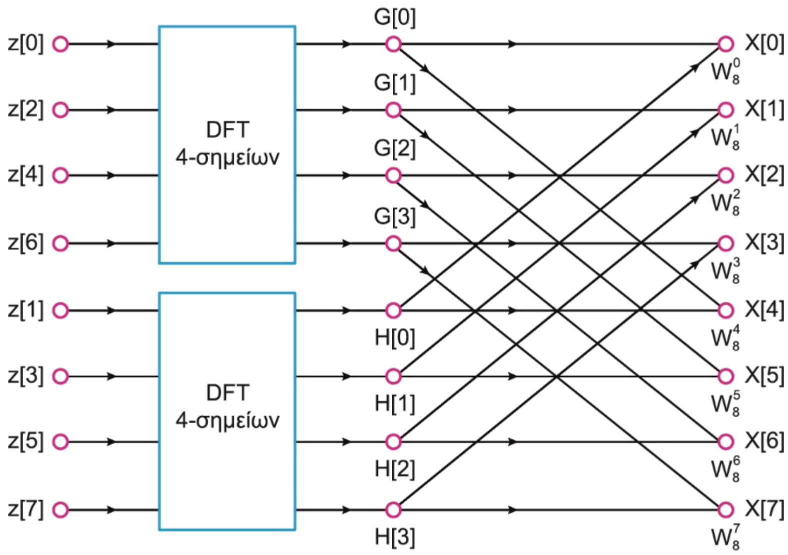
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ

Εργαστηριακή Άσκηση 5

«Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier»



Παρασκευάς Μιχάλης
Καθηγητής

Φεβρουάριος 2024

Έκδοση: 5.0

Πίνακας περιεχομένων

ΜΕΡΟΣ Α' – Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

1. Σκοπός της Άσκησης

Σκοπός αυτής της άσκησης είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό του Ευθύ και Αντίστροφου Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier και της κυκλικής συνέλιξης.

2. Προαπαιτούμενα

Για την επιτυχή υλοποίηση της άσκησης είναι απαραίτητη η μελέτη της ενότητας 8 της θεωρίας.

3. Υπολογισμός DFT στο Matlab

3.1 Ευθύς μετασχηματισμός

Στο MATLAB ο μετασχηματισμός DFT X(k) ενός ΣΔΧ x(n) υπολογίζεται με τη συνάρτηση `X = fft(x, N)` όπου N είναι το μήκος του μετασχηματισμού, και x είναι ένα διάνυσμα που περιέχει το σήμα διακριτού χρόνου x[n]. Αν το μήκος του σήματος είναι μικρότερο από N σημεία, τότε τα υπόλοιπα συμπληρώνονται με μηδενικά (zero padding).

Αν το N δεν δίνεται, δηλ. αν η εντολή συνταχθεί στη μορφή `X = fft(x)` τότε το N θεωρείται ίσο με το πλήθος των σημείων του διανύσματος x.

Αν για μία δοθείσα απεριοδική ακολουθία $x[n]$ επιθυμούμε να αυξήσουμε την πυκνότητα των δειγμάτων του DFT, τότε πρέπει να **αυξήσουμε το πλήθος** των δειγμάτων της $x[n]$. Αυτό γίνεται με την **προσθήκη μηδενικών** (zero padding), εφαρμόζοντας την ακόλουθη διαδικασία (βλ. παράδειγμα 1):

- Δημιουργούμε μία περιοδική επέκταση $\tilde{x}[n]$ μήκους $L \geq N$ της $x[n]$, προσθέτοντας $L - N$ μηδενικά στο τέλος της.
- Υπολογίζουμε τον DFT $\tilde{X}[k]$ μήκους L σημείων της ακολουθίας $\tilde{x}[n]$.
- Ο DFT $X[k]$ της $x[n]$ είναι: $X[k] = \tilde{X}[k]$, για $0 \leq k \leq L - 1$

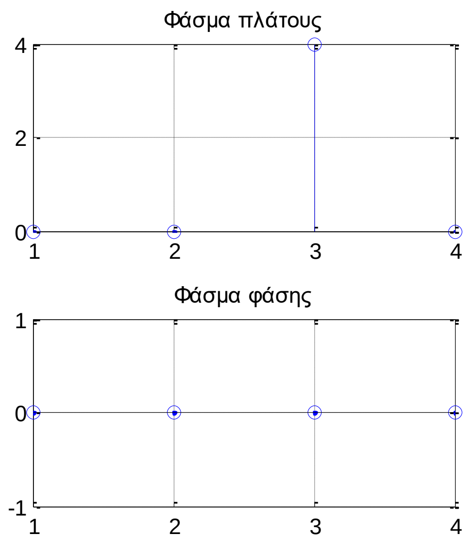
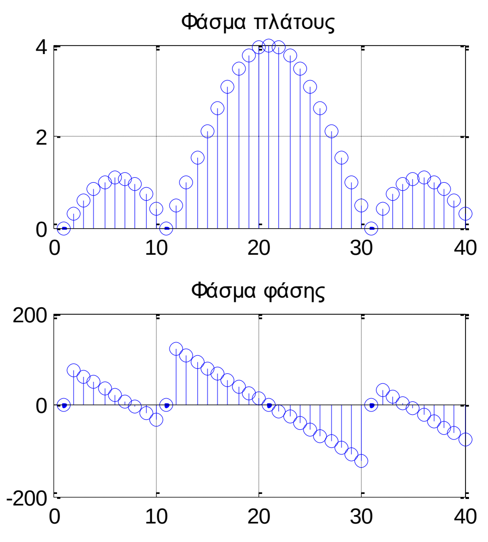
Αν η ακολουθία είναι **περιοδική**, τότε για να αυξήσουμε την ευκρίνεια του DFT, δεν προβαίνουμε σε προσθήκη μηδενικών αλλά περιλαμβάνουμε στον υπολογισμό του DFT περισσότερες από μία περιόδους της ακολουθίας. Μελετάμε το πρόβλημα αυτό στο παράδειγμα 2.

