) \quad \text{Χωρική πυκνότητα φορτίου}$$

και είναι το φορτίο ανά μονάδα όγκου. Μονάδες της είναι C/m^3 .

Εάν το φορτίο Q είναι ομοιόμορφα κατανομημένο πάνω στην επιφάνεια A , τότε η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, σ , ορίζεται ως

$$\sigma \equiv \frac{Q}{A} \quad (23.13) \quad \text{Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου}$$

και έχει μονάδες C/m^2 .

Τέλος, εάν το φορτίο Q είναι κατανομημένο ομοιόμορφα σε μια γραμμή μήκους ℓ , τότε ορίζουμε την γραμμική πυκνότητα φορτίου, λ , ως

$$\lambda \equiv \frac{Q}{\ell} \quad (23.14) \quad \text{Γραμμική πυκνότητα φορτίου}$$

όπου οι μονάδες τού λ είναι C/m .

Εάν όμως το φορτίο δεν είναι ομοιόμορφα κατανομημένο στον χώρο ή πάνω στην επιφάνεια ή στη γραμμή, πρέπει να εκφράσουμε τις πυκνότητες ως

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad \sigma = \frac{dQ}{dA} \quad \lambda = \frac{dQ}{d\ell}$$

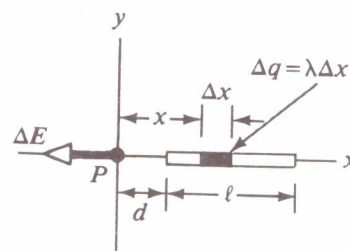
όπου dQ είναι η ποσότητα ηλεκτρικού φορτίου που βρίσκεται στον όγκο dV ή πάνω στην επιφάνεια dA ή στο μήκος γραμμής $d\ell$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.8 Το ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης ράβδου

Μια ράβδος μήκους ℓ είναι ομοιόμορφα φορτισμένη θετικά και έχει γραμμική πυκνότητα φορτίου λ και συνολικό φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P , που βρίσκεται πάνω στην προέκταση της ράβδου, σε απόσταση d από το ένα άκρο της (Σχήμα 23.14).

Λύση Θεωρούμε ότι η ράβδος είναι τοποθετημένη στον άξονα x . Προφανώς, ο λόγος τού φορτίου Δq , που βρίσκεται πάνω στο τμήμα Δx , προς το Δx ισούται με τον λόγο τού ολικού φορτίου προς το μήκος τής ράβδου. Δηλαδή, $\Delta q/\Delta x = Q/\ell = \lambda$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι $\Delta q = \lambda \Delta x$.

Το πεδίο ΔE που δημιουργείται από το φορτίο Δq στο σημείο P κατευθύνεται προς τον αρνητικό άξονα x , το δε μέτρο του είναι⁽⁴⁾



Σχήμα 23.14 (Παράδειγμα 23.8) Το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που δημιουργείται από μια ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδο η οποία κείται πάνω στον άξονα x . Το πεδίο που δημιουργείται στο P από το τμήμα με φορτίο Δq είναι ίσο προς $k \Delta q/x^2$. Το ολικό πεδίο στο P είναι το διανυσματικό άθροισμα τών πεδίων όλων τών τμημάτων που συναποτελούν τη ράβδο.

γουμε, πρώτα απ' όλα, ένα τμήμα τού οποίου τα άκρα ισαπέχουν από το σημείο στο οποίο πρέπει να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο. Κατόπιν εκφράζουμε το αντίστοιχο φορτίο Δq συναρτήσει τών άλλων μεταβλητών που χρησιμοποιούμε προς ολοκλήρωση (λογουχάρα τής μεταβλητής x). Στα παραδείγματα στα οποία υπεισέρχεται σφαιρική ή κυλινδρική συμμετρία, η μεταβλητή που θα χρησιμοποιήσουμε πρέπει να είναι αυτή που περιγράφει την ακτίνα.

⁽⁴⁾ Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε τη διαδικασία τής τεχνικής τής επίλυσης παρόμοιων προβλημάτων που απαιτούν ολοκλήρωση. Επίλε-

$$\Delta E = k \frac{\Delta q}{x^2} = k \frac{\lambda \Delta x}{x^2}$$

Το πρόβλημά μας είναι σχετικά απλό, διότι πάνω στον άξονα x κάθε τμήμα δημιουργεί πεδίο που κατευθύνεται προς την αρνητική κατεύθυνση των x . Έτσι βρίσκουμε ότι το ολικό πεδίο που οφείλεται σε όλα τα τμήματα της ράβδου (Εξίσωση 23.11) είναι

$$E = \int_d^{\ell+d} k\lambda \frac{dx}{x^2}$$

Τα όρια τού ολοκληρώματος εκτείνονται από το ένα άκρο τής ράβδου ($x = d$) έως το άλλο ($x = \ell + d$). Επειδή τα k και λ είναι σταθερά, τά βγάζουμε από το ολοκλήρωμα. Βρίσκουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} E &= k\lambda \int_d^{\ell+d} \frac{dx}{x^2} = k\lambda \left[-\frac{1}{x} \right]_d^{\ell+d} \\ &= k\lambda \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\ell+d} \right) \\ &= \frac{kQ}{d(\ell+d)} \end{aligned} \quad (23.15)$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $Q = \lambda\ell$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι εάν το σημείο P κείται πολύ μακριά από τη ράβδο ($d \gg \ell$), τότε μπορούμε να αγνοήσουμε το ℓ στον παρονομαστή τής σχέσης 23.15, επομένως $E \approx kQ/d^2$. Αυτή είναι η αναμενόμενη μορφή για την περίπτωση σημειακού φορτίου. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι για μεγάλες αποστάσεις από τη ράβδο, η κατανομή τού φορτίου συμπεριφέρεται σαν να ήταν ένα σημειακό φορτίο Q . Γενικά, διευκολυνόμαστε πολύ στον έλεγχο τών υπολογισμών μας, εάν ελέγχουμε τα αποτελέσματα που βρίσκουμε υπολογίζοντας το όριο τής πολύ μεγάλης απόστασης.

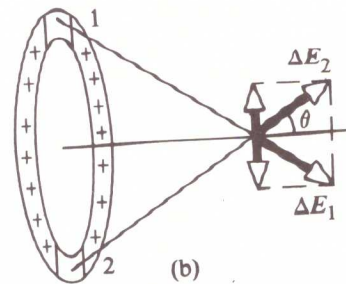
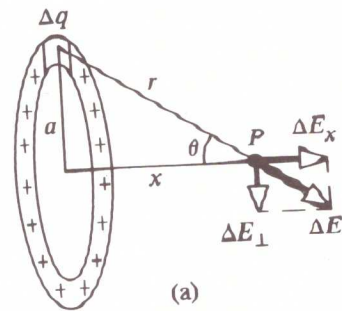
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.9 Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από έναν ομογενώς φορτισμένο δακτύλιο

Ένας δακτύλιος ακτίνας a έχει ομοιόμορφη κατανομή ηλεκτρικού φορτίου συνολικής τιμής Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P . Το P βρίσκεται πάνω στον κάθετο άξονα συμμετρίας τού δακτυλίου, σε απόσταση x από το κέντρο του (Σχήμα 23.15a).

Λύση Το τμήμα τού δακτυλίου Δq παράγει ηλεκτρικό πεδίο στο P

$$\Delta E = k \frac{\Delta q}{r^2}$$

Το πεδίο αυτό τό αναλύουμε σε μία συνιστώσα x , ΔE_x , και μία συνιστώσα κάθετη στον άξονα x , την ΔE_{\perp} . Από το Σχήμα 23.15b βλέπουμε ότι $\Delta E_x = \Delta E \cos \theta$. Είναι επίσης προφανές ότι το διανυσματικό άθροισμα όλων τών ΔE_{\perp} που προέρχονται από όλα τα τμήματα τού δακτυλίου είναι μηδενικό. Δηλαδή, η κάθετη συνιστώσα καθενός τμήματος αναιρείται από την κάθετη συνιστώσα τού τμήματος από την απέναντι πλευρά τού δακτυλίου. Επειδή $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$ και $\cos \theta = x/r$, βρίσκουμε ότι



Σχήμα 23.15 (Παράδειγμα 23.9) Ομοιόμορφα φορτισμένος δακτύλιος ακτίνας a . (a) Το πεδίο στο σημείο P που δημιουργείται από το φορτίο Δq . (b) Το ολικό πεδίο E είναι παράλληλο προς τον άξονα x . Να σημειωθεί ότι η κάθετος στον άξονα x συνιστώσα τού ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από το τμήμα 1 στο σημείο P αλληλοαναιρείται με την αντίστοιχη συνιστώσα που δημιουργείται από το τμήμα 2, με την οποία είναι ίση και αντίθετη.

$$\Delta E_x = \Delta E \cos \theta = \left(k \frac{\Delta q}{r^2} \right) \frac{x}{r} = \frac{kx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \Delta q$$

Στην περίπτωση αυτή, όλα τα ισομήκη τμήματα τού δακτυλίου δημιουργούν *ίσα* ηλεκτρικά πεδία στο P , διότι ισαπέχουν από αυτό. Έτσι, για να βρούμε το συνολικό πεδίο στο P , αθροίζουμε

$$E_x = \sum \frac{kx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \Delta q = \frac{kx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} Q \quad (23.16)$$

Βλέπουμε επίσης ότι στο σημείο $x = 0$ το πεδίο είναι μηδενικό. Σάς εκπλήσει αυτό;

Άσκηση 4 Αποδείξτε ότι για μεγάλες αποστάσεις από τον δακτύλιο ($x \gg a$) το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στον άξονα τείνει να γίνει το ίδιο με το πεδίο σημειακού φορτίου Q .

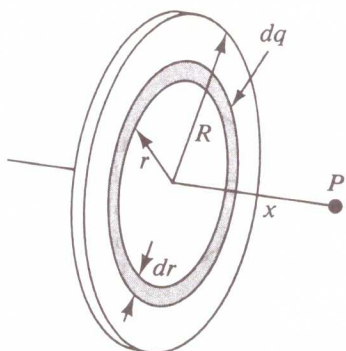
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.10 Το ηλεκτρικό πεδίο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου □

Ένας δίσκος ακτίνας R είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ . Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στον κάθετο άξονα τού δίσκου σε απόσταση x από το κέντρο του (Σχήμα 23.16).

Λύση Η λύση είναι αρκετά απλή εάν θεωρήσουμε ότι ο δίσκος αποτελείται από μια σειρά ομόκεντρους δακτυλίων. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Παράδειγμα 23.9, που μάς δίνει το πεδίο για έναν δακτύλιο ακτίνας r , και κατόπιν να αθροίσουμε τις συνεισφορές όλων τών δακτυλίων που συναποτελούν τον δίσκο. Λόγω τής συμμετρίας, το πεδίο πάνω σε οποιοδήποτε σημείο τού άξονα είναι παράλληλο προς τον άξονα.

Ένας δακτύλιος ακτίνας r και πλάτους dr έχει επιφάνεια $2\pi r dr$ (Σχήμα 23.16). Το φορτίο dq που βρίσκεται πάνω στον δακτύλιο ισούται με το γινόμενο της επιφάνειας του δακτυλίου επί την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, δηλαδή $dq = 2\pi\sigma dr$. Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 23.16 (όπου θέσαμε το r αντί του a) και γράφουμε για το πεδίο που δημιουργεί ένας δακτύλιος ακτίνας r τού δίσκου:

$$dE = \frac{kx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} (2\pi\sigma dr)$$



Σχήμα 23.16 (Παράδειγμα 23.10) Ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος ακτίνας R . Το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο P που κείται επάνω στον κάθετο άξονα συμμετρίας είναι και αυτό παράλληλο προς τον άξονα και, άρα, κάθετο στον δίσκο.

Για να βρούμε το ολικό πεδίο στο P ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση μέσα στα όρια $r = 0$ και $r = R$ (δεν πρέπει να μάς διαφεύγει ότι το x εδώ είναι σταθερό και όχι μεταβλητό):

$$\begin{aligned} E &= k\pi\sigma \int_0^R \frac{2r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= k\pi\sigma \int_0^R (x^2 + r^2)^{-3/2} d(r^2) \\ &= k\pi\sigma \left[\frac{(x^2 + r^2)^{-1/2}}{-1/2} \right]_0^R \\ &= 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right) \end{aligned} \quad (23.17)$$

Για να βρούμε το πεδίο πάνω στον άξονα κοντά στον δίσκο χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 23.17, λαμβάνοντας το όριο $x \rightarrow 0$ (ή $R \rightarrow \infty$). Έτσι βρίσκουμε

$$E = 2\pi k\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (23.18)$$

όπου το ϵ_0 είναι η διηλεκτρική σταθερά τού κενού (Εξίσωση 23.4). Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι η ίδια σχέση δίνει το πεδίο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου επιπέδου άπειρων διαστάσεων.

Άσκηση 5 Αποδείξτε ότι, για μεγάλες αποστάσεις από τον δίσκο, το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στον άξονα τείνει να γίνει ίσο με το πεδίο ενός σημειακού φορτίου $Q = \pi R^2 \sigma$.

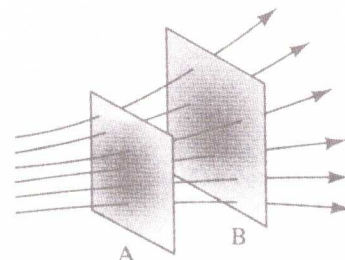
23.6 ΓΡΑΜΜΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ (Ή ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ)

Ένας εξυπηρετικός τρόπος εποπτικής αναπαράστασης τών ηλεκτρικών πεδίων είναι η σχεδίαση γραμμών που έχουν την ίδια κατεύθυνση με το ηλεκτρικό πεδίο. Τις γραμμές αυτές τις ονομάζουμε **γραμμές ηλεκτρικού πεδίου ή δυναμικές γραμμές** και με αυτές περιγράφουμε το ηλεκτρικό πεδίο ακολουθώντας τους ακόλουθους κανόνες:

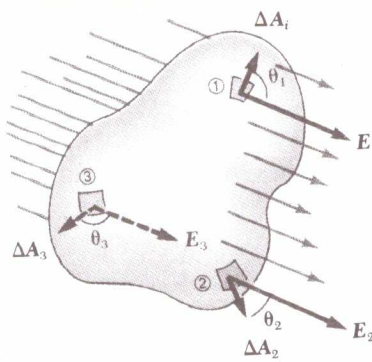
1. Η διεύθυνση τού διανύσματος τού ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} εφάπτεται με τις γραμμές τού ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο.
2. Ο αριθμός τών γραμμών τού πεδίου που διέρχονται μέσα από μια μοναδιαία επιφάνεια κάθετη σε αυτές είναι ανάλογος προς το μέτρο τού ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή αυτή. Έτσι, όταν οι γραμμές είναι πυκνές, το \mathbf{E} είναι μεγάλο και όταν είναι αραιές είναι μικρό.

Στο Σχήμα 23.17 απεικονίζονται οι ιδιότητες αυτές. Η πυκνότητα τών γραμμών που διαπερνούν την κάθετη προς αυτές επιφάνεια A είναι μεγαλύτερη από την πυκνότητα τών γραμμών που διαπερνούν την (επίσης κάθετη προς αυτές) επιφάνεια B . Επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο είναι εντονότερο στην επιφάνεια A από ό,τι στη B . Να σημειωθεί ότι το πεδίο που βλέπουμε στο Σχήμα 23.17 δεν είναι ομογενές και αυτό φαίνεται από την ανομοιογενή πυκνότητα τών δυναμικών γραμμών.

Στο Σχήμα 23.18α βλέπουμε τις γραμμές ηλεκτρικού πεδίου ενός σημειακού θετικού φορτίου. Ας μη λησμονούμε ότι το σχήμα αυτό έχει δύο μόνον διαστάσεις και, επομένως, βλέπουμε τις γραμμές που περιέχονται σε ένα επίπεδο το οποίο περιέχει το φορτίο. Στην πραγματικότητα, οι γραμμές



Σχήμα 23.17 Οι γραμμές τού ηλεκτρικού πεδίου διαπερνούν δύο επιφάνειες, την A και την B . Το μέτρο τού πεδίου είναι μεγαλύτερο στην A από ό,τι στην B .



Σχήμα 24.4 Κλειστή επιφάνεια μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο. Τα κάθετα διανύσματα επιφάνειας ΔA_i εξ ορισμού κατευθύνονται προς τα έξω. Η ροή που διαπερνά ένα στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας μπορεί να είναι θετική (στοιχειώδες τμήμα ① και ②) ή αρνητική (στοιχειώδες τμήμα ③).

περιοχή χωρίς να διαπεράσουμε την επιφάνεια. Λογουχάρη, η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι κλειστή επιφάνεια). Ας θεωρήσουμε μια κλειστή επιφάνεια, όπως είναι η επιφάνεια στο Σχήμα 24.24. Παρατηρούμε ότι τα διάφορα διανύσματα ΔA_i έχουν διαφορετικές κατευθύνσεις. Σε κάθε μικρό στοιχείο επιφάνειας είναι κάθετα προς το αντίστοιχο μικρό στοιχείο. Και εξ ορισμού, πάντοτε κατευθύνονται προς τα έξω, δηλαδή απομακρύνονται από την επιφάνεια. Στα μικρά στοιχεία που συμβολίζονται με ① και ② το ηλεκτρικό πεδίο κατευθύνεται προς τα έξω και επομένως η γωνία θ που σχηματίζει με τις αντίστοιχες καθέτους των μικρών στοιχείων επιφάνειας είναι $\theta < 90^\circ$, επομένως η ροή $\Delta\Phi = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{A}$ που τα διαπερνά είναι θετική, αλλά σε άλλα μικρά στοιχεία, όπως λ.χ. στο ③, το πεδίο κατευθύνεται προς την επιφάνεια, επομένως $\theta > 90^\circ$ και η ροή είναι αρνητική, διότι το $\cos \theta$ είναι αρνητικό. Η ολική (ή καθαρή) ροή που διαπερνά την επιφάνεια είναι ανάλογη προς τον ολικό (ή καθαρό) αριθμό των γραμμών που διαπερνούν την επιφάνεια. Ορίζουμε δε ως ολικό (ή καθαρό) αριθμό τη διαφορά του αριθμού των γραμμών που εξέρχονται από την επιφάνεια μείον τον αριθμό που εισέρχονται σε αυτήν. Εάν από την επιφάνεια εξέρχονται περισσότερες γραμμές από όσες εισέρχονται, η ολική (ή καθαρή) ροή είναι θετική. Εάν εισέρχονται περισσότερες από όσες εξέρχονται, η ροή είναι αρνητική. Το ολοκλήρωμα πάνω σε μια κλειστή επιφάνεια (ή κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα) τό συμβολίζουμε με Φ_c . Γράφουμε λοιπόν ότι η ολική (ή καθαρή) ροή Φ_c διά μέσου μιας κλειστής επιφάνειας είναι

$$\Phi_c = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint E_n dA \quad (24.4)$$

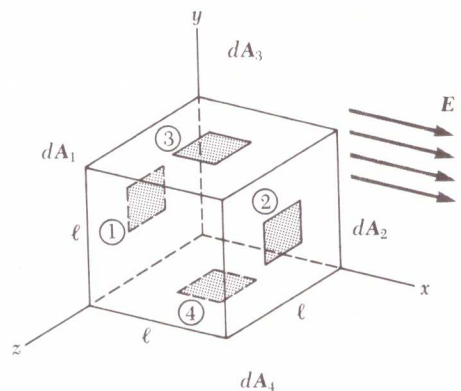
όπου E_n είναι η συνιστώσα τού ηλεκτρικού πεδίου που είναι κάθετη* στην επιφάνεια, ενώ ο δείκτης c συμβολίζει κλειστή επιφάνεια. Η γενική περίπτωση υπολογισμού κλειστού επιφανειακού ολοκληρώματος είναι πολύ δύσκολη. Στις δικές μας εφαρμογές όμως ο υπολογισμός αυτός είναι εύκολος, διότι συνήθως το ηλεκτρικό πεδίο που υπεισέρχεται στα προβλήματά μας είναι σταθερό σε μέτρο και κάθετο σε κάθε σημείο τής επιφάνειας. Ας μελετήσουμε το παρακάτω παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.1 Η ροή που διέρχεται διά μέσου ενός κύβου

Ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} κατευθύνεται προς τη θετική κατεύθυνση τού άξονα x . Υπολογίστε την καθαρή ηλεκτρική ροή που διαπερνά τον κύβο, ακμής ℓ , που βλέπετε στο Σχήμα 24.5.

Λύση Για να βρούμε την καθαρή ροή θα προσθέσουμε τις ροές που διαπερνούν ξεχωριστά κάθε έδρα τού κύβου. Πρώτα απ' όλα πρέπει να σημειωθεί ότι η ροή που διαπερνά τέσσερις από τις έξι έδρες τού κύβου είναι μηδενική, διότι το \mathbf{E} σχηματίζει γωνία 90° με τα διανύσματα $d\mathbf{A}$ που είναι κάθετα στις αντίστοιχες έδρες. Ειδικότερα για τις έδρες που στο Σχήμα 24.5 συμβολίζονται με ③ και ④, τα διανύσματα $d\mathbf{A}$ είναι κάθετα στο \mathbf{E} . Επομένως, $\theta = 90^\circ$ και έτσι $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E dA \cos 90^\circ = 0$. Παρομοίως, η ροή διά μέσου τών εδρών που είναι παράλληλες στο επίπεδο xy είναι μηδενική, για τον ίδιο λόγο.

Ας μελετήσουμε τώρα λεπτομερώς τί συμβαίνει με



Σχήμα 24.5 (Παράδειγμα 24.1) Ένας κύβος βρίσκεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο παράλληλο προς τον άξονα x . Η ολική ροή που διαπερνά τον κύβο είναι μηδενική.

* Σημ. μετφρ.: Στην αγγλ. γλώσσα normal.

