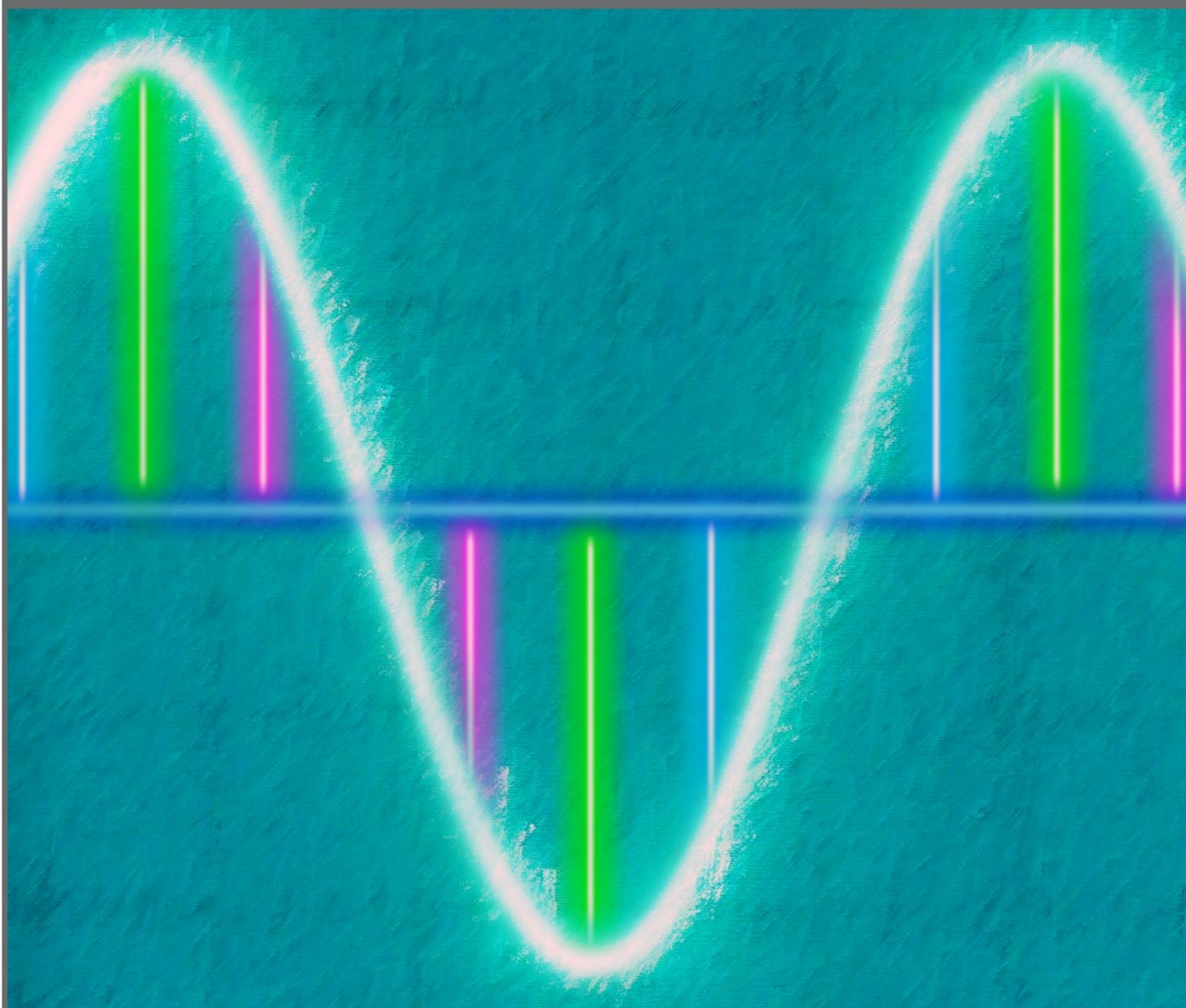


Νικόλαος Ασημάκης / Μαρία Αδάμ

# Σήματα και Συστήματα



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά  
Συγγράμματα και Βοηθήματα  
[www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)

**HEALLINK**

Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ 4: ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΕΩΣ  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

*Νικόλαος Ασημάκης  
Καθηγητής*

*Μαρία Αδάμ  
Επίκουρη Καθηγήτρια*

# *Σήματα και Συστήματα*

Copyright© ΣΕΑΒ, 2015



**Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά  
Συγγράμματα και Βοηθήματα**  
[www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)

# Σήματα και Συστήματα

## Συγγραφή

Νικόλαος Ασημάκης

Μαρία Αδάμ

## Κριτικός αναγνώστης

Δημήτριος Βέντζας

## Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική Επιμέλεια: Έλενα Μανιάτη, Νικόλαος Ασημάκης

Γραφιστική Επιμέλεια: Ευδοξία Κοκκίνου, Ευμορφία Κρήτου

Τεχνική Επεξεργασία: Ευδοξία Κοκκίνου, Ευμορφία Κρήτου

ISBN: 978-960-603-116-8

Copyright © ΣΕΑΒ, 2015



ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

[www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)



*Στη Φραντζέσκα*

## Πίνακας περιεχομένων

Πίνακας περιεχομένων .....	5
Λίστα πινάκων.....	14
Λίστα σχημάτων.....	15
Λίστα ηχογραφήσεων.....	17
Λίστα διαδραστικών προγραμμάτων .....	18
Πίνακας συντομεύσεων-ακρωνύμια .....	19
Πρόλογος .....	20
Εισαγωγή .....	21
Κεφάλαιο 1 Σήματα διακριτού και συνεχούς χρόνου .....	23
1.1. Ταξινόμηση σημάτων .....	23
1.2. Σήματα διακριτού χρόνου .....	26
1.2.1. Το σήμα διακριτού χρόνου ως ακολουθία .....	26
1.2.2. Διάρκεια σημάτων διακριτού χρόνου .....	26
1.2.3. Αιτιότητα σημάτων διακριτού χρόνου.....	27
1.2.4. Περιοδικότητα σημάτων διακριτού χρόνου .....	27
1.2.5. Συμμετρία σημάτων διακριτού χρόνου.....	27
1.2.5.1. Συμμετρία πραγματικού σήματος διακριτού χρόνου .....	27
1.2.5.2. Ειδική συμμετρία πραγματικού σήματος διακριτού χρόνου .....	28
1.2.5.3. Συμμετρία μιγαδικού σήματος διακριτού χρόνου .....	28
1.2.6. Βασικά σήματα διακριτού χρόνου .....	28
1.2.6.1. Σήμα μοναδιαίου δείγματος .....	28
1.2.6.2. Σήμα μοναδιαίου βήματος.....	29
1.2.6.3. Ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου.....	30
1.2.6.4. Πραγματικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου .....	32
1.2.6.5. Φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου .....	33
1.2.6.6. Μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου.....	35
1.2.6.7. Μοναδιαίο εναλλακτικό σήμα .....	36
1.2.6.8. Σήμα μέγιστης παλινδρόμησης .....	37
1.2.6.9. Σήμα μοναδιαίας κλίσης.....	38
1.2.7. Ενέργεια και Ισχύς σημάτων διακριτού χρόνου .....	39
1.2.8. Η συχνότητα στα σήματα διακριτού χρόνου .....	40

1.2.9. Σήματα διακριτού χρόνου σε προγραμματιστικό περιβάλλον.....	41
1.3. Σήματα συνεχούς χρόνου.....	43
1.3.1. Το σήμα συνεχούς χρόνου ως συνάρτηση.....	43
1.3.2. Διάρκεια σημάτων συνεχούς χρόνου.....	43
1.3.3. Αιτιότητα σημάτων συνεχούς χρόνου .....	44
1.3.4. Περιοδικότητα σημάτων συνεχούς χρόνου.....	44
1.3.5. Συμμετρία.....	44
1.3.5.1. Συμμετρία πραγματικού σήματος συνεχούς χρόνου.....	44
1.3.5.2. Συμμετρία μιγαδικού σήματος συνεχούς χρόνου.....	44
1.3.6. Βασικά σήματα συνεχούς χρόνου.....	45
1.3.6.1. Σήμα μοναδιαίου παλμού .....	45
1.3.6.2. Μοναδιαίο βηματικό σήμα .....	46
1.3.6.3. Ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου .....	46
1.3.6.4. Πραγματικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου .....	48
1.3.6.5. Φανταστικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου .....	49
1.3.6.6. Μιγαδικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου .....	50
1.3.7. Ενέργεια και Ισχύς σημάτων συνεχούς χρόνου .....	50
1.3.8. Η συχνότητα στα σήματα συνεχούς χρόνου .....	51
1.3.9. Σήματα συνεχούς χρόνου σε προγραμματιστικό περιβάλλον.....	52
1.4. Δειγματοληψία .....	52
1.4.1. Μετατροπή αναλογικού σε ψηφιακό .....	52
1.4.2. Περιοδική Δειγματοληψία .....	52
1.4.3. Θεώρημα δειγματοληψίας.....	53
1.4.4. Ανακατασκευή αναλογικού σήματος από τα δείγματα .....	55
1.5. Λυμένες Ασκήσεις.....	55
1.6. Ασκήσεις .....	59
1.7. Εργαστηριακές Ασκήσεις.....	60
1.8. Περίληψη (ηχογραφημένη).....	63
Βιβλιογραφία/Αναφορές.....	64
Κριτήρια αξιολόγησης .....	65
<b>Κεφάλαιο 2. Πράξεις σημάτων διακριτού και συνεχούς χρόνου .....</b>	<b>67</b>
2.1. Πράξεις σημάτων διακριτού χρόνου.....	67
2.1.1. Ταξινόμηση πράξεων σημάτων διακριτού χρόνου.....	67
2.1.2. Πράξεις μετασχηματισμού πλάτους .....	67
2.1.2.1. Πρόσθεση σημάτων.....	67
2.1.2.2. Πολλαπλασιασμός σημάτων.....	68
2.1.2.3. Κλιμάκωση στο πλάτος .....	69
2.1.3. Πράξεις μετασχηματισμού χρόνου.....	70

2.1.3.1. Μετατόπιση ή ολίσθηση .....	70
2.1.3.2. Αναδίπλωση ή ανάκλαση.....	71
2.1.3.3. Κλιμάκωση στον χρόνο.....	72
2.1.4. Προτεραιότητα πράξεων μετασχηματισμού χρόνου σημάτων διακριτού χρόνου .....	74
2.1.5. Ανάλυση σημάτων διακριτού χρόνου.....	77
2.1.6. Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου.....	78
2.1.6.1. Ορισμός γραμμικής συνέλιξης.....	78
2.1.6.2. Γραμμική συνέλιξη σημάτων άπειρης διάρκειας .....	78
2.1.6.3. Γραμμική συνέλιξη σημάτων πεπερασμένης διάρκειας.....	79
2.1.6.4. Ιδιότητες γραμμικής συνέλιξης .....	82
2.1.7. Συσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου .....	86
2.1.7.1. Ετεροσυσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου .....	86
2.1.7.2. Αυτοσυσχέτιση σήματος διακριτού χρόνου .....	88
2.1.8. Πράξεις σημάτων διακριτού χρόνου σε προγραμματιστικό περιβάλλον.....	89
2.2. Πράξεις σημάτων συνεχούς χρόνου .....	92
2.2.1. Ταξινόμηση πράξεων σημάτων συνεχούς χρόνου .....	92
2.2.2. Πράξεις μετασχηματισμού πλάτους .....	92
2.2.2.1. Πρόσθεση σημάτων.....	92
2.2.2.2. Πολλαπλασιασμός σημάτων.....	93
2.2.2.3. Κλιμάκωση στο πλάτος .....	93
2.2.3. Πράξεις μετασχηματισμού χρόνου.....	93
2.2.3.1. Μετατόπιση ή ολίσθηση .....	93
2.2.3.2. Αναδίπλωση ή Ανάκλαση .....	94
2.2.3.3. Κλιμάκωση στον χρόνο.....	95
2.2.4. Ανάλυση σημάτων συνεχούς χρόνου .....	97
2.2.5. Συνέλιξη σημάτων συνεχούς χρόνου .....	97
2.2.5.1. Ορισμός συνέλιξης .....	97
2.2.5.2. Υπολογισμός συνέλιξης .....	97
2.2.5.3. Ιδιότητες συνέλιξης .....	100
2.2.6. Συσχέτιση σημάτων συνεχούς χρόνου .....	101
2.2.6.1. Ετεροσυσχέτιση σημάτων συνεχούς χρόνου.....	101
2.2.6.2. Αυτοσυσχέτιση σήματος συνεχούς χρόνου .....	102
2.3. Αυμένες ασκήσεις .....	103
2.4. Ασκήσεις .....	105
2.5. Εργαστηριακές Ασκήσεις.....	108
2.6. Περίληψη (ηχογραφημένη).....	113
2.7. Λογισμικό υπολογισμού πράξεων σημάτων διακριτού χρόνου .....	115
Βιβλιογραφία/Αναφορές.....	115



<i>Κριτήρια αξιολόγησης</i> .....	116
<b>Κεφάλαιο 3 Συστήματα διακριτού και συνεχούς χρόνου</b> .....	<b>118</b>
3.1. Συστήματα διακριτού χρόνου.....	118
3.1.1. Ορισμός .....	118
3.1.2. Ιδιότητες συστημάτων διακριτού χρόνου.....	118
3.1.2.1. Αρχή της επαλληλίας ή αρχή της υπέρθεσης.....	118
3.1.2.2. Ομογένεια .....	119
3.1.2.3. Γραμμικότητα .....	119
3.1.2.4. Χρονική Αμεταβλητότητα .....	120
3.1.2.5. Γραμμικότητα και Χρονική Αμεταβλητότητα .....	120
3.1.2.6. Αιτιότητα.....	120
3.1.2.7. Ευστάθεια.....	120
3.1.2.8. Αντιστρεψιμότητα.....	121
3.1.3. Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα – LTI Συστήματα.....	121
3.1.3.1. Κρουστική απόκριση .....	121
3.1.3.2. Σύνδεση συστημάτων σε σειρά .....	123
3.1.3.3. Σύνδεση συστημάτων παράλληλα .....	124
3.1.4. Γραμμικές εξισώσεις διαφορών .....	124
3.1.4.1. Αναπαράσταση LTI συστημάτων με γραμμικές εξισώσεις διαφορών .....	125
3.1.4.2. Συστήματα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης – FIR φίλτρα .....	125
3.1.4.3. Συστήματα άπειρης κρουστικής απόκρισης – IIR φίλτρα.....	127
3.1.4.4. Επίλυση εξισώσεων διαφορών για IIR φίλτρα .....	131
3.1.4.5. Φίλτρο μέσης τιμής .....	137
3.1.5. Συστήματα διακριτού χρόνου σε προγραμματιστικό περιβάλλον.....	138
3.2. Συστήματα συνεχούς χρόνου.....	138
3.2.1. Ορισμός .....	138
3.2.2. Ιδιότητες συστημάτων συνεχούς χρόνου .....	139
3.2.2.1. Αρχή της επαλληλίας ή αρχή της υπέρθεσης.....	139
3.2.2.2. Ομογένεια .....	139
3.2.2.3. Γραμμικότητα .....	139
3.2.2.4. Χρονική Αμεταβλητότητα .....	139
3.2.2.5. Γραμμικότητα και Χρονική Αμεταβλητότητα .....	140
3.2.2.6. Αιτιότητα.....	140
3.2.2.7. Ευστάθεια.....	140
3.2.2.8. Αντιστρεψιμότητα.....	140
3.2.3. Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα – LTI Συστήματα.....	140
3.2.3.1. Απόκριση μοναδιαίου παλμού .....	140
3.2.3.2. Σύνδεση συστημάτων σε σειρά .....	142

3.2.3.3. Σύνδεση συστημάτων παράλληλα .....	143
3.2.4. Αναπαράσταση LTI συστημάτων με διαφορικές εξισώσεις .....	144
3.2.5. Συστήματα συνεχούς χρόνου σε προγραμματιστικό περιβάλλον .....	145
3.3. Λυμένες Ασκήσεις .....	146
3.4. Ασκήσεις .....	149
3.5. Εργαστηριακές Ασκήσεις .....	150
3.6. Περίληψη (ηχογραφημένη) .....	153
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	154
Κριτήρια αξιολόγησης .....	154
<b>Κεφάλαιο 4 Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου και Απόκριση συχνότητας .....</b>	<b>156</b>
4.1. Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου .....	156
4.1.1. Ορισμός μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου .....	156
4.1.2. Ύπαρξη μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου .....	157
4.1.3. Υπολογισμός μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου .....	157
4.1.4. Ζεύγη μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου .....	159
4.1.5. Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου .....	159
4.1.5.1. Γραμμικότητα .....	160
4.1.5.2. Μετατόπιση στον χρόνο .....	160
4.1.5.3. Αναδίπλωση .....	160
4.1.5.4. Μετατόπιση στη συχνότητα .....	160
4.1.5.5. Συνέλιξη .....	161
4.1.5.6. Μιγαδική συζυγία .....	162
4.1.5.7. Θεώρημα Parseval (αρχή διατήρησης της ενέργειας) .....	163
4.1.6. Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου .....	164
4.1.7. Συνέλιξη μέσω μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου .....	165
4.2. Απόκριση συχνότητας .....	166
4.2.1. Ορισμός της απόκρισης συχνότητας .....	166
4.2.2. Περιγραφή LTI συστημάτων μέσω απόκρισης συχνότητας .....	169
4.2.3. Σύνδεση συστημάτων σε σειρά .....	170
4.2.4. Σύνδεση συστημάτων παράλληλα .....	171
4.2.5. Επίλυση εξισώσεων διαφορών μέσω μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου .....	172
4.2.6. Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων .....	172
4.2.7. Φίλτρο αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας .....	177
4.2.8. Φίλτρα γραμμικής φάσης .....	179
4.3. Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου σε προγραμματιστικό περιβάλλον .....	181
4.4. Λυμένες Ασκήσεις .....	182
4.5. Ασκήσεις .....	185
4.6. Εργαστηριακές Ασκήσεις .....	186

4.7. Περίληψη (ηχογραφημένη).....	190
Βιβλιογραφία/Αναφορές.....	191
Κριτήρια αξιολόγησης .....	192
<b>Κεφάλαιο 5 Μετασχηματισμός <math>z</math> και Συνάρτηση μεταφοράς.....</b>	<b>193</b>
5.1. Μετασχηματισμός $z$ .....	193
5.1.1. Ορισμός μετασχηματισμού $z$ .....	193
5.1.2. Περιοχή Σύγκλισης .....	194
5.1.3. Υπολογισμός μετασχηματισμού $z$ .....	195
5.1.4. Ζεύγη μετασχηματισμού $z$ .....	197
5.1.5. Ιδιότητες μετασχηματισμού $z$ .....	198
5.1.5.1. Γραμμικότητα .....	198
5.1.5.2. Μετατόπιση στον χρόνο.....	198
5.1.5.3. Αναδίπλωση .....	199
5.1.5.4. Μετατόπιση στη συχνότητα .....	199
5.1.5.5. Συνέλιξη.....	199
5.1.6. Αντίστροφος μετασχηματισμός $z$ .....	201
5.1.7. Συνέλιξη μέσω μετασχηματισμού $z$ .....	204
5.1.8. Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής .....	205
5.1.9. Μονόπλευρος μετασχηματισμός $z$ .....	206
5.2. Συνάρτηση μεταφοράς .....	208
5.2.1. Ορισμός της συνάρτησης μεταφοράς .....	208
5.2.2. Περιγραφή LTI συστημάτων μέσω συνάρτησης μεταφοράς.....	208
5.2.3. Σύνδεση συστημάτων σε σειρά .....	211
5.2.4. Σύνδεση συστημάτων παράλληλα .....	212
5.2.5. Επίλυση εξισώσεων διαφορών μέσω μετασχηματισμού $z$ .....	213
5.2.6. Ευστάθεια σημάτων διακριτού χρόνου.....	215
5.2.7. Ευστάθεια συστημάτων διακριτού χρόνου και μετασχηματισμός $z$ .....	216
5.2.8. Σύστημα ανάδρασης.....	217
5.2.9. Ακολουθία Fibonacci και συνάρτηση μεταφοράς .....	219
5.3. Μετασχηματισμός $z$ σε προγραμματιστικό περιβάλλον .....	221
5.4. Λυμένες Ασκήσεις .....	222
5.5. Ασκήσεις .....	225
5.6. Εργαστηριακές Ασκήσεις .....	226
5.7. Περίληψη (ηχογραφημένη).....	228
Βιβλιογραφία/Αναφορές.....	229
Κριτήρια αξιολόγησης .....	230
<b>Κεφάλαιο 6 Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου και Απόκριση συχνοτήτων .....</b>	<b>231</b>
6.1. Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου .....	231

6.1.1. Ορισμός μετασχηματισμού <i>Fourier</i> συνεχούς χρόνου .....	231
6.1.2. Υπολογισμός μετασχηματισμού <i>Fourier</i> συνεχούς χρόνου ( <i>CTFT</i> ) .....	232
6.1.3. Ζεύγη μετασχηματισμού <i>Fourier</i> συνεχούς χρόνου.....	235
6.1.4. Ιδιότητες μετασχηματισμού <i>Fourier</i> συνεχούς χρόνου.....	236
6.1.4.1. Γραμμικότητα .....	236
6.1.4.2. Μετατόπιση στον χρόνο.....	236
6.1.4.3. Αναδίπλωση .....	237
6.1.4.4. Μετατόπιση στη συχνότητα .....	237
6.1.4.5. Συνέλιξη.....	237
6.1.4.6. Κλιμάκωση στον χρόνο .....	238
6.1.4.7. Παραγωγήιση .....	239
6.1.4.8. Θεώρημα Parseval (αρχή διατήρησης της ενέργειας) .....	239
6.1.5. Αντίστροφος μετασχηματισμός <i>Fourier</i> συνεχούς χρόνου .....	240
6.1.6. Μετασχηματισμός <i>Fourier</i> συνεχούς χρόνου σε προγραμματιστικό περιβάλλον .....	241
6.2. Απόκριση συχνότητας.....	242
6.2.1. Ορισμός της απόκρισης συχνότητας.....	242
6.2.2. Περιγραφή <i>LTI</i> συστημάτων μέσω απόκρισης συχνότητας .....	243
6.2.3. Σύνδεση συστημάτων σε σειρά .....	244
6.2.4. Σύνδεση συστημάτων παράλληλα .....	244
6.3. Λυμένες Ασκήσεις.....	245
6.4. Ασκήσεις .....	251
6.5. Εργαστηριακές Ασκήσεις .....	252
6.6. Περίληψη (ηχογραφημένη).....	253
Βιβλιογραφία/Αναφορές.....	254
Κριτήρια αξιολόγησης .....	254
<b>Κεφάλαιο 7 Μετασχηματισμός Laplace και Συνάρτηση μεταφοράς .....</b>	<b>256</b>
7.1. Μετασχηματισμός Laplace.....	256
7.1.1. Ορισμός μετασχηματισμού Laplace.....	256
7.1.2. Περιοχή Σύγκλισης .....	257
7.1.3. Ζεύγη μετασχηματισμού Laplace .....	257
7.1.4. Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace .....	258
7.1.4.1. Γραμμικότητα .....	258
7.1.4.2. Μετατόπιση στον χρόνο.....	258
7.1.4.3. Κλιμάκωση στον χρόνο .....	258
7.1.4.4. Μετατόπιση στη συχνότητα .....	259
7.1.4.5. Συνέλιξη.....	259
7.1.4.6. Παραγωγήιση .....	260
7.1.5. Υπολογισμός μετασχηματισμού Laplace.....	261

7.1.6. Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.....	263
7.1.7. Μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace .....	265
7.1.8. Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής .....	266
7.1.9. Μετασχηματισμός Laplace σε προγραμματιστικό περιβάλλον.....	266
7.2. Συνάρτηση μεταφοράς .....	267
7.2.1. Ορισμός της συνάρτησης μεταφοράς .....	267
7.2.2. Περιγραφή LTI συστημάτων μέσω συνάρτησης μεταφοράς.....	268
7.2.3. Σύνδεση συστημάτων σε σειρά .....	269
7.2.4. Σύνδεση συστημάτων παράλληλα.....	270
7.2.5. Ευστάθεια συστημάτων συνεχούς χρόνου .....	271
7.2.6. Συνάρτηση μεταφοράς σε προγραμματιστικό περιβάλλον.....	273
7.3. Λυμένες Ασκήσεις.....	274
7.4. Ασκήσεις .....	277
7.5. Εργαστηριακές Ασκήσεις.....	278
7.6. Περίληψη (ηχογραφημένη).....	280
Βιβλιογραφία/Αναφορές.....	280
Κριτήρια αξιολόγησης .....	281
<b>Κεφάλαιο 8 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier και Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier .....</b>	<b>282</b>
8.1. Διακριτός μετασχηματισμός Fourier .....	282
8.1.1. Ορισμός διακριτού μετασχηματισμού Fourier.....	282
8.1.2. Υπολογισμός διακριτού μετασχηματισμού Fourier .....	283
8.1.3. Υπολογισμός αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού Fourier .....	283
8.1.4. Κυκλική συνέλιξη .....	284
8.1.4.1. Υπολογισμός κυκλικής συνέλιξης.....	285
8.1.4.2. Σχέση γραμμικής και κυκλικής συνέλιξης .....	285
8.1.5. Ιδιότητες διακριτού μετασχηματισμού Fourier .....	286
8.1.6. Διακριτός μετασχηματισμός Fourier σε προγραμματιστικό περιβάλλον.....	288
8.2. Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier .....	289
8.2.1. Ορισμός γρήγορου μετασχηματισμού Fourier .....	289
8.2.2. FFT με αποδεκτίση στον χρόνο .....	290
8.2.3. FFT με αποδεκτίση στη συχνότητα .....	294
8.2.4. FFT με βάση $r$ .....	297
8.2.5. FFT πρώτων παραγόντων.....	298
8.2.6. Απόκριση συχνότητας FIR φίτρων και FFT.....	299
8.2.7. Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier σε προγραμματιστικό περιβάλλον .....	301
8.3. Λυμένες Ασκήσεις.....	302
8.4. Ασκήσεις .....	305
8.5. Εργαστηριακές Ασκήσεις.....	306

<i>8.6. Περίληψη (ηχογραφημένη)</i> .....	310
<i>Βιβλιογραφία/Αναφορές</i> .....	311
<i>Κριτήρια αξιολόγησης</i> .....	311
<i>Παράρτημα Α. Τυπολόγιο</i> .....	313
<i>Παράρτημα Β. Συναρτήσεις</i> .....	337
<i>Παράρτημα Γ. Απαντήσεις/Λύσεις διαδραστικών προγραμμάτων</i> .....	340
<i>Ευρετήριο</i> .....	368

## *Λίστα πινάκων*

- Πίνακας 1.1 Κατηγορίες σημάτων.
- Πίνακας 1.2 Διάρκεια σημάτων διακριτού χρόνου.
- Πίνακας 1.3 Συμμετρία σημάτων πεπερασμένης διάρκειας.
- Πίνακας 1.4 Η συχνότητα στα σήματα συνεχούς και διακριτού χρόνου.
- Πίνακας 2.1 Μετατόπιση, Αναδίπλωση και Κλιμάκωση στον χρόνο.
- Πίνακας 3.1 Μερική λύση εξισώσεων διαφορών.
- Πίνακας 4.1 Ζεύγη μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT).
- Πίνακας 4.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT).
- Πίνακας 4.3 Τύποι φίλτρων γραμμικής φάσης.
- Πίνακας 5.1 Ζεύγη μετασχηματισμού  $z$ .
- Πίνακας 5.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού  $z$ .
- Πίνακας 6.1 Ζεύγη μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT).
- Πίνακας 6.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT).
- Πίνακας 7.1 Ζεύγη μετασχηματισμού Laplace.
- Πίνακας 7.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.
- Πίνακας 8.1 Ιδιότητες διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT).
- Πίνακας 8.2 Αναδιάταξη δεικτών με αντιστροφή bit.
- Πίνακας 8.3 Πολυπλοκότητα DFT και FFT με αποδεκίαση στον χρόνο / στη συχνότητα.

## *Λίστα σχημάτων*

- Σχήμα 1.1 Σήμα διακριτού χρόνου.
- Σχήμα 1.2 Σήμα συνεχούς χρόνου.
- Σχήμα 1.3 Σήμα μοναδιαίου δείγματος.
- Σχήμα 1.4 Σήμα μοναδιαίου βήματος.
- Σχήμα 1.5 Περιοδικό ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου.
- Σχήμα 1.6 Μη περιοδικό ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου.
- Σχήμα 1.7 Πραγματικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου.
- Σχήμα 1.8 Περιοδικό φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου.
- Σχήμα 1.9 Μη περιοδικό φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου.
- Σχήμα 1.10 Μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου.
- Σχήμα 1.11 Μοναδιαίο εναλλακτικό σήμα.
- Σχήμα 1.12 Σήμα μέγιστης παλινδρόμησης.
- Σχήμα 1.13 Σήμα μοναδιαίας κλίσης.
- Σχήμα 1.14 Μεταβολή φάσης ημιτονοειδούς σήματος συνεχούς χρόνου.
- Σχήμα 1.15 Μεταβολή συχνότητας ημιτονοειδούς σήματος συνεχούς χρόνου.
- Σχήμα 1.16 Πραγματικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου.
- Σχήμα 2.1 Πρόσθεση σημάτων διακριτού χρόνου.
- Σχήμα 2.2 Πολλαπλασιασμός σημάτων διακριτού χρόνου.
- Σχήμα 2.3 Κλιμάκωση στο πλάτος σήματος διακριτού χρόνου.
- Σχήμα 2.4 Μετατόπιση.
- Σχήμα 2.5 Αναδίπλωση.
- Σχήμα 2.6 Κλιμάκωση στον χρόνο: διαίρεση συχνότητας.
- Σχήμα 2.7 Κλιμάκωση στον χρόνο: πολλαπλασιασμός συχνότητας.
- Σχήμα 2.8 Μετατόπιση και αναδίπλωση.
- Σχήμα 2.9 Γραμμική συνέλιξη.
- Σχήμα 2.10 Ταυτοτικό στοιχείο γραμμικής συνέλιξης.
- Σχήμα 2.11 Αντιμεταθετική ιδιότητα γραμμικής συνέλιξης.
- Σχήμα 2.12 Προσεταιριστική ιδιότητα γραμμικής συνέλιξης.
- Σχήμα 2.13 Επιμεριστική ιδιότητα γραμμικής συνέλιξης.
- Σχήμα 2.14 Αυτοσυσχέτιση.
- Σχήμα 2.15 Μετατόπιση ή ολίσθηση.
- Σχήμα 2.16 Αναδίπλωση ή ανάκλαση.
- Σχήμα 2.17 Κλιμάκωση στον χρόνο: συστολή.
- Σχήμα 2.18 Κλιμάκωση στον χρόνο: διαστολή.
- Σχήμα 2.19 Υπολογισμός συνέλιξης σημάτων συνεχούς χρόνου με εμβαδά.
- Σχήμα 2.20 Συνέλιξη σημάτων συνεχούς χρόνου.
- Σχήμα 3.1 Σύστημα διακριτού χρόνου.
- Σχήμα 3.2 Κρουστική απόκριση.
- Σχήμα 3.3 LTI σύστημα διακριτού χρόνου.
- Σχήμα 3.4 Σύνδεση συστημάτων διακριτού χρόνου σε σειρά.
- Σχήμα 3.5 Σύνδεση συστημάτων διακριτού χρόνου παράλληλα.
- Σχήμα 3.6 FIR φίλτρο.
- Σχήμα 3.7 IIR-AR φίλτρο.
- Σχήμα 3.8 IIR-ARMA φίλτρο.
- Σχήμα 3.9 FIR φίλτρο μέσης τιμής.
- Σχήμα 3.10 Σύστημα συνεχούς χρόνου.
- Σχήμα 3.11 Απόκριση μοναδιαίου παλμού.
- Σχήμα 3.12 LTI σύστημα συνεχούς χρόνου.
- Σχήμα 3.13 Σύνδεση συστημάτων συνεχούς χρόνου σε σειρά.
- Σχήμα 3.14 Σύνδεση συστημάτων συνεχούς χρόνου παράλληλα.
- Σχήμα 3.15 Είσοδος και απόκριση LTI συστήματος συνεχούς χρόνου.



Σχήμα 4.1 Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου.  
Σχήμα 4.2 Περιοδικότητα μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.  
Σχήμα 4.3 Μετατόπιση στη συχνότητα.  
Σχήμα 4.4 Συνέλιξη.  
Σχήμα 4.5 Απόκριση συχνότητας LTI συστήματος.  
Σχήμα 4.6 Σύνδεση συστημάτων σε σειρά.  
Σχήμα 4.7 Σύνδεση συστημάτων παράλληλα.  
Σχήμα 4.8 AllPass φίλτρο.  
Σχήμα 4.9 LowPass φίλτρο.  
Σχήμα 4.10 HighPass φίλτρο.  
Σχήμα 4.11 Band Pass φίλτρο.  
Σχήμα 4.12 Band Stop φίλτρο.  
Σχήμα 4.13 FIR φίλτρο αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας.  
Σχήμα 4.14 IIR φίλτρο αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας.  
Σχήμα 5.1 Πόλοι και Μηδενικά μετασχηματισμού z.  
Σχήμα 5.2 Συνάρτηση μεταφοράς LTI συστήματος.  
Σχήμα 5.3 Πόλοι και Μηδενικά συνάρτησης μεταφοράς.  
Σχήμα 5.4 Σύνδεση συστημάτων σε σειρά.  
Σχήμα 5.5 Σύνδεση συστημάτων παράλληλα.  
Σχήμα 5.6 Σύστημα ανάδρασης.  
Σχήμα 6.1 Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου ως πραγματική συνάρτηση.  
Σχήμα 6.2 Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου ως μιγαδική συνάρτηση.  
Σχήμα 6.3 Σύνδεση συστημάτων σε σειρά.  
Σχήμα 6.4 Σύνδεση συστημάτων παράλληλα.  
Σχήμα 6.5 Τριγωνικό σήμα συνεχούς χρόνου της άσκησης 1.  
Σχήμα 6.6 Ο μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT) του τριγωνικού σήματος συνεχούς χρόνου.  
Σχήμα 7.1 Σύνδεση συστημάτων σε σειρά.  
Σχήμα 7.2 Σύνδεση συστημάτων παράλληλα.  
Σχήμα 7.3 Απόκριση μοναδιαίου παλμού ευσταθούς LTI συστήματος συνεχούς χρόνου.  
Σχήμα 7.4 Απόκριση LTI συστήματος συνεχούς χρόνου.  
Σχήμα 8.1 Η πεταλούδα DIT.  
Σχήμα 8.2 Διάγραμμα ροής DIT FFT 4 σημείων.  
Σχήμα 8.3 Η πεταλούδα DIF.  
Σχήμα 8.4 Διάγραμμα ροής DIF FFT 4 σημείων.  
Σχήμα 8.5 Κρουστική απόκριση φίλτρου Hann.  
Σχήμα 8.6 Απόκριση συχνότητας φίλτρου Hann.  
Σχήμα 8.7 Διάγραμμα ροής DIT FFT 8 σημείων.  
Σχήμα 8.8 Διάγραμμα ροής DIF FFT 8 σημείων.

## *Λίστα ηχογραφήσεων*

- Ήχος 1.1 Περίληψη Κεφαλαίου 1.
- Ήχος 2.1 Περίληψη Κεφαλαίου 2.
- Ήχος 3.1 Περίληψη Κεφαλαίου 3.
- Ήχος 4.1 Περίληψη Κεφαλαίου 4.
- Ήχος 5.1 Περίληψη Κεφαλαίου 5.
- Ήχος 6.1 Περίληψη Κεφαλαίου 6.
- Ήχος 7.1 Περίληψη Κεφαλαίου 7.
- Ήχος 8.1 Περίληψη Κεφαλαίου 8.

## *Λίστα διαδραστικών προγραμμάτων*

- Διαδραστικό πρόγραμμα 1.1 Συμμετρία πραγματικών σημάτων διακριτού χρόνου.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 1.2 Ειδική συμμετρία πραγματικών σημάτων διακριτού χρόνου.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 1.3 Περιοδικότητα ημιτονοειδούς σήματος διακριτού χρόνου.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 1.4 Κεφάλαιο 1 Κριτήριο αξιολόγησης 1.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 1.5 Κεφάλαιο 1 Κριτήριο αξιολόγησης 2.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 2.1 Μετατόπιση σημάτων διακριτού χρόνου.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 2.2 Αναδίπλωση σημάτων διακριτού χρόνου.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 2.3 Κλιμάκωση στον χρόνο σημάτων διακριτού χρόνου.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 2.4 Γραμμική Συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 2.5 Λογισμικό υπολογισμού πράξεων σημάτων διακριτού χρόνου.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 2.6 Κεφάλαιο 2 Κριτήριο αξιολόγησης 1.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 2.7 Κεφάλαιο 2 Κριτήριο αξιολόγησης 2.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 2.8 Κεφάλαιο 2 Κριτήριο αξιολόγησης 3.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 2.9 Κεφάλαιο 2 Κριτήριο αξιολόγησης 4.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 3.1 FIR φίλτρα.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 3.2 IIR φίλτρα.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 3.3 Κεφάλαιο 3 Κριτήριο αξιολόγησης 1.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 3.4 Κεφάλαιο 3 Κριτήριο αξιολόγησης 2.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 3.5 Κεφάλαιο 3 Κριτήριο αξιολόγησης 3.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 4.1 Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT).  
Διαδραστικό πρόγραμμα 4.2 Φίλτρα γραμμικής φάσης.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 4.3 Κεφάλαιο 4 Κριτήριο αξιολόγησης 1.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 4.4 Κεφάλαιο 4 Κριτήριο αξιολόγησης 2.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 5.1 Μετασχηματισμός  $z$ .  
Διαδραστικό πρόγραμμα 5.2 Ευστάθεια σημάτων διακριτού χρόνου.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 5.3 Ευστάθεια LTI συστημάτων διακριτού χρόνου.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 5.4 Κεφάλαιο 5 Κριτήριο αξιολόγησης 1.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 5.5 Κεφάλαιο 5 Κριτήριο αξιολόγησης 2.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 5.6 Κεφάλαιο 5 Κριτήριο αξιολόγησης 3.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 6.1 Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT).  
Διαδραστικό πρόγραμμα 6.2 Κεφάλαιο 6 Κριτήριο αξιολόγησης 1.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 6.3 Κεφάλαιο 6 Κριτήριο αξιολόγησης 2.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 7.1 Ευστάθεια αιτιατών συστημάτων συνεχούς χρόνου.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 7.2 Κεφάλαιο 7 Κριτήριο αξιολόγησης 1.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 7.3 Κεφάλαιο 7 Κριτήριο αξιολόγησης 2.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 8.1 Κυκλική συνέλιξη.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 8.2 Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier (FFT).  
Διαδραστικό πρόγραμμα 8.3 Κεφάλαιο 8 Κριτήριο αξιολόγησης 1.  
Διαδραστικό πρόγραμμα 8.4 Κεφάλαιο 8 Κριτήριο αξιολόγησης 2.

## *Πίνακας συντομεύσεων-ακρωνύμια*

ADC	Analog to Digital Conversion
AR	Auto Regressive
ARMA	Auto Regressive Moving Average
CTFF	Continuous Time Fourier Transform
DAC	Digital to Analog Conversion
DFT	Discrete Fourier Transform
DIF	Decimation In Frequency
DIT	Decimation In Time
DTFF	Discrete Time Fourier Transform
FFT	Fast Fourier Transform
FIR	Finite duration Impulse Response
ICTFT	Inverse Continuous Time Fourier Transform
IDFF	Inverse Discrete Fourier Transform
IDTFT	Inverse Discrete Time Fourier Transform
IFFT	Inverse Fast Fourier Transform
IIR	Infinite duration Impulse Response
LTl	Linear Time Invariant
MA	Moving Average
ROC	Region Of Convergence

## Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε προπτυχιακούς φοιτητές και ο βασικός σκοπός του είναι η εξοικείωση και η κατανόηση των βασικών εννοιών των σημάτων και συστημάτων με την βοήθεια των οποίων τα επεξεργαζόμαστε.

Για το σκοπό αυτό, στο βιβλίο αυτό οι συγγραφείς του έχουν φροντίσει, με πολύ φροντίδα, να βρουν το απαραίτητο υλικό με την μορφή θεωρίας, λυμένων και άλυτων ασκήσεων, βιβλιογραφίας και κριτηρίων αξιολόγησης. Επιπλέον, για την απόκτηση της ικανότητας χρήσης και προγραμματισμού σχετικών με την επεξεργασία σημάτων αλγορίθμων στο περιβάλλον του εμπορικού λογισμικού Matlab και του λογισμικού Octave, που είναι ελεύθερος κλώνος ανοικτού κώδικα του λογισμικού Matlab, συμπεριλαμβάνονται εργαστηριακές ασκήσεις οι οποίες έχουν επιλεγεί με τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται η εφαρμογή των θεωρητικών γνώσεων από το φοιτητή.

Η περιήγηση αρχίζει από τις βασικές έννοιες των διακριτού και συνεχούς χρόνου σημάτων και τις πράξεις που μπορούν να ορισθούν μεταξύ αυτών, και ακολουθούν οι ορισμοί των συστημάτων συνεχούς και διακριτού χρόνου. Συνεχίζεται με τους μετασχηματισμούς Fourier σημάτων συνεχούς και διακριτού χρόνου και η χρήση τους στον ορισμό της απόκρισης συχνοτήτων των αντίστοιχων συστημάτων. Η έννοια, οι ιδιότητες αλλά και η χρησιμότητα της συνάρτησης μεταφοράς των συστημάτων συνεχούς και διακριτού χρόνου και ο ορισμός της με την βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace και  $z$  αντίστοιχα αποτελεί το αντικείμενο δύο επομένων κεφαλαίων του βιβλίου. Τέλος ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier και ο αποδοτικός υπολογισμός του με τον Ταχύ Μετασχηματισμό Fourier αποτελεί το αντικείμενο του τελευταίου κεφαλαίου του ηλεκτρονικού βιβλίου, κλείνοντας με αυτόν τον τρόπο την περιήγηση.

Πρέπει (τέλος) να δοθεί ιδιαίτερο βάρος στην πολυμεσικότητα και διαδραστικότητα που διατίθενται στον εκπαιδευόμενο από το συγκεκριμένο βιβλίο. Ιδιαίτερη μνεία πρέπει να γίνει στις υπάρχουσες, σε κάθε κεφάλαιο, ηχογραφημένες περιλήψεις που δίνουν τη δυνατότητα στο φοιτητή να μπορεί να ακούει συγκεντρωτικά τις βασικές έννοιες και τις βασικές γνώσεις που θα αποκομίσει από την μελέτη κάθε κεφαλαίου. Σε κάθε κεφάλαιο συμπεριλαμβάνονται διαδραστικά προγράμματα τα οποία έχουν επιλεγεί με τρόπο ώστε η αλληλεπίδραση να εξασφαλίζει τη σωστή κι άρτια εκπαίδευση του φοιτητή. Επιπλέον, τα κριτήρια αξιολόγησης που υπάρχουν στο τέλος κάθε κεφαλαίου, δίνουν με άμεσο τρόπο στο φοιτητή τη δυνατότητα ελέγχου του επιπέδου των γνώσεων και των δεξιοτήτων που απόκτησε από την μελέτη της συγκεκριμένης ύλης.

Θεωρώ ότι το παρόν βιβλίο θα είναι πολύ χρήσιμο στους φοιτητές των ελληνικών πανεπιστημίων και τεχνολογικών ιδρυμάτων και θα αποτελέσει ένα από τα βασικά εργαλεία στην προσπάθειά τους για την απόκτηση της γνώσης στα αντικείμενα που θεραπεύονται μέσα στις “σελίδες” του.

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης  
Επίκουρος Καθηγητής  
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής  
Πολυτεχνική Σχολή  
Πανεπιστήμιο Πατρών

## Εισαγωγή

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε προπτυχιακούς φοιτητές και ο βασικός σκοπός του είναι η απόκτηση βασικών γνώσεων και η κατανόηση βασικών εννοιών στα Σήματα και Συστήματα. Στο βιβλίο αυτό διδάσκοντες και φοιτητές θα βρουν το απαραίτητο υλικό για την κατανόηση και εμπέδωση βασικών γνώσεων και εννοιών που σχετίζονται με Σήματα και Συστήματα διακριτού και συνεχούς χρόνου καθώς και για την απόκτηση της ικανότητας χρήσης και προγραμματισμού αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται στα Σήματα και Συστήματα μέσω Εργαστηριακών Ασκήσεων.

Η δομή του βιβλίου περιλαμβάνει τα Κεφάλαια:

### Κεφάλαια

Κεφάλαιο 1. Σήματα διακριτού και συνεχούς χρόνου

Κεφάλαιο 2. Πράξεις σημάτων διακριτού και συνεχούς χρόνου

Κεφάλαιο 3. Συστήματα διακριτού και συνεχούς χρόνου

Κεφάλαιο 4. Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου και Απόκριση συχνότητας

Κεφάλαιο 5. Μετασχηματισμός  $z$  και Συνάρτηση μεταφοράς

Κεφάλαιο 6. Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου και Απόκριση συχνοτήτων

Κεφάλαιο 7. Μετασχηματισμός Laplace και Συνάρτηση μεταφοράς

Κεφάλαιο 8. Διακριτός μετασχηματισμός Fourier και Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier

Σε κάθε κεφάλαιο υπάρχει θεωρία, λυμένες ασκήσεις, άλυτες ασκήσεις, εργαστηριακές ασκήσεις, περίληψη, βιβλιογραφία, κριτήρια αξιολόγησης.

Η δομή του βιβλίου διευκολύνει την κατανομή της ύλης σε Διαλέξεις και Εργαστηριακές Ασκήσεις για ένα ακαδημαϊκό εξάμηνο (13 εβδομάδες). Προτείνεται η παρακάτω κατανομή σε 13 εβδομάδες:

### Διαλέξεις (ανά εβδομάδα)

Διάλεξη 1 Σήματα διακριτού χρόνου

Διάλεξη 2 Σήματα συνεχούς χρόνου

Διάλεξη 3 Πράξεις σημάτων διακριτού χρόνου

Διάλεξη 4 Συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

Διάλεξη 5 Πράξεις σημάτων συνεχούς χρόνου

Διάλεξη 6 Συνέλιξη σημάτων συνεχούς χρόνου

Διάλεξη 7 Συστήματα διακριτού χρόνου

Διάλεξη 8 Συστήματα συνεχούς χρόνου

Διάλεξη 9 Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου και Απόκριση Συχνότητας

Διάλεξη 10 Μετασχηματισμός  $z$  και Συνάρτηση μεταφοράς

Διάλεξη 11 Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου και Απόκριση συχνοτήτων

Διάλεξη 12 Μετασχηματισμός Laplace και Συνάρτηση μεταφοράς

Διάλεξη 13 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier και Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier

### Εργαστηριακές Ασκήσεις

Εργαστηριακή Άσκηση 1 Σήματα διακριτού χρόνου

Εργαστηριακή Άσκηση 2 Σήματα συνεχούς χρόνου

Εργαστηριακή Άσκηση 3 Πράξεις σημάτων διακριτού χρόνου

Εργαστηριακή Άσκηση 4 Συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

Εργαστηριακή Άσκηση 5 Πράξεις σημάτων συνεχούς χρόνου

Εργαστηριακή Άσκηση 6 Συνέλιξη σημάτων συνεχούς χρόνου

Εργαστηριακή Άσκηση 7 Συστήματα διακριτού χρόνου

Εργαστηριακή Άσκηση 8 Συστήματα συνεχούς χρόνου

Εργαστηριακή Άσκηση 9 Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου και Απόκριση συχνότητας

Εργαστηριακή Άσκηση 10 Μετασχηματισμός  $z$  και Συνάρτηση μεταφοράς

Εργαστηριακή Άσκηση 11 Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου και Απόκριση συχνοτήτων

Εργαστηριακή Άσκηση 12 Μετασχηματισμός Laplace και Συνάρτηση μεταφοράς

Εργαστηριακή Άσκηση 13 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier και Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier

Η αντιστοίχιση Κεφάλαιο – Διάλεξη – Εργαστηριακή Άσκηση είναι:  
Κεφάλαιο 1 – Διαλέξεις 1, 2 – Εργαστηριακές Ασκήσεις 1, 2  
Κεφάλαιο 2 – Διαλέξεις 3, 4, 5, 6 – Εργαστηριακές Ασκήσεις 3, 4, 5, 6  
Κεφάλαιο 3 – Διαλέξεις 7, 8 – Εργαστηριακές Ασκήσεις 7, 8  
Κεφάλαιο 4 – Διάλεξη 9 – Εργαστηριακή Άσκηση 9  
Κεφάλαιο 5 – Διάλεξη 10 – Εργαστηριακή Άσκηση 10  
Κεφάλαιο 6 – Διάλεξη 11 – Εργαστηριακή Άσκηση 11  
Κεφάλαιο 7 – Διάλεξη 12 – Εργαστηριακή Άσκηση 12  
Κεφάλαιο 8 – Διάλεξη 13 – Εργαστηριακή Άσκηση 13

Στο βιβλίο δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην ανάλυση τεχνικών προγραμματισμού των βασικών εννοιών στα Σήματα και Συστήματα σε προγραμματιστικό