Προσομοίωση Δικτύων

7η Διάλεξη

Παραγωγή τυχαίων δειγμάτων

Γενικά

- Οι Γ.Τ.Α. που μέχρι τώρα δείξαμε παράγουν τυχαίους αριθμούς ομοιόμροφα κατανεμημένους στο [0,1]
- Στη γενική περίπτωση μας ενδιαφέρει να δημιουργούμε τυχαίους αριθμούς σύμφωνα με οποιαδήποτε κατανομή
- Για το σκοπό αυτό θα δείξουμε 3 μεθόδους
    1. Αντίστροφος μετασχηματισμός
    2. Αποδοχή-απόρριψη
    3. Εμπειρική μέθοδος

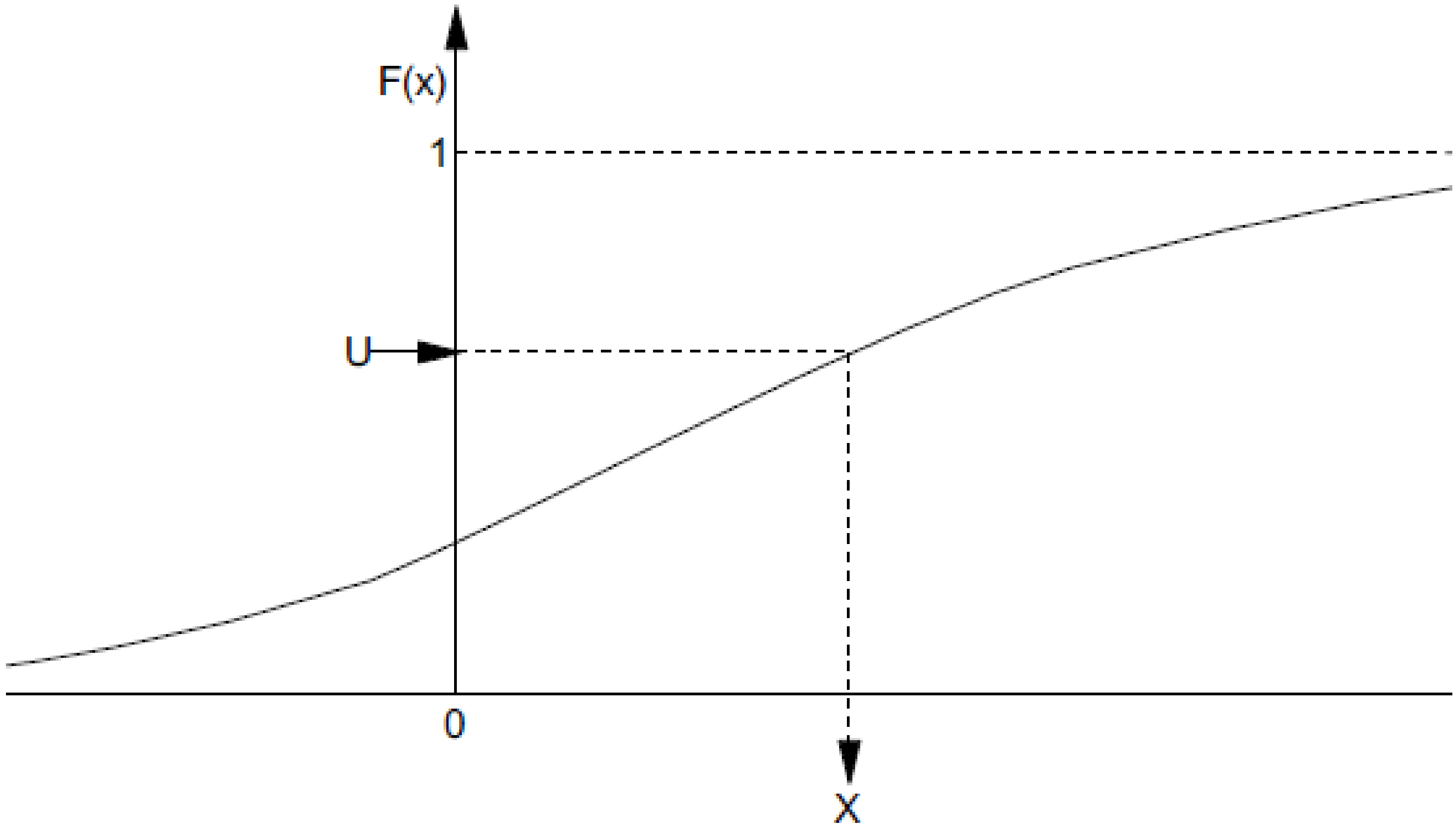
Αντίστροφος μετασχηματισμός

- Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί τον αντιστροφή της συνάρτησης αθροιστικής πιθανότητας (σ.α.π.) της τυχαίας μεταβλητής
- Μπορεί να εφαρμοστεί μόνο εφόσον η σ.α.π. είναι αντιστρέψιμη