τις έδρες ① και ②. Η ροή που διαπερνά τις έδρες αυτές είναι

$$\Phi_c = \int_1 E \cdot dA + \int_2 E \cdot dA$$

Για την έδρα ① το E είναι σταθερό και κατευθύνεται προς το εσωτερικό του κύβου, ενώ το αντίστοιχο διάνυσμα dA κατευθύνεται προς τα έξω ($\theta = 180^\circ$). Βρίσκουμε λοιπόν ότι η ροή που διαπερνά την έδρα αυτή είναι

$$\begin{aligned} \int_1 E \cdot dA &= \int_1 E dA \cos 180^\circ = -E \int_1 dA \\ &= -EA = -E\ell^2 \end{aligned}$$

δεδομένου ότι η επιφάνεια κάθε έδρας είναι $A = \ell^2$

Παρομοίως, για την έδρα ② το E είναι σταθερό και κατευθύνεται προς τα έξω, παράλληλα προς το αντίστοιχο dA ($\theta = 0^\circ$). Η ροή που διαπερνά την έδρα αυτή είναι

$$\int_2 E \cdot dA = \int_2 E dA \cos 0^\circ = E \int_2 dA = +EA = E\ell^2$$

Επομένως, η καθαρή ροή που διαπερνά τον κύβο είναι το άθροισμα των ροών όλων των εδρών και είναι μηδενική, διότι

$$\Phi_c = -E\ell^2 + E\ell^2 = 0$$

24.2 Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS

Στο Κεφάλαιο αυτό περιγράφεται η γενική σχέση που συνδέει την καθαρή ηλεκτρική ροή η οποία διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια (συνχά την ονομάζουμε *γκουουσιανή επιφάνεια*) και το ηλεκτρικό φορτίο που περιέχεται στην επιφάνεια αυτή. Η σχέση αυτή ονομάζεται *νόμος του Gauss* και είναι θεμελιώδους σημασίας για τη μελέτη των ηλεκτροστατικών πεδίων.

Ας θεωρήσουμε ότι ένα θετικό σημειακό φορτίο q βρίσκεται στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας r , όπως στο Σχήμα 24.6. Από τον νόμο του Coulomb γνωρίζουμε ότι πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας το φορτίο δημιουργεί πεδίο μέτρου $E = kq/r^2$. Γνωρίζουμε επίσης ότι οι ηλεκτρικές γραμμές κατευθύνονται ακτινικά προς τα έξω. Επομένως είναι κάθετες σε κάθε σημείο της σφαιρικής επιφάνειας που διαπερνούν. Άρα, σε κάθε σημείο το E είναι παράλληλο προς το αντίστοιχο διάνυσμα ΔA_i που αντιπροσωπεύει το μικρό στοιχείο της επιφάνειας της σφαίρας ΔA_i . Επομένως

$$E \cdot \Delta A_i = E_n \Delta A_i = E \Delta A_i$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση 24.4, βρίσκουμε ότι η καθαρή ροή διά μέσου της γκουουσιανής επιφάνειας είναι

$$\Phi_c = \oint E_n dA = \oint E dA = E \oint dA$$

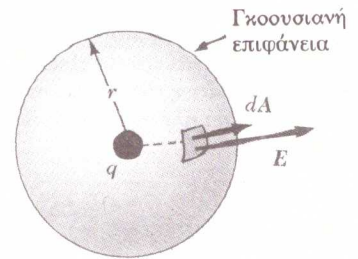
Το μέτρο του πεδίου $E = kq/r^2$ είναι σταθερό πάνω στη γκουουσιανή επιφάνεια και γι' αυτό το δγάζουμε από το ολοκλήρωμα. Γνωρίζουμε ότι, εφόσον η γκουουσιανή επιφάνεια είναι σφαίρα, το κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω της ισούται με την επιφάνειά της $\oint dA = A = 4\pi r^2$. Η καθαρή ροή, λοιπόν, διά μέσου της γκουουσιανής σφαίρας είναι

$$\Phi_c = \frac{kq}{r^2} (4\pi r^2) = 4\pi kq$$

Ας θυμηθούμε όμως ότι $k = 1/4\pi\epsilon_0$. Συνεπώς

$$\Phi_c = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (24.5)$$

Ας σημειωθεί ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι ανεξάρτητο από το r και δηλώνει



Σχήμα 24.6 Σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r που περιέχει ένα σημειακό φορτίο q . Όταν το φορτίο βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας, το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια και έχει σταθερό μέτρο παντού πάνω στη σφαιρική επιφάνεια.

Ο νόμος τού Gauss είναι γενίκευση όσων αναπτύχθηκαν παραπάνω και ορίζει ότι η ολική ροή που διέρχεται μέσα από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια είναι

$$\Phi_c = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \quad (24.6)$$

όπου q_{in} είναι το ολικό φορτίο (το αλγεβρικό άθροισμα όλων των φορτίων) που περιέχεται σε αυτήν την επιφάνεια και \mathbf{E} είναι το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο της γκαουσιανής επιφάνειας. Με άλλα λόγια,

ο νόμος τού Gauss ορίζει ότι η ολική ηλεκτρική ροή που διαπερνά μια κλειστή γκαουσιανή επιφάνεια ισούται με το πηλίκον τού ολικού φορτίου που περιέχει η επιφάνεια διαιρούμενου διά τού ϵ_0 .

Ο νόμος τού Gauss

Στο Υποκεφάλαιο 24.6 θα αποδείξουμε τον νόμο τού Gauss. Όταν εφαρμόζουμε τον νόμο τού Gauss πρέπει να θυμούμαστε ότι το q_{in} είναι το ολικό φορτίο μέσα στη γκαουσιανή επιφάνεια αλλά το \mathbf{E} είναι το ολικό ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται σε φορτία τα οποία βρίσκονται μέσα και έξω από την γκαουσιανή επιφάνεια. Πολλοί λησμονούν συχνά το σημείο αυτό.

Κατ' αρχήν, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον νόμο τού Gauss για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο ενός συστήματος φορτίων ή μιας συνεχούς κατανομής φορτίου, στην πράξη όμως ο νόμος τού Gauss μάς διευκολύνει στις λίγες περιπτώσεις κατά τις οποίες στο πρόβλημά μας υπεισέρχονται συμμετρικές κατανομές φορτίου, όπως είναι λ.χ. η σφαιρική, η κυλινδρική και η επίπεδη. Εάν επιλέξουμε με προσοχή την γκαουσιανή επιφάνεια που περιέχει την κατανομή τού φορτίου, τότε μπορεί ο υπολογισμός τού ολοκληρώματος της Εξίσωσης 24.6 να είναι εύκολος. Δεν πρέπει να λησμονούμε ποτέ ότι η γκαουσιανή επιφάνεια είναι μαθηματικό κατασκεύασμα και δεν υπάρχει κανένας λόγος να αντιστοιχεί σε πραγματική επιφάνεια που έχει φυσική σημασία.

24.3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΤΟΥ GAUSS ΣΕ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥΣ ΜΟΝΩΤΕΣ

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα δώσουμε μερικά παραδείγματα για το πώς χρησιμοποιούμε τον νόμο τού Gauss προκειμένου να υπολογίσουμε το πεδίο \mathbf{E} για μια δεδομένη κατανομή φορτίου. Δεν πρέπει να λησμονούμε ότι η εφαρμογή τού νόμου τού Gauss μάς διευκολύνει μόνον στις περιπτώσεις κατά τις οποίες η κατανομή τού ηλεκτρικού φορτίου είναι πολύ συμμετρική, όπως στην περίπτωση ομοιόμορφα φορτισμένων σφαίρας, επιμήκους κυλίνδρου ή επιπέδου. Στις περιπτώσεις αυτές μπορούμε να βρούμε μια απλή γκαουσιανή επιφάνεια πάνω στην οποία υπολογίζουμε με ευκολία το ολοκλήρωμα της Εξίσωσης 24.6.

Η γκαουσιανή επιφάνεια την οποία επιλέγουμε πρέπει να έχει την ίδια συμμετρία με εκείνην της κατανομής τού φορτίου.

Ο νόμος τού Gauss είναι χρήσιμος για να υπολογίσουμε το \mathbf{E} όταν η κατανομή φορτίου είναι συμμετρική

Τα παρακάτω παραδείγματα μάς βοηθούν να κατανοήσουμε πώς θα χρησιμοποιούμε τον νόμο τού Gauss.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.2. Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από ένα σημειακό φορτίο

Με αφετηρία τον νόμο τού Gauss υπολογίστε το

ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από ένα απομονωμένο σημειακό φορτίο q . Κατόπιν αποδείξτε πώς προκύπτει ο νόμος τού Coulomb από το αποτέλεσμα αυτό.

Λύση Η γκαουσιανή επιφάνεια που θα επιλέξουμε είναι μια σφαίρα ακτίνας r τής οποίας το κέντρο συμπίπτει με το φορτίο q , όπως είναι η σφαίρα τού Σχήματος 24.10. Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από το θετικό σημειακό φορτίο έχει ακτινική κατεύθυνση προς τα έξω και επομένως είναι κάθετο σε κάθε σημείο τής επιφάνειας τής σφαίρας. Δηλαδή, σε κάθε σημείο τα αντίστοιχα \mathbf{E} και $d\mathbf{A}$ είναι παράλληλα, επομένως $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E dA$ και ο νόμος τού Gauss μάς δίνει

$$\Phi_c = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint E dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Επειδή όμως το μέτρο τού πεδίου E είναι σταθερό πάνω στην επιφάνεια τής σφαίρας, μπορούμε να τό δγάλουμε έξω από το ολοκλήρωμα. Επομένως

$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα τού απειροστά μικρού στοιχείου dA τής επιφάνειας τής σφαίρας ισούται με την επιφάνεια $4\pi r^2$ τής σφαίρας ακτίνας r . Επομένως το μέτρο τού πεδίου σε απόσταση r από το φορτίο q είναι

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k \frac{q}{r^2}$$

Εάν θέσουμε ένα δοκιμαστικό φορτίο q_0 στο σημείο που το πεδίο είναι E , το μέτρο τής ηλεκτροστατικής δύναμης πάνω στο φορτίο είναι

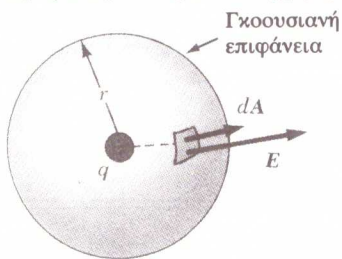
$$F = q_0 E = k \frac{qq_0}{r^2}$$

Αλλά αυτό είναι ο νόμος τού Coulomb. Συμφωνούμε μαζί σας ότι η επιχειρηματολογία μας είναι... κυκλική, αλλά δείχνει την ισοδυναμία ανάμεσα στον νόμο τού Coulomb και στον νόμο τού Gauss.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.3 Σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου □

Έχουμε μια σφαίρα κατασκευασμένη από μονωτικό υλικό. Η σφαίρα είναι φορτισμένη με ολικό φορτίο Q κατανεμημένο ομοιόμορφα σε όλο τον όγκο τής με πυκνότητα φορτίου ρ , προφανώς σταθερή, (βλ. Σχήμα 24.11). (α) Υπολογίστε την ένταση τού ηλεκτρικού πεδίου σε κάποιο σημείο που κείται έξω από τη σφαίρα, δηλαδή για σημείο όπου $r > a$.

Λύση Είναι προφανές ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε



Σχήμα 24.10 (Παράδειγμα 24.2) Το σημειακό φορτίο q βρίσκεται στο κέντρο τής σφαιρικής γκαουσιανής επιφάνειας. Το \mathbf{E} είναι παράλληλο στο $d\mathbf{A}$ σε κάθε σημείο τής επιφάνειας.

τη σφαιρική συμμετρία που υπεισέρχεται στο πρόβλημά μας. Έτσι, η γκαουσιανή επιφάνεια που επιλέγουμε είναι σφαιρική και ομόκεντρη με τη σφαίρα τού προβλήματος, όπως είναι αυτή που βλέπουμε στο Σχήμα 24.11a. Ακολουθώντας τον τρόπο λύσης που αναπτύξαμε στο Παράδειγμα 24.2, βρίσκουμε ότι

$$E = k \frac{Q}{r^2} \quad (\text{για } r > a) \quad (24.7)$$

Αν προσέξουμε, θα δούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι ακριβώς το ίδιο με το πεδίο που δημιουργεί σημειακό φορτίο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το πεδίο που δημιουργείται έξω από τον όγκο μιας ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας είναι το ίδιο με το πεδίο που δημιουργείται από ένα σημειακό φορτίο το οποίο βρίσκεται εκεί όπου είναι το κέντρο τής σφαίρας και τού οποίου το φορτίο έχει την ίδια τιμή με το ολικό φορτίο τής σφαίρας.

(b) Βρείτε την ένταση τού πεδίου σε σημεία που κείνται μέσα στη σφαίρα ($r < a$).

Λύση Επιλέγουμε και πάλι μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ομόκεντρη με τη σφαιρική κατανομή φορτίου, η οποία όμως τώρα έχει ακτίνα $r < a$ (Σχήμα 24.11b). Για να εφαρμόσουμε, ωστόσο, σωστά τον νόμο τού Gauss, πρέπει να κατανοήσουμε ότι το φορτίο q_{in} που είναι εγκλωβισμένο από την γκαουσιανή σφαίρα είναι μικρότερο από το ολικό φορτίο Q . Εάν ο όγκος τής γκαουσιανής σφαίρας είναι V' , τότε $q_{in} = \rho V'$, γιατί ρ είναι η χωρική πυκνότητα φορτίου. Αλλά $V' = \frac{4}{3}\pi r^3$. Επομένως

$$q_{in} = \rho V' = \rho \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

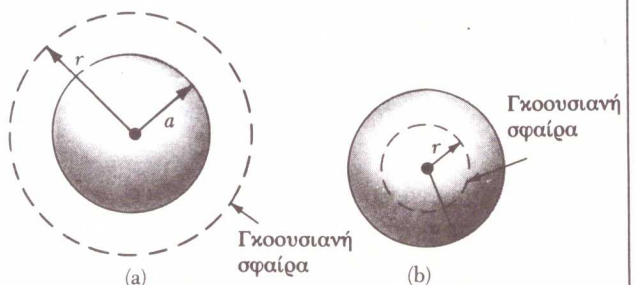
Όπως είδαμε και στο Παράδειγμα 24.2, το ηλεκτρικό πεδίο έχει σταθερό μέτρο πάνω στη σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια και είναι κάθετο σε κάθε σημείο τής επιφάνειας τής σφαίρας. Εφαρμόζουμε λοιπόν τον νόμο τού Gauss για την περιοχή $r < a$ και βρίσκουμε

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{A} = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

Λύνουμε ως προς E και βρίσκουμε

$$E = \frac{q_{in}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

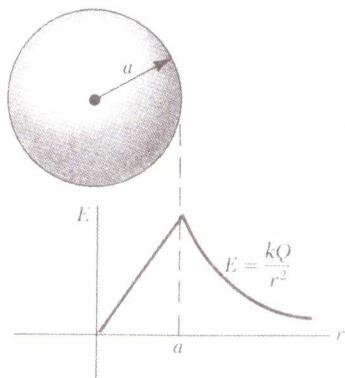
Αλλά γνωρίζουμε ότι $\rho = Q/\frac{4}{3}\pi a^3$. Ξαναγράφουμε λοιπόν την προηγούμενη σχέση που δίνει το E ως



Σχήμα 24.11 (Παράδειγμα 24.3) Μια σφαίρα ακτίνας a κατασκευασμένη από μονωτικό υλικό είναι φορτισμένη ομοιόμορφα με ολικό φορτίο Q . (α) Το πεδίο έξω από τη σφαίρα είναι kQ/r^2 . (b) Μέσα στη σφαίρα το πεδίο οφείλεται αποκλειστικά και μόνον στο φορτίο που είναι εγκλωβισμένο από την γκαουσιανή επιφάνεια και είναι ίσο προς $(kQ/a^3)r$.

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{kQ}{a^3} r \quad (\text{για } r < a) \quad (24.8)$$

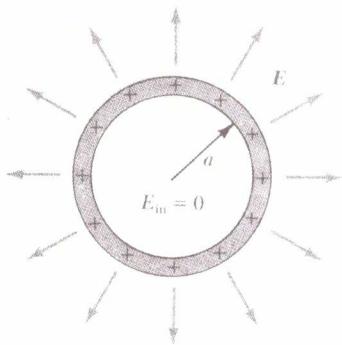
Ας σημειωθεί ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι σημαντικά διαφορετικό από το αποτέλεσμα του πρώτου μέρους του παραδείγματός μας. Δείχνει ότι, καθώς το $r \rightarrow 0$, το $E \rightarrow 0$. Βλέπουμε λοιπόν ότι το αποτέλεσμα αυτό δεν έχει σημειακή ασυνέχεια όταν το $r = 0$, πράγμα που θα συνέβαινε εάν $E \propto 1/r^2$ για την περιοχή μέσα στη σφαίρα. Στο Σχήμα 24.12 βλέπουμε τη γραφική παράσταση του E ως προς r .



Σχήμα 24.12 (Παράδειγμα 24.3) Γραφική παράσταση του E ως προς r για την περίπτωση σφαίρας που είναι κατασκευασμένη από μονωτικό υλικό και φορτισμένη ομοιόμορφα. Το πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας ($r < a$) είναι ανάλογο προς το r . Το πεδίο στο εξωτερικό της ($r > a$) είναι το ίδιο σαν να ήταν όλο το φορτίο Q συγκεντρωμένο στο κέντρο της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.4 Το ηλεκτρικό πεδίο E που δημιουργείται από λεπτό σφαιρικό κέλυφος (φλοιό)

Ένα λεπτό σφαιρικό κέλυφος ακτίνας a έχει ολικό φορτίο Q ομοιόμορφα κατανομημένο στην επιφάνειά του (Σχήμα 24.13). Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημεία που βρίσκονται μέσα και έξω από το κέλυφος.



Σχήμα 24.13 (Παράδειγμα 24.4) Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό ενός ομογενώς φορτισμένου σφαιρικού κελύφους είναι μηδενικό. Το πεδίο στο εξωτερικό του είναι το ίδιο σαν να ήταν όλο το φορτίο Q συγκεντρωμένο στο κέντρο του.

Λύση Ο υπολογισμός του πεδίου έξω από το κέλυφος είναι ίδιος με τον υπολογισμό που κάναμε για τη συμπαγή σφαίρα του Παραδείγματος 24.3a. Εάν κατασκευάσουμε μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας $r > a$, ομόκεντρη με το κέλυφος, τότε το φορτίο που εγκλωβίζεται από την γκαουσιανή επιφάνεια είναι Q . Έτσι, το πεδίο που δημιουργείται έξω από το κέλυφος είναι ισοδύναμο με το πεδίο που θα δημιουργούσε ένα

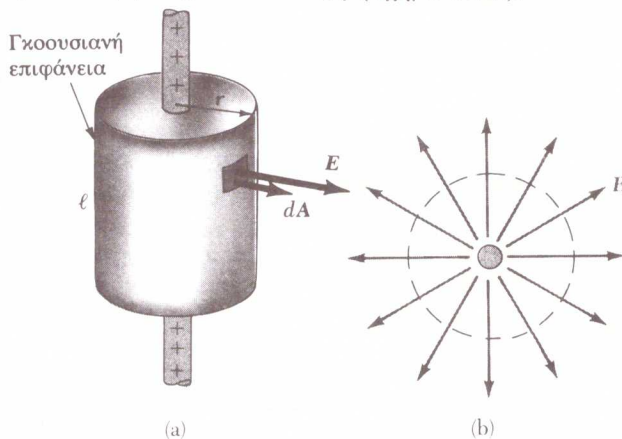
σημειακό φορτίο Q τοποθετημένο στο κέντρο του κελύφους:

$$E = k \frac{Q}{r^2} \quad (\text{για } r > a)$$

Ας εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss για μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $r < a$. Το ολικό όμως φορτίο που εγκλωβίζει η γκαουσιανή αυτή σφαιρική επιφάνεια είναι μηδενικό και έτσι η εφαρμογή του νόμου του Gauss δίνει $E = 0$ για $r < a$. Επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο μέσα σε ένα σφαιρικό κέλυφος είναι μηδενικό. Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε εάν είχαμε χρησιμοποιήσει τον νόμο του Coulomb ολοκληρώνοντας πάνω στην κατανομή φορτίου. Παραλείπουμε όμως τη διαδικασία αυτή επειδή είναι πολύπλοκη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.5 Κυλινδρικά συμμετρική κατανομή ηλεκτρικού φορτίου

Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από μια ομοιόμορφα φορτισμένη θετικά γραμμή άπειρου μήκους με γραμμική πυκνότητα φορτίου (φορτίο ανά μονάδα μήκους) λ = σταθερή (Σχήμα 24.14).



Σχήμα 24.14 (Παράδειγμα 24.5) (a) Μια φορτισμένη γραμμή άπειρου μήκους περιέχεται μέσα σε μια κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια που ο άξονάς της συμπίπτει με την φορτισμένη γραμμή. (b) Το πεδίο πάνω στην κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου έχει το ίδιο μέτρο παντού και είναι κάθετο προς την επιφάνεια.

Λύση Λόγω της συμμετρίας, το πεδίο E είναι κάθετο στη γραμμή του ηλεκτρικού φορτίου και κατευθύνεται ακτινικά προς τα έξω, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 24.14a. Η τομή που βλέπουμε στο Σχήμα 24.14b δείχνει την κατεύθυνση των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου. Για να εκμεταλλευθούμε τη συμμετρία που υπεισέρχεται στο πρόβλημά μας επιλέγουμε μια κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια, ακτίνας r και μήκους ℓ , που είναι ομοαξονική με τη γραμμή του φορτίου. Το πεδίο E είναι κάθετο σε σταθερό σε κάθε σημείο της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου. Τέλος, η ροή που διαπερνά τις επίπεδες επιφάνειες του κυλίνδρου είναι μηδενική, διότι το E είναι παράλληλο προς τις επιφάνειες αυτές.

Το ολικό φορτίο που εγκλωβίζει ο γκαουσιανός κύλινδρός μας είναι $\lambda\ell$, όπου λ είναι η γραμμική πυκνότητα φορτίου και ℓ είναι το μήκος του κυλίνδρου. Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss και, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το E είναι παράλληλο προς κάθε dA σε κάθε

σημείο τής κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου, βρίσκουμε

$$\Phi_c = \oint E \cdot dA = E \oint dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

Αλλά η κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου είναι $A = 2\pi r\ell$. Επομένως

$$E(2\pi r\ell) = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = 2k \frac{\lambda}{r} \quad (24.9)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το πεδίο μας κατανομής φορτίου με κυλινδρική συμμετρία είναι αντιστρόφως ανάλογο προς το r . Ας θυμηθούμε και πάλι ότι το πεδίο έξω από μια σφαιρική κατανομή φορτίου είναι αντιστρόφως ανάλογο προς το r^2 . Μπορούμε να αποδείξουμε την Εξίσωση 24.9 χρησιμοποιώντας τον νόμο του Coulomb και ολοκληρώνοντας, αλλά η διαδικασία αυτή είναι πολύπλοκη και πιο δύσκολη.

