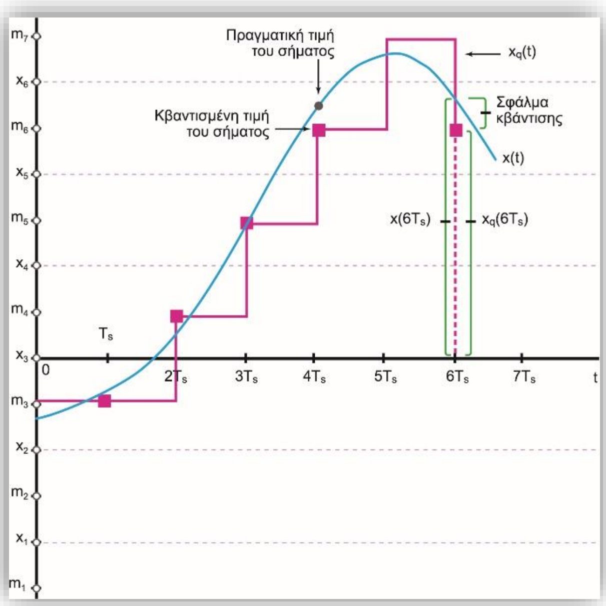
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ

Εργαστηριακή Άσκηση 1

«Μετατροπή Σήματος από Αναλογική Μορφή σε Ψηφιακή Μορφή»



Παρασκευάς Μιχάλης
Καθηγητής

Φεβρουάριος 2024

Έκδοση: 5.0

Πίνακας περιεχομένων

1. Σκοπός της Άσκησης

Σκοπός της εργαστηριακής άσκησης είναι η εξοικείωση με τις έννοιες της μετατροπής αναλογικού σήματος σε ψηφιακό.

2. Προαπαιτούμενα

Για την επιτυχή υλοποίηση της άσκησης είναι απαραίτητη η μελέτη της ενότητας 1 της Θεωρίας.

3. Μετατροπή Αναλογικού Σήματος σε Ψηφιακό στο Matlab

Παράδειγμα 1 – Δειγματοληψία, έλεγχος κριτηρίου Nyquist

Δίνεται το σήμα $x_\alpha(t) = 2\cos(8\pi t + \pi/3),\ -\infty < t < \infty$. Χρησιμοποιώντας τιμές της περιόδου δειγματοληψίας $T_s = 0.1,\ 0.125$ και $0.25\ sec/sample$ να βρεθεί αν ικανοποιείται το κριτήριο Nyquist και αν το δειγματοληπτημένο σήμα μοιάζει με το αρχικό ή όχι.

Απάντηση: Η συχνότητα f_x του δοθέντος σήματος δίνεται από τη σχέση $2\pi f_x = 8\pi$. Επομένως είναι $f_x = 4\ Hz$ και η συχνότητα Nyquist είναι $f_N = 2f_x = 8\ Hz$ ή $16\pi\ (rad/sec)$.

(α) Για $T_s = 0.1\ sec/sample$, η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 1/T_s = 10\ Hz$ ή $\Omega_s = 2\pi/T_s = 20\pi$. Η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα Nyquist, άρα ικανοποιείται το θεώρημα της δειγματοληψίας. Τα δείγματα $x_a(nT_s)$ είναι:

$$x_\alpha(nT_s) = 2\cos\left(8\pi\, 0.1\, n + \frac{\pi}{3}\right), \qquad -\infty < n < \infty$$

(β) Για τιμή $T_s = 0.125\ sec/sample$, η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 1/T_s = 8\ Hz$ ή $\Omega_s = 2\pi/T_s = 16\pi$. Η τιμή αυτή είναι ίση με τη συχνότητα Nyquist, άρα ικανοποιείται οριακά το θεώρημα της δειγματοληψίας. Τα δείγματα $x_a(nT_s)$ είναι:

$$x_a(nT_s) = 2\cos\left(8\pi\, 0.125\, n + \frac{\pi}{3}\right), \qquad -\infty < n < \infty$$