- f(x): η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) που θέλουμε να ακολουθούν οι παραγόμενοι τυχαίοι αριθμοί
- F(x): η σ.α.π.

Αντίστροφος μετασχηματισμός

- Τα βήματα της μεθόδου
    1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό U[0,1]
    2. Θέτουμε U=F(x)
    3. Λύνουμε ως προς x: $x=F^{-1}(u)$

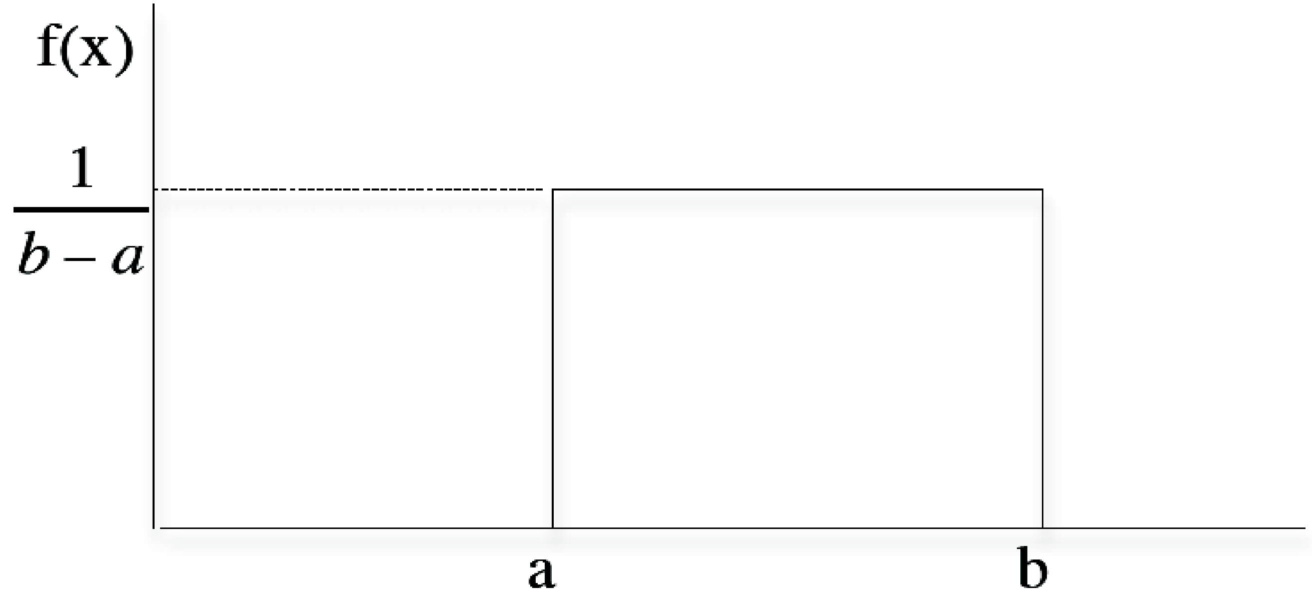
Αντίστροφος μετασχηματισμός



Αντίστροφος μετασχηματισμός: Παράδειγμα

- Θέλουμε να δημιουργήσουμε τυχαία δείγματα με σ.π.π. $f(x)=2x$, $0 \le x \le 1$
- $F(x) = \int_0^x 2t\,dt$ => $F(x)=x^2$, $0 \le x \le 1$
- Έστω r ένας τυχαίος αριθμός
- $r=x^2$ => $x = \sqrt{r}$