Εάν όμως η γραμμή του φορτίου έχει πεπερασμένο μήκος, το πεδίο δεν είναι το ίδιο με το πεδίο που βρήκαμε χρησιμοποιώντας την Εξίσωση 24.9. Το πεδίο είναι προσεγγιστικά ίσο με το πεδίο τής Εξίσωσης 24.9 μόνον για σημεία που βρίσκονται είτε πολύ κοντά στη φορτισμένη γραμμή είτε μακριά από τα άκρα της. Τελικά, ο νόμος του Gauss δεν μάς διευκολύνει στον υπολογισμό του πεδίου που δημιουργείται από μια φορτισμένη γραμμή πεπερασμένου μήκους, διότι το ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι πια σταθερό σε μέτρο ούτε είναι κάθετο στην επιφάνεια του γκαουσιανού κυλίνδρου. Όταν στο πρόβλημά μας δεν υπαισέρχεται μεγάλη συμμετρία, τότε δεν χρησιμοποιούμε τον νόμο του Gauss, αλλά υπολογίζουμε το E με τον νόμο του Coulomb.

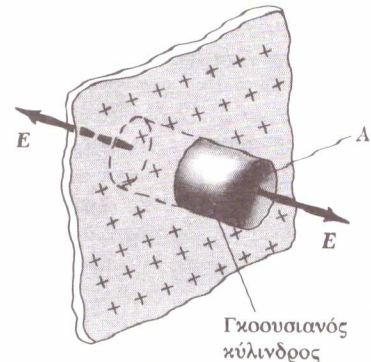
Σάς αφήνουμε ως άσκηση (Πρόβλημα 35) να αποδείξετε ότι το ηλεκτρικό πεδίο E μέσα σε μία ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδο πεπερασμένου πάχους είναι ανάλογο προς το r .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.6 Ένα φορτισμένο επίπεδο από μονωτικό υλικό

Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα φορτισμένο επίπεδο από μονωτικό υλικό άπειρων διαστάσεων το οποίο έχει επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου σ .

Λύση Από τη συμμετρία του προβλήματος (Σχήμα 24.15) βλέπουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο E πρέπει να είναι κάθετο στο επίπεδο και να έχει αντίθετες κατευθύνσεις εκατέρωθεν του επιπέδου. Η γκαουσιανή επι-

φάνεια που επιλέγουμε είναι ένας κάθετος προς το επίπεδο κύλινδρος, του οποίου οι βάσεις έχουν η καθεμιά επιφάνεια A και ισαπέχουν από το επίπεδο. Το πεδίο E είναι παράλληλο προς τον άξονα του κυλίνδρου. Είναι προφανές ότι δεν υπάρχει ροή ηλεκτρικού πεδίου που να διαπερνά την κυρτή επιφάνεια του



Σχήμα 24.15 (Παράδειγμα 24.6) Κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια (λ.χ. ένα σωληνάριο) η οποία διαπερνά ένα φορτισμένο επίπεδο άπειρων διαστάσεων. Η ροή που διαπερνά κάθε βάση του σωληναρίου είναι EA . Μέσα από την κυρτή επιφάνεια του σωληναρίου δεν διέρχεται ροή.

κυλίνδρου. Όλη η ροή διαπερνά τις βάσεις. Αφού λοιπόν το πεδίο E είναι κάθετο σε καθεμιά από τις βάσεις και η ροή που διαπερνά κάθε βάση είναι EA , η ολική ροή που διαπερνά την γκαουσιανή επιφάνειά μας είναι $2EA$. Εφόσον το ολικό ηλεκτρικό φορτίο που είναι εγκλωβισμένο μέσα στην κυλινδρική επιφάνεια είναι σA , ο νόμος του Gauss μάς δίνει

$$\Phi_c = 2EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (24.10)$$

Από το αποτέλεσμα αυτό βλέπουμε ότι η τιμή του E που βρήκαμε δεν εξαρτάται από την απόσταση τής βάσης του κυλίνδρου από το φορτισμένο επίπεδο. Άρα, το ηλεκτρικό πεδίο είναι $E = \sigma/2\epsilon_0$ σε οποιαδήποτε απόσταση από το επίπεδο και, προφανώς, είναι ομογενές σε κάθε μεριά του χώρου που ορίζεται από το επίπεδο.

Μια πολύ σημαντική εφαρμογή του παραδείγματος αυτού είναι η περίπτωση δύο παράλληλων επιπέδων με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ και $-\sigma$, αντίστοιχα (Πρόβλημα 58). Στην περίπτωση αυτή το ηλεκτρικό πεδίο είναι σ/ϵ_0 στην περιοχή ανάμεσα στα επίπεδα και σχεδόν μηδενικό αλλού.

24.4 ΑΓΩΓΟΙ ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΕ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

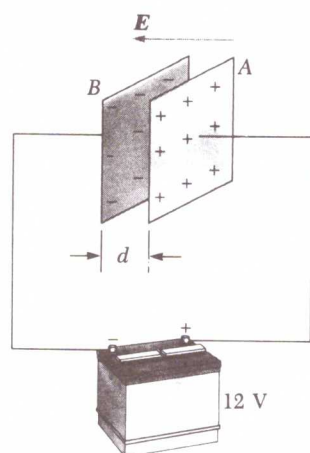
Οι καλοί αγωγοί (λ.χ. ο χαλκός) περιέχουν φορτία (τα λεγόμενα ελεύθερα ηλεκτρόνια) που είναι ελεύθερα να κινούνται μέσα τους. Όταν δεν υπάρχει κίνηση ελεύθερων ηλεκτρονίων προς κάποια ορισμένη κατεύθυνση μέσα στον αγωγό, τότε λέμε ότι ο αγωγός βρίσκεται σε **ηλεκτροστατική ισορροπία**. Όπως θα δούμε, ένας αγωγός που ισορροπεί ηλεκτροστατικά έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

Ιδιότητες ενός αγωγού που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία

που όλα είναι κάθετα στο πεδίο (Σχήμα 25.2). Αργότερα θα δούμε τις τοπολογίες των ισοδυναμικών επιφανειών πεδίων διαφόρων συμμετριών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 25.1 Το πεδίο ανάμεσα σε δύο παράλληλες πλάκες που είναι φορτισμένες με ίσα αλλά αντίθετα φορτία

Συνδέουμε μια μπαταρία των 12 V με δύο παράλληλες πλάκες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 25.3 Η απόσταση ανάμεσα στις πλάκες είναι 0.3 cm και μπορούμε να υποθέσουμε ότι εκεί το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές (Η υπόθεση αυτή είναι σωστή κατά μεγάλη προσέγγιση όταν η απόσταση ανάμεσα στις πλάκες είναι μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις τους και για σημεία που βρίσκονται μακριά από τις ακμές των πλακών). Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο που υπάρχει ανάμεσα στις πλάκες.



Σχήμα 25.3 (Παράδειγμα 25.1) Μπαταρία 12 V συνδεδεμένη με δύο παράλληλες πλάκες. Στην περιοχή ανάμεσα στις δύο πλάκες το ηλεκτρικό πεδίο ισούται με το πηλίκο της διαφοράς δυναμικού διά της απόστασης d .

Λύση Το ηλεκτρικό πεδίο κατευθύνεται από τη θετικά φορτισμένη πλάκα στην αρνητική. Βλέπουμε ότι η θετικά φορτισμένη πλάκα (στα δεξιά του σχήματος) βρίσκεται σε υψηλότερο δυναμικό από την αρνητική. Να σημειωθεί ότι η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στις πλάκες B και A πρέπει να ισούται με τη διαφορά του δυναμικού που υπάρχει ανάμεσα στους πόλους της μπαταρίας. Για να γίνει αυτό πιο κατανοητό, ας θυμηθούμε ότι όλα τα σημεία ενός αγωγού που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία έχουν το ίδιο δυναμικό⁽²⁾. Έτσι δεν υπάρχει διαφορά δυναμικού μεταξύ του πόλου της μπαταρίας και οποιουδήποτε σημείου της πλάκας με την οποία έχει συνδεθεί. Επομένως, το πεδίο ανάμεσα στις πλάκες έχει μέτρο ίσο προς

$$E = \frac{|V_B - V_A|}{d} = \frac{12 \text{ V}}{0.3 \times 10^{-2} \text{ m}} = 4.0 \times 10^3 \text{ V/m}$$

⁽²⁾ Όπως αναφέρθηκε ήδη, στο εσωτερικό των ισορροπούμενων αγωγών το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό. Έτσι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ μεταξύ δύο σημείων στο εσωτερικό του αγωγού πρέπει να είναι μηδέν. Θα μελετήσουμε διεξοδικά το σημείο αυτό στο Υποκεφάλαιο 25.6.

Τη διάταξη αυτή την ονομάζουμε *επίπεδο πυκνωτή ή πυκνωτή παράλληλων πλακών* και θα την μελετήσουμε λεπτομερώς στο επόμενο κεφάλαιο.

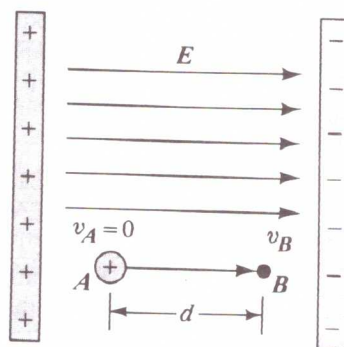
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 25.2 Κίνηση πρωτονίου μέσα σε ομογενές πεδίο □

Ένα πρωτόνιο που αρχικά ηρεμεί αφήνεται ελεύθερο μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Το πεδίο έχει μέτρο $8 \times 10^4 \text{ V/m}$ και κατευθύνεται παράλληλα προς τον θετικό άξονα x (Σχήμα 25.4). Το πρωτόνιο μετατοπίζεται κατά 0.5 m προς την κατεύθυνση του \mathbf{E} . (a) Υπολογίστε τη μεταβολή του ηλεκτρικού δυναμικού ανάμεσα στα σημεία A και B .

Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 25.4 και, εφόσον γνωρίζουμε ότι το πρωτόνιο μετατοπίζεται προς την κατεύθυνση του πεδίου, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_B - V_A = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^d E dx = -E \int_0^d dx \\ &= -Ed = - \left(8 \times 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \right) (0.5 \text{ m}) \\ &= -4 \times 10^4 \text{ V} \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το ηλεκτρικό δυναμικό του πεδίου μειώνεται από το A στο B .



Σχήμα 25.4 (Παράδειγμα 25.2). Ένα πρωτόνιο επιταχύνεται από το A προς το B κατά την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου.

(b) Υπολογίστε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του πρωτονίου η οποία αντιστοιχεί στη μετατόπισή αυτή.

$$\begin{aligned} \Delta U &= q_0 \Delta V = e \Delta V \\ &= (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(-4 \times 10^4 \text{ V}) \\ &= -6.4 \times 10^{-15} \text{ J} \end{aligned}$$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η δυναμική ενέργεια του πρωτονίου μειώνεται καθώς αυτό κινείται προς την κατεύθυνση του \mathbf{E} . Αυτό μπορεί να γίνει πιο κατανοητό

εάν αναλογιστούμε ότι το πρωτόνιο, καθώς κινείται, επιταχύνεται και έτσι αυξάνεται η κινητική ενέργειά του, άρα πρέπει να μειώνεται ισόποσα η δυναμική του ενέργεια, διότι η ολική του ενέργεια παραμένει σταθερή.

(c) Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του πρωτονίου αφού αυτό μετατοπιστεί κατά 0.5 m.

Γνωρίζουμε ότι, σε σύγκριση με την ηλεκτροστατική δύναμη, μπορούμε να αγνοήσουμε τη βαρυτική δύναμη που ασκείται πάνω στο πρωτόνιο (Παράδειγμα 23.5). Χρησιμοποιούμε, λοιπόν, την αρχή της διατήρησης της ενέργειας στη μορφή $\Delta K + \Delta U = 0$, που σημαίνει ότι οποιαδήποτε μείωση της δυναμικής ενέργειας συνεπάγεται αυτόματα ισόποση αύξηση της κινητικής ενέργειας και αντιστρόφως. Επειδή, όπως γνωρίζουμε,

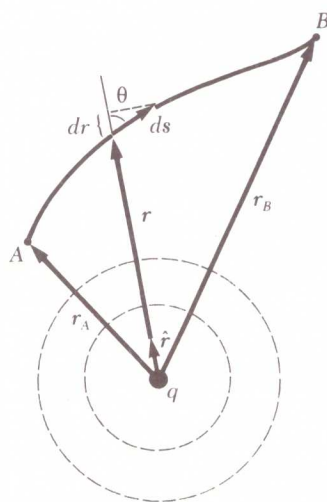
το πρωτόνιο έχει μάζα ίση προς $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, βρίσκουμε

$$\Delta K + \Delta U = (\frac{1}{2} m_p v^2 - 0) - 6.4 \times 10^{-15} \text{ J} = 0$$

$$v^2 = \frac{2(6.4 \times 10^{-15}) \text{ J}}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 7.66 \times 10^{12} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v = 2.77 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Εάν αντί για πρωτόνιο επιταχύνουμε ηλεκτρόνιο, η ταχύτητά του θα πλησίαζε την ταχύτητα του φωτός και το πρόβλημα τότε θα έπρεπε να λυθεί με προσφυγή στην ειδική θεωρία της σχετικότητας (Κεφάλαιο 39).



Σχήμα 25.5 Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα σημεία A και B που οφείλεται σε ένα σημειακό φορτίο q εξαρτάται μόνο από τις ακτινικές συντεταγμένες r_A και r_B της αρχής και του τέλους της διαδρομής, αντίστοιχα.

25.3 ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΚΑΙ Η ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΑΚΑ ΦΟΡΤΙΑ

Ας δούμε ένα απομονωμένο θετικό σημειακό φορτίο q , όπως αυτό που δείχνει το Σχήμα 25.5. Θυμηθείτε ότι τέτοιου είδους φορτία παράγουν ηλεκτρικό πεδίο του οποίου οι γραμμές απομακρύνονται από το φορτίο κατά την ακτινική διεύθυνση. Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργείται από το φορτίο σε απόσταση r , αρχίζουμε από τη γενική έκφραση της διαφοράς δυναμικού

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι το ηλεκτρικό πεδίο το οποίο δημιουργείται από ένα σημειακό φορτίο είναι $\mathbf{E} = kq\hat{r}/r^2$, όπου \hat{r} είναι μοναδιαίο διάνυσμα που κατευθύνεται από το φορτίο προς το σημείο στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού. Μπορούμε να ξαναγράψουμε το $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ ως

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = k \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\mathbf{s}$$

Ας θυμηθούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο $\hat{r} \cdot d\mathbf{s} = ds \cos \theta$, όπου θ είναι η γωνία ανάμεσα στο \hat{r} και στο $d\mathbf{s}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 25.5. Ας σημειωθεί επίσης ότι το $ds \cos \theta$ είναι η προβολή του $d\mathbf{s}$ πάνω στο \hat{r} . Έτσι, $ds \cos \theta = dr$. Δηλαδή, οποιαδήποτε μετατόπιση $d\mathbf{s}$ μεταβάλλει κατά dr το μέτρο του \hat{r} . Χρησιμοποιούμε τα παραπάνω και βρίσκουμε ότι $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (kq/r^2) dr$, έτσι

$$V_B - V_A = - \int_{r_A}^{r_B} E_r dr = -kq \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \left[\frac{kq}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$$

$$V_B - V_A = kq \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \quad (25.11)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το ολοκλήρωμα $-\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ακολουθήθηκε για τη μετάβαση από το A στο B, όπως εξάλλου ήταν αναμενόμενο, διότι, λόγω αντιστοιχίας προς το βαρυτικό πεδίο σημειακής μάζας, γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου είναι διατηρητικό. Πρέπει να σημειωθεί ότι η Εξίσωση 25.11 εκφράζει το σημαντικό αποτέλεσμα ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων A και B εξαρτάται μόνον από τις ακτινικές συντεταγμένες r_A και r_B . Παραδοσιακά,

μα συνεχή κατανομή φορτίου με δύο τρόπους. Εάν μάς είναι γνωστή η κατανομή φορτίου, αρχίζουμε με την Εξίσωση 25.12, που περιγράφει το δυναμικό ενός σημειακού φορτίου. Κατόπιν υπολογίζουμε το δυναμικό ενός μικρού στοιχείου φορτίου dq υποθέτοντας ότι αυτό είναι σημειακό φορτίο (Σχήμα 25.9). Το δυναμικό dV που δημιουργείται από το dq σε ένα σημείο P είναι

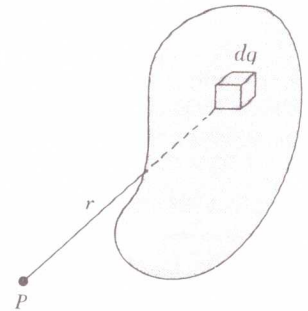
$$dV = k \frac{dq}{r} \quad (25.16)$$

όπου r είναι η απόσταση που έχει το P από το dq . Για να βρούμε το ολικό δυναμικό στο σημείο P , πρέπει να ολοκληρώσουμε την Εξίσωση 25.16 ώστε να περιλάβουμε όλα τα στοιχεία της κατανομής του ηλεκτρικού φορτίου. Δεν πρέπει να ξεχνούμε ότι κάθε στοιχείο έχει διαφορετική απόσταση r από το P . Το k όμως είναι σταθερά και γι' αυτό βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα. Έτσι

$$V = k \int \frac{dq}{r} \quad (25.17)$$

Αυτό που κάναμε κυρίως είναι ότι αντικαταστήσαμε το άθροισμα της Εξίσωσης 25.13 με ολοκλήρωμα. Δεν πρέπει όμως να μάς διαφεύγει ότι η Εξίσωση 25.17 ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι το δυναμικό είναι μηδενικό όταν το σημείο P βρίσκεται στο άπειρο.

Η δεύτερη μέθοδος υπολογισμού του δυναμικού το οποίο δημιουργείται από μια συνεχή κατανομή φορτίου συνίσταται στη χρήση της Εξίσωσης 25.4. Η μέθοδος αυτή μάς διευκολύνει όταν ήδη γνωρίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο, λ.χ. από τον νόμο του Gauss. Εάν η κατανομή φορτίου είναι συμμετρική, υπολογίζουμε πρώτα το E σε όλα τα σημεία χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss. Κατόπιν θέτουμε την τιμή αυτή του E στην Εξίσωση 25.4 και υπολογίζουμε έτσι τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε σημεία. Επιλέγουμε μετά ένα «βολικό» σημείο αναφοράς, όπου μηδενίζουμε το δυναμικό. Θα δώσουμε στη συνέχεια αρκετά παραδείγματα ώστε να γίνουν πιο κατανοητά τα παραπάνω.



Σχήμα 25.9 Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργείται από μια συνεχή κατανομή φορτίου στο σημείο P διαίρουμε την κατανομή αυτή σε μέρη φορτίου dq και αθροίζουμε τα δυναμικά που δημιουργούνται ξεχωριστά από το καθένα μέρος φορτίου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 25.4 Το δυναμικό που δημιουργείται από έναν φορτισμένο δακτύλιο

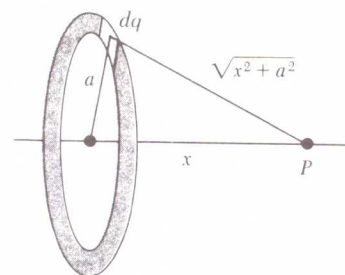
Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P που κείται πάνω στον άξονα ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου ακτίνας a και ολικού φορτίου Q . Ο δακτύλιος κείται πάνω σε ένα επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα x .

Λύση Ας θεωρήσουμε το σημείο P που έχει απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου, όπως στο Σχήμα 25.10. Κάθε στοιχείο φορτίου dq έχει ίση απόσταση, $\sqrt{x^2 + a^2}$, από το P . Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ότι

$$V = k \int \frac{dq}{r} = k \int \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Αφού όμως η απόσταση $\sqrt{x^2 + a^2}$ είναι ίση για όλα τα στοιχεία φορτίου, μπορούμε να τό βγάλουμε έξω από το ολοκλήρωμα. Έτσι

$$V = \frac{k}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq = \frac{kQ}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (25.18)$$



Σχήμα 25.10 (Παράδειγμα 25.4) Ομοιόμορφα φορτισμένος δακτύλιος ακτίνας a , κάθετος στον άξονα x . Όλα τα τμήματα του δακτυλίου ισαπέχουν από οποιοδήποτε σημείο (π.χ. το P) του κάθετου άξονα.

Η μόνη λοιπόν μεταβλητή από την οποία εξαρτάται το V είναι το x . Αυτό δεν πρέπει να μάς εκπλήσσει, διότι ο υπολογισμός μας ισχύει μόνον για τον άξονα συμμετρίας του δακτυλίου, όπου $y = z = 0$. Λόγω συμμετρίας, το E έχει μόνο συνιστώσα x . Μπορούμε, συνεπώς, να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $E_x = -dV/dx$ (θα την αποδείξουμε στο επόμενο υποκεφάλαιο) για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο P :

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{dV}{dx} = -kQ \frac{d}{dx}(x^2 + a^2)^{-1/2} \\
 &= -kQ(-\frac{1}{2})(x^2 + a^2)^{-3/2}(2x) \\
 &= \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (25.19)
 \end{aligned}$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι ακριβώς το ίδιο με τη λύση τού προβλήματος που λύσαμε στο Παράδειγμα 23.9, όπου κάναμε άθροιση. Ας σημειωθεί ότι στο $x = 0$ (κέντρο τού δακτυλίου), το $E_x = 0$. Αυτό δεν μπορούσε να προκύψει, άραγε, από τον νόμο τού Coulomb;

Άσκηση 2 Ποιο είναι το ηλεκτρικό δυναμικό στο κέντρο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου; Τί σάς λέει για το V το γεγονός ότι $E = 0$;

Απάντηση $V = kQ/a$ στο $x = 0$. Αφού το $E = 0$, το V πρέπει να έχει τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή του (έχει τη μέγιστη).

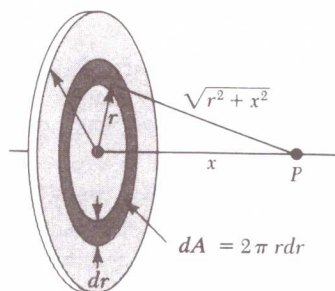
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 25.5 Το δυναμικό ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό πάνω στον κάθετο άξονα συμμετρίας ενός δίσκου ακτίνας a , ομοιόμορφα φορτισμένου, με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ (Σχήμα 25.11).