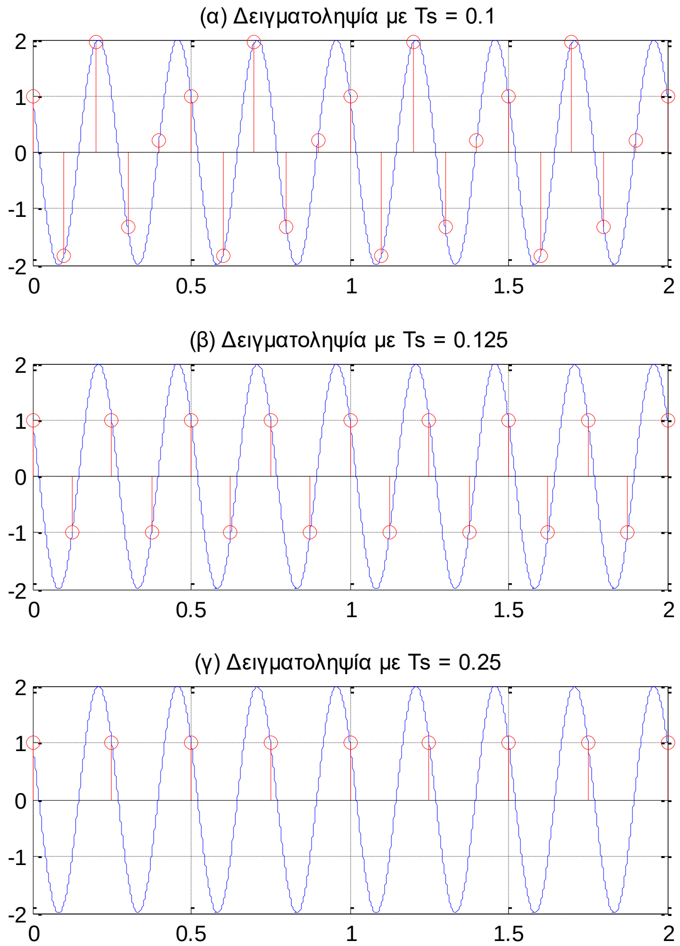
(γ) Για τιμή $T_s = 0.25\ sec/sample$, η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 1/T_s = 4\ Hz$ ή $\Omega_s = 2\pi/T_s = 8\pi$. Η τιμή αυτή είναι μικρότερη με τη συχνότητα Nyquist, άρα δεν ικανοποιεί το θεώρημα της δειγματοληψίας. Τα δείγματα $x_a(nT_s)$ είναι:

$$x_a(nT_s) = 2\cos\left(8\pi\, 0.25\, n + \frac{\pi}{3}\right), \qquad -\infty < n < \infty$$

Ακολουθεί η επίλυση στο Matlab:

```
fx = 4;          % Συχνότητα σήματος x(t)
fN = 2*fx;       % Συχνότητα Nyquist
phase = pi/3     % Φάση

% Δημιουργία σήματος συνεχούς χρόνου x(t)
t = 0 : 0.001 : 2; xa = 2 * cos(2*pi*fx*t + phase);
```

```
% Δειγματοληψία με ρυθμό fs > fN
Ts = 0.1; fs = 1/Ts;
nTs = 0 : Ts : 2; xs = 2 * cos(2*pi*fx*nTs + phase);
figure(1); subplot(311); plot(t, xa); hold on; stem(nTs, xs, 'ro');
title('(α) Δειγματοληψία με Ts = 0.1'); grid on; hold off
% Δειγματοληψία με ρυθμό fs = fN
Ts = 0.125; fs = 1/Ts;
nTs = 0 : Ts : 2; xs = 2 * cos(2*pi*fx*nTs + phase);
subplot(312); plot(t, xa); hold on; stem(nTs, xs, 'ro');
title('(β) Δειγματοληψία με Ts = 0.125'); grid on; hold off

% Δειγματοληψία με ρυθμό fs < fN
Ts = 0.25; fs = 1/Ts;
nTs = 0 : Ts : 2; xs = 2 * cos(2*pi*fx*nTs + phase);
subplot(313); plot(t, xa); hold on; stem(nTs, xs, 'ro');
title('(γ) Δειγματοληψία με Ts = 0.25'); grid on; hold off
```



<u>Παρατηρήσεις</u>:

Από το σχήμα (α) παρατηρούμε ότι σε κάθε περίοδο του αρχικού σήματος λαμβάνουμε 3 δείγματα, από τα οποία είναι εφικτή η ανακατασκευή του αρχικού σήματος.

Από το σχήμα (β) παρατηρούμε ότι σε κάθε περίοδο του αρχικού σήματος λαμβάνουμε 2 δείγματα, από τα οποία είναι οριακά εφικτή η ανακατασκευή του αρχικού σήματος χωρίς την εμφάνιση του φαινομένου της αλλοίωσης (aliasing effect). Ωστόσο, η περίπτωση αυτή πρέπει να αποφεύγεται επειδή για τιμή της φάσης ίση με π/2, η δειγματοληψία καταρρέει (αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη).