Αντίστροφος μετασχ.: Ομοιόμορφη κατανομή



σ.π.π. : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b\text{-}a} & a < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

σ.α.π. : $F(x) = \int_a^x \dfrac{1}{b\text{-}a}\, dt = \dfrac{x-a}{b-a}$

$r = F(x) = \dfrac{x\text{-}a}{b\text{-}a}$ => x = a + (b-a)r

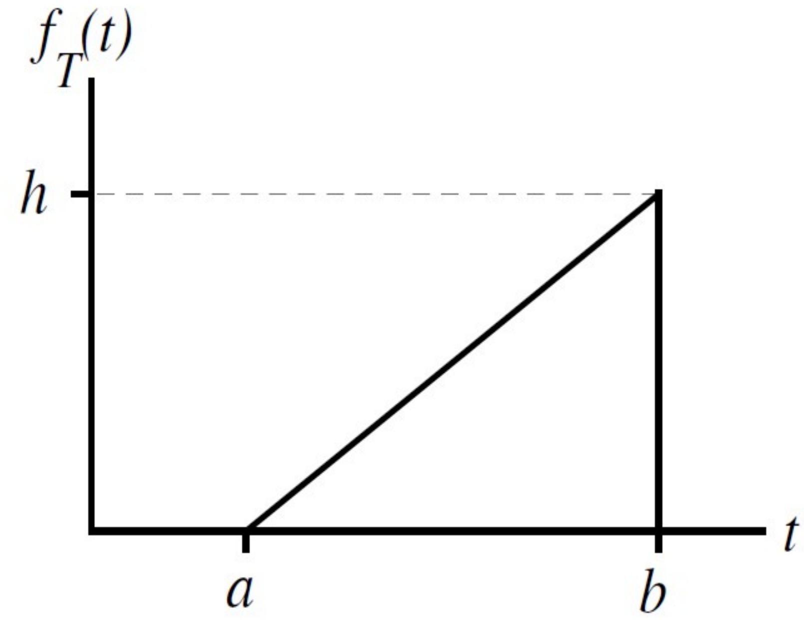
Αντίστροφος μετασχ.: Εκθετική κατανομή

- σ.π.π. : $f(x)=ae^{-ax}$, $a>0$, $x \geq 0$
- σ.α.π. : $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x ae^{-at}tdt = 1 - e^{-ax}$
- $r = 1-e^{-ax} \Rightarrow e^{-ax} = 1-r \Rightarrow x=-1/a*\log(1-r)$
  - Αφού το r είναι U[0,1] το ίδιο θα ισχύει και για το 1-r
  - Άρα $x=-1/a*\log(r)$

Αντίστροφος μετασχηματισμός: Γενικό παράδειγμα

- Έστω ότι στοχεύουμε στην κατανομή με την εξής σ.π.π.

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{2}{(b-a)^2}t + c & ,a \le t \le b \\ 0 & ,\text{otherwise} \end{cases}$$



- Αφού $f_T(a)=0$ => $c = -\frac{2a}{(b-a)^2}$

- Επομένως $f_T(t) = \begin{cases} \frac{2}{(b-a)^2}t - \frac{2a}{(b-a)^2} & ,a \le t \le b \\ 0 & ,\text{otherwise} \end{cases}$

Αντίστροφος μετασχηματισμός: Γενικό παράδειγμα

- Η σ.α.π. για a≤t≤b είναι

$$F_T(t) = \int_a^t f(x)dx = \frac{(t-a)^2}{(b-a)^2}$$

- Αντιστρέφοντας την $F_T(t)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} z &= \frac{(t-a)^2}{(b-a)^2} \\ t &= \sqrt{z}\,(b-a)+a \end{aligned}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός & *διακριτές* πιθανοτικές κατανομές

- Μέχρι τώρα έχουμε ασχοληθεί με συνεχείς κατανομές
- Η τεχνική του αντίστροφου μετασχηματισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τον ίδιο τρόπο και για την παραγωγή τυχαίων δειγμάτων σύμφωνα με διακριτές πιθανοτικές κατανομές