Λύση Επιλέγουμε τον άξονα x έτσι ώστε να συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας, που είναι κάθετος στο επίπεδο τού δίσκου. Πάνω στον άξονα x κείται το σημείο P . Για να απλουστεύσουμε τη λύση τού προβλήματος χωρίζουμε τον δίσκο σε μια σειρά από ομόκεντρους δακτυλίους. Από το προηγούμενο παράδειγμα μάς είναι γνωστό το δυναμικό που δημιουργεί κάθε δακτύλιος (Εξίσωση 25.18). Θεωρήστε ότι ένας από τους δακτυλίους έχει ακτίνα r και πλάτος dr , όπως φαίνεται στο Σχήμα 25.11. Η επιφάνεια τού δακτυλίου dA είναι $2\pi r dr$ (το γινόμενο τής περιμέτρου επί το πλάτος). Το φορτίο τού δακτυλίου είναι $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$. Επομένως, το δυναμικό που δημιουργεί ο δακτύλιος αυτός στο σημείο P είναι

$$dV = \frac{k dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{k\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Για να βρούμε το ολικό δυναμικό στο P πρέπει να αθροίσουμε όλα τα δυναμικά που δημιουργεί ξεχωριστά καθένας από τους απειροστούς δακτυλίους οι οποίοι συναποτελούν τον δίσκο. Ολοκληρώνουμε το dV από το $r = 0$ έως το $r = a$:



Σχήμα 25.11 (Παράδειγμα 25.5) Δίσκος ακτίνας a , ομοιόμορφα φορτισμένος, κάθετος στον άξονα x . Για να βρούμε το δυναμικό σε οποιοδήποτε σημείο P πάνω στον άξονα, διαιρούμε τον δίσκο σε ομόκεντρους δακτυλίους επιφάνειας $2\pi r dr$.

$$V = \pi k \sigma \int_0^a \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \pi k \sigma \int_0^a (r^2 + x^2)^{-1/2} 2r dr$$

το ολοκλήρωμα αυτό είναι τής μορφής $u^n du$ και έχει την τιμή $u^{n+1}/(n+1)$, όπου $n = -\frac{1}{2}$ και $u = r^2 + x^2$. Το αποτέλεσμα είναι λοιπόν

$$V = 2\pi k \sigma [(x^2 + a^2)^{1/2} - x] \quad (25.20)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο πάνω στον άξονα υπολογίζοντας το αρνητικό τής παραγώγου τού V ως προς το x . Έτσι

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) \quad (25.21)$$

Ο υπολογισμός των V και E για ένα τυχαίο σημείο που δεν κείται πάνω στον άξονα είναι πολύ δυσκολότερος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 25.6 Δυναμικό ενός γραμμικού φορτίου πεπερασμένου μήκους

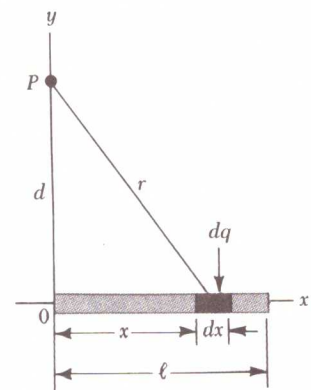
Μια ράβδος μήκους ℓ κείται πάνω στον άξονα x και είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με συνολικό φορτίο Q . Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο P πάνω στον άξονα y και σε απόσταση d από την αρχή των συντεταγμένων (Σχήμα 25.12).

Λύση Το φορτίο dq που έχει ένα στοιχείο μήκους dx , τής ράβδου είναι λdx , όπου λ είναι η γραμμική πυκνότητα φορτίου, $\lambda = Q/\ell$. Το στοιχείο αυτό τής ράβδου έχει απόσταση $r = \sqrt{x^2 + d^2}$ από το σημείο P . Μπορούμε να γράψουμε ότι το στοιχείο dx δημιουργεί στο σημείο P δυναμικό.

$$dV = k \frac{dq}{r} = k \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

Για να βρούμε το ολικό δυναμικό στο σημείο P ολοκληρώνουμε την παραπάνω έκφραση από $x = 0$ έως $x = \ell$. Αφού τα k , λ και d είναι σταθερές, τά βγάζουμε έξω από το ολοκλήρωμα και έτσι βρίσκουμε

$$V = k\lambda \int_0^\ell \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = k \frac{Q}{\ell} \int_0^\ell \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$



Σχήμα 25.12 (Παράδειγμα 25.6) Ομοιόμορφα φορτισμένο γραμμικό φορτίο μήκους ℓ κείται πάνω στον άξονα x . Για να υπολογίσουμε το δυναμικό στο σημείο P , διαιρούμε το φορτίο σε τμήματα μήκους dx και φορτίου $dq = \lambda dx$.

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι δύσκολο να υπολογιστεί. Γι' αυτό μπορείτε να το βρείτε σε πίνακες ολοκληρωμάτων:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + d^2})$$

Έτσι βρίσκουμε ότι

$$V = \frac{kQ}{\ell} \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + d^2}}{d}\right) \quad (25.22)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 25.7 Δυναμικό μιας ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας

Μια συμπαγής σφαίρα ακτίνας R , κατασκευασμένη από μονωτικό υλικό, είναι ομοιόμορφα θετικά φορτισμένη με ολικό φορτίο Q (Σχήμα 25.13). (α) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό για ένα σημείο που κείται έξω από τη σφαίρα, $r > R$. Θεωρήστε ότι το δυναμικό είναι μηδενικό όταν $r = \infty$.

Λύση Στο Παράδειγμα 24.3 χρησιμοποιήσαμε τον νόμο του Gauss και βρήκαμε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου έξω από μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα, το οποίο είναι

$$E_r = k \frac{Q}{r^2} \quad (\text{για } r > R)$$

όπου το ακτινικό πεδίο κατευθύνεται προς τα έξω όταν το φορτίο Q της σφαίρας είναι θετικό. Για να βρούμε το δυναμικό σε ένα σημείο που κείται εκτός της σφαίρας, λ.χ. το σημείο B του Σχήματος 25.13, θέτουμε την παραπάνω έκφραση του E στην Εξίσωση 25.5. Στην περίπτωση μας έχουμε $E \cdot ds = E_r dr$. Έτσι

$$V_B = - \int_{\infty}^r E_r dr = -kQ \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}$$

$$V_B = k \frac{Q}{r} \quad (\text{για } r > R)$$

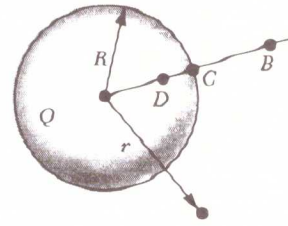
Ας σημειωθεί ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι το ίδιο ακριβώς με το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργείται από ένα σημειακό φορτίο. Γνωρίζουμε ότι το δυναμικό πρέπει να είναι συνεχές (υπό την μαθηματική έννοια) ποσότητα όταν $r = R$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την παραπάνω έκφραση, μπορούμε να βρούμε το δυναμικό στην επιφάνεια της σφαίρας. Το δυναμικό λοιπόν για ένα σημείο C (Σχήμα 25.13) πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας είναι

$$V_C = k \frac{Q}{R} \quad (\text{για } r = R)$$

(β) Βρείτε το δυναμικό σε ένα σημείο μέσα στη φορτισμένη σφαίρα, όταν δηλαδή $r < R$.

Λύση Στο Παράδειγμα 24.3 βρήκαμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο μέσα σε μια ομογενώς φορτισμένη σφαίρα είναι

$$E_r = \frac{kQ}{R^3} r \quad (\text{για } r < R)$$



Σχήμα 25.13 (Παράδειγμα 25.7) Ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα ακτίνας R και ολικού φορτίου Q . Η σφαίρα είναι κατασκευασμένη από μονωτικό υλικό. Το ηλεκτρικό δυναμικό στα σημεία B και C είναι το ίδιο με το δυναμικό που θα δημιουργούσε ένα σημειακό φορτίο Q τοποθετημένο στο κέντρο της σφαίρας.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα αυτό και την Εξίσωση 25.4 για να υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού $V_D - V_C$, όπου το σημείο D βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας:

$$V_D - V_C = - \int_R^r E_r dr = - \frac{kQ}{R^3} \int_R^r r dr = \frac{kQ}{2R^3} (R^2 - r^2)$$

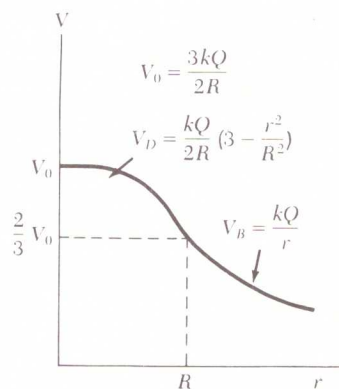
Θέτουμε το $V_C = kQ/R$ στην παραπάνω σχέση και λύνουμε ως προς V_D :

$$V_D = \frac{kQ}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (\text{για } r < R) \quad (25.23)$$

Στο σημείο $r = R$ βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με την τιμή για το V_C που ήδη έχουμε βρεί. Στο Σχήμα 25.14 βλέπετε τη γραφική παράσταση του V ως προς r .

Άσκηση 3 Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο μιας ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας; Ποιο είναι το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο αυτό;

Απάντηση Στο σημείο $r = 0$, το $E = 0$ και $V_0 = 3kQ/2R$.



Σχήμα 25.14 (Παράδειγμα 25.7) Γραφική παράσταση του ηλεκτρικού δυναμικού V ως προς την απόσταση r από το κέντρο ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας ακτίνας R από μονωτικό υλικό. Η καμπύλη V_D μέσα στη σφαίρα είναι παραβολική και συνεχίζεται ομαλά έξω από τη σφαίρα, στην καμπύλη V_B , που είναι υπερβολή. Το μέγιστο V_0 του δυναμικού βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26.1 Επίπεδος πυκνωτής

Κάθε οπλισμός ενός επίπεδου πυκνωτή έχει επιφάνεια $A = 2 \text{ cm}^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ και η απόσταση μεταξύ των οπλισμών είναι $d = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$. Υπολογίστε τη χωρητικότητά του.

Λύση Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 26.3 και βρίσκουμε

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \left(8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \right) \left(\frac{2 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{1 \times 10^{-3} \text{ m}} \right)$$

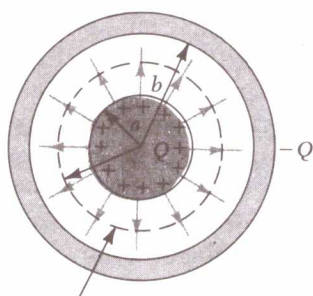
$$= 1.77 \times 10^{-12} \text{ F} = 1.77 \text{ pF}$$

Άσκηση 1 Βρείτε τη χωρητικότητα του πυκνωτή εάν η απόσταση των οπλισμών αυξηθεί στα 3 mm.

Απάντηση 0.59 pF.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26.2 Ο κυλινδρικός πυκνωτής

Ένας κυλινδρικός αγωγός ακτίνας a φορτισμένος με φορτίο $+Q$ είναι διατεταγμένος ομοαξονικά με έναν αγωγόμο κυλινδρικό φλοιό ακτίνας b φορτισμένον με φορτίο $-Q$ (Σχήμα 26.4a). Το μήκος της διάταξης αυτής είναι ℓ . Υπολογίστε τη χωρητικότητά της.



Γκαουσιανή επιφάνεια (b)

Σχήμα 26.4 (Παράδειγμα 26.2) (a) Ένας κυλινδρικός πυκνωτής αποτελείται από έναν κυλινδρικό αγωγό μήκους ℓ και ακτίνας a που περιβάλλεται από ομοαξονικό κυλινδρικό κέλυφος ακτίνας b . (b) Κάτοψη κυλινδρικού πυκνωτή. Η διακεκομμένη γραμμή περιγράφει γκαουσιανή κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας r και μήκους ℓ .

Λύση Εάν υποθέσουμε ότι το μήκος ℓ είναι πολύ μεγαλύτερο από τις ακτίνες a και b , μπορούμε να αγνοήσουμε την ανομοιογένεια του πεδίου στα άκρα των δύο κυλίνδρων. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στους άξονες των κυλίνδρων και περιορίζεται στον μεταξύ τους χώρο (βλ. Σχήμα 26.4b). Κατ' αρχήν, πρέπει να υπολογίσουμε την τάση ανάμεσα στους δύο κυλίνδρους. Γενικά γνωρίζουμε ότι

$$V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

όπου \mathbf{E} είναι το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή $a < r < b$. Στο Κεφάλαιο 24 αποδείξαμε, χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss, ότι το ηλεκτρικό πεδίο το οποίο δημιουργεί ένας φορτισμένος κύλινδρος με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ είναι ίσο προς $2k\lambda/r$. Το ίδιο ισχύει και εδώ, αφού ο εξωτερικός κυλινδρικός οπλισμός δεν συνεισφέρει στο ηλεκτρικό πεδίο του εσωτερικού του. Έχοντας υπ' όψιν τα παραπάνω και ότι το \mathbf{E} κατευθύνεται ακτινικά προς τα έξω, όπως στο Σχήμα 26.4b, βρίσκουμε ότι

$$V_b - V_a = - \int_a^b E_r dr = -2k\lambda \int_a^b \frac{dr}{r} = -2k\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Θέτουμε το παραπάνω αποτέλεσμα στην Εξίσωση 26.1, χρησιμοποιούμε τον ορισμό $\lambda = Q/\ell$ και βρίσκουμε ότι

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{2kQ}{\ell} \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\ell}{2k \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (26.4)$$

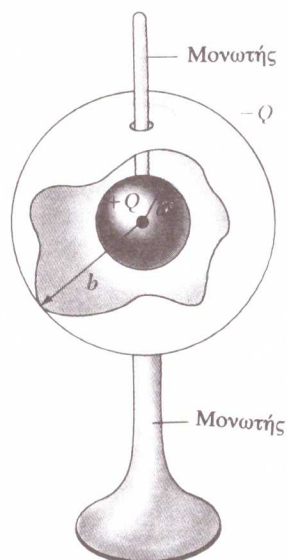
όπου χρησιμοποιήσαμε την απόλυτη τιμή της διαφοράς δυναμικού $V = 2k\lambda \ln(b/a)$. Με άλλα λόγια, η $V = V_a - V_b$ είναι θετική, διότι ο εσωτερικός κύλινδρος έχει το υψηλότερο δυναμικό.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η χωρητικότητα είναι ανάλογη προς το μήκος των δύο κυλίνδρων και εξαρτάται και από τις ακτίνες των δύο κυλινδρικών αγωγών όπως ήταν αναμενόμενο. Μια εφαρμογή των παραπάνω είναι το ομοαξονικό καλώδιο, που χρησιμοποιείται συνήθως για τη θωράκιση του ηλεκτρικού σήματος εναντίον των επιδράσεων εξωτερικών παρασίτων. Αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλινδρικούς αγωγούς ακτίνων a και b που χωρίζονται με έναν μονωτή. Στην περίπτωση μας θα υποθέσουμε ότι ο μονωτής αυτός είναι το κενό. Χρησιμοποιούμε λοιπόν την Εξίσωση 26.4 και βλέπουμε ότι η χωρητικότητα του ομοαξονικού καλωδίου ανά μοναδιαίο μήκος είναι

$$\frac{C}{\ell} = \frac{1}{2k \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26.3 Ο σφαιρικός πυκνωτής

Ένας σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από έναν αγωγόμο σφαιρικό φλοιό ακτίνας b φορτισμένον με φορτίο $-Q$ και ομόκεντρο με μια μικρότερη αγωγόμο σφαίρα ακτίνας a και φορτίου $+Q$ (Σχήμα 26.5). Βρείτε τη χωρητικότητά του.



Σχήμα 26.5 (Παράδειγμα 26.3) Ένας σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από εσωτερική σφαίρα ακτίνας a που περιβάλλεται από ένα ομόκεντρο σφαιρικό κέλυφος ακτίνας b . Το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στις σφαίρες κατευθύνεται ακτινικά προς τα έξω εάν η εσωτερική σφαίρα είναι φορτισμένη θετικά.

Λύση Όπως αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 24, το ηλεκτρικό πεδίο έξω από μια σφαιρική κατανομή φορτίου έχει

ακτινική διεύθυνση και ισούται με kQ/r^2 . Αυτό λοιπόν είναι και το πεδίο ανάμεσα στις δύο σφαίρες ($a < r < b$). Το πεδίο είναι μηδενικό οπουδήποτε αλλού. Γνωρίζουμε από τον νόμο του Gauss ότι μόνον η εσωτερική σφαίρα συνεισφέρει στη δημιουργία αυτού του πεδίου. Η διαφορά δυναμικού είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} V_b - V_a &= - \int_a^b E_r dr = -kQ \int_a^b \frac{dr}{r^2} = kQ \left[\frac{1}{r} \right]_a^b \\ &= kQ \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

Η απόλυτη τιμή της διαφοράς δυναμικού είναι

$$V = V_a - V_b = kQ \frac{(b-a)}{ab}$$

Θέτουμε την τιμή αυτή στην Εξίσωση 26.1 και βρίσκουμε

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{ab}{k(b-a)} \quad (26.5)$$

Άσκηση 2 Αποδείξτε ότι εάν η ακτίνα b της εξωτερικής σφαίρας τείνει προς το άπειρο, η χωρητικότητα τείνει προς την τιμή $a/k = 4\pi\epsilon_0 a$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με την Εξίσωση 26.2.

Σύμβολο πυκνωτή

Σύμβολο μπαταρίας

Σχήμα 26.6 Σύμβολα που χρησιμοποιούνται στα κυκλώματα για πυκνωτές και μπαταρίες.

26.3 ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΑ ΠΥΚΝΩΤΩΝ

Πολλές φορές, όταν κατασκευάζουμε κυκλώματα, συνδέουμε πυκνωτές με διάφορους τρόπους. Μπορούμε να υπολογίσουμε την ισοδύναμη χωρητικότητα των διαφόρων συνδεσμολογιών πυκνωτών με τις μεθόδους που θα αναπτύξουμε σε τούτο το υποκεφάλαιο. Στο Σχήμα 26.6 βλέπουμε τα σύμβολα με τα οποία περιγράφουμε τους πυκνωτές και τις μπαταρίες. Να σημειωθεί ότι, όταν συμβολίζουμε μια μπαταρία, ο θετικός της πόλος, που έχει και το υψηλότερο δυναμικό, συμβολίζεται με μεγαλύτερη κατακόρυφη γραμμή από τον αρνητικό.

Παράλληλη συνδεσμολογία

Εάν δύο πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι όπως φαίνεται στο Σχήμα 26.7a, τότε λέμε ότι είναι *συνδεδεμένοι παράλληλα*. Οι προς τα αριστερά της σελίδας οπλισμοί των πυκνωτών είναι συνδεδεμένοι μέσω ενός αγωγού τόσο μεταξύ τους όσο και με τον ίδιο (εδώ τυχαίως με τον θετικό) πόλο μιας μπαταρίας. Επομένως όλοι οι προς τα αριστερά οπλισμοί έχουν το ίδιο δυναμικό. Παρομοίως, οι προς τα δεξιά οπλισμοί είναι συνδεδεμένοι με έναν αγωγό μεταξύ τους και όλοι μαζί με τον αρνητικό πόλο της μπαταρίας. Μόλις οι πυκνωτές συνδεθούν με την μπαταρία, ηλεκτρόνια μετακινούνται μέσω της μπαταρίας από τους αριστερούς (πάντοτε όπως κοιτάμε τη σελίδα) οπλισμούς στους δεξιούς. Έτσι, οι αριστεροί οπλισμοί μένουν με θετικό φορτίο και οι δεξιοί με αρνητικό. Η μπαταρία παρέχει την ενέργεια που απαιτείται για να γίνει αυτή η μεταφορά: η χημική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη μέσα στην μπαταρία μετατρέπεται σε ηλεκτρική. Η μεταφορά των ηλεκτρονίων σταματά όταν μηδενιστεί η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς των πυκνωτών και τον αντίστοιχο προς τον καθένα πόλο (θετικό ή αρνητικό) με

όπου V είναι η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους πόλους της μπαταρίας. Από το Σχήμα 26.8α βλέπουμε ότι

$$V = V_1 + V_2 \quad (26.9)$$

όπου V_1 είναι η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή C_1 και, αντίστοιχα, V_2 του C_2 . Γενικά, ισχύει ότι το άθροισμα της διαφοράς δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς των επιμέρους πυκνωτών που έχουν συνδεθεί εν σειρά ισούται με τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στον αριστερό οπλισμό του πρώτου πυκνωτή και τον δεξιό του τελευταίου (εφόσον, φυσικά, δεν παρεμβάλλονται στο κύκλωμα διαφορετικά στοιχεία εκτός των πυκνωτών). Αφού η σχέση $Q = CV$ ισχύει για κάθε πυκνωτή, μπορούμε να γράψουμε για τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς του καθενός ξεχωριστά

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

Θέτουμε τις παραπάνω σχέσεις στην Εξίσωση 26.9 και έχοντας υπ' όψιν ότι $V = Q/C_{\text{eq}}$, βρίσκουμε

$$\frac{Q}{C_{\text{eq}}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

Απαλείφουμε το Q και βρίσκουμε

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{συνδεσμολογία} \\ \text{εν σειρά} \end{array} \right) \quad (26.10)$$

Μπορούμε να επαναλάβουμε την ίδια ανάλυση για τρεις ή περισσότερους πυκνωτές που είναι συνδεδεμένοι εν σειρά. Βρίσκουμε λοιπόν ότι η ισοδύναμη χωρητικότητα είναι

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad \left(\begin{array}{l} \text{συνδεσμολογία} \\ \text{εν σειρά} \end{array} \right) \quad (26.11)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι όταν οι πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι εν σειρά, η ισοδύναμη χωρητικότητα είναι πάντοτε μικρότερη από τη χωρητικότητα οποιουδήποτε πυκνωτή της σειράς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26.4 Ισοδύναμη χωρητικότητα

Υπολογίστε την ισοδύναμη χωρητικότητα ανάμεσα στα σημεία a και b για τους διάφορους συνδυασμούς πυκνωτών που βλέπουμε στα κυκλώματα του Σχήματος 26.9a. Όλες οι χωρητικότητες είναι σε μF .