Από το σχήμα (γ) παρατηρούμε ότι σε κάθε περίοδο του αρχικού σήματος λαμβάνουμε 1 δείγμα. Στην περίπτωση αυτή δεν είναι εφικτή η ανακατασκευή του αρχικού σήματος.

Παράδειγμα 2 – Δειγματοληψία, φάσματα παραγόμενων σημάτων

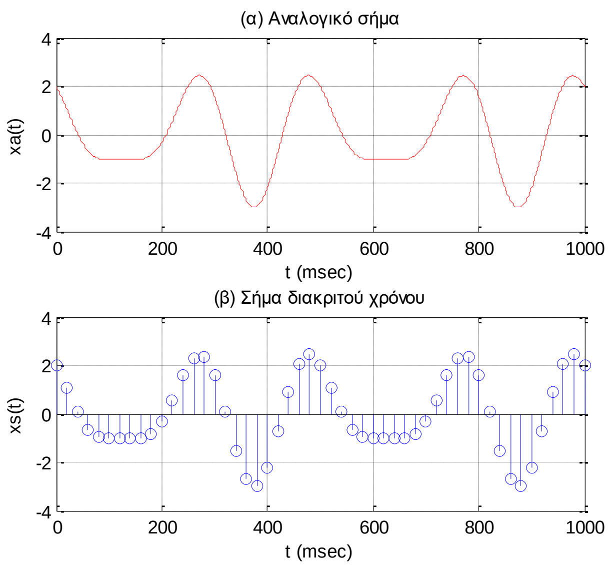
(1) Να γίνει δειγματοληψία του σήματος $x_a(t) = 2\cos(8\pi t) - \sin(12\pi t)$ με τιμές της περιόδου δειγματοληψίας: (α) που δεν προκαλεί φαινόμενο αλλοίωσης και (β) που προκαλεί το φαινόμενο της αλλοίωσης.

(2) Σε κάθε περίπτωση (α) και (β) να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier και να συγκρίνετε το αναλογικό με το ψηφιακό σήμα τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και της συχνότητας.

Απάντηση: Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι $2\pi f_{max} = 12\pi \Rightarrow f_{max} = 6\,Hz$ ή $\Omega_{max} = 12\pi\, rad/sec$. Επομένως η συχνότητα Nyquist είναι $f_N = 12\,Hz$. Άρα για τη συχνότητα δειγματοληψίας πρέπει να ισχύει $f_s \geq 12\,Hz$ και για την περίοδο δειγματοληψίας $T_s \leq 0.0833\, sec/sample$, ώστε να μην εμφανίζεται το φαινόμενο της αλλοίωσης. Για να αναπαραστήσουμε το αναλογικό σήμα $x_a(t)$ επιλέγουμε μία επαρκώς μικρή τιμή $\Delta t = 0.0001\, sec$ και διάρκεια του σήματος ίση με 1 sec.

(α) Επιλέγουμε τιμή της περιόδου δειγματοληψίας έστω $T_s = 0.02\, sec/sample$, που δεν προκαλεί το φαινόμενο της αλλοίωσης.

```
% Δημιουργία αναλογικού σήματος
Dt = 0.0001; t = 0:Dt:1; xa = 2*cos(8*pi*t) - sin(12*pi*t);
% Σχεδιασμός αναλογικού σήματος (κλίμακα χρόνου msec)
figure(1); subplot(211); plot(t*1000,xa,'r'); grid on; xlabel('t (msec)');
ylabel('xa(t)'); title('(α) Αναλογικό σήμα'); hold on
% Δημιουργία σήματος διακριτού χρόνου (ψηφιακό)
Ts = 0.02; n = 0:1:(1/Ts); nTs=n*Ts; xs = 2*cos(8*pi*nTs) - sin(12*pi*nTs);
% Σχεδιασμός αναλογικού και ψηφιακού σήματος για Ts=0.02 sec/sample
subplot(212); stem(n*Ts*1000,xs); grid on; xlabel('t (msec)');
ylabel('xs(t)'); title('(β) Σήμα διακριτού χρόνου'); hold off
```



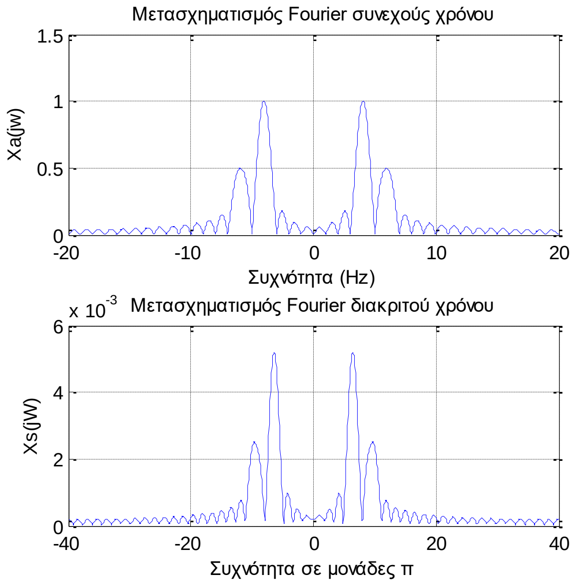
Παρατηρούμε ότι το δειγματοληπτημένο σήμα αποτελείται από 50 δείγματα στη διάρκεια του 1 sec γεγονός που συμφωνεί με την περίοδο δειγματοληψίας T_s που επιλέξαμε.

Τώρα θα υπολογίσουμε τον μετ. Fourier του αναλογικού σήματος $x_a(t)$ καθώς και του δειγματοληπτημένου $x_s(nT_s)$, έτσι ώστε να συγκρίνουμε τα φάσματά τους. Το Matlab διαθέτει τη συνάρτηση **fft()** για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier, ωστόσο αυτή χρησιμοποιείται για σήματα διακριτού χρόνου. Επομένως, για το αναλογικό σήμα $x_a(t)$ θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier από τον ορισμό του. Εφόσον το δοθέν σήμα εκτείνεται έως 6 Hz, ο υπολογισμός μπορεί να γίνει στην περιοχή συχνοτήτων [0, 20] Hz ή ισοδύναμα στην περιοχή [0, 40π] rad/sec. Για να σχηματιστεί το φάσμα και για τις αρνητικές συχνότητες θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση **fliplr()**, η οποία αντιστρέφει τις θέσεις ενός διανύσματος. Υπενθυμίζεται ότι η διακριτή συχνότητα του DTFT συμβολίζεται με ω και μετριέται σε rad, ενώ η συνεχής συχνότητα συμβολίζεται με Ω και μετριέται σε rad/sec. Επομένως, με w θα συμβολίσουμε τη διακριτή συχνότητα ω και με W θα συμβολίσουμε τη συνεχή συχνότητα Ω.

```
% Υπολογισμός μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου Xa(W)
fmax = 20; Wmax = 2*pi*fmax;  % Μέγιστη συχνότητα φάσματος
K = 500;                      % Πλήθος σημείων υπολογισμού μετ. Fourier
k = 0:1:K; W = k*Wmax/K;      % Συνεχής συχνότητα Ω
Xa = xa * exp(-j*t'*W) * Dt;  % Ορισμός μετασχηματισμού Fourier
Xa = abs(Xa);                 % Κρατάμε μόνο το μέτρο του Fourier
W = [-fliplr(W), W(2:K+1)];   % Δημιουργία αρνητικού μέρους φάσματος
Xa = [fliplr(Xa), Xa(2:K+1)];
```

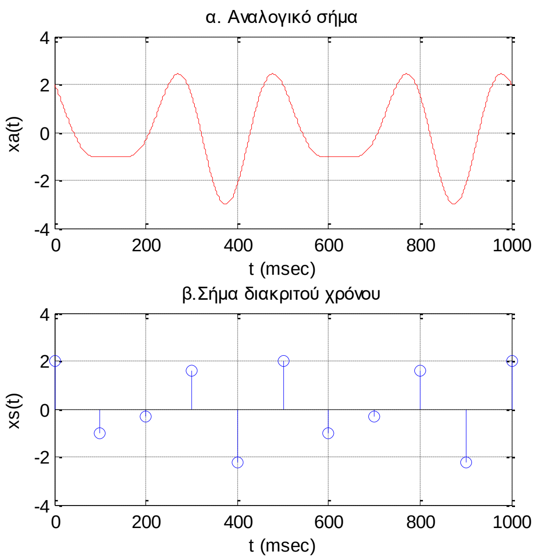
Αντίστοιχα, για το δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(nT_s)$ θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) με βάση τον παρακάτω κώδικα.

```
% Υπολογισμός μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου Xs(w)
W = pi*k/K;                   % Διακριτή συχνότητα Ω
Xs = xs * exp(-j*n'*W) * Dt;  % Ορισμός DTFT
Xs = abs(Xs);                 % Κρατάμε μόνο του DTFT
W = [-fliplr(W), W(2:K+1)];   % Δημιουργία αρνητικού μέρους φάσματος
Xs = [fliplr(Xs), Xs(2:K+1)];
% Σχεδιασμός φασμάτων Xa(w), Xs(W)
subplot(211); plot(w/(2*pi), Xa);    % Απεικόνιση φάσματος Xa(w)
xlabel('Συχνότητα (Hz)'); ylabel('Xa(jw)'); grid on
title('Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου')
subplot(212); plot(w/(pi), Xs);      % Απεικόνιση φάσματος Xs(w)
xlabel('Συχνότητα σε μονάδες π'); ylabel('Xs(jW)'); grid on
title('Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου')
```



Από τη σύγκριση των φασμάτων προκύπτει ότι δεν εμφανίζεται φαινόμενο αλλοίωσης για συχνότητα δειγματοληψίας $T_s = 0.02\ sec/sample$. Αυτό συμφωνεί με τη θεωρία, καθώς η συγκεκριμένη τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας ικανοποιεί το θεώρημα δειγματοληψίας.

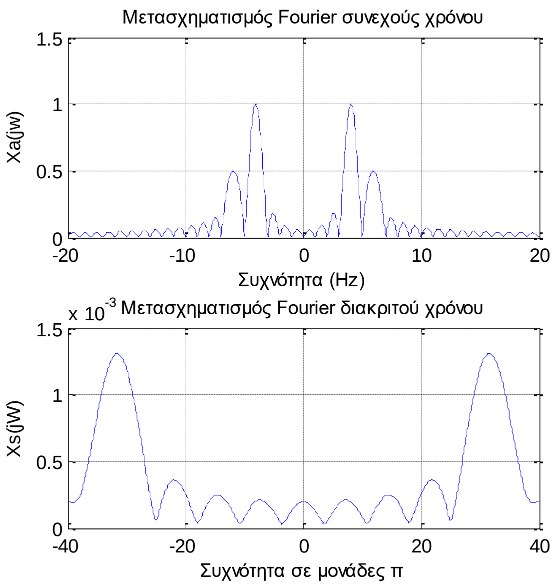
(β) Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω ανάλυση για συχνότητα δειγματοληψίας ίση με $T_s = 0.1\ sec/sample$. Εκτελούμε τον ίδιο κώδικα Matlab με μοναδική αλλαγή στην τιμή της μεταβλητής T_s και λαμβάνουμε τα σχήματα:



Από το σχήμα προκύπτει ότι για περίοδο δειγματοληψίας με $T_s = 0.1\ sec/sample$ ή συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 10$ Hz το πλήθος των δειγμάτων ανά sec είναι μόλις 11. Το πλήθος αυτό είναι πολύ μικρό για να εξασφαλίσει την επιτυχή ανακατασκευή του αρχικού σήματος.

Πράγματι, στο πεδίο της συχνότητας, έχουμε:

Από το σχήμα προκύπτει ότι για περίοδο δειγματοληψίας με $T_s = 0.1\ sec/sample$ ή συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 10$ Hz το πλήθος των δειγμάτων ανά sec είναι μόλις 11. Το πλήθος αυτό είναι πολύ μικρό για να εξασφαλίσει την επιτυχή ανακατασκευή του αρχικού σήματος. Πράγματι, στο πεδίο της συχνότητας, έχουμε:



Από τη σύγκριση των φασμάτων, προκύπτει ότι για περίοδο δειγματοληψίας με $T_s = 0.1\ sec/sample$ ή συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 10$ Hz εμφανίζεται το φαινόμενο αλλοίωσης. Αυτό συμβαίνει επειδή η συγκεκριμένη τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας υπολείπεται της συχνότητας Nyquist, άρα δεν ικανοποιείται το θεώρημα δειγματοληψίας.

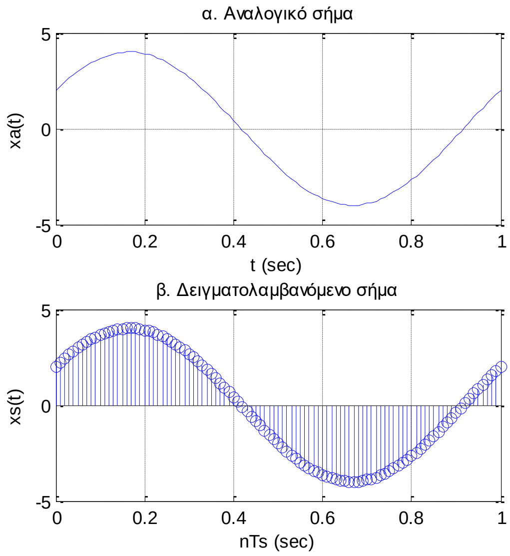
Παράδειγμα 3 – Δειγματοληψία και κβαντισμός σήματος

Δίνεται το αναλογικό σήμα $x_a(t) = 4cos(2\pi t + \pi/6)$. Να πραγματοποιηθεί δειγματοληψία και κβαντισμός του σήματος.

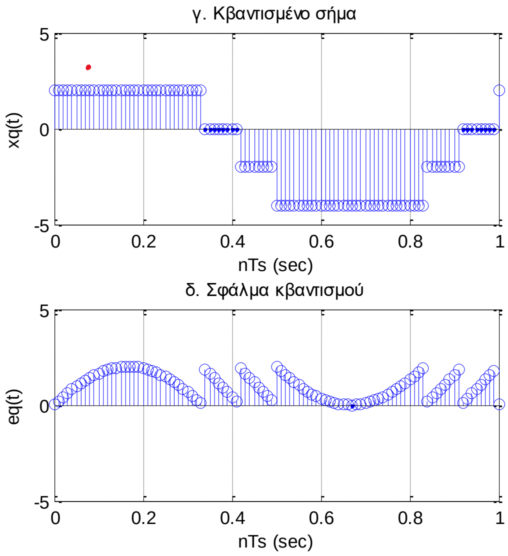
Απάντηση: Καθώς η μέγιστη συχνότητα του αναλογικού σήματος είναι $f_{max} = 1\ Hz$ ή $\omega_{max} = 2\pi\ rad/sec$, προκύπτει ότι η συχνότητα Nyquist είναι $f_N = 2\ Hz$. Επομένως, για να ικανοποιείται το θεώρημα της δειγματοληψίας, πρέπει η συχνότητα δειγματοληψίας να είναι $f_s \geq 2\ Hz$ και η περίοδος δειγματοληψίας να είναι $T_s \leq 0.5\ sec/sample$. Θέτουμε τιμή περιόδου δειγματοληψίας ίση με $T_s = 0.01\ sec/sample$ και προχωρούμε στην επίλυση.

```
Ts = 0.01;                                  % Περίοδος δειγματοληψίας
t = 0:0.01:1; xa = 4*sin(2*pi*t + pi/6);    % Αναλογικό σήμα xa(t)
N = length(t);                              % Μήκος διανύσματος χρόνου t
n = 0:N-1; xs = 4*sin(2*pi*n*Ts + pi/6);    % Δειγματοληπτημένο σήμα xs(t)

% Κβαντιστής
% floor() : στρογγυλοποίηση στον πλησιέστερο ακέραιο
% xs : δειγματοληπτημένο σήμα
% xq : κβαντισμένο σήμα

% Πλήθος σταθμών κβαντιστή L=2^Q

Q = 2;                    % Μήκος λέξης κβαντιστή
d = max(abs(xs)) / Q;     % Βήμα κβαντισμού
for k = 1:N
    if xs(k) >= 0
        xq(k) = floor(xs(k)/d)*d;
    else
        if xa(k) == min(xs)
            xq(k) = (xs(k)/abs(xs(k))) * (floor(abs(xs(k))/d)*d);
        else
            xq(k) = (xs(k)/abs(xs(k))) * (floor(abs(xs(k))/d)*d + d);
        end
```

```
        end
        if xq(k) == 2*d
            xq(k) = d;
        end
    end

    eq = xa-xq;       % Σφάλμα κβαντισμού

    figure(1)
    % Σχεδιασμός αναλογικού σήματος
    subplot(211); plot(t, xa); grid on; ylim([-5,5]);
    xlabel('t (sec)'); ylabel('xa(t)'); title('α. Αναλογικό σήμα');
    % Σχεδιασμός δειγματολομβανόμενου σήματος
    subplot(212); stem(n*Ts, xs); grid on; ylim([-5,5]);
    xlabel('nTs (sec)'); ylabel('xs(t)');
    title('β. Δειγματοληπτημένο σήμα');

    figure(2)
    % Σχεδιασμός κβαντισμένου σήματος
    subplot(211); stem(n*Ts, xq); grid on; ylim([-5,5]);
    xlabel('nTs (sec)'); ylabel('xq(t)'); title('γ. Κβαντισμένο σήμα');
    % Σχεδιασμός σφάλματος κβαντισμού
    subplot(212); stem(n*Ts, eq); grid on; ylim([-5,5]);
    xlabel('nTs (sec)'); ylabel('eq(t)'); title('δ. Σφάλμα κβαντισμού');
```



(α) Αναλογικό σήμα $x_a(t)$, (β) Δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$ με $T_s = 0.01\ sec/sample$



(γ) Κβαντισμένο σήμα $x_q(t)$ σε 4 στάθμες, (δ) Σφάλμα κβαντισμού $e_q(t) = x_a(t) - x_q(t)$

Παράδειγμα 4 – Κωδικοποίηση σήματος

Να πραγματοποιηθεί η κωδικοποίηση του κβαντισμένου σήματος του προηγούμενου παραδείγματος.

Απάντηση:

```
% Κωδικοποιητής: αντιστοιχίζει κάθε μια από τις τέσσερις στάθμες των
% κβαντισμένων δειγμάτων στην κατάλληλη δυαδική ακολουθία (00, 01, 10, 11)
```

```
coded = '00';       % Αρχική τιμή

for n = 1:N
    if xq(n) == d
        code = '01 ';
    elseif xq(n) == 0
        code = '00 ';
    elseif xq(n) == -d
        code = '11 ';
    else
        code = '10 ';
    end
coded = [coded, code];
end

% Εκτύπωση δυαδικής ακολουθίας που αναπαριστά το κβαντισμένο σήμα
M = length(coded);
coded = coded(3:M)
```

Από την εκτέλεση του κώδικα του κωδικοποιητή, λαμβάνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα, το οποίο περιγράφει το αρχικό σήμα :

```
coded =
01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01
01 01 01 01 01 01 01 01 01 00 00 00 00 00 00 00 00 11 11 11 11 11 11 11 11
10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10
10 10 10 10 10 10 10 10 10 11 11 11 11 11 11 11 11 00 00 00 00 00 00 00 00
01
```

Παράδειγμα 5 – Ανακατασκευή αναλογικού σήματος από ψηφιακό

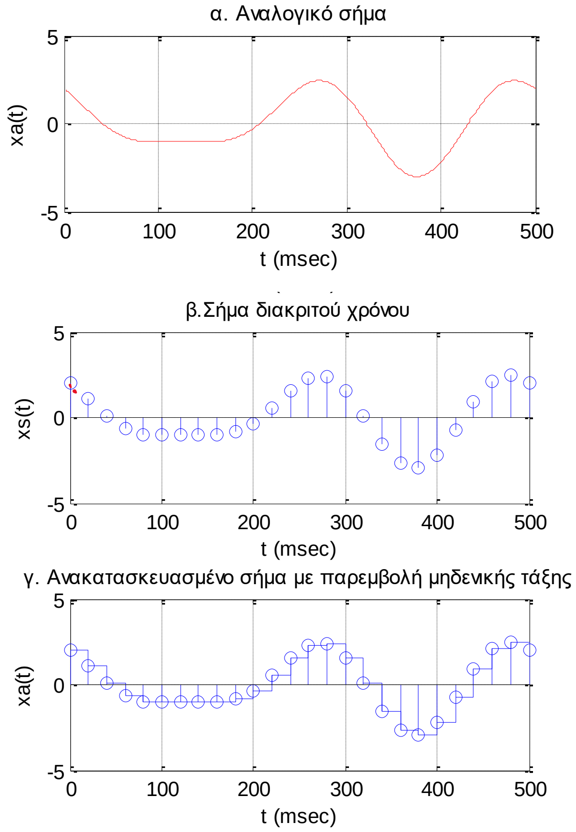
Για το σήμα $x_\alpha(t) = 2\cos(8\pi t) - \sin(12\pi t)$ του παραδείγματος 2 και για τιμές της περιόδου δειγματοληψίας (α) $T_s = 0.02\ sec/sample$ και (β) $T_s = 0.1\ sec/sample$, να γίνει η ανακατασκευή του αρχικού σήματος με παρεμβολή μηδενικής τάξης.

Απάντηση:

(α) Για τιμή της περιόδου δειγματοληψίας $T_s = 0.02\ sec/sample$ έχουμε:

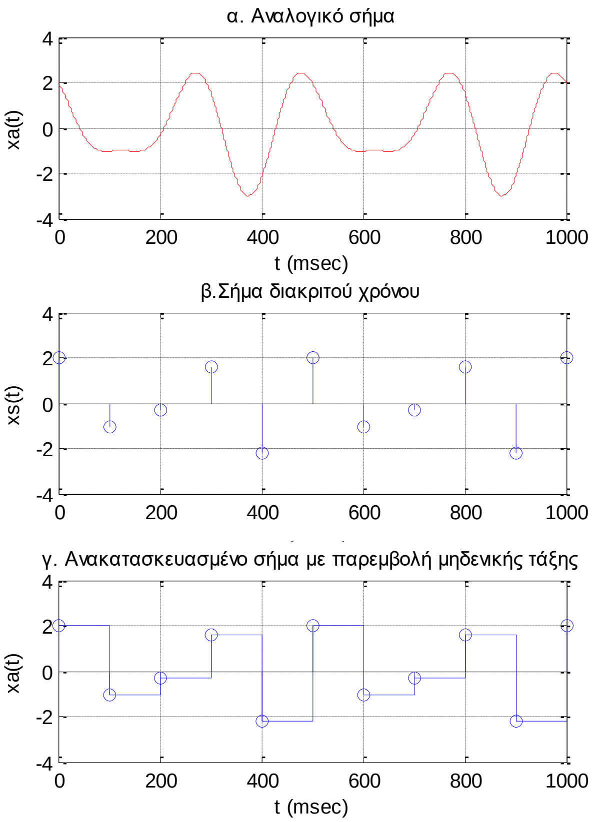
```
% Δημιουργία αναλογικού σήματος
Dt = 0.0001; t = 0:Dt:1;
xa = 2*cos(8*pi*t) - sin(12*pi*t);

% Σχεδιασμός αναλογικού σήματος (κλίμακα χρόνου msec)
subplot(311); plot(t*1000,xa,'r'); grid on;
xlabel('t (msec)'); ylabel('xa(t)'); title('α. Αναλογικό σήμα');
% Δημιουργία σήματος διακριτού χρόνου (ψηφιακό)
Ts = 0.02; n = 0:1:50; nTs=n*Ts;
xs = 2*cos(8*pi*nTs) - sin(12*pi*nTs);

% Σχεδιασμός ψηφιακού σήματος για Ts=0.02 sec/sample
subplot(312);
stem(n*Ts*1000, xs); grid on; xlabel('t (msec)'); ylabel('xs(t)');
title('β.Σήμα διακριτού χρόνου');
```

```
% Σχεδιασμός ανακατασκευασμένου αναλογικού σήματος
subplot(313);
stairs(n*Ts*1000, xs); grid on; hold on; stem(n*Ts*1000, xs)
xlabel('t (msec)'); ylabel('xa(t)');
title('γ. Ανακατασκευασμένο σήμα με παρεμβολή μηδενικής τάξης');
hold off
```



Συγκρίνοντας τα παραπάνω σχήματα (α) και (γ) παρατηρούμε ότι το ανακατασκευασμένο σήμα είναι μία σχετικά καλή προσέγγιση του αρχικού αναλογικού σήματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η συχνότητα δειγματοληψίας ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist. Ωστόσο, η παρεμβολή μηδενικής τάξης που χρησιμοποιήσαμε έδωσε στο ανακατασκευασμένο σήμα την μορφή μίας κλιμακωτής συνάρτησης και όχι μίας συνεχούς καμπύλης όπως ήταν το αρχικό σήμα. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην χαμηλή τάξη της παρεμβολής που χρησιμοποιήσαμε.

(β) Επαναλαμβάνουμε τη δειγματοληψία και ανακατασκευή του σήματος με τιμή περιόδου δειγματοληψίας $T_s = 0.1$ sec/sample. Για την ανακατασκευή του αναλογικού σήματος χρησιμοποιούμε πάλι παρεμβολή μηδενικής τάξης.



Συγκρίνοντας τα παραπάνω σχήματα (α) και (γ) παρατηρούμε ότι το ανακατασκευασμένο σήμα δεν προσεγγίζει καθόλου το αρχικό σήμα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το πλήθος των δειγμάτων είναι πολύ μικρό ώστε να είναι εφικτή η ακριβής ανακατασκευή του αρχικού σήματος. Με άλλα λόγια, η συχνότητα δειγματοληψίας δεν ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist. Επιπρόσθετα, η κατάσταση επιδεινώνεται από τη χαμηλή τάξη της συνάρτησης παρεμβολής.