Αντίστροφος μετασχηματισμός: Γεωμετρική κατανομή

- Έστω μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών
- Το αποτέλεσμα κάθε δοκιμής είναι επιτυχές (με πιθανότητα p) ή ανεπιτυχές (με πιθανότητα q)
- $p+q=1$
- Η τυχαία μεταβλητή που δίνει τον αριθμό των διαδοχικών αποτυχιών πριν από μια επιτυχία ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή

Αντίστροφος μετασχηματισμός: Γεωμετρική κατανομή

- Η σ.π.π. της γεωμετρικής κατανομής είναι

$$p(n) = pq^n, \; n=0,1,2,....$$

- Η σ.α.π. είναι

$$F(n) = \sum_{s=0}^{n} pq^s \;, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= p \sum_{s=0}^{n} q^s = p \, \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Longrightarrow F(n) = 1-q^{n+1}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός: Γεωμετρική κατανομή

- Θέτοντας F(n)=r, με το r να ανήκει στο U[0,1] και το 1-F(n) ανήκει στο U[0,1]
- Άρα $r=q^{n+1}$ => logr=(n+1)logq => n=logr/logq - 1

Η μέθοδος της αποδοχής-απόρριψης

- Η μέθοδος του αντίστροφου μετασχηματισμού βασίζεται στον υπολογισμό της αντίστροφης συνάρτησης της σ.α.π. της τυχαίας μεταβλητής
- Συχνά είναι δύσκολος ο υπολογισμός της
- Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιείται η μέθοδος της αποδοχής-απόρριψης

Η μέθοδος της αποδοχής-απόρριψης

- Έστω ότι η σ.π.π. f(x) έχει άνω όριο το M και πεπερασμένο πεδίο ορισμού: $a \leq x \leq b$
- Βήματα

1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό στο [a,b] (μέσω αντίστροφου μετασχ.)

   $V_1 = a + (b-a)U_1$, όπου το $U_1 \sim U[0,1]$

2. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό στο [0,M]

   $V_2 = MU_2$, όπου το $U_2 \sim U[0,1]$

3. Αν $V_2 \leq f(V_1)$ χρησιμοποιούμε το V_1, αλλιώς επιστρέφουμε στο βήμα 1

Η μέθοδος της αποδοχής-απόρριψης: Παράδειγμα 2

- $f(x)=2x,\ 0 \le x \le 1$

1. M=2
2. Παραγωγή $V_1 \sim [0,1]$ και $V_2 \sim [0,2]$
   - r1,r2 ~ U[0,1]
3. Αν $V_2 \le f(V_1) \Rightarrow 2r_2 \le 2r_1 \Rightarrow r_2 \le r_1$ τότε το V_1 γίνεται δεκτό