Παράδειγμα 1 – Αύξηση πυκνότητας δειγμάτων DFT με προσθήκη μηδενικών

Δίνεται η ακολουθία $x[n] = [1,1,1,1]$. Να υπολογίσετε τον DFT: (α) 4-σημείων και (β) 40-σημείων. Τι παρατηρείτε

Απάντηση:

```
x = [1,1,1,1];                  % Δημιουργία σήματος x(n)
N = 4;                          % Μήκος DFT
X = fft(x,N); X=fftshift(X);    % Υπολογισμός DFT
magX = abs(X);                  % Υπολογισμός φάσματος πλάτους
phaseX = angle(X)*180/pi;       % Υπολογισμός φάσματος φάσης
% Σχεδιασμός φασμάτων πλάτους και φάσης
subplot(211); stem(magX); title('Φάσμα πλάτους'); grid on
subplot(212); stem(phaseX); title('Φάσμα φάσης'); grid on
```

	
Φάσματα για N=4	Φάσματα για N=40

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι για μήκος του DFT N=4 η ανάλυση των φασμάτων είναι πολύ φτωχή, γεγονός που οφείλεται στο μικρό μήκος N που χρησιμοποιήσαμε. Αντίθετα, για μήκος του DFT N=40, η ανάλυση των φασμάτων βελτιώθηκε σημαντικά.

Τέλος, από τα παραπάνω σχήματα διαπιστώνουμε ότι το πλάτος και η φάση του DFT έχουν **άρτια και περιττή συμμετρία**, αντίστοιχα. Επομένως, μπορούμε να κρατήσουμε μόνο το τμήμα συχνοτήτων $[0, \pi)$, δηλαδή τις τιμές $X[k],\ k = 0,1, \dots, (N/2) - 1$.

Παράδειγμα 2 – Βελτίωση ανάλυσης DFT περιοδικού σήματος

Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί ο DFT του σήματος για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

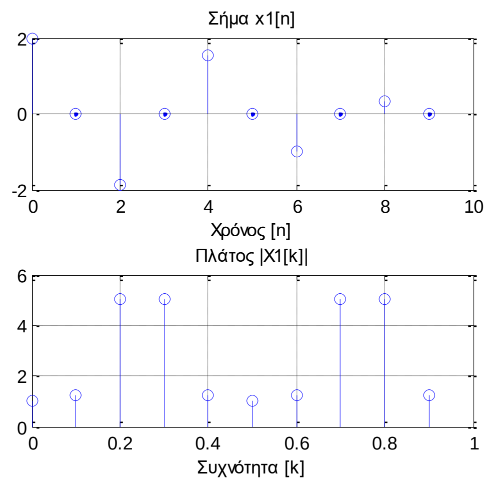
$$x[n] = cos\left(\frac{4\pi n}{9}\right) + \ cos\left(\frac{5\pi n}{9}\right)$$

(α) DFT 10-σημείων για $0 \le n \le 9$.

Κώδικας Matlab

```
N1 = 10; N2 = 100; % Μήκος DFT
% Δημιουργία x[n] για 100 σημεία
n = [0:1:N2-1];
x = cos(5*pi*n/9) + cos(4*pi*n/9);
% Δημιουργία x1[n] για 10 σημεία
n1 = [0:1:N1-1]; x1 = x(1:1:10);
X1 = fft(x1, N1);
% Υπολογισμός DFT 10 σημείων
k1 = [0:1:N1-1]; w1 = pi/N1*k1;
% Ορισμός κλιμάκων συχνότητας
% Σχεδιασμός σήματος και φ.πλάτους
figure(1); subplot(211); stem(n1,x1);
grid on; xlabel('Χρόνος [n]');
title('Σήμα x1[n]');
subplot(212); stem(w1/pi, abs(X1));
grid on; xlim([0 1]);
```

Αποτέλεσμα

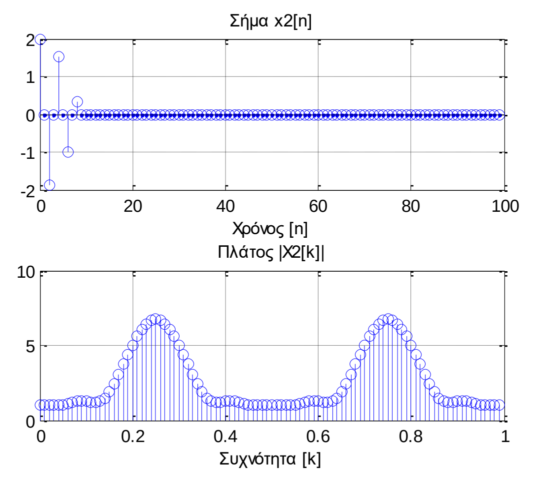


xlabel('Συχνότητα [k]'); title('Πλάτος |X1[k]|');	

(β) DFT 100-σημείων για $0 \leq \mathbf{n} \leq 9$ και τα υπόλοιπα 90 σημεία μηδενικά.

Ακολουθεί κώδικας με τον οποίο δημιουργούμε ένα σήμα $x_2[n]$ αποτελούμενο από τα 10 σημεία του $x_1[n]$ και επιπλέον 90 μηδενικά. Υπολογίζουμε τον DFT 100-σημείων για ακολουθία $x_2[n]$ και λαμβάνουμε το σχήμα.