Λύση Ανάγουμε τους συνδυασμούς σε απλούστερους, χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις 26.8 και 26.11, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 26.9. Συνδυάζουμε τους πυκνωτές των $1 \mu\text{F}$ και $3 \mu\text{F}$ που είναι συνδεδεμένοι παράλληλα σύμφωνα με τη σχέση $C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$. Η ισοδύναμη χωρητικότητά τους είναι $4 \mu\text{F}$. Παρομοίως, και οι πυκνωτές των $2 \mu\text{F}$ και $6 \mu\text{F}$ είναι συνδεδεμένοι παράλληλα, οπότε η ισοδύναμη χωρητικότητά τους είναι $8 \mu\text{F}$. Βλέπουμε λοιπόν ότι ο επάνω κλάδος του

κυκλώματος του Σχήματος 26.9b αποτελείται από δύο ίσους πυκνωτές των $4 \mu\text{F}$ που είναι συνδεδεμένοι εν σειρά. Η ισοδύναμη χωρητικότητά τους βρίσκεται από τη σχέση

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4 \mu\text{F}} + \frac{1}{4 \mu\text{F}} = \frac{1}{2 \mu\text{F}}$$

$$C_{\text{eq}} = 2 \mu\text{F}$$

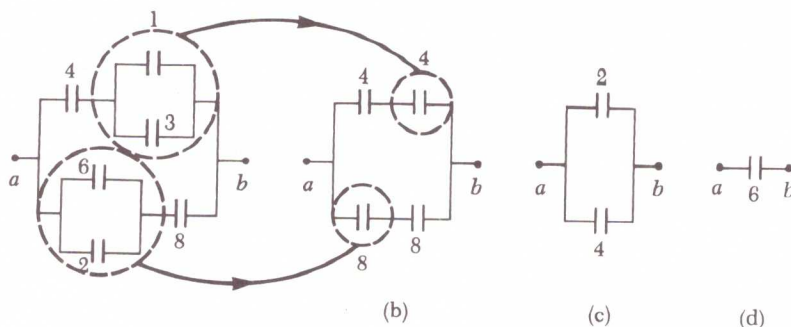
Παρομοίως, ο κάτω κλάδος του κυκλώματος του Σχήματος 26.9b αποτελείται από δύο πυκνωτές των $8 \mu\text{F}$ ο καθένας, που είναι συνδεδεμένοι εν σειρά. Η ισοδύναμη χωρητικότητά τους είναι $4 \mu\text{F}$. Τέλος, οι δύο πυκνωτές των $2 \mu\text{F}$ και $4 \mu\text{F}$ του Σχήματος 26.9c είναι συνδεδεμένοι παράλληλα και, συνεπώς, έχουν ισοδύναμη χωρητικότητα $6 \mu\text{F}$. Άρα η ισοδύναμη χωρητικότητα του

αρχικού κυκλώματος τού Σχήματος 26.9a είναι $6 \mu\text{F}$, και το βλέπουμε στο Σχήμα 26.9b.

Άσκηση 3 Θεωρήστε ότι τρεις πυκνωτές έχουν χωρητικότητα $3 \mu\text{F}$, $6 \mu\text{F}$ και $12 \mu\text{F}$. Υπολογίστε την ισοδύναμη

χωρητικότητα τους εάν είναι συνδεδεμένοι (a) παράλληλα (b) εν σειρά.

Απάντηση (a) $21 \mu\text{F}$, (b) $1.71 \mu\text{F}$.



Σχήμα 26.9 (Παράδειγμα 26.4). Για να βρούμε την ισοδύναμη χωρητικότητα των πυκνωτών στο (a) χρησιμοποιούμε τους κανόνες παράλληλης ή εν σειρά συνδεσμολογίας και έτσι ανάγουμε το σύστημα ακολουθώντας τα δήματα που υποδεικνύονται στα (b), (c) και (d).

26.4 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΑΠΟΘΗΚΕΥΜΕΝΗ ΣΕ ΕΝΑΝ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟ ΠΥΚΝΩΤΗ

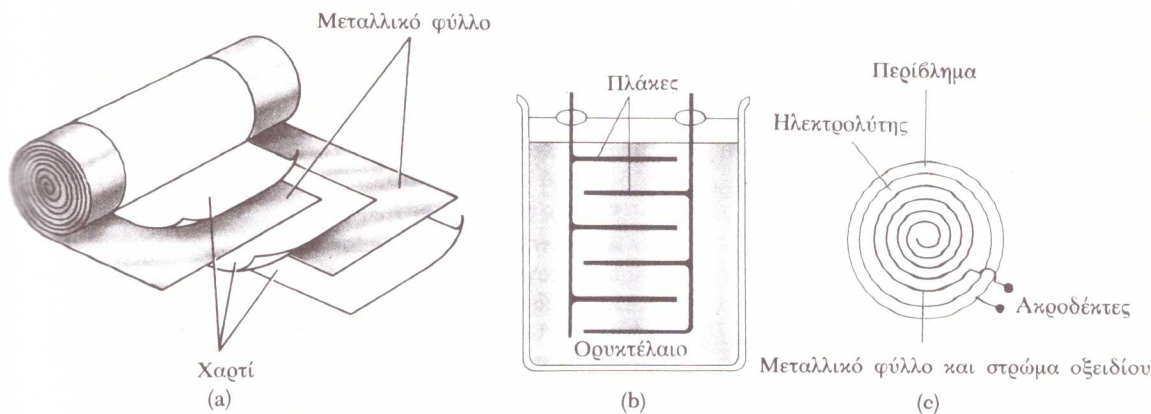
Καθένας που έχει ασχοληθεί με ηλεκτρονικά κυκλώματα μπορεί να εβανώσει ότι οι πυκνωτές μπορούν να παίξουν τον ρόλο αποθήκη ενέργειας. Εάν ενώσουμε τους δύο οπλισμούς ενός φορτισμένου πυκνωτή έναν αγωγό, τότε θα μεταφερθούν φορτία από τον έναν οπλισμό στον άλλον, οπότε οι δύο οπλισμοί πάψουν να είναι φορτισμένοι. Πολλές φορές μπορούμε να δούμε ή να ακούσουμε μια τέτοια αιφνίδια εκφόρτιση πυκνωτή, διότι δημιουργείται σπινθήρας. Εάν αγγίξουμε κατά λάθος οπλισμούς ενός πυκνωτή, τα δάχτυλά μας θα παίξουν τον ρόλο διαδραμάτιζοντας μέσα από τον οποίο θα περάσουν τα φορτία για να εκφορτιστεί ο πυκνωτής. Και τότε θα αισθανθούμε ηλεκτρικό σοκ (δηλαδή θα μάς «χτυπήσει το ρεύμα»). Το πόσο ισχυρό θα είναι το σοκ θα εξαρτηθεί από τη χωρητικότητα του πυκνωτή και από την τάση του. Εάν η τάση είναι υψηλή, όπως λ.χ. σε πυκνωτές των τροφοδοτικών συσκευών τηλεόρασης, μπορεί το σοκ να είναι θανατηφόρο.

Ας θεωρήσουμε ότι ένας επίπεδος πυκνωτής αρχικά δεν είναι φορτισμένος. Έτσι η τάση των οπλισμών του είναι μηδενική. Κατόπιν τον συνδέουμε με μια μπαταρία και αποκτά μέγιστο φορτίο Q . Υποθέτουμε ότι ο πυκνωτής φορτίζεται με πολύ αργό ρυθμό, ούτως ώστε αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα σαν να είναι πρόβλημα ηλεκτροστατικής. Η τελική τάση ανάμεσα στους οπλισμούς είναι $V = Q/C$. Αφού λοιπόν αρχικά η τάση ήταν μηδενική, η τάση κατά τη διαδικασία της φόρτισης είναι $V/2 = Q/2C$. Μπορούμε συμπεράνουμε, συνεπώς, ότι το έργο που καταναλώνεται για να φορτιστεί ο πυκνωτής είναι $W = QV/2 = Q^2/2C$. Μολονότι το αποτέλεσμα αυτό σωστό, θα τό αποδείξουμε πιο αυστηρά τώρα.

Ας υποθέσουμε ότι σε κάποια στιγμή κατά τη διαδικασία της φόρτισης του πυκνωτή είναι q . Την ίδια στιγμή, η διαφορά δυναμικού του πυκνωτή είναι $V = q/C$. Το έργο που απαιτείται⁽²⁾ για να μεταφέρουμε φορτίο dq από τον οπλισμό που έχει φορτίο $-q$ στον οπλισμό που έχει φορτίο q (και που έχει το υψηλότερο δυναμικό) είναι

$$dW = V dq = \frac{q}{C} dq$$

⁽²⁾ Το μηχανικό ανάλογο της διαδικασίας που περιγράφουμε είναι η ανύψωση μιας μάζας σε βαρυτικό



Σχήμα 26.12 Τρία είδη πυκνωτών τού εμπορίου. (α) Οι οπλισμοί τού πυκνωτή χωρίζονται με ένα φύλλο χαρτιού, κατόπιν τυλίγονται σχηματίζοντας κύλινδρο. (β) Οι πυκνωτές υψηλής τάσης αποτελούνται από πολλούς οπλισμούς που δρύνονται μέσα σε λουτρό ελαίου. (γ) Ηλεκτρολυτικός πυκνωτής.

το πλην, δηλαδή). Και τούτο διότι εάν συνδέσουμε εσφαλμένα τους πόλους, το στρώμα τού οξειδίου θα καταστραφεί και ο πυκνωτής θα άγει αντί να αποθηκεύει το ηλεκτρικό φορτίο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26.6 Πυκνωτής χαρτιού (δηλαδή παραγεμιστός με χαρτί)

Ένας επίπεδος πυκνωτής έχει διαστάσεις 2 cm × 3 cm. Οι οπλισμοί χωρίζονται με χαρτί πάχους 1 mm. (α) Υπολογίστε τη χωρητικότητά του

Λύση Από τον Πίνακα 26.1 ξέρουμε ότι $\kappa = 3.7$ για το χαρτί. Έτσι

$$C = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d} = 3.7 \left(8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \right) \left(\frac{6 \times 10^{-4} m^2}{1 \times 10^{-3} m} \right) = 19.6 \times 10^{-12} F = 19.6 pF$$

(β) Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο που μπορούμε να θέσουμε στον πυκνωτή αυτόν;

Λύση Από τον Πίνακα 26.1 βλέπουμε ότι η διηλεκτρική αντοχή τού χαρτιού είναι $16 \times 10^6 V/m$. Εφόσον το πάχος τού χαρτιού είναι 1 mm, η μέγιστη τάση που αντέχει το χαρτί, προτού αρχίσουν οι εκκενώσεις διά μέσου του, είναι

$$V_{max} = E_{max} d = \left(16 \times 10^6 \frac{V}{m} \right) (1 \times 10^{-3} m) = 16 \times 10^3 V$$

Το μέγιστο φορτίο είναι λοιπόν

$$Q_{max} = CV_{max} = (19.6 \times 10^{-12} F)(16 \times 10^3 V) = 0.31 \mu C$$

Άσκηση 4 Ποια είναι η μέγιστη ενέργεια που μπορούμε να αποθηκεύσουμε στον πυκνωτή;

Απάντηση $2.5 \times 10^{-3} J$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26.7 Αποθήκευση ηλεκτρικής ενέργειας πριν και μετά από τη χρήση διηλεκτρικού

Χρησιμοποιώντας μπαταρία φορτίζουμε έναν επίπεδο πυκνωτή με φορτίο Q_0 , όπως βλέπουμε στο Σχήμα 26.13a. Αποσυνδέουμε κατόπιν την μπαταρία και εισάγουμε ανάμεσα στους οπλισμούς τού πυκνωτή διηλεκτρικό σταθεράς κ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 26.13b. Βρείτε την ενέργεια που έχει αποθηκευθεί στον πυκνωτή πριν και μετά από την εισαγωγή τού διηλεκτρικού.

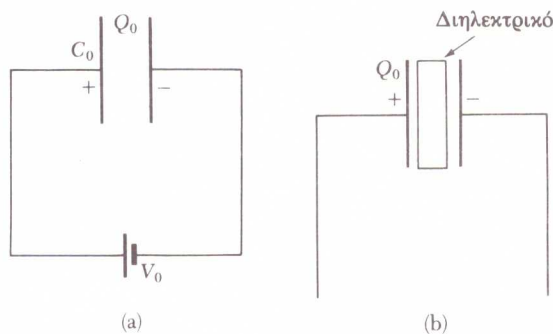
Λύση Η αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή χωρίς διηλεκτρικό είναι

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$

Αφού $V_0 = Q_0/C_0$, ξαναγράφουμε το παραπάνω ως

$$U_0 = \frac{Q_0^2}{2C_0}$$

Αφού αποσυνδεθεί η μπαταρία (και εφόσον δεν υπάρχουν διαρροές) το φορτίο στον πυκνωτή παραμένει σταθερό. Τοποθετούμε το διηλεκτρικό, αλλά και πάλι



Σχήμα 26.13 (Παράδειγμα 26.7).

το φορτίο δεν μεταβάλλεται. Τώρα λοιπόν η αποθηκευμένη ενέργεια με παρουσία του διηλεκτρικού είναι

$$U = \frac{Q_0^2}{2C}$$

Αλλά τώρα, εξαιτίας του διηλεκτρικού, έχει μεταβληθεί η χωρητικότητα, που είναι $C = \kappa C_0$. Έτσι

$$U = \frac{Q_0^2}{2\kappa C_0} = \frac{U_0}{\kappa}$$

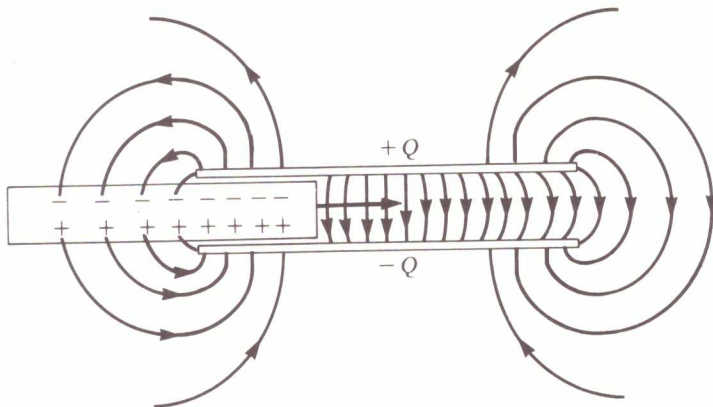
Αφού $\kappa > 1$, η τελική ενέργεια είναι μικρότερη από την αρχική κατά έναν συντελεστή $1/\kappa$. Η ενέργεια που λείπει

έχει καταναλωθεί κατά τη διάρκεια της εισαγωγής του διηλεκτρικού, διότι τα φορτία του πυκνωτή «έλκουν» το διηλεκτρικό και εμείς πρέπει να παραγάγουμε αρνητικό έργο για να μην επιταχυνθεί το διηλεκτρικό καθώς το εισάγουμε στον πυκνωτή. Αυτό το έργο ισούται με τη διαφορά ενέργειας $U - U_0$. Ή, αντίστροφα, το εξωτερικό θετικό έργο που παράγουμε ισούται με $U_0 - U$.

Άσκηση 5 Ας υποθέσουμε ότι χωρίς το διηλεκτρικό, η χωρητικότητα είναι 8.50 pF και ότι ο πυκνωτής έχει συνδεθεί με μπαταρία τάσης 12.0 V. Υπολογίστε τη διαφορά ενέργειας, εάν αποσυνδέσουμε την μπαταρία και εισαγάγουμε ένα κομμάτι πολυεστέρα ($\kappa = 2.56$) ανάμεσα στους οπλισμούς.

Απάντηση 373 pJ.

Όπως είδαμε, η ενέργεια ενός πυκνωτή μειώνεται όταν τοποθετήσουμε διηλεκτρικό ανάμεσα στους οπλισμούς, διότι ο πυκνωτής καταναλώνει έργο πάνω στο διηλεκτρικό. Και τούτο διότι τα φορτία του πυκνωτή έλκουν διηλεκτρικό μέσα στον πυκνωτή. Η έλξη αυτή οφείλεται στο ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο που υπάρχει στα άκρα των οπλισμών του πυκνωτή, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 26.14. Η οριζόντια (όπως κρατάμε το βιβλίο) συνιστώσα του ανομοιογενούς ηλεκτρικού πεδίου στα άκρα των πλακών (οπλισμών) του πυκνωτή δρα πάνω στα φορτία πόλωσης στην επιφάνεια του διηλεκτρικού. Το αποτέλεσμα είναι ότι η συνισταμένη δύναμη είναι οριζόντια και κατευθύνεται προς το εσωτερικό του πυκνωτή.

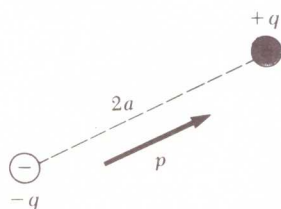


Σχήμα 26.14 Το ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο κοντά στα άκρα επίπεδου πυκνωτή έλκει διηλεκτρικό μέσα στον πυκνωτή. Προσέξτε την επίδραση του πεδίου πάνω στα φορτία πόλωσης του διηλεκτρικού.

* 26.6 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΙΠΟΛΟ ΣΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Στο Παράδειγμα 23.7 περιγράψαμε το ηλεκτρικό δίπολο, που αποτελείται από δύο ίσα αλλά αντίθετα φορτία τα οποία έχουν μεταξύ τους απόσταση $2a$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 26.15. Ορίζουμε ότι η **ροπή ηλεκτρικού διπόλου** διάταξης αυτής είναι το διάνυσμα \mathbf{p} το οποίο έχει μέτρο $2aq$ (το γινόμενο δηλαδή, της απόστασης $2a$ επί το φορτίο q):

$$p \equiv 2aq \quad (2)$$



Σχήμα 26.15 Το ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δύο αλλά αντίθετα φορτία που έχουν μεταξύ τους απόσταση $2a$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τοποθετούμε ένα ηλεκτρικό δίπολο μέσα σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} , όπως φαίνεται στο Σχήμα 26.16, ενώ η

$$\frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\epsilon_0}$$

$$\sigma_i = \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right)\sigma \quad (26.24)$$

Αλλά $\kappa > 1$. Έτσι, λοιπόν, ξέρουμε ότι η επιφανειακή πυκνότητα σ_i του φορτίου πόλωσης είναι *μικρότερη* από αυτήν του ελεύθερου φορτίου σ Λογουχάρα, εάν $\kappa = 3$, βλέπουμε ότι η πυκνότητα του φορτίου πόλωσης στα διηλεκτρικά είναι ίση με τα $2/3$ αυτής των ελεύθερων φορτίων των οπλισμών. Εάν δεν υπάρχει διηλεκτρικό, τότε $\kappa = 1$ και $\sigma_i = 0$, όπως ήταν αναμενόμενο. Αλλά, εάν το διηλεκτρικό αντικατασταθεί με αγωγό, τότε $E = 0$. Και από τη Εξίσωση 26.23 βλέπουμε ότι $E_0 = E_i$, δηλαδή $\sigma_i = \sigma$. Έτσι λοιπόν το φορτίο που επάγεται στην επιφάνεια του αγωγού είναι ίσο και αντίθετο προς το φορτίο των οπλισμών, προκαλώντας με αυτό τον τρόπο μηδενικό πεδίο μέσα στον αγωγό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26.9 Μισογεμισμένος πυκνωτής

Ένας επίπεδος πυκνωτής έχει χωρητικότητα C_0 όταν δεν υπάρχει σ' αυτόν διηλεκτρικό. Τοποθετούμε ανάμεσα στους οπλισμούς του διηλεκτρικό διηλεκτρικής σταθεράς κ και πάχους $d/3$ (βλ. Σχήμα 26.21a). Υπολογίστε τη χωρητικότητά του με παρουσία του διηλεκτρικού.

Λύση Ο επίπεδος πυκνωτής μας τώρα είναι ισοδύναμος με δύο επίπεδους πυκνωτές της ίδιας επιφάνειας A με τον αρχικό συνδεδεμένους εν σειρά. Η απόσταση ανάμεσα στους οπλισμούς του ενός είναι $d/3$ (ο πυκνωτής αυτός είναι γεμάτος με διηλεκτρικό). Η απόσταση ανάμεσα στους οπλισμούς του άλλου είναι $2d/3$ (Σχήμα 26.21b). Αυτό είναι επιτρεπτό, διότι δεν υπάρχει διαφορά δυναμικού ανάμεσα στον κάτω οπλισμό του C_1 και στον επάνω οπλισμό του C_2 ⁽⁴⁾.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 26.3 και 26.15 γράφουμε τις δύο χωρητικότητες ως εξής:

$$C_1 = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d/3} \quad \text{και} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{2d/3}$$

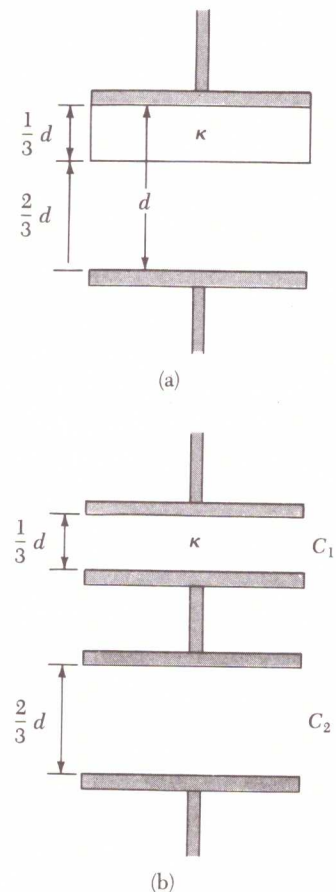
Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 26.10 για την συνδεσμολογία δύο πυκνωτών συνδεδεμένων εν σειρά και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d/3}{\kappa\epsilon_0 A} + \frac{2d/3}{\epsilon_0 A} \\ \frac{1}{C} &= \frac{d}{3\epsilon_0 A} \left(\frac{1}{\kappa} + 2\right) = \frac{d}{3\epsilon_0 A} \left(\frac{1+2\kappa}{\kappa}\right) \\ C &= \left(\frac{3\kappa}{2\kappa+1}\right) \frac{\epsilon_0 A}{d} \end{aligned}$$

⁽⁴⁾ Ισοδύναμο, μπορούμε να φανταστούμε ότι στο κάτω μέρος του διηλεκτρικού, στο Σχήμα 26.21a, υπήρχαν δύο λεπτά μεταλλικά φύλλα, σχεδόν εφραπτόμενα μεταξύ τους, που ήταν ενωμένα με ένα λεπτό σύρμα και τα αποκολλήσαμε τραβώντας τα ώσπου πήραν το Σχήμα 26.21b.