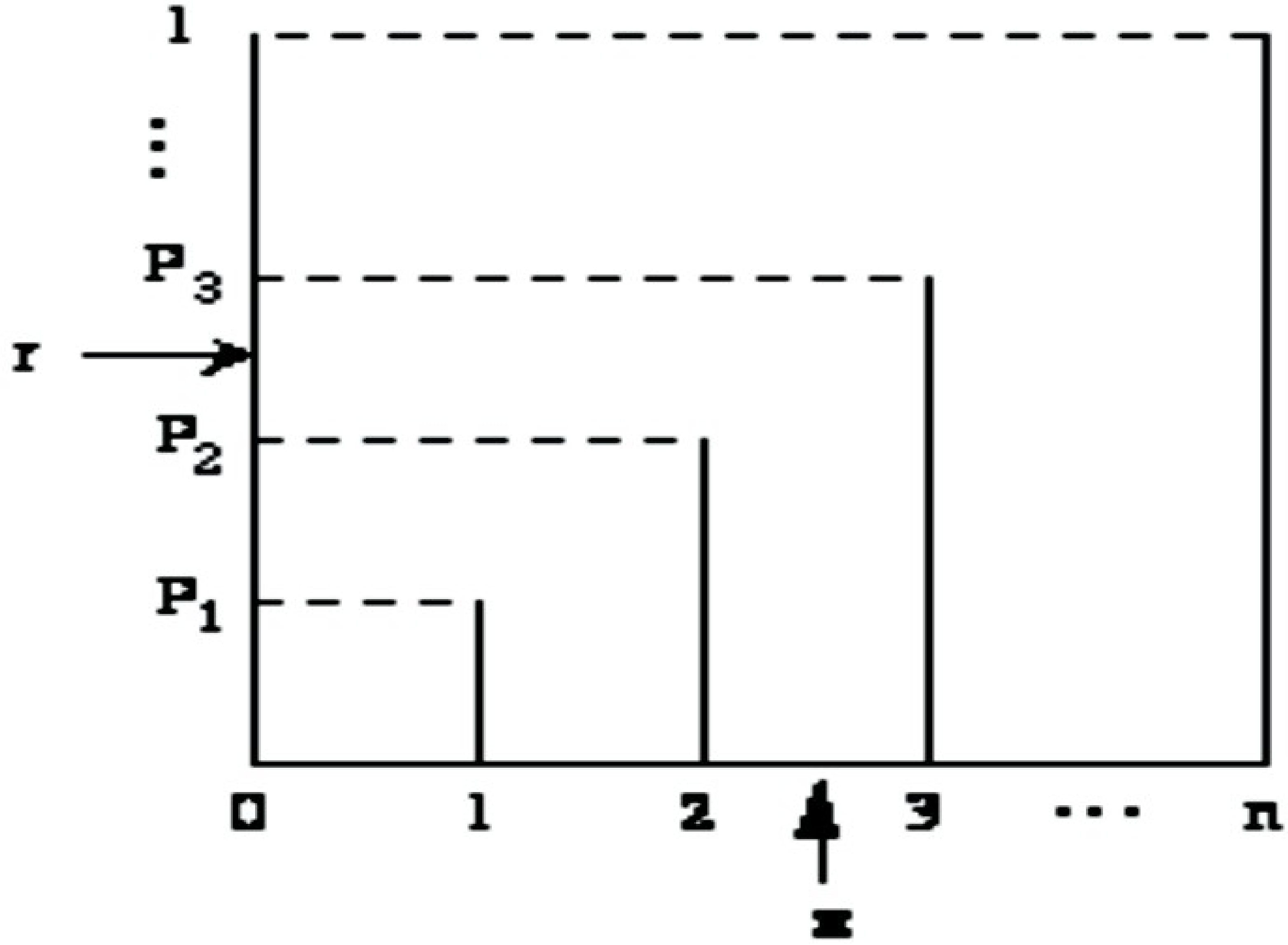
Παραγωγή τυχαίων δειγμάτων για εμπειρική κατανομή

- Αρκετά συχνά η κατανομή την οποία θέλουμε να ακολουθούν οι παραγόμενοι τυχαίοι αριθμοί δεν μπορεί να προσεγγιστεί με μια από τις θεωρητικές κατανομές
- Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να δημιουργήσουμε δείγματα σύμφωνα με εμπειρική κατανομή

Παραγωγή τυχαίων δειγμάτων για εμπειρική κατανομή: Διακριτή

- Έστω X η διακριτή τυχαία μεταβλητή
- $p(X=i)=p_i$ υπολογισμένη από εμπειρικά δεδομένα
- $p(X\leq i)=P_i$ η σ.α.π.
- Αφού $p_i=P_i-P_{i-1}$ ένας τυχαίος αριθμός θα βρίσκεται στο (P_{i-1},P_i) p_i% του χρόνου
- Άρα, επιλέγοντας έναν τυχαίο αριθμό r, αν $P_{i-1}<r<P_i$, τότε x=i

Γραφική επεξήγηση



Παράδειγμα: Το παιδί με τις εφημερίδες

- Έστω X ο αριθμός των εφημερίδων που θα πουληθούν σε μια μέρα
- Από ιστορικά δεδομένα έχουμε τα εξής