Κώδικας Matlab	Αποτέλεσμα

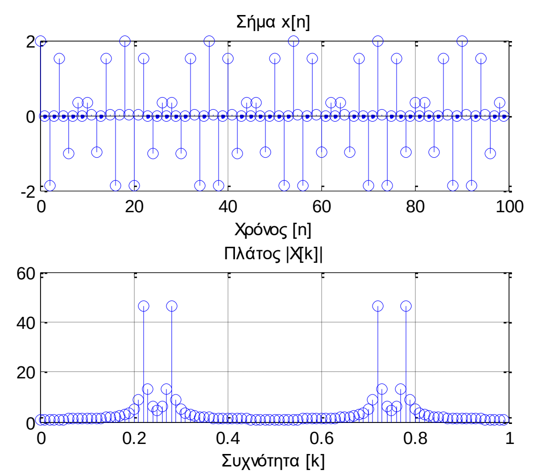
% x2[n] με 10 σημεία & 90 μηδενικά
x2 = [x1, zeros(1,N2-N1)];
% DFT 100 σημείων με zero padding
X2 = fft(x2, N2);
% Ορισμός κλιμάκων συχνότητας
k2 = [0:1:N2-1]; w2 = pi/N2*k2;
% Σχεδιασμός σήματος και φ.πλάτους
figure(2); subplot(211);
stem(n,x2); grid; xlabel('Χρόνος [n]'); title('Σήμα x2[n]');
subplot(212); stem(w2/pi, abs(X2));
grid on; xlim([0 1]);
xlabel('Συχνότητα [k]');
title('Πλάτος |X2[k]|');
	

Συγκρίνοντας τα δύο προηγούμενα διαγράμματα, παρατηρούμε ότι η προσθήκη μηδενικών (zero padding) και ο υπολογισμός DFT μεγαλύτερου μήκους, αύξησε την **πυκνότητα** του φάσματος, δεν κατάφερε όμως να εντοπίσει τις δύο διαφορετικές συχνότητες που περιέχει το σήμα $x[n]$, καθώς και οι δύο αποδίδονται ως μία κορυφή.

(γ) DFT 100-σημείων για $0 \leq n \leq 99$.

Ακολουθεί κώδικας με τον οποίο υπολογίζουμε τον DFT 100-σημείων για ακολουθία $x[n]$, μήκους επίσης 100 σημείων.

Κώδικας Matlab	Αποτέλεσμα

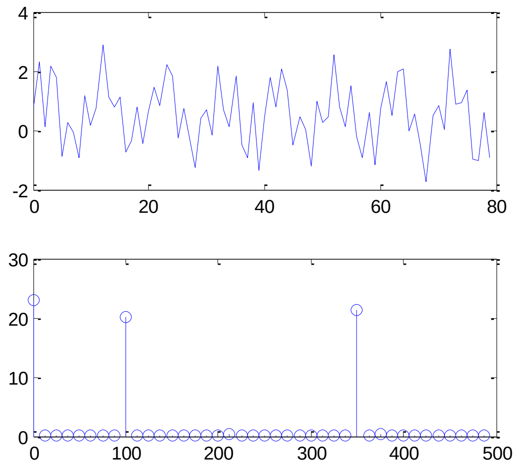
% DFT 100 σημείων με πραγματικά δείγματα
X = fft(x, N2);
% Σχεδιασμός σήματος και φάσματος πλάτους
figure(3); subplot(211); stem(n, x); grid on; xlabel('Χρόνος [n]');
title('Σήμα x[n]');
subplot(212); stem(w2/pi, abs(X));
grid on; xlim([0 1]);
xlabel('Συχνότητα [k]');
title('Πλάτος |X[k]|');
	

Συγκρίνοντας τα δύο τελευταία διαγράμματα, παρατηρούμε ότι η προσθήκη περισσότερων περιόδων του σήματος (αντί μηδενικών) και ο υπολογισμός DFT μεγαλύτερου μήκους, αύξησε την **ευκρίνεια** του φάσματος και εντοπίστηκαν με ακρίβεια οι δύο διαφορετικές συχνότητες που περιέχει το σήμα $x[n]$.

Παράδειγμα 3 – Υπολογισμός φασματικής πυκνότητας ενέργειας

Στο αναλογικό σήμα $x(t) = sin(200\pi t) + sin(700\pi t)$ προστίθεται θόρυβος μηδενικής μέσης τιμής και ακολούθως δειγματοληπτείται με συχνότητα δειγματοληψίας 1000 Hz. Να υπολογιστεί να σχεδιαστεί το ενθόρυβο σήμα και η φασματική πυκνότητα ενέργειας και να ευρεθούν οι συχνότητες που περιέχει το αρχικό αναλογικό σήμα.

Κώδικας Matlab	Αποτέλεσμα

`% Συχν. & περίοδος δειγμ/ψίας`
`fs = 1000; Ts = 1/fs;`
`% Κλίμακα χρόνου και συχνότητας`
`N = 80; n = [0:N-1];`
`f = fs*(0:N/2-1)/N;`
`% Δημιουργία σήματος με θόρυβο`
`xa = sin(200*pi*n*Ts) +`
`sin(700*pi*n*Ts);`
`x = xa + rand(1,length(xa));`
`% Υπολογισμός DFT X[k] N-σημείων`
`X = fft(x, N);`
`% Υπολογισμός φασμ. πυκν. ενέργειας`
`Sx = abs(X.^2) / N;`
`% Σχεδιασμός σήματος και φασματικής`
`πυκνότητας ενέργειας`
`subplot(211); plot(n, x);`
`subplot(212); stem(f, Sx(1:N/2));`
	

Από τις κορυφές του φάσματος πυκνότητας ενέργειας συμπεραίνουμε ότι το αρχικό σήμα περιέχει τις συχνότητες 100 Hz και 350 Hz. Η κορυφή που εμφανίζεται στα 0 Hz οφείλεται στον θόρυβο μηδενικής μέσης τιμής που προσθέσαμε στο σήμα.

Παράδειγμα 4 – Παραθύρωση σήματος

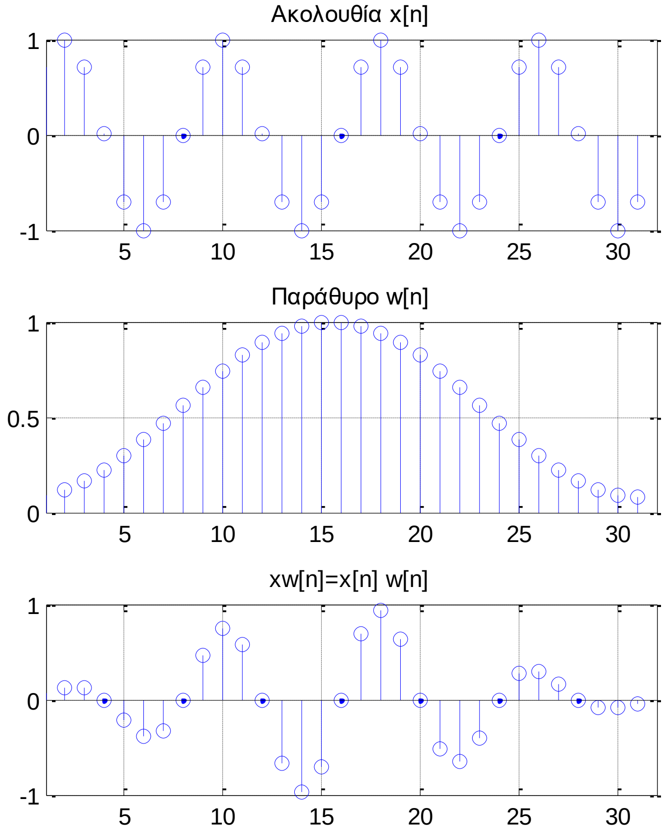
Το σήμα διακριτού χρόνου $x[n] = \sin(\pi n/4)\,\big[u[n] - u[n-64]\big]$ πολλαπλασιάζεται με ένα παράθυρο Hamming μήκους 64 σημείων. Να βρεθεί στο Matlab το σήμα $x_w[n]$ που προκύπτει και να σχεδιαστούν τα φάσματα των σημάτων $x[n], w[n]$ και $x_w[n]$.

Απάντηση: Ακολουθεί ο κώδικας Matlab:

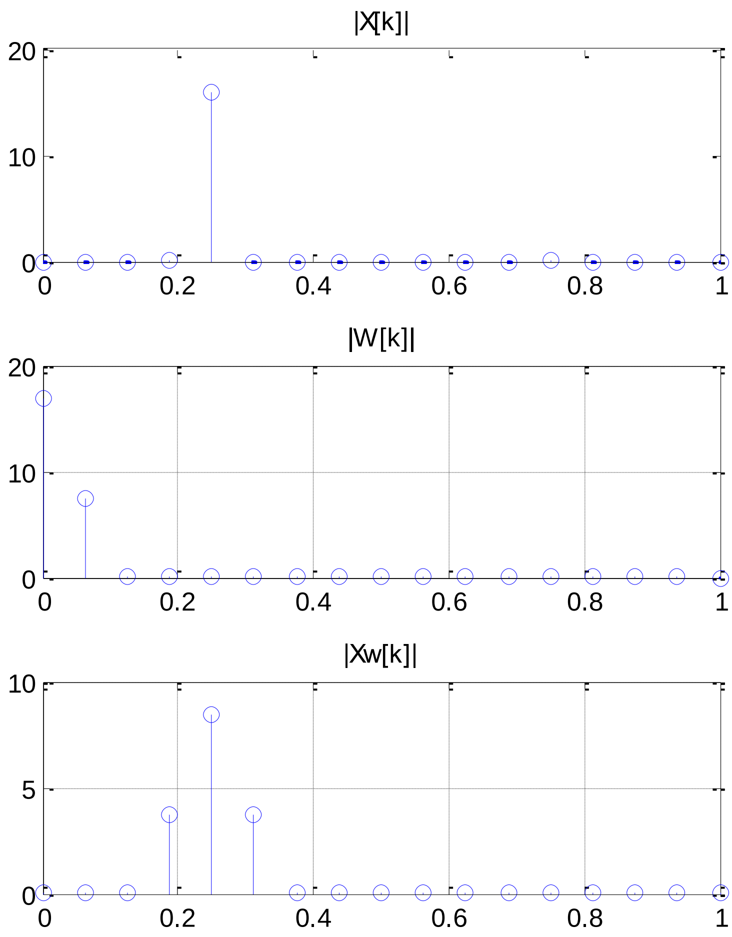
```
N = 32; % Μήκος σήματος και παραθύρου
% Δημιουργία κλιμάκων χρόνου και συχνότητας
n = [0:N-1]; k = [0:1/(N/2):1];
x = sin(pi*n/4);     % Δημιουργία σήματος x[n]
w = hamming(N)';     % Δημιουργία παραθύρου Hamming
xw = x .* w;     % Πολλαπλασιασμός xw[n]=x[n]w[n]
% Υπολογισμός DFT X[k], W[k], Xw[k]
X = fft(x, N); W = fft(w, N); Xw = fft(xw, N);
% Σχεδιασμός σημάτων στο χρόνο
figure(1);
subplot(311);stem(n,x); grid on; xlim([1,N]); title('Ακολουθία x[n]')
subplot(312);stem(n,w); grid on; xlim([1,N]); title('Παράθυρο w[n]')
subplot(313);stem(n,xw);grid on; xlim([1,N]); title('xw[n]=x[n] w[n]')
```

```
% Σχεδιασμός σημάτων στη συχνότητα
figure(2); subplot(311); grid on; stem(k, abs(X(1:N/2+1))); title('|X[k]|')
subplot(312); stem(k, abs(W(1:N/2+1))); grid on; title('|W[k]|')
subplot(313); stem(k, abs(Xw(1:N/2+1))); grid on; title('|Xw[k]|')
```

Αποτελέσματα:



(α) Ακολουθία σήματος $x[n]$, (β) Παράθυρο $w[n]$, (γ) Παραθυρωμένο σήμα $x_w[n]$



(α) Φάσμα σήματος $X[k]$, (β) Φάσμα παραθύρου $W[k]$,
(γ) Φάσμα παραθυρωμένου σήματος $X_w[k]$

Παρατηρούμε ότι στο φάσμα του $X[k]$ εμφανίζεται η συχνότητα $f_x = \pi/8$ του σήματος $x[n] = sin[\pi n/4]$. Στο φάσμα του $X_w[k]$ εκτός από τη συχνότητα f_x εμφανίζονται επίσης συχνότητες εκατέρωθεν αυτής, οι οποίες δεν υπάρχουν στο σήμα $x[n]$ αλλά δημιουργούνται εξαιτίας των πλευρικών λοβών της $W[k]$.

4. Άλυτες Ασκήσεις

1. Να δημιουργήσετε το σήμα $x[n] = 2cos(2pi\, 6\, nTs) + 1.5cos(2pi\, 17\, nTs)$ με μήκος 1000 σημεία και συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 100\,Hz$. Κατόπιν να υπολογίσετε τον DFT-256 και 32 σημείων. Να απεικονίσετε το σήμα και το μέτρο του μετασχηματισμού DFT σε κάθε περίπτωση. Τι παρατηρείτε για τις διαφορετικές τιμές N;

2. Στο σήμα x[n] της άσκησης 1 προστίθεται λευκός θόρυβος μηδενικής μέσης τιμής (zero-mean white noise) και παράγεται το σήμα s[n]. Να υπολογίσετε τον DFT-256 σημείων του ενθόρυβου σήματος s[n] για τιμές πλάτους θορύβου A=1 και A=3 και να απεικονίσετε τα σήματα και το μέτρο του μετασχηματισμού DFT.

ΜΕΡΟΣ Β' – Ιδιότητες DFT – Υπολογισμός Κυκλικής Συνέλιξης

1. Σκοπός της Άσκησης

Σκοπός της άσκησης είναι η εξοικείωση των φοιτητών με τις ιδιότητες του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier (DFT) και με τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης.

2. Προαπαιτούμενα

Για την επιτυχή υλοποίηση της άσκησης είναι απαραίτητη η μελέτη της ενότητας 8 της θεωρίας.

3. Μελέτη Ιδιοτήτων DFT και Κυκλική Συνέλιξη στο Matlab

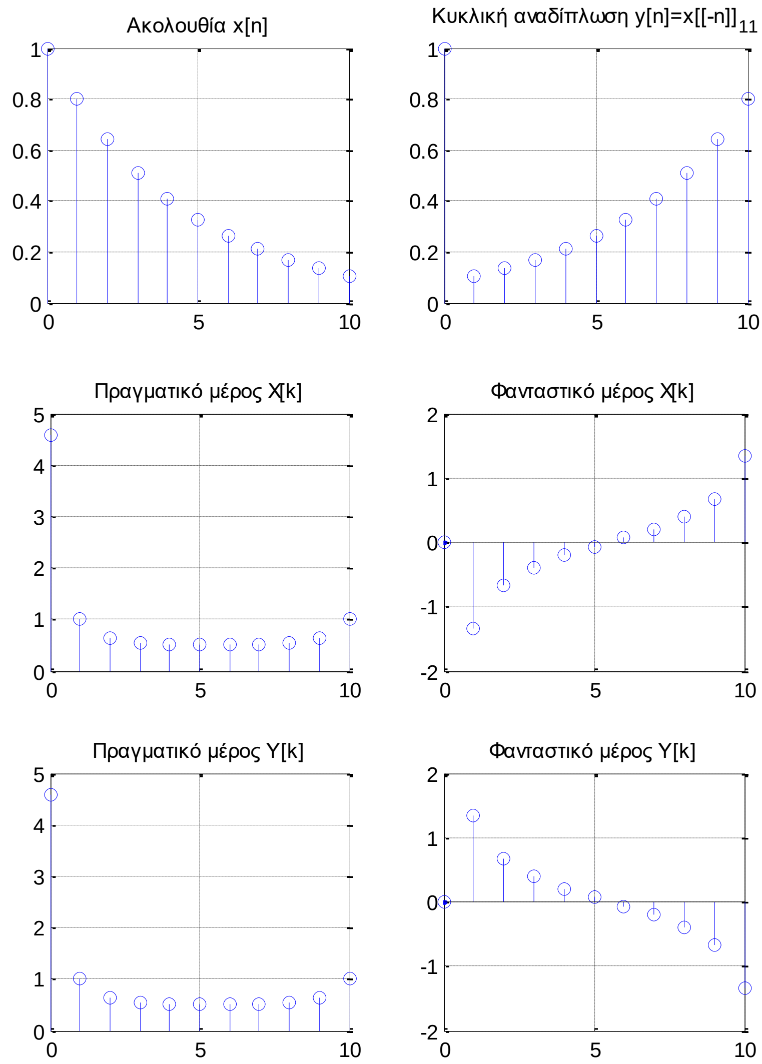
Για τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης $y[n] = x_1[n] \textcircled{N} x_2[n]$, δύο σημάτων $x_1[n]$ και $x_2[n]$ μήκους N_1 και N_2 αντίστοιχα, το Matlab διαθέτει τη συνάρτηση **cconv()**, η οποία συντάσσεται **y = cconv(x1, x2, N)**, όπου N είναι το επιθυμητό μήκος επιστρεφόμενου διανύσματος.

- Αν το N αγνοηθεί τότε θεωρείται ότι είναι ίσο με $N_1 + N_2 - 1$.
- Αν ισχύει $N = N_1 + N_2 - 1$ τότε η κυκλική συνέλιξη ισούται με τη γραμμική συνέλιξη, που υπολογίζεται από τη συνάρτηση **conv()**.

Παράδειγμα 1 – DFT κυκλικής αναδίπλωσης ακολουθίας

Χρησιμοποιώντας την ακολουθία $x[n] = (0.8)^n$ για $0 \le n \le 10$, να επιβεβαιωθεί η ιδιότητα της κυκλικής αναδίπλωσης.

```
N = 10; n = [0:N];
% Δημιουργία ακολουθίας x[n]
x = (0.8) .^ n;
% Κυκλική αναδίπλωση y[n]=x[n mod 11]
y = x(mod(-n,N+1) + 1);
% Σχεδίαση ακολουθιών x[n] και y[n]
figure(1); subplot(121); stem(n,x); title('Ακολουθία x[n]');
subplot(122); stem(n,y); title('Κυκλική αναδίπλωση y[n]=x[[-n]]_1_1');
% Υπολογισμός DFT ακολουθιών x[n] και y[n]
k = [0:N];
X = fft(x,N+1);
Y = fft(y,N+1);
% Σχεδίαση πραγματικού & φανταστικού μέρους DFT X[k] και Y[k]
figure(2);
subplot(141); stem(k, real(X)); title('Πραγματικό μέρος X[k]');
subplot(142); stem(k, imag(X)); title('Φανταστικό μέρος X[k]');
subplot(143); stem(k, real(Y)); title('Πραγματικό μέρος Y[k]');
subplot(144); stem(k, imag(Y)); title('Φανταστικό μέρος Y[k]');
```



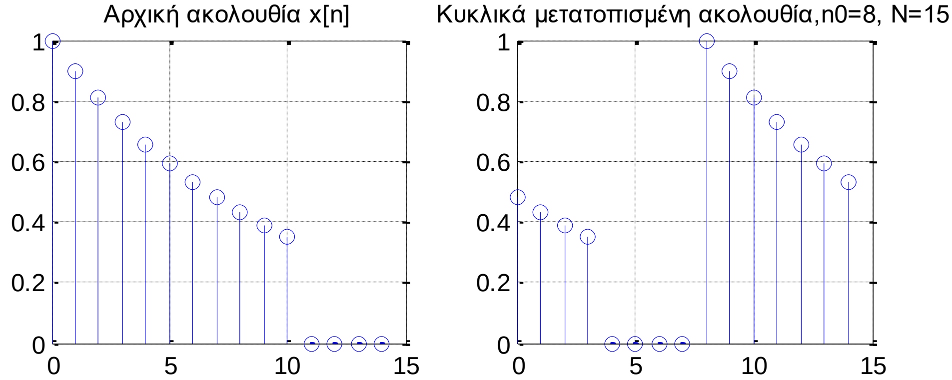
Συγκρίνοντας τα διαγράμματα πραγματικού και φανταστικού μέρους των DFT $X[k]$ και $Y[k]$, διαπιστώνουμε ότι ισχύει η σχέση $Y[k] = X[N-k]$, άρα επιβεβαιώνεται η ιδιότητα της κυκλικής αναδίπλωσης.

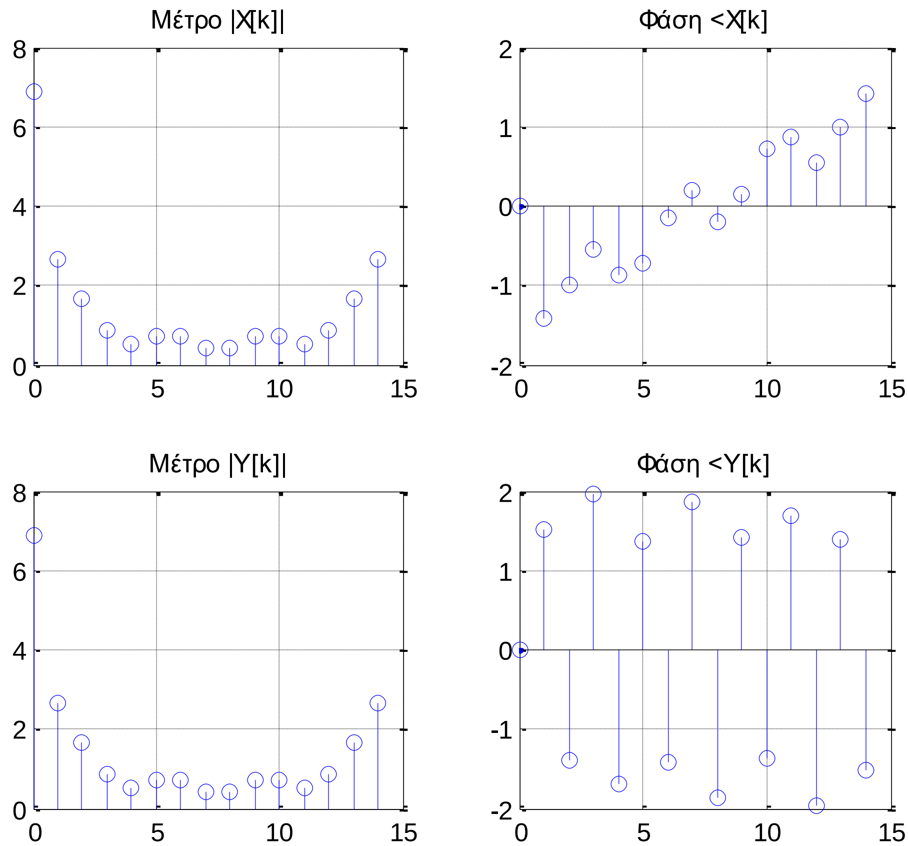
Παράδειγμα 2 – DFT κυκλικά μετατοπισμένης ακολουθίας

Να υπολογιστεί ο DFT της κυκλικά μετατοπισμένης ακολουθίας $y[n] = x\big[[n-8]\big]_{15}$, όπου $x[n] = (0.9)^n$ για $0 \leq n \leq 10$.

```
L = 10; n = [0:1:L];
x = 0.9 .^ n;% Αρχική ακολουθία x[n]
% Κυκλική μετατόπιση y[n] = x[[n-m] mod N]
n0 = 8;  % Μετατόπιση σημείων
N = 15;  % Μήκος ακολουθίας
x = [x zeros(1, N-L-1)];
n = [0:1:N-1];
y = x(mod(n-n0, N)+1);
% Σχεδίαση ακολουθιών x[n] και y[n]
figure(1); subplot(211);stem(n,x); title('Αρχική ακολουθία x[n]');
```

```
subplot(212);stem(n,y); title('Κυκλικά μετατοπισμένη ακολουθία,n0=8, N=15')
% Υπολογισμός DFT ακολουθιών x[n] και y[n]
k = [0:N-1];
X = fft(x, N);
Y = fft(y, N);
% Σχεδίαση πραγματικού & φανταστικού μέρους DFT X[k] και Y[k]
figure(2); subplot(221); stem(k, abs(X)); title('Μέτρο |X[k]|');
subplot(222); stem(k, angle(X)); title('Φάση <X[k]');
subplot(223); stem(k, abs(Y)); title('Μέτρο |Y[k]|');
subplot(224); stem(k, angle(Y)); title('Φάση <Y[k]');
```





Συγκρίνοντας τα διαγράμματα μέτρου των DFT $X[k]$ και $Y[k]$ διαπιστώνουμε ότι είναι ίδια, ενώ από τα διαγράμματα φάσης προκύπτει μετατόπιση φάσης ίση με τη φάση του όρου W_{15}^{8k}.

Παράδειγμα 3 – Υπολογισμός Κυκλικής Συνέλιξης

Να υπολογιστεί με τη χρήση του Matlab η γραμμική και η κυκλική συνέλιξη των σημάτων $x[n] = \{\hat{2},\ 1,\ 2,\ 1\}$ και $h[n] = \{\hat{1},\ 2,\ 3\}$.

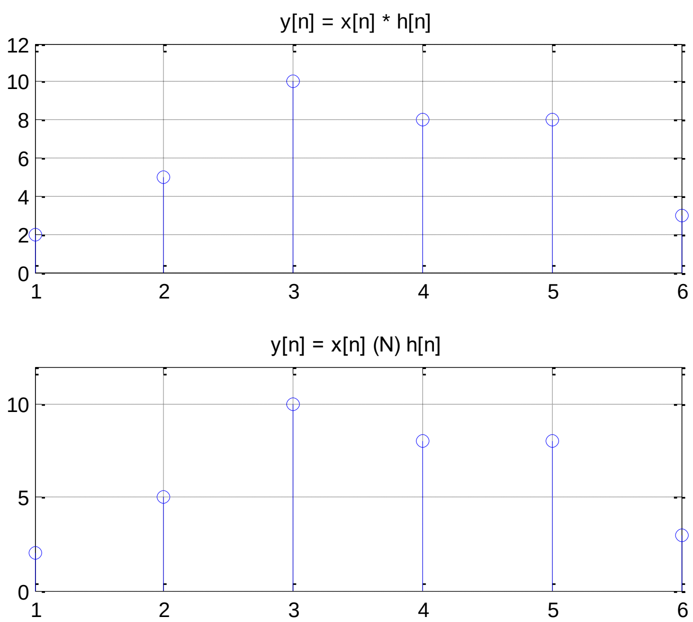
Απάντηση: Τα μήκη των ακολουθιών $x[n]$ και $h[n]$ είναι $N_x = 4$ και $N_h = 3$ Επομένως, το μήκος της κυκλικής συνέλιξης θα είναι $N_y = N_x + N_h - 1 = 6$.

```
% x[n] = {<2>, 1, 2, 1}
x = [2, 1, 2, 1]; Nx = length(x);
% h[n] = {<1>, 2, 3}
h = [1, 2, 3]; Nh = length(h);
% Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης
y1 = conv(x, h)
% Μήκος Ny της κυκλικής συνέλιξης
Ny = Nx + Nh - 1;
% Υπολογισμός κυκλικής συνέλιξης
y2 = cconv(x, h, Ny)
% Γραφικές παραστάσεις γραμμικής και κυκλικής συνέλιξης
subplot(211);stem(y1);title('y[n] = x[n] * h[n]');grid on; ylim([0, 12]);
subplot(212);stem(y2);title('y[n] = x[n] (N) h[n]');grid on; ylim([0, 12]);
```

Αποτελέσματα:

```
y1 =
     2     5    10     8     8     3

y2 =
    2.0000    5.0000   10.0000    8.0000    8.0000    3.0000
```



Παράδειγμα 4 – Υπολογισμός κυκλικής συνέλιξης με χρήση DFT

Δίνονται οι ακολουθίες $x[n] = \{\hat{0}, 1, 2, 3\}$ και $h[n] = \{1, \hat{2}, 0, -1\}$.

(α) Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη 4 σημείων μεταξύ των ακολουθιών στο πεδίο του χρόνου.

(β) Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη 4 σημείων μεταξύ των ακολουθιών στο Matlab με χρήση του DFT.

Απάντηση:

(α) Υπολογίζουμε την κυκλική συνέλιξη τεσσάρων σημείων από τη σχέση:

$$y[n] = \left[\sum_{k=0}^{3} x[k]\,\tilde{h}[n-k]\right] R_4[n]$$

Για $n = 0$:

$$y[0] = \left[\sum_{k=0}^{3} x[k]\,\tilde{h}[-k]\right] R_4[n] = \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 1, 2, 3\}\{\hat{2}, 1, -1, 0\}$$
$$= \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 1, -2, 0\} \Rightarrow y[0] = -1$$

Για $n = 1$:

$$y[1] = \left[\sum_{k=0}^{3} x[k]\,\tilde{h}[1-k]\right] R_4[n] = \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 1, 2, 3\}\{\hat{0}, 2, 1, -1\}$$
$$= \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 2, 2, -3\} \Rightarrow y[1] = 1$$

Για $n = 2$:

$$y[2] = \left[\sum_{k=0}^{3} x[k]\,\tilde{h}[2-k]\right] R_4[n] = \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 1, 2, 3\}\{-\hat{1}, 0, 2, 1\}$$
$$= \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 0, 4, 3\} \Rightarrow y[2] = 7$$

Για $n = 3$:

$$y[3] = \left[\sum_{k=0}^{3} x[k]\,\tilde{h}[3-k]\right] R_4[n] = \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 1, 2, 3\}\{\hat{1}, -1, 0, 2\}$$
$$= \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, -1, 0, 6\} \Rightarrow y[3] = 5$$

Επομένως είναι:

$$y[n] = h[n] \textcircled{4} x[n] = \{-\hat{1}, 1, 7, 5\}$$

(β) Ξαναγράφουμε τις δοθείσες ακολουθίες ως:

$$x[n] = \{0, 1, 2, 3\}, \qquad n = 0, 1, 2, 3$$
$$h[n] = \{1, 2, 0, -1\}, \qquad n = -1, 0, 1, 2$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $h[n]$ μπορεί να θεωρηθεί ως η κυκλική μετατόπιση κατά μία μονάδα προς τα αριστερά μίας ακολουθίας $g[n] = \{1, 2, 0, -1\}$, $n = 0, 1, 2, 3$, δηλαδή είναι:

$$h[n] = g\big[[n+1]\big]_4$$

Θα υπολογίσουμε μέσω του μετασχηματισμού DFT την έξοδο από την κυκλική συνέλιξη $y[n] = x[n] \textcircled{4} g[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k]G[k]$ και κατόπιν θα εφαρμόσουμε στο αποτέλεσμα κυκλική μετατόπιση κατά μια μονάδα προς τα αριστερά.

```
% Μήκος κυκλικής συνέλιξης
N = 4;
% Ορισμός κλίμακας χρόνου και ακολουθιών x[n] και g[n]
n = [0, 1, 2, 3];
x = [0, 1, 2, 3];
g = [1, 2, 0, -1];
% Υπολογισμός DFT N-σημείων X[k] και G[k]
X = fft(x, N);
G = fft(g, N);
% Πολλαπλασιασμός Y[k] = X[k].G[k]
Y = X .* G;
% Υπολογισμός αντίστροφου DFT
y = ifft(Y, N);
% Κυκλική μετατόπιση κατά -1
y = circshift(y,-1)
```

Αποτελέσματα:

```
  y =

      -1     1     7     5
```

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της επίλυσης στο Matlab συμφωνεί με το αποτέλεσμα της θεωρητικής επίλυσης του ερωτήματος (α).

Παράδειγμα 5 – Εφαρμογή μεθόδου «επικάλυψης – αποθήκευσης»

Ένα σήμα διακριτού χρόνου $x[n] = \{1,1,2,-1,0,-2,3,-2,2,1,-1,2\}$ και διέρχεται μέσω ενός ΓΑΚΜ συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n] = \{1,0,-1\}$. Να υπολογιστεί στο Matlab η έξοδος του συστήματος με τη μέθοδο «επικάλυψης - αποθήκευσης» για μήκος τμήματος $N = 5$.

```
% Δημιουργία ακολουθιών x[n], h[n]
x = [1,1,2,-1,0,2,3,-2,2,1,-1,2];
h = [1,0,-1];
% Ορισμός μήκους τμήματος
N = 5;
% Lx μήκος x[n], M μήκος h[n]
Lx = length(x); M = length(h);
% Προσθήκη N-M μηδενικών στο τέλος της h[n]
h = [h zeros(1, N-M)];
% Υπολογισμός DFT H[k] N-σημείων
H = fft(h, N);
% Προσθήκη M-1 μηδενικών στην αρχή και N-1 μηδενικών στο τέλος της x[n]
```

```
x = [zeros(1,M-1), x, zeros(1, N-1)];
L = N-M+1;
% L πλήθος σωστών δειγμάτων ανά τμήμα
R = floor((Lx+M-2)/L);
% R πλήθος τμημάτων σήματος εισόδου
y = zeros(R+1, N);
% Προετοιμασία ακολουθίας εξόδου
% Υπολογισμός κυκλικής συνέλιξης μέσω DFT
for r = 0:R
% Δημιουργία τμήματος xr[n]
    xr = x(r*L+1:r*L+N);
    Xr = fft(xr, N);
% Υπολογισμός DFT Xr[k] N-σημείων

    Yr = Xr .* H;
    y(r+1,:) = ifft(Yr,N);
end
% Απόρριψη M-1 πρώτων δειγμάτων
y = y(:, M:N)';
% Δημιουργία ακολουθίας εξόδου
y = (y(:))'
```

Αποτελέσματα:

```
y =
 1.0000    1.0000    1.0000   -2.0000  -2.0000   -1.0000    3.0000
 0.0000   -1.0000    3.0000   -3.0000   1.0000    1.0000   -2.0000
```

4. Άλυτες Ασκήσεις

1. Να βρεθούν στο Matlab η κυκλικά άρτια $x_{ce}[n]$ και η κυκλικά περιττή $x_{co}[n]$ συνιστώσες της ακολουθίας $x[n] = (0.5)^n$ για $0 \leq n \leq 10$, να υπολογιστεί ο DFT των συνιστωσών και να επιβεβαιωθούν οι σχέσεις συμμετρίας.
2. Να υπολογιστεί η γραμμική συνέλιξη καθώς και η κυκλική συνέλιξη 4, 5 και 6 σημείων μεταξύ των ακολουθιών $x_1[n] = \{0, 1, 2, 3\}$ και $x_2[n] = \{1, 2, -1\}$ με χρήση του DFT και να συγκριθούν τα αποτελέσματα.
3. Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη 4 έως 7 σημείων των σημάτων $x[n] = \{\hat{0},\ 2,\ 0,\ 2\}$ και $h[n] = \{\hat{0},\ -1,\ 0,\ -1\}$. Πότε η κυκλική συνέλιξη ταυτίζεται με την γραμμική συνέλιξη;