Γνωρίζουμε όμως ότι η χωρητικότητα όταν δεν υπάρχει διηλεκτρικό είναι $C_0 = \epsilon_0 A/d$. Έτσι λοιπόν

$$C = \left(\frac{3\kappa}{2\kappa+1}\right) C_0$$



Σχήμα 26.21 (Παράδειγμα 26.9) Επίπεδος πυκνωτής του οποίου οι οπλισμοί έχουν μεταξύ τους απόσταση d και ο χώρος μεταξύ τους έχει γεμίσει εν μέρει με διηλεκτρικό πάχους $d/3$. (b) Το ισοδύναμο κύκλωμα του πυκνωτή αυτού αποτελείται από δύο πυκνωτές συνδεδεμένους εν σειρά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26.10. Η επίδραση μιας μεταλλικής πλάκας

Οι οπλισμοί ενός επίπεδου πυκνωτή έχουν επιφάνεια A και έχουν μεταξύ τους απόσταση d . Εισάγουμε στο μέσον τής απόστασης των δύο οπλισμών μια αφόρτιστη μεταλλική πλάκα πάχους a , όπως φαίνεται στο Σχήμα 26.22a. Υπολογίστε τη χωρητικότητα τού συστήματος.

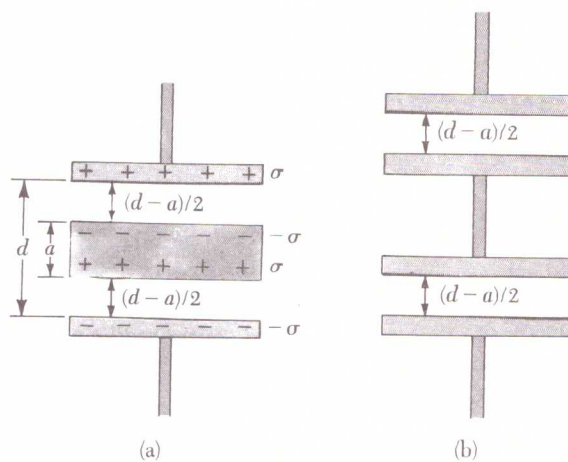
Λύση Δεν πρέπει να μάς διαφεύγει ότι το φορτίο καθενός από τους οπλισμούς τού πυκνωτή επάγει *ίσο* και *αντίθετο* φορτίο στην μεταλλική πλάκα, όπως άλλωστε φαίνεται στο Σχήμα 26.22a. Έτσι, το ολικό φορτίο τής μεταλλικής πλάκας παραμένει μηδενικό και το πεδίο μέσα στην πλάκα παραμένει επίσης μηδενικό. Επομένως, ο πυκνωτής είναι ισοδύναμος με δύο πυκνωτές *εν σειρά*. Η απόσταση ανάμεσα στους οπλισμούς των δύο νέων πυκνωτών είναι $(d - a)/2$, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 26.22b. Συνδέουμε τους δύο πυκνωτές *εν σειρά* και βρίσκουμε

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\frac{\epsilon_0 A}{(d-a)/2}} + \frac{1}{\frac{\epsilon_0 A}{(d-a)/2}}$$

Λύνουμε ως προς C και βρίσκουμε

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d - a}$$

Να σημειωθεί ότι το C τείνει προς το άπειρο καθώς το a τείνει προς το d . Εξηγήστε τους λόγους. Σημειώστε ότι η χωρητικότητα τείνει στο άπειρο καθώς το a τείνει στο d .



Σχήμα 26.22 (Παράδειγμα 26.10) (α) Επίπεδος πυκνωτής, με απόσταση οπλισμών d , γεμισμένος με μεταλλική πλάκα πάχους a . (β) Το ισοδύναμο κύκλωμα τού πυκνωτή αυτού αποτελείται από δύο πυκνωτές που είναι συνδεδεμένοι *εν σειρά* και η απόσταση μεταξύ των οπλισμών τού καθενός είναι $(d - a)/2$.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ένας **πυκνωτής** αποτελείται από δύο αγωγούς φορτισμένους με ίσα αλλά αντίθετα φορτία. Οι αγωγοί βρίσκονται μεταξύ τους σε απόσταση που είναι μικρή σε σύγκριση με τις διαστάσεις τής επιφάνειάς τους και έχουν μεταξύ τους διαφορά δυναμικού (τάση) V . Ορίζουμε ως **χωρητικότητα** C ενός τυχαίου πυκνωτή τον λόγο απόλυτων τιμών τού φορτίου Q , καθενός από τους αγωγούς διά τής διαφοράς δυναμικού V .

$$C \equiv \frac{Q}{V} \tag{26.1}$$

Ορισμός τής χωρητικότητας

Στο SI η μονάδα τής χωρητικότητας είναι το **farad** (F), που ισούται με ένα coulomb διά ενός volt, $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$.

Στον Πίνακα 26.2 θα βρείτε τη χωρητικότητα διαφόρων πυκνωτών. Οι σχέσεις αυτές ισχύουν όταν οι δύο αγωγοί έχουν ανάμεσά τους κενό ή αέρα (οπότε ισχύουν κατά προσέγγιση).

Λέμε ότι δύο ή περισσότεροι πυκνωτές είναι **συνδεδεμένοι παράλληλα** μεταξύ τους όταν όλοι έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς τους. Η ισοδύναμη χωρητικότητα μιας συνδεσμολογίας πυκνωτών *εν παράλληλο* είναι

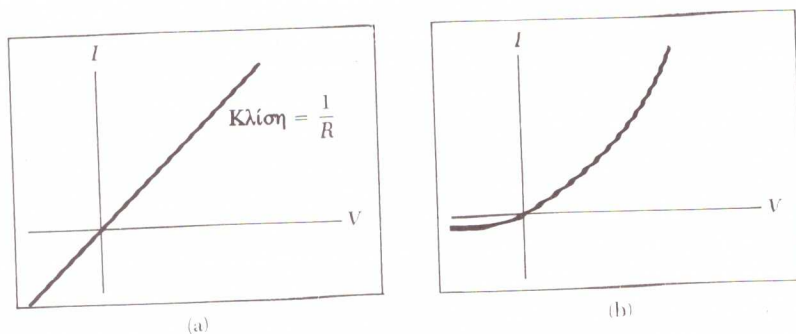
$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \tag{26.8}$$

Παράλληλη συνδεσμολογία

Εάν δύο ή περισσότεροι πυκνωτές είναι **συνδεδεμένοι εν σειρά**, τότε όλοι φέρουν την ίδια ποσότητα φορτίου. Η ισοδύναμη χωρητικότητα μίας συνδεσμολογίας πυκνωτών *εν σειρά* είναι

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \tag{26.11}$$

Συνδεσμολογία εν σειρά



Σχήμα 27.8 (α) Γραφική παράσταση τού ρεύματος, συναρτήσει τής τάσης, για ωμικό υλικό. Είναι ευθεία γραμμή και η κλίση της δίνει την αντίσταση τού αγωγού. (β) Η αντίστοιχη γραφική παράσταση για δίοδο ενός ημιαγωγού. Δεν είναι ευθεία γραμμή, διότι δεν ισχύει ο κανόνας τού Ohm.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 27.2 Αντίσταση αγωγού

Υπολογίστε την αντίσταση ενός κομματιού αλουμινίου μήκους 10 cm και διατομής 10^{-4} m^2 . Επαναλάβετε τον υπολογισμό σας για ένα κομμάτι γυαλιού ειδικής αντίστασης $10^{10} \Omega \cdot \text{m}$.

Λύση Με τη βοήθεια τής Εξίσωσης 27.10 και τού Πίνακα 27.1 μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίσταση τού κομματιού αλουμινίου ως εξής:

$$R = \rho \frac{L}{A} = (2.82 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}) \left(\frac{0.1 \text{ m}}{10^{-4} \text{ m}^2} \right) = 2.82 \times 10^{-5} \Omega$$

Παρομοίως, για το γυαλί βρίσκουμε:

$$R = \rho \frac{L}{A} = (10^{10} \Omega \cdot \text{m}) \left(\frac{0.1 \text{ m}}{10^{-4} \text{ m}^2} \right) = 10^{13} \Omega$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, η αντίσταση τού αλουμινίου είναι πολύ μικρότερη από την αντίσταση τού γυαλιού. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο το αλουμίνιο είναι καλός αγωγός, ενώ το γυαλί είναι καλός μονωτής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 27.3 Η αντίσταση ενός σύρματος nichrome (χρωμονικελίνη)

(α) Υπολογίστε την αντίσταση ανά μονάδα μήκους ενός κομματιού σύρματος χρωμονικελίνη (δηλαδή κράματος νικελίου-χρωμίου) τύπου 22, κυκλικής διατομής και ακτίνας 0.321 mm.

Λύση Η διατομή τού σύρματος αυτού είναι

$$A = \pi r^2 = \pi (0.321 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 3.24 \times 10^{-7} \text{ m}^2$$

Από τον Πίνακα 27.1 βρίσκουμε ότι η ειδική αγωγιμότητα τού χρωμονικελίνη είναι $1.5 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 27.10 για να βρούμε την αντίσταση ανά μονάδα μήκους.

$$\frac{R}{\ell} = \frac{\rho}{A} = \frac{1.5 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}}{3.24 \times 10^{-7} \text{ m}^2} = 4.6 \Omega/\text{m}$$

(β) Τί ρεύμα διαρρέει ένα σύρμα χρωμονικελίνη μήκους 1 m εάν εφαρμόσουμε στα άκρα του τάση 10 V;

Λύση Αφού βρήκαμε ότι η αντίσταση 1 m τού σύρματος αυτού είναι 4.6 Ω , ο νόμος τού Ohm μάς δίνει

$$I = \frac{V}{R} = \frac{10 \text{ V}}{4.6 \Omega} = 2.2 \text{ A}$$

Ας σημειωθεί ότι η ειδική αντίσταση τού σύρματος χρωμονικελίνη είναι 100 περίπου φορές μεγαλύτερη από την ειδική αντίσταση ενός σύρματος χαλκού. Συνεπώς, ένα σύρμα χαλκού τής ίδιας διατομής έχει αντίσταση ανά μονάδα μήκους ίση με 0.052 Ω/m . Για να διαρρέει λοιπόν το ίδιο ρεύμα (2.2 A) το σύρμα χαλκού μήκους 1 m και τής ίδιας ακτίνας διατομής χρειάζεται τάση μόνο 0.11 V.

Λόγω τής υψηλής (για αγωγούς) ειδικής αντίστασής του και τής ανθεκτικότητάς του στην οξείδωση, ο χρωμονικελίνης χρησιμοποιείται ευρύτατα για τη κατασκευή διαφόρων συσκευών, όπως είναι οι φρυγανιές, οι θερμάστρες και τα ηλεκτρικά σίδερα.

Άσκηση 1 Βρείτε την αντίσταση σύρματος χρωμονικελίνης, τύπου 22 και μήκους 6 m. Τί ρεύμα τόν διαρρέει όταν συνδεθεί με πηγή 120 V;

Απάντηση 28 Ω , 4.3 A.

Άσκηση 2 Υπολογίστε την πυκνότητα ρεύματος και τού ηλεκτρικού πεδίου τού σύρματος εάν υποθεθεί ότι αυτό διαρρέεται από ρεύμα 2.2 A.

Απάντηση $6.7 \times 10^6 \text{ A/m}^2$, 10 N/C.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 27.4 Αντίσταση ενός ομοαξονικού σωλήνα □

Το κενό ανάμεσα σε δύο ομοαξονικούς χάλκινους σωλήνες έχει πληρωθεί με πυρίτιο, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 27.9a. Ο εσωτερικός σωλήνας έχει ακτίνα $a = 0.500 \text{ cm}$ και ο εξωτερικός $b = 1.75 \text{ cm}$. Το μήκος καθενός είναι $L = 15.0 \text{ cm}$. Υπολογίστε την ολική αντίσταση τού πυρίτιου ανάμεσα στους δύο σωλήνες.

Λύση Επειδή η ειδική αντίσταση τού χαλκού είναι πολύ μικρότερη από την ειδική αντίσταση τού πυρίτιου μπορούμε να αγνοήσουμε την αντίσταση τών χάλκινων σωλήνων. Θα χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 27.10

διαφορική μορφή, δηλαδή $dR = \rho dl/A$, όπου dR είναι η αντίσταση ενός τμήματος του αγωγού πάχους dl και επιφάνειας A . Το στοιχειώδες τμήμα που λάβαμε εδώ είναι κοίλος κύλινδρος πάχους dr και μήκους L , όπως βλέπουμε στο Σχήμα 27.9b. Κάθε ρεύμα που ρέει από τον εσωτερικό χάλκινο σωλήνα προς τον εξωτερικό θα διέλθει αναγκαστικά διά μέσου του εκάστοτε στοιχειώδους τμήματος επιφάνειας $A = 2\pi rL$ (όπου αγνοούμε την επιφάνεια των βάσεων του κυλινδρικού στοιχειώδους τμήματος). Μπορούμε λοιπόν να εκφράσουμε την αντίσταση του κοίλου κυλινδρικού τμήματος ως

$$dR = \frac{\rho}{2\pi rL} dr$$

Εμείς όμως θέλουμε να βρούμε την ολική αντίσταση του πυριτίου. Και γι' αυτό πρέπει να ολοκληρώσουμε την

τελευταία σχέση πάνω στο dr από $r = a$ έως $r = b$. Έτσι

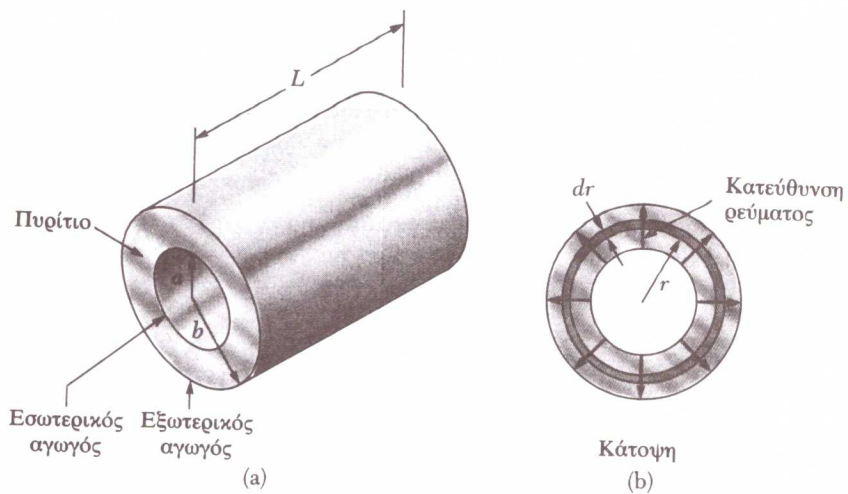
$$R = \int_a^b dR = \frac{\rho}{2\pi L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Θέτουμε στην εξίσωση τα δεδομένα του προβλήματος και επειδή η ειδική αντίσταση του πυριτίου είναι $\rho = 640 \Omega \cdot m$ (βλ. Πίνακα 27.1), βρίσκουμε

$$R = \frac{640 \Omega \cdot m}{2\pi(0.150 m)} \ln\left(\frac{1.75 cm}{0.500 cm}\right) = 851 \Omega$$

Άσκηση 3 Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει το πυρίτιο εάν εφαρμόσουμε τάση 12 V ανάμεσα στον εσωτερικό και εξωτερικό σωλήνα.

Απάντηση 14.1 mA.



Σχήμα 27.9 (Παράδειγμα 27.4).

27.4 Η ΕΙΔΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Η ειδική αντίσταση του υλικού ενός αγωγού εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, ένας από τους οποίους είναι η θερμοκρασία. Στα περισσότερα μέταλλα η ειδική αντίσταση αυξάνεται όταν αυξάνεται η θερμοκρασία. Για μια περιορισμένη περιοχή θερμοκρασιών, η ειδική αντίσταση μεταβάλλεται συναρτήσει της θερμοκρασίας σύμφωνα με τη σχέση

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \tag{27.11}$$

Εξάρτηση της ρ από τη θερμοκρασία

όπου ρ είναι η ειδική αντίσταση σε θερμοκρασία T (σε $^{\circ}C$), ρ_0 είναι η ειδική αντίσταση μετρούμενη σε μια θερμοκρασία αναφοράς T_0 , συνήθως στους $20^{\circ}C$ και α είναι ο λεγόμενος **θερμικός συντελεστής ειδικής αντίστασης**. Εάν χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 27.11, μπορούμε να ξαναγράψουμε τον θερμικό συντελεστή αντίστασης ως

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta\rho}{\Delta T} \tag{27.12}$$

Θερμικός συντελεστής ειδικής αντίστασης

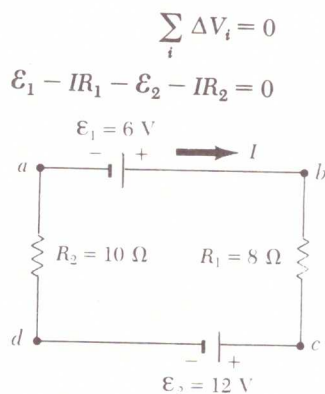
πρόσημα. Αποστηθήστε τους τέσσερις μνημονικούς κανόνες τους οποίους σας δώσαμε και που απεικονίζονται στο Σχήμα 28.10.

4. Τέλος, πρέπει να λύσετε το σύστημα των ανεξάρτητων εξισώσεων που έχετε γράψει. Προσέξτε να μην κάνετε λάθη άλγεβρας. Τέλος, να ελέγχετε πάντοτε τα αποτελέσματα που θα βρείτε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 28.6 Κύκλωμα ενός μόνον δρόχου (ή απλό κύκλωμα)

Το κύκλωμα ενός μόνον δρόχου αποτελείται από δύο εξωτερικές αντιστάσεις και δύο πηγές ΗΕΔ, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 28.11. Μπορούμε να αγνοήσουμε τις εσωτερικές αντιστάσεις των μπαταριών. (α) Υπολογίστε το ρεύμα του κυκλώματος.

Το απλό αυτό κύκλωμα δεν έχει κόμβους. Έτσι το ίδιο ρεύμα διαρρέει όλα τα στοιχεία του. Ας υποθέσουμε ότι το ρεύμα έχει κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση των δεικτών του ρολογιού, όπως στο Σχήμα 28.11. Αρχίζουμε να κινούμαστε γύρω-γύρω στο κύκλωμα κατά την κατεύθυνση των δεικτών του ρολογιού. Ξεκινάμε από το σημείο *a*. Βλέπουμε ότι από το *a* στο *b* έχουμε αύξηση του δυναμικού κατά $+E_1$, από το *b* στο *c* έχουμε μείωση του δυναμικού κατά $-IR_1$, από το *c* στο *d* έχουμε επίσης μείωση κατά $-E_2$ και από το *d* στο *a* και άλλη μείωση κατά $-IR_2$. Εφαρμόζουμε τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff και παίρνουμε



Σχήμα 28.11 (Παράδειγμα 28.6) Κύκλωμα στο οποίο δύο μπαταρίες και δύο αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες εν σειρά. Οι πολικότητες των δύο μπαταριών είναι συνδεδεμένες αντίθετα από το σύνθημα (δηλαδή θετικός πόλος με θετικό και αρνητικός με αρνητικό).

Λύνουμε ως προς I χρησιμοποιώντας τα αριθμητικά δεδομένα του Σχήματος 28.11 και βρίσκουμε

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \text{ V} - 12 \text{ V}}{8 \Omega + 10 \Omega} = -\frac{1}{3} \text{ A}$$

Το αρνητικό πρόσημο στο ρεύμα I σημαίνει ότι το ρεύμα έχει κατεύθυνση αντίθετη προς την κατεύθυνση που υποθέσαμε αρχικά, δηλαδή το ρεύμα κατευθύνεται αντίθετα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

(β) Πόση ισχύς καταναλώνεται στη κάθε αντίσταση;

$$P_1 = I^2 R_1 = \left(\frac{1}{3} \text{ A}\right)^2 (8 \Omega) = \frac{8}{9} \text{ W}$$

$$P_2 = I^2 R_2 = \left(\frac{1}{3} \text{ A}\right)^2 (10 \Omega) = \frac{10}{9} \text{ W}$$

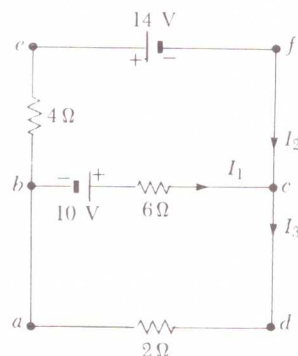
Έτσι, η ολική κατανάλωση ισχύος στις δύο αντιστάσεις είναι $P_1 + P_2 = 2 \text{ W}$. Ας σημειωθεί ότι η μπαταρία των 12 V παρέχει ισχύ ίση με $E_2 = 4 \text{ W}$. Το μισό της ισχύος αυτής καταναλώνεται από τις δύο αντιστάσεις ως θερμότητα Joule, ενώ το άλλο μισό καταναλώνεται από την μπαταρία των 6 V, η οποία φορτίζεται από την μπαταρία των 12 V. Εάν είχαμε συμπεριλάβει τις εσωτερικές αντιστάσεις των δύο μπαταριών, θα βλέπαμε ότι ένα μέρος της ισχύος θα καταναλωνόταν ως θερμότητα από τις μπαταρίες. Έτσι θα απέμενε λιγότερη ισχύς για τη φόρτιση της μπαταρίας των 6 V.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 28.7 Εφαρμογή των κανόνων του Kirchhoff

Βρείτε τα ρεύματα I_1 , I_2 και I_3 του κυκλώματος του Σχήματος 28.12.

Λύση Επιλέγουμε τις κατευθύνσεις των ρευμάτων όπως είναι σημειωμένες στο Σχήμα 28.12. Εφαρμόζουμε τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο *c*

$$(1) \quad I_1 + I_2 = I_3$$



Σχήμα 28.12 (Παράδειγμα 28.7) Κύκλωμα τριών δρόχων.

Στο κύκλωμά μας υπάρχουν τρεις δρόχοι, οι *abcd*, *befcb* και *aefda* (ο τελευταίος είναι ο εξωτερικός δρόχος). Χρειαζόμαστε όμως δύο μόνο εξισώσεις, που θα λύσουμε μαζί με την (1) για να βρούμε τα τρία ρεύματα. Ο τρίτος δρόχος δεν θα μάς δώσει καμιά καινούργια πληροφορία. Εφαρμόζουμε τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στους δρόχους *abcd* και *befcb*, κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού και έτσι βρίσκουμε:

$$(2) \text{ δρόχος } abcd: 10 \text{ V} - (6 \Omega)I_1 - (2 \Omega)I_3 = 0$$

$$(3) \text{ δρόχος } befcb: -14 \text{ V} - 10 \text{ V} + (6 \Omega)I_1 - (4 \Omega)I_2 = 0$$

Να σημειωθεί ότι στον βρόχο *befcb* δάζουμε θετικό πρόσημο πριν από τη διαφορά δυναμικού, όταν περνούμε την αντίσταση των 6Ω , διότι η κατεύθυνση του ρεύματος είναι αντίθετη προς την κατεύθυνση με την οποία διατρέχουμε τον βρόχο αυτό. Εάν εφαρμόσουμε τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στον εξωτερικό βρόχο *aefda*, βρίσκουμε $-14 = 2I_3 + 4I_2$, που είναι το άθροισμα των Εξισώσεων (2) και (3). Δεν υπάρχει, δηλαδή, νέα πληροφορία. Οι Εξισώσεις (1), (2) και (3) είναι τρεις ανεξάρτητες γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους. Προχωρούμε λοιπόν στη λύση του συστήματος. Θέτουμε την (1) στη (2) και παίρνουμε

$$(4) \quad 10 - 6I_1 - 2(I_1 + I_2) = 0$$

$$10 = 8I_1 + 2I_2$$

Διαιρούμε τα δύο σκέλη της (3) διά του 2 και κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων, οπότε έχουμε

$$(5) \quad -12 = -3I_1 + 2I_2$$

Απαλείφουμε το I_2 αφαιρώντας την (5) από την (4). Έτσι

$$22 = 11I_1$$

$$I_1 = 2 \text{ A}$$

Θέτουμε αυτή την τιμή του I_1 στην (5) και βρίσκουμε για το I_2 :

$$2I_2 = 3I_1 - 12 = 3(2) - 12 = -6$$

$$I_2 = -3 \text{ A}$$

Τέλος, $I_3 = I_1 + I_2 = -1 \text{ A}$. Οι τιμές των ρευμάτων, λοιπόν, είναι:

$$I_1 = 2 \text{ A} \quad I_2 = -3 \text{ A} \quad I_3 = -1 \text{ A}$$

Τα αρνητικά πρόσημα των I_2 και I_3 σημαίνουν ότι είχαμε επιλέξει εσφαλμένα τις κατευθύνσεις για τα I_2 και I_3 . Οι αριθμητικές τιμές όμως είναι σωστές.

Άσκηση 2 Βρείτε τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα σημεία *b* και *c*.

Απάντηση $V_b - V_c = 2 \text{ V}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 28.8 Κύκλωμα πολλών βρόχων (ή σύνθετο κύκλωμα)

Το κύκλωμα του Σχήματος 28.13 περιέχει τρεις μπαταρίες, τρεις αντιστάσεις και έναν πυκνωτή. (α) Θεωρώντας ότι οι τιμές των ρευμάτων έχουν σταθεροποιηθεί, βρείτε τα άγνωστα ρεύματα.

Πρώτα από όλα να σημειωθεί ότι σε συνθήκες σταθερής κατάστασης, αφού υπάρχει πυκνωτής, είναι σαν να υπάρχει ανοιχτός διακόπτης και, συνεπώς, το τμήμα αυτό του κυκλώματος (το *ghab*) δεν διαρρέεται από ρεύμα. Άρα $I_{gf} = I_1$. Εφαρμόζουμε τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο *c* και παίρνουμε

$$(1) \quad I_1 + I_2 = I_3$$

Κατόπιν εφαρμόζουμε τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στους βρόχους *defcd* και *efgbc*:

$$(2) \text{ βρόχος } defcd: 4 \text{ V} - (3 \Omega)I_2 - (5 \Omega)I_3 = 0$$

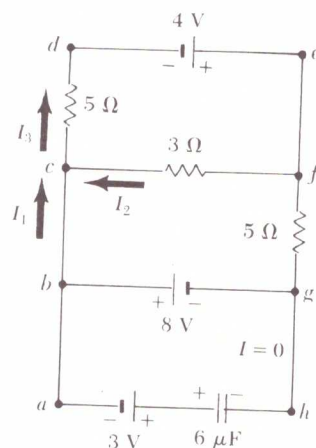
$$(3) \text{ βρόχος } efgbc: 8 \text{ V} - (5 \Omega)I_1 + (3 \Omega)I_2 = 0$$

Από την (1) βλέπουμε ότι $I_1 = I_3 - I_2$. Θέτουμε το αποτέλεσμα αυτό στην (3) και βρίσκουμε

$$(4) \quad 8 \text{ V} - (5 \Omega)I_3 + (8 \Omega)I_2 = 0$$

Αφαιρούμε την (4) από την (2), απαλείφοντας έτσι το I_3 , και βρίσκουμε

$$I_2 = -\frac{4}{11} \text{ A} = -0.364 \text{ A}$$



Σχήμα 28.13 (Παράδειγμα 28.8) Κύκλωμα πολλών βρόχων. Να σημειωθεί ότι ο κανόνας βρόχου του Kirchhoff εφαρμόζεται σε οποιονδήποτε κλειστό βρόχο, ακόμη και αν αυτός έχει πυκνωτή.

Αφού βρήκαμε αρνητική τιμή για το I_2 , συμπεραίνουμε ότι το I_2 κατευθύνεται από το *c* προς το *f* διά μέσω της αντίστασης των 3Ω . Θέτουμε την τιμή αυτή του I_2 στην (3) και στην (1) και βρίσκουμε τα I_1 και I_3 :

$$I_1 = 1.38 \text{ A} \quad I_3 = 1.02 \text{ A}$$

(b) Ποιο είναι το φορτίο του πυκνωτή;

Εφαρμόζουμε τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff σε κάθε βρόχο που περιέχει τον πυκνωτή, λ.χ. τον *abgha*, και βρίσκουμε την διαφορά δυναμικού V_c ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή:

$$-8 \text{ V} + V_c - 3 \text{ V} = 0$$

$$V_c = 11.0 \text{ V}$$

Αλλά $Q = CV_c$. Έτσι το φορτίο του πυκνωτή είναι

$$Q = (6 \mu\text{F})(11.0 \text{ V}) = 66.0 \mu\text{C}$$

Γιατί ο αριστερός οπλισμός του πυκνωτή είναι θετικά φορτισμένος;

Άσκηση 3 Υπολογίστε εκ νέου την τάση του πυκνωτή χρησιμοποιώντας τον εξωτερικό βρόχο.

Απάντηση 11.0 V .

η διαφορά δυναμικού, IR , ανάμεσα στα άκρα της αντίστασης ισούται με τη διαφορά δυναμικού, q/C , ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή:

$$IR = \frac{q}{C} \quad (28.15)$$

Το ρεύμα του κυκλώματος όμως πρέπει να είναι ίσο με τον ρυθμό μείωσης του φορτίου του πυκνωτή. Δηλαδή $I = -dq/dt$. Έτσι η Εξίσωση 28.15 γίνεται

$$\begin{aligned} -R \frac{dq}{dt} &= \frac{q}{C} \\ \frac{dq}{q} &= -\frac{1}{RC} dt \end{aligned} \quad (28.16)$$

Ολοκληρώνουμε τη σχέση αυτή και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι κατά τη στιγμή $t = 0$ το $q = Q$:

$$\begin{aligned} \int_Q^q \frac{dq}{q} &= -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \\ \ln\left(\frac{q}{Q}\right) &= -\frac{t}{RC} \end{aligned}$$

Το ρεύμα συναρτήσει του χρόνου για αποφορτιζόμενο πυκνωτή

$$q(t) = Q e^{-t/RC} \quad (28.17)$$

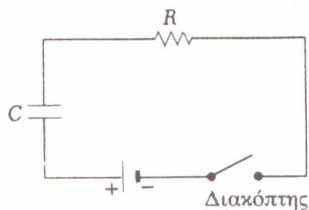
Παραγωγίζουμε την Εξίσωση 28.17 ως προς τον χρόνο και έτσι βρίσκουμε το ρεύμα συναρτήσει του χρόνου

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q}{RC} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \quad (28.18)$$

όπου $I_0 = Q/RC$ είναι το αρχικό ρεύμα. Βλέπουμε λοιπόν ότι το φορτίο του πυκνωτή καθώς και το ρεύμα του κυκλώματος φθίνουν εκθετικά με ρυθμό που χαρακτηρίζεται από τη σταθερά χρόνου $\tau = RC$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 28.9 Φόρτιση πυκνωτή σε κύκλωμα RC

Ένας αφόρτιστος πυκνωτής και μια αντίσταση συνδέονται εν σειρά με μια μπαταρία, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 28.17. Μάς δίνονται: $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, $C = 5 \mu\text{F}$ και $R = 8 \times 10^5 \Omega$. Υπολογίστε τη σταθερά χρόνου του κυκλώματος, το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή, το μέγιστο ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα, καθώς και το φορτίο και το ρεύμα συναρτήσει του χρόνου.



Σχήμα 28.17 (Παράδειγμα 28.9) Ο διακόπτης αυτού του κυκλώματος RC εν σειρά κλείνει κατά τη στιγμή $t = 0$.

Λύση Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι $\tau = RC = (8 \times 10^5 \Omega)(5 \times 10^{-6} \text{ F}) = 4 \text{ s}$. Το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή είναι $Q = C\mathcal{E} = (5 \times 10^{-6} \text{ F})(12 \text{ V}) = 60 \mu\text{C}$. Το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα είναι $I_0 = \mathcal{E}/R = (12 \text{ V})(8 \times 10^5 \Omega) = 15 \mu\text{A}$. Χρησιμοποιούμε αυτές τις τιμές καθώς και τις Εξισώσεις 28.13 και 28.14 και βρίσκουμε ότι

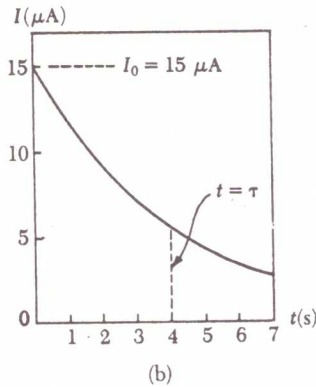
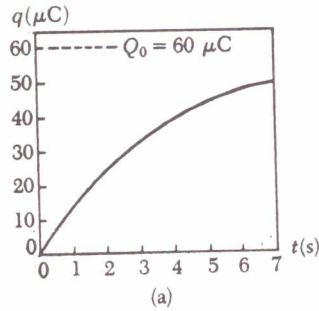
$$q(t) = 60[1 - e^{-t/4}] \mu\text{C}$$

$$I(t) = 15 e^{-t/4} \mu\text{A}$$

Στο Σχήμα 28.18 υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις των $q(t)$ και $I(t)$.

Άσκηση 4 Υπολογίστε το φορτίο του πυκνωτή και το ρεύμα του κυκλώματος μετά την πάροδο μιας σταθεράς χρόνου.

Απάντηση $37.9 \mu\text{C}$, $5.52 \mu\text{A}$.



Σχήμα 28.18 (Παράδειγμα 28.9) Γραφική παράσταση (α) τού φορτίου ως προς τον χρόνο και (β) τού ρεύματος ως προς τον χρόνο για το κύκλωμα RC τού Σχήματος 28.17, όπου $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, $R = 8 \times 10^5 \Omega$ και $C = 5 \mu\text{F}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 28.10 Εκφόρτιση ενός πυκνωτή σε κύκλωμα RC □

Θεωρήστε ότι ο πυκνωτής C εκφορτίζεται διά μέσου τής αντίστασης R , όπως φαίνεται στο Σχήμα 28.16. (α) Πόσες σταθερές χρόνου θα περάσουν ωσότου το φορτίο τού πυκνωτή ελαττωθεί στο ένα τέταρτο τής αρχικής τιμής;

Λύση Γνωρίζουμε ότι το φορτίο τού πυκνωτή εξαρτάται από τον χρόνο, σύμφωνα με την Εξίσωση 28.17

$$q(t) = Qe^{-t/RC}$$

όπου Q είναι το αρχικό φορτίο τού πυκνωτή. Για να βρούμε τον χρόνο που παρέρχεται ωσότου το φορτίο q μειωθεί στο ένα τέταρτο τής αρχικής τιμής, θέτουμε $q(t) = Q/4$ στην προηγούμενη σχέση και λύνουμε ως προς t :

$$\frac{1}{4}Q = Qe^{-t/RC}$$

ή

$$\frac{1}{4} = e^{-t/RC}$$

παίρνουμε τους φυσικούς λογαρίθμους τών δύο μελών

$$-\ln 4 = -\frac{t}{RC}$$

ή

$$t = RC \ln 4 = 1.39RC$$

(β) Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή

ελαττώνεται καθώς ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Σε πόσο χρόνο (υπολογισμένο σε σταθερές χρόνου) θα μειωθεί η αποθηκευμένη ενέργεια στο ένα τέταρτο τής αρχικής τής τιμής;

Λύση Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις 26.12 και 28.17 μπορούμε να γράψουμε ότι η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή συναρτήσει τού χρόνου είναι

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} e^{-2t/RC} = U_0 e^{-2t/RC}$$

όπου U_0 είναι η ενέργεια που είχε αποθηκευθεί αρχικά στον πυκνωτή. Όπως κάναμε και στο μέρος (α) τού παραδείγματος, θέτουμε $U = U_0/4$ και λύνουμε ως προς t :

$$\frac{1}{4}U_0 = U_0 e^{-2t/RC}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-2t/RC}$$

Παίρνουμε πάλι τους φυσικούς λογαρίθμους και τών δύο μερών τής εξίσωσης και λύνοντας ως προς t βρίσκουμε:

$$t = \frac{1}{2}RC \ln 4 = 0.693RC$$

Άσκηση 5 Μετά από πόσες σταθερές χρόνου το ρεύμα τού κυκλώματος RC θα μειωθεί στο μισό τής αρχικής του τιμής;

Απάντηση $0.693RC$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 28.11 Θερμικές απώλειες αντίστασης

Ένας πυκνωτής $5 \mu\text{F}$ φορτίζεται σε διαφορά δυναμικού 800 V και κατόπιν εκφορτίζεται διά μέσου μιας αντίστασης τών $25 \text{ k}\Omega$, όπως στο Σχήμα 28.16. Πόση ενέργεια «χάνεται» ωσότου εκφορτιστεί πλήρως ο πυκνωτής θερμαίνοντας την αντίσταση;

Λύση Θα λύσουμε το πρόβλημα με δύο τρόπους. Η πρώτη μέθοδος είναι αρκετά απλή. Παρατηρούμε ότι η αρχική ενέργεια τού συστήματος ισούται με την ενέργεια $CE^2/2$ που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή. Όταν εκφορτιστεί ο πυκνωτής, τότε δεν έχει πια καθόλου ενέργεια. Γνωρίζουμε όμως ότι η ενέργεια διατηρείται. Έτσι όλη η ενέργεια που είχε αρχικά αποθηκευθεί στον πυκνωτή μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια, που εκλύεται διά μέσου τής αντίστασης. Χρησιμοποιούμε τις δεδομένες τιμές τών C και \mathcal{E} και βρίσκουμε

$$\text{Ενέργεια} = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}(5 \times 10^{-6} \text{ F})(800 \text{ V})^2 = 1.60 \text{ J}$$

Η δεύτερη μέθοδος είναι λίγο πιο δύσκολη, αλλά πιο διδακτική. Γνωρίζουμε ότι, καθώς ο πυκνωτής εκφορτίζεται διά μέσου τής αντίστασης, ο ρυθμός με τον οποίο «χάνεται» η ενέργεια (ή παράγεται θερμότητα) στην αντίσταση είναι RI^2 , όπου I είναι η στιγμιαία τιμή τού ρεύματος που μάς τήν δίνει η Εξίσωση 28.18. Γνωρίζουμε ότι η ισχύς είναι ίση προς τον ρυθμό μεταβολής τής ενέργειας. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ενέργεια που καταναλώνεται ως θερμότητα στην αντίσταση ισούται με το ως προς τον χρόνο ολοκλήρωμα τού $RI^2 dt$. Δηλαδή

$$\text{Ενέργεια} = \int_0^{\infty} RI^2 dt = \int_0^{\infty} R(I_0 e^{-t/RC})^2 dt$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η αρχική τιμή του ρεύματος $I_0 = \mathcal{E}/R$ και ότι η μόνη μεταβλητή που υπάρχει είναι ο χρόνος t . Έτσι υπολογίζουμε ότι

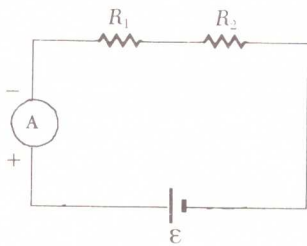
$$\text{Ενέργεια} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/RC} dt$$

Το ολοκλήρωμα ισούται με $RC/2$. Έτσι βρίσκουμε ότι

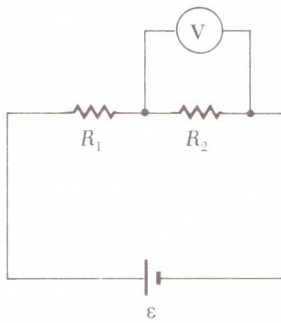
$$\text{Ενέργεια} = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με το αποτέλεσμα που ήδη βρήκαμε με την πρώτη μέθοδο. Να σημειωθεί όμως ότι η δεύτερη αυτή μέθοδος μάς δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την απώλεια θερμικής ενέργειας για οποιαδήποτε χρονική στιγμή, εάν αντικαταστήσουμε το άνω όριο του ολοκληρώματος με τη ζητούμενη τιμή του t .

Άσκηση 6 Αποδείξτε ότι η τιμή του παραπάνω ολοκληρώματος είναι $RC/2$.



Σχήμα 28.19 Για να μετρήσουμε το ρεύμα που διαρρέει ένα κύκλωμα, συνδέουμε εν σειρά ένα αμπερόμετρο με την αντίσταση και με την μπαταρία. Ένα ιδανικό αμπερόμετρο έχει μηδενική αντίσταση.



Σχήμα 28.20 Για να μετρήσουμε τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους ακροδέκτες μιας αντίστασης με ένα βολτόμετρο, συνδέουμε το βολτόμετρο παράλληλα με την αντίσταση. Ένα ιδανικό βολτόμετρο έχει άπειρη αντίσταση και η παρουσία του δεν επηρεάζει το κύκλωμα.

* 28.5 ΟΡΓΑΝΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Το αμπερόμετρο

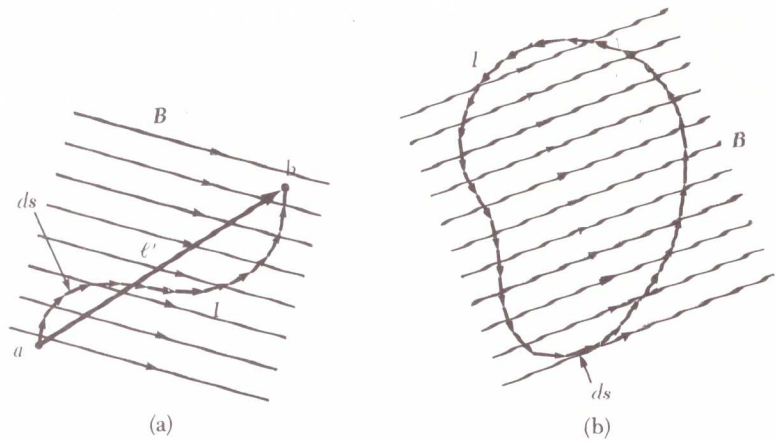
Μια από τις πιο σημαντικές ποσότητες που πρέπει να γνωρίζουμε για ένα ηλεκτρικό κύκλωμα είναι το ρεύμα από το οποίο διαρρέεται. Το όργανο με το οποίο μετράται το ρεύμα λέγεται **αμπερόμετρο** (ammeter). Το ρεύμα που θέλουμε να μετρήσουμε πρέπει να διέλθει μέσα από το αμπερόμετρο, πράγμα που σημαίνει ότι πρέπει να συνδέσουμε το αμπερόμετρο εν σειρά στο κύκλωμα του οποίου το ρεύμα θέλουμε να μετρήσουμε, όπως φαίνεται στο Σχήμα 28.19. Για να συνδέσουμε το αμπερόμετρο εν σειρά πρέπει συνήθως να κόψουμε το καλώδιο του κυκλώματος. Πρέπει επίσης να είμαστε προσεκτικοί στην συνδεσμολογία έτσι ώστε το ρεύμα να εισέρχεται από τον θετικό ακροδέκτη του οργάνου και να εξέρχεται από τον αρνητικό. Ένα τέλει (ιδανικό) αμπερόμετρο θα έπρεπε να έχει μηδενική αντίσταση ώστε να μη επηρεάζει καθόλου το υπό μέτρηση ρεύμα. Αυτή η προϋπόθεση σημαίνει ότι για το κύκλωμα του Σχήματος 28.19 η αντίσταση του αμπερομέτρου πρέπει να είναι μικρή σε σύγκριση με το $R_1 + R_2$. Αφού όμως το αμπερόμετρο έχει πάντοτε κάποια αντίσταση, η σύνδεσή του στο κύκλωμα σημαίνει ότι μειώνεται το ρεύμα του κυκλώματος.

Το βολτόμετρο

Το όργανο που χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε τις διαφορές δυναμικού ονομάζεται **βολτόμετρο**. Για να μετρήσουμε τη διαφορά δυναμικού σε δύο σημεία του κυκλώματος, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να συνδέσουμε τους ακροδέκτες του βολτομέτρου με τα παραπάνω σημεία, χωρίς να υπάρξει κανένας λόγος να κόψουμε το κύκλωμα (βλ. Σχήμα 28.20). Έτσι, για να μετρήσουμε, λ.χ., τη διαφορά δυναμικού των άκρων της αντίστασης R_2 συνδέουμε το βολτόμετρο παράλληλα με την R_2 . Πρέπει όμως να προσέχουμε και πάλι την πολικότητα της συνδεσμολογίας μας. Δηλαδή, πρέπει να συνδέσουμε τον θετικό ακροδέκτη του βολτομέτρου με το άκρο της αντίστασης που έχει το υψηλότερο δυναμικό και τον αρνητικό ακροδέκτη με το άκρο που έχει το χαμηλότερο δυναμικό. Ένα ιδανικό βολτόμετρο θα έπρεπε να έχει άπειρη αντίσταση έτσι ώστε να μην διαρρέεται καθόλου από ρεύμα. Αυτό σημαίνει ότι στο κύκλωμα του Σχήματος 28.20 το βολτόμετρο πρέπει να έχει πολύ μεγαλύτερη αντίσταση από την R_2 , πράγμα που βεβαίως, στη πράξη, δεν συμβαίνει. Γι' αυτό, σε μετρήσεις ακριβείας πρέπει να κάνουμε τις κατάλληλες διορθώσεις, αφού η αντίσταση του βολτομέτρου είναι γνωστή και είναι σημειωμένη πάνω στο όργανο.

Το γαλβανόμετρο

Το **γαλβανόμετρο** είναι η κύρια συνιστώσα των αμπερομέτρων και των βολτομέτρων. Τα βασικά στοιχεία του κοινού γαλβανομέτρου που λέγεται και *γαλβανόμετρο D' Arsonval*, εικονίζονται στο Σχήμα 28.21. Το όργανο



Σχήμα 29.7 (α) Καμπύλος αγωγός τοποθετημένος μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο διαρρέεται από ρεύμα I . Η μαγνητική δύναμη που δρα πάνω στον αγωγό είναι ίση με τη δύναμη που θα δρούσε πάνω σε έναν ευθύγραμμο αγωγό μήκους ℓ' που ενώνει τα άκρα του καμπύλου αγωγού. (β) Βρόχος τυχαίου σχήματος που διαρρέεται από ρεύμα κείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Η ολική μαγνητική δύναμη είναι μηδενική.

στο b . Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 2, στην πρόσθεση πολλών διανυσμάτων το άθροισμα ισούται με το διάνυσμα ℓ' που κατευθύνεται από το a στο b . Επομένως η Εξίσωση 29.8 ανάγεται στην

Δύναμη που δρα σε σύρμα το οποίο βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο

$$F = I \ell' \times B \quad (29.9)$$

Περίπτωση II

Τοποθετούμε μέσα σε εξωτερικό ομογενές μαγνητικό πεδίο B (Σχήμα 29.7b) έναν κλειστό συρμάτινο βρόχο, τυχαίου σχήματος, που διαρρέεται από ρεύμα I . Μπορούμε και πάλι να περιγράψουμε τη δύναμη με την Εξίσωση 29.8. Τώρα όμως το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων μετατόπισης πρέπει να καλύψει τον κλειστό βρόχο. Δηλαδή

$$F = I \left(\oint ds \right) \times B$$

Αλλά το διανυσματικό αυτό άθροισμα είναι μηδέν, διότι ο βρόχος είναι κλειστός και, επομένως, τα επιμέρους διανύσματα δημιουργούν κλειστό πολύγωνο. Αφού λοιπόν $\oint ds = 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$F = 0 \quad (29.10)$$

Δηλαδή

η συνισταμένη μαγνητική δύναμη πάνω σε οποιονδήποτε κλειστό βρόχο ρεύματος που βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι μηδενική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 29.2 Δύναμη πάνω σε έναν ημικυκλικό αγωγό □

Ένα σύρμα σχηματίζει κλειστό ημικύκλιο ακτίνας R , όπως φαίνεται στο Σχήμα 29.8. Το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα I και κείται πάνω στο πεδίο xy , παρουσία ομογενούς μαγνητικού πεδίου που είναι παράλληλο προς την θετική κατεύθυνση του άξονα y . Υπολογίστε

τις μαγνητικές δυνάμεις που ασκούνται στο ευθύγραμμο μέρος, καθώς και στο καμπύλο μέρος του σύρματος.

Λύση Η δύναμη πάνω στο ευθύγραμμο μέρος του σύρματος έχει μέτρο ίσο προς $F_1 = I\ell B = 2IRB$, διότι $\ell = 2R$ και το B είναι κάθετο στο ευθύγραμμο αυτό μέρος. Η κατεύθυνση της F_1 είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας και από κάτω προς τα επάνω όπως τη

διαβάζουμε (και τούτο διότι το ℓ κατευθύνεται προς τα δεξιά, όπως κινείται το ρεύμα και, επομένως, το $\ell \times \mathbf{B}$ κατευθύνεται προς τα επάνω).

Για να υπολογίσουμε όμως τη δύναμη στο καμπύλο μέρος, πρέπει να βρούμε την $d\mathbf{F}_2$, που είναι η δύναμη η οποία δρα πάνω στο στοιχειώδες τμήμα ds . Εάν ονομάσουμε θ τη γωνία ανάμεσα στο \mathbf{B} και το ds (βλ. Σχήμα 29.8), τότε το μέτρο της $d\mathbf{F}_2$ είναι

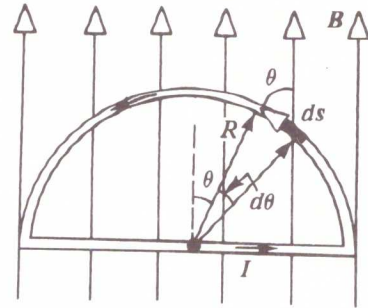
$$dF_2 = I|ds \times \mathbf{B}| = IB \sin \theta ds$$

όπου ds είναι το μήκος τού στοιχειώδους τμήματος τού καμπύλου μέρους. Για να μπορέσουμε να ολοκληρώσουμε, πρέπει να εκφράσουμε το ds συναρτήσει της μεταβλητής θ . Ξέρουμε ότι $s = R\theta$. Επομένως $ds = R d\theta$. Έτσι ξαναγράφουμε την dF_2 ως

$$dF_2 = IRB \sin \theta d\theta$$

Για να βρούμε τη συνισταμένη δύναμη \mathbf{F}_2 που δρα πάνω στο καμπύλο μέρος, πρέπει να ολοκληρώσουμε την παραπάνω σχέση πάνω σε όλα τα στοιχειώδη τμήματα από τα οποία αποτελείται το καμπύλο μέρος τού σύρματος. Να σημειωθεί ότι όλα τα στοιχειώδη τμήματα δίνουν την ίδια κατεύθυνση της δύναμης, δηλαδή κάθετη στη σελίδα τού διβλίου και από τον αναγνώστη προς αυτήν (και τούτο διότι αυτή είναι η κατεύθυνση τού $ds \times \mathbf{B}$). Επομένως και η συνισταμένη τους \mathbf{F}_2 έχει την ίδια κατεύθυνση. Ολοκληρώνουμε την dF_2 , λοιπόν, από $\theta = 0$ έως $\theta = \pi$ (καλύπτοντας έτσι ολόκληρο το ημικύκλιο):

$$\begin{aligned} F_2 &= IRB \int_0^\pi \sin \theta d\theta = IRB[-\cos \theta]_0^\pi \\ &= -IRB(\cos \pi - \cos 0) = -IRB(-1 - 1) = 2IRB \end{aligned}$$



Σχήμα 29.8 (Παράδειγμα 29.2) Η ολική μαγνητική δύναμη που ασκείται πάνω σε έναν κλειστό βρόχο ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι μηδενική. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η δύναμη που ασκείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα τού αγωγού ισούται με $2IRB$ και κατευθύνεται προς τα επάνω, ενώ η δύναμη που ασκείται πάνω στο κυρτό τμήμα είναι επίσης ίση με $2IRB$ και κατευθύνεται προς τα κάτω, και οι δύο είναι κάθετες στο επίπεδο της σελίδας.

Βλέπουμε, έτσι, ότι η $\mathbf{F}_2 = 2IRB$ κατευθύνεται προς τα κάτω, ενώ η $\mathbf{F}_1 = 2IRB$ κατευθύνεται προς τα επάνω (και οι δύο είναι κάθετες στο επίπεδο της σελίδας). Επομένως η συνισταμένη δύναμη πάνω σε ολόκληρο το σύρμα είναι μηδενική, όπως και αναμενόταν από την Περίπτωση II, που αναλύσαμε προηγουμένως (Εξίσωση 29.10)

Άσκηση 2 Υπολογίστε τη δύναμη στο ημικυκλικό μέρος τού σύρματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Περίπτωσης I (Εξίσωση 29.9).

29.4 ΡΟΠΗ ΠΑΝΩ ΣΕ ΒΡΟΧΟ ΠΟΥ ΔΙΑΡΡΕΤΑΙ ΑΠΟ ΡΕΥΜΑ ΚΑΙ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΜΕΣΑ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Στο προηγούμενο υποκεφάλαιο περιγράψαμε τη δύναμη που ασκείται από ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο πάνω σε αγωγό ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα. Βασιζόμενοι σε αυτά, θα υπολογίσουμε τη ροπή την οποία ασκεί πάνω σε έναν βρόχο που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα το μαγνητικό πεδίο μέσα στο οποίο είναι τοποθετημένος ο βρόχος. Τα αποτελέσματα της μελέτης μας έχουν εφαρμογή στη λειτουργία των ηλεκτρικών κινητήρων.

Θεωρήστε ότι έχουμε (Σχήμα 29.9a) έναν ορθογώνιο βρόχο-πλαίσιο που διαρρέεται από ρεύμα I . Ο βρόχος κείται στο ίδιο επίπεδο με το μαγνητικό πεδίο. Οι δύο πλευρές μήκους a δεν υπόκεινται σε καμία δύναμη, διότι τα σύρματα είναι παράλληλα προς το πεδίο και $ds \times \mathbf{B} = 0$. Το μέτρο των δυνάμεων στις οποίες υπόκεινται οι πλευρές μήκους b είναι

$$F_1 = F_2 = IbB$$

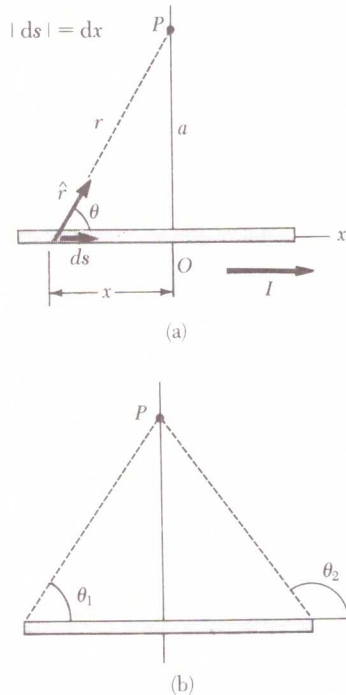
Η δύναμη \mathbf{F}_1 στην αριστερή (καθώς κοιτάζουμε τη σελίδα τού διβλίου) πλευρά τού ορθογωνίου είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας και κατευθύνεται από αυτό προς τον αναγνώστη, ενώ η \mathbf{F}_2 , δηλαδή η δύναμη στη δεξιά πλευρά, είναι και αυτή κάθετη στο επίπεδο της σελίδας αλλά κατευθύνεται προς αυτό. Εάν κοιτάζουμε τον βρόχο παράλληλα προς το επίπεδο της σελίδας από τα πλάγια, θα δούμε ότι οι δυνάμεις έχουν τις κατευθύνσεις που δείχνει το Σχήμα 29.9b. Εάν υποθέσουμε ότι ο ορθογώνιος βρόχος μπορεί να

πεδίου. Έτσι, λοιπόν, εάν ο αγωγός κείται στο επίπεδο της σελίδας του βιβλίου, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 30.1, το $d\mathbf{B}$ είναι κάθετο στο επίπεδο της σελίδας και στο μεν σημείο P κατευθύνεται προς τα επάνω, ενώ στο P' κατευθύνεται προς τα κάτω.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν απεικονίζουν τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούμε τον νόμο των Biot-Savart για να υπολογίζουμε το μαγνητικό πεδίο το οποίο δημιουργείται από μερικές σημαντικές γεωμετρικές διατάξεις. Πρέπει όμως να είναι σαφές ότι στα παραδείγματα αυτά υπολογίζουμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί γύρω του ένας αγωγός δεδομένης γεωμετρίας ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα. Αυτό το μαγνητικό πεδίο δεν πρέπει να το συγχέουμε με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο που εφαρμόζουμε πάνω στον αγωγό (Κεφάλαιο 29).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30.1 Μαγνητικό πεδίο ενός λεπτού ευθύγραμμου αγωγού

Θεωρήστε ότι ένα λεπτό ευθύγραμμο σύρμα διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I προς την θετική κατεύθυνση x , όπως στο Σχήμα 30.2. Ας υπολογίσουμε το ολικό μαγνητικό πεδίο στο σημείο P , που έχει απόσταση a από το σύρμα και το οποίο δημιουργείται από το ρεύμα που διαρρέει το σύρμα.



Σχήμα 30.2 (Παράδειγμα 30.1) (α) Ένα ευθύγραμμο κομμάτι σύρματος διαρρέεται από ρεύμα I . Στο σημείο P το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται στο κάθε στοιχειώδες τμήμα ds κατευθύνεται από το επίπεδο της σελίδας του βιβλίου προς τον αναγνώστη. Αυτή είναι και η κατεύθυνση ολόκληρου του μαγνητικού πεδίου. (β) Οι οριακές γωνίες θ_1 και θ_2 του προβλήματός μας.

Λύση Ας θεωρήσουμε ότι ένα στοιχειώδες τμήμα ds έχει απόσταση r από το P . Η κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το ρεύμα I το οποίο διαρρέει το ds είναι $ds \times \hat{r}$ και επομένως είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας του βιβλίου και κατευθύνεται προς τα επάνω (δηλαδή προς τη μύτη σας!). Για να

διατυπώσουμε με ακρίβεια την υπόθεση που κάναμε, πρέπει να τονίσουμε ότι όλα τα στοιχειώδη τμήματα συνεισφέρουν πεδία (με την ίδια κατεύθυνση) στο P . Έτσι, αρκεί να υπολογίσουμε το μέτρο του πεδίου στο P . Παίρνουμε λοιπόν την αρχή των συντεταγμένων στο σημείο O και το P πάνω στον θετικό άξονα y . Το \mathbf{k} είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στη σελίδα του βιβλίου και προς τα επάνω. Έχουμε λοιπόν

$$ds \times \hat{r} = k |ds \times \hat{r}| = k(dx \sin \theta)$$

Θέτουμε τα παραπάνω στην Εξίσωση 30.4, ξαναγράφουμε το $d\mathbf{B} = k d\mathbf{B}$ και βρίσκουμε

$$(1) \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin \theta}{r^2}$$

Για να μπορέσουμε όμως να ολοκληρώσουμε τη σχέση αυτή, πρέπει να βρούμε τις σχέσεις που συνδέουν τις μεταβλητές θ , x και r . Μία λύση είναι να εκφράσουμε τα x και r συναρτήσει του θ . Από τη γεωμετρία του Σχήματος 30.2a και με απλή παραγωγή βρίσκουμε:

$$(2) \quad r = \frac{a}{\sin \theta} = a \csc \theta$$

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο του Σχήματος 30.2a βρίσκουμε $\tan \theta = -a/x$, οπότε

$$(3) \quad dx = a \csc^2 \theta d\theta$$

Θέτουμε τις (2) και (3) στην (1) και έχουμε

$$(4) \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a \csc^2 \theta \sin \theta d\theta}{a^2 \csc^2 \theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \theta d\theta$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι κατορθώσαμε να αναγάγουμε την αρχική σχέση σε μια άλλη που έχει μόνο μία μεταβλητή, την θ . Για να βρούμε τώρα το ολικό μαγνητικό πεδίο στο P πρέπει να ολοκληρώσουμε την (4) για όλα τα στοιχειώδη τμήματα που σχηματίζουν γωνία με το P από θ_1 έως θ_2 , όπως βλέπουμε στο Σχήμα 30.2b. Έτσι

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (30.6)$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι αρκετά γενικό και μπορούμε

να τό χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από οποιονδήποτε ευθύγραμμο αγωγό, εάν μάς είναι γνωστή η γεωμετρία του και επομένως οι γωνίες θ_1 και θ_2 .

Θεωρήστε ότι έχουμε την ειδική περίπτωση ενός ευθύγραμμου σύρματος άπειρου μήκους. Δηλαδή τα $\theta_1 = 0$ και $\theta_2 = \pi$, όπως βλέπουμε από το Σχήμα 30.2b, αντιστοιχούν στα $x = -\infty$ και $x = +\infty$. Και επειδή $(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = (\cos 0 - \cos \pi) = 2$, η Εξίσωση 30.6 μάς δίνει

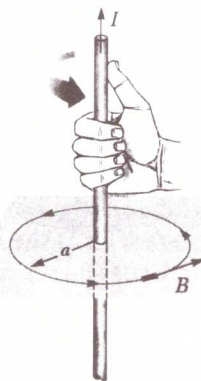
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (30.7)$$

Στο Σχήμα 30.3 θα δείτε την τρισδιάστατη απεικόνιση της κατεύθυνσης του \mathbf{B} που δημιουργείται από το ρεύμα I το οποίο διαρρέει ένα μεγάλο μήκους ευθύγραμμο σύρμα. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου \mathbf{B} είναι κύκλοι ομόκεντροι με το σύρμα και κείνται σε επίπεδα τα οποία είναι κάθετα στο σύρμα. Το μέτρο του \mathbf{B} είναι σταθερό για κάθε κύκλο ακτίνας a , όπως βλέπουμε από την Εξίσωση 30.7. Εάν θέλετε να βρείτε την κατεύθυνση του \mathbf{B} , βάλτε το δεξί σας χέρι γύρω από το σύρμα (προσέχετε μην πάθετε ηλεκτροπληξία!) με τον αντίχειρα να δείχνει προς την κατεύθυνση του ρεύματος. Τα υπόλοιπα δάχτυλά σας δείχνουν την κατεύθυνση του \mathbf{B} .

Το αποτέλεσμα που βρήκαμε μάς λέει ότι το μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι ανάλογο προς το ρεύμα και μειώνεται ανάλογα προς την απόσταση από το σύρμα, όπως ίσως να αναμένετε. Ας σημειωθεί ότι η Εξίσωση 30.7 έχει την ίδια μαθηματική μορφή με την Εξίσωση 24.9, που μάς δίνει το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου το οποίο δημιουργείται από μια ευθύγραμμη κατανομή ηλεκτρικού φορτίου.

Άσκηση 1 Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται σε απόσταση 4 cm από ρεύμα 5 A το οποίο διαρρέει ένα μεγάλο μήκους ευθύγραμμο σύρμα.

Απάντηση 2.5×10^{-5} T.



Σχήμα 30.3 Για να βρούμε την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από ένα εκτεταμένο ευθύγραμμο σύρμα χρησιμοποιούμε τον κανόνα του δεξιού χεριού (δεξιόστροφου κοχλία). Να σημειωθεί ότι στο πρόβλημα αυτό οι μαγνητικές γραμμές εφάπτονται σε κύκλους που έχουν κέντρο το σύρμα και οι οποίοι κείνται σε επίπεδα κάθετα σε αυτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30.2 Πεδίο βρόχου που διαρρέεται από ρεύμα

Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο το οποίο δημιουργείται στο σημείο O από το ρεύμα I που διαρρέει τον κλειστό βρόχο του Σχήματος 30.4. Ο βρόχος αποτελείται από δύο ευθύγραμμα μέρη και ένα τόξο κύκλου ακτίνας R και επίκεντρης γωνίας θ .

Λύση Παρατηρήστε πρώτα από όλα ότι το ρεύμα που διαρρέει το σκέλος OA δεν δημιουργεί μαγνητικό πεδίο στο O . Και τούτο διότι $ds \times \hat{r} = 0$, αφού οι διευθύνσεις των ds και \hat{r} συμπίπτουν. Για τον ίδιο λόγο, το ρεύμα που διαρρέει το σκέλος OC δεν δημιουργεί μαγνητικό πεδίο στο O . Το πρόβλημά μας, λοιπόν, έχει απλοποιηθεί και μένει μόνον να υπολογίσουμε το πεδίο που δημιουργείται από το ρεύμα I το οποίο διαρρέει το σκέλος AC του βρόχου. Σημειώστε ότι κάθε στοιχειώδες τμήμα του σκέλους AC έχει την ίδια απόσταση R από το O και συνεισφέρει $d\mathbf{B}$, το οποίο είναι κάθετο στη σελίδα και προς τα κάτω στο O . Για κάθε σημείο του σκέλους AC (που είναι τόξο κύκλου ακτίνας R με κέντρο το O) το ds είναι κάθετο στο \hat{r} , δηλαδή $|ds \times \hat{r}| = ds$. Χρησιμοποιούμε τα παραπάνω στην Εξίσωση 30.4 και βρίσκουμε ότι το πεδίο στο O που δημιουργείται από το ρεύμα I το οποίο διαρρέει οποιονδήποτε στοιχειώδες τμήμα ds του τόξου AC είναι

$$dB = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi R^2}$$

Αλλά τα I και R είναι σταθερά. Έτσι το ολοκλήρωμα είναι εύκολο:

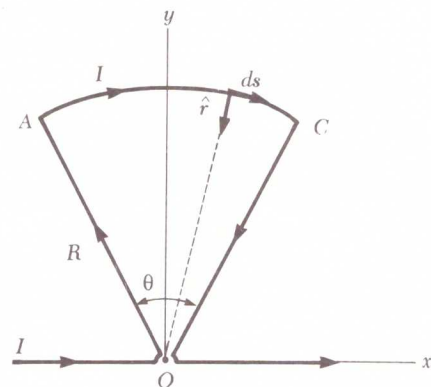
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} s = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta \quad (30.8)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $s = R\theta$, όπου το θ μετρείται σε radians (ακτίνια). Το \mathbf{B} κατευθύνεται κάθετα στη σελίδα και στο O προς τα κάτω.

Βλέπουμε έτσι ότι, εάν $\theta = (\pi/2)$ rad, η Εξίσωση 30.8 μάς δίνει $B = \mu_0 I/8R$.

Άσκηση 2 Κυκλικός βρόχος ρεύματος ακτίνας R διαρρέεται από ρεύμα I . Ποιο είναι το μέτρο του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του;

Απάντηση $\mu_0 I/2R$.



Σχήμα 30.4 (Παράδειγμα 30.2) Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από τον κλειστό βρόχο ηλεκτρικού ρεύματος στο σημείο O κατευθύνεται από τον αναγνώστη προς το επίπεδο της σελίδας του βιβλίου. Να σημειωθεί ότι η συνεισφορά των ευθύγραμμων τμημάτων OA και OC στο πεδίο είναι μηδενική.