X	1	2	3	4	5
f(x)	0.20	0.20	0.30	0.15	0.15

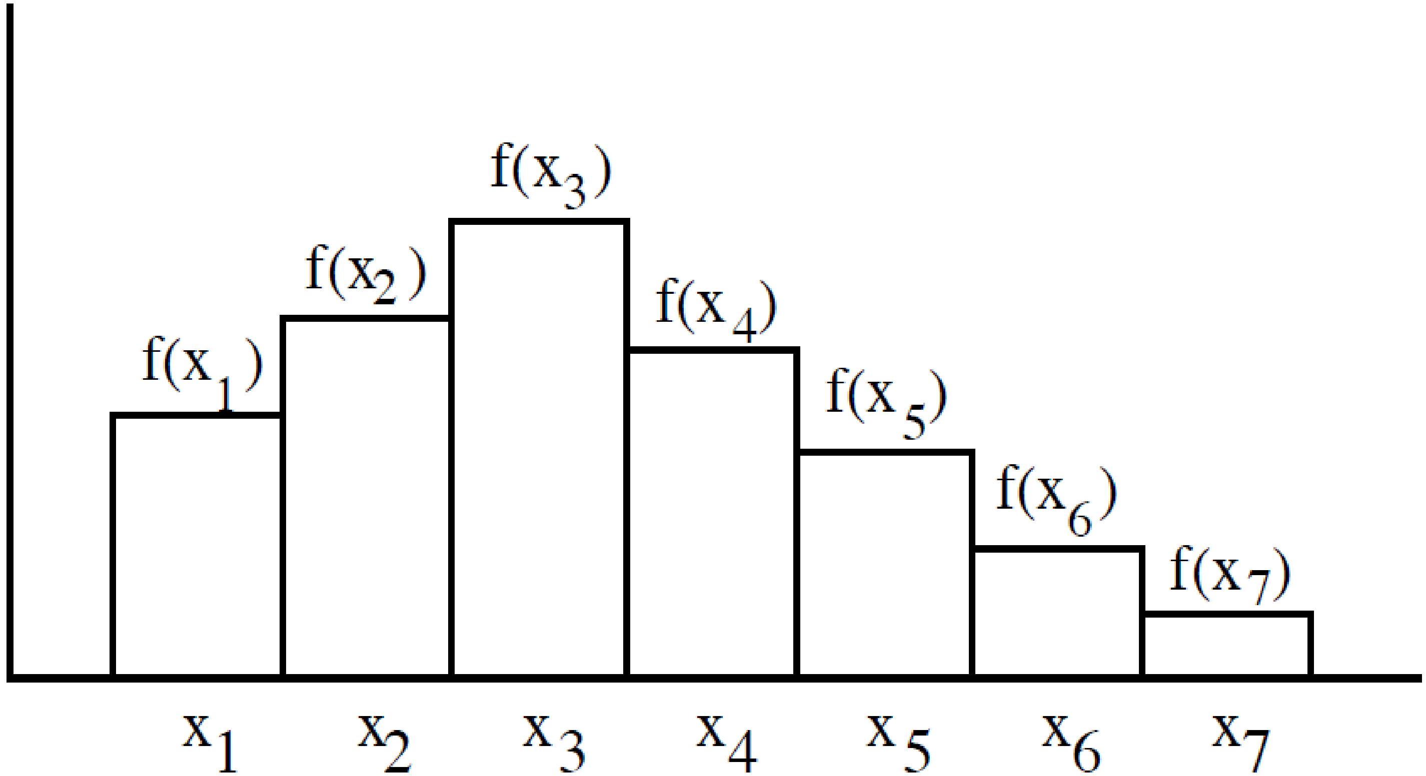
X	1	2	3	4	5
f(x)	0.20	0.40	0.70	0.85	1

Παράδειγμα: Το παιδί με τις εφημερίδες

1. Παραγωγή ενός τυχαίου αριθμού r
2. Αν
   - $0.85 < r \leq 1.00$ τότε $x = 5$
   - $0.70 < r \leq 0.85$ τότε $x = 4$
   - $0.40 < r \leq 0.70$ τότε $x = 3$
   - $0.20 < r \leq 0.40$ τότε $x = 2$
   - Αλλιώς τότε $x = 1$

Παραγωγή τυχαίων δειγμάτων για εμπειρική κατανομή: Συνεχής

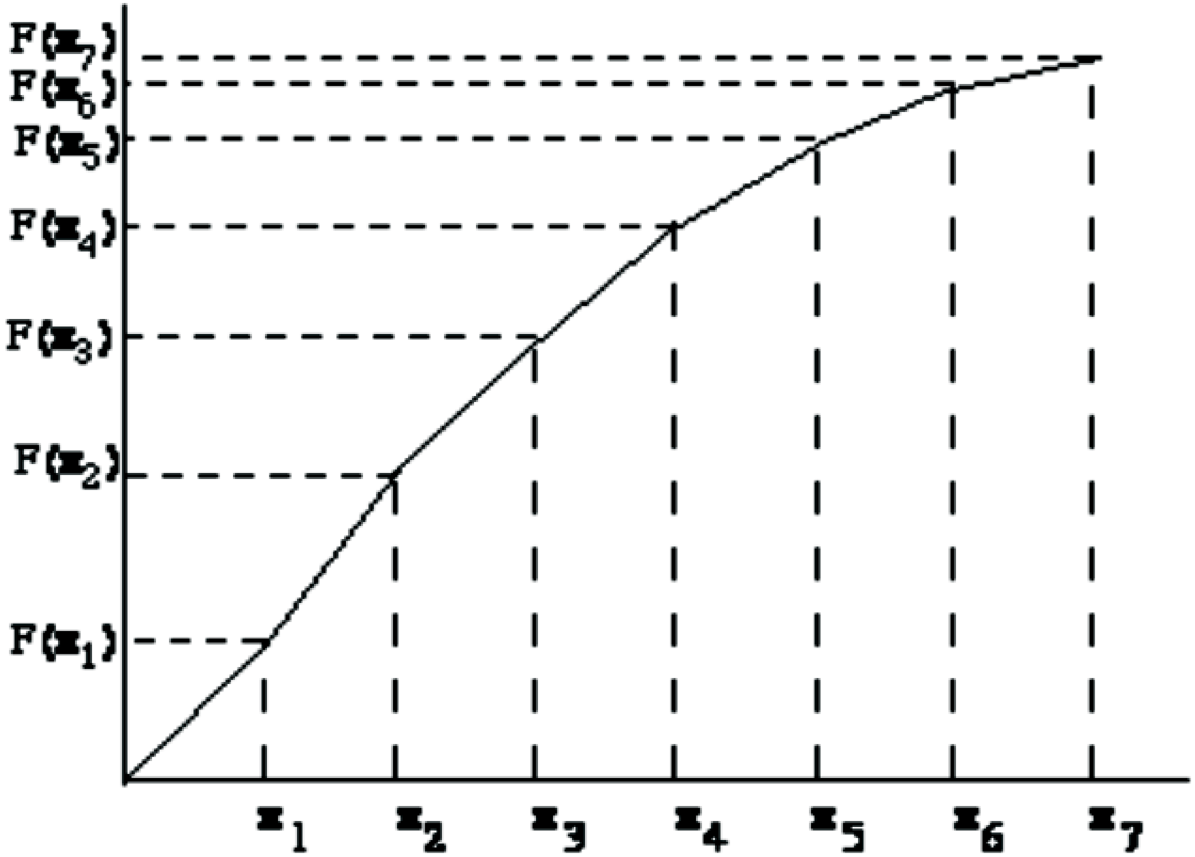
- Έστω ότι οι εμπειρικές παρατηρήσεις μιας τυχαίας μεταβλητής X συνοψίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα



Παραγωγή τυχαίων δειγμάτων για εμπειρική κατανομή: Συνεχής

- Από ένα τέτοιο ιστόγραμμα μπορούν να προκύψουν ζευγάρια τιμών της μορφής $(x_i, f(x_i))$, όπου
  - x_i το μέσο του i-οστού διαστήματος
  - $f(x_i)$ το μήκος του i-οστού παραλληλογράμμου
- Με αυτές τις τιμές μπορούμε να προσεγγίσουμε τη σ.α.π. υποθέτοντας ότι είναι αύξουσα σε κάθε διάστημα $[F(x_{i-1}), F(x_i)]$ θέτοντας: $F(X_i) = \sum_{1 \le K \le i} f(X_K)$

Παραγωγή τυχαίων δειγμάτων για εμπειρική κατανομή: Συνεχής



- Έστω r ένας τυχαίος αριθμός με $F(x_{i-1})<r<F(x_i)$ τότε μέσω γραμμικής παρεμβολής: $x = x_{i-1} + (x_i - x_{i-1}) \dfrac{r - F(x_{i-1})}{F(x_i) - F(x_{i-1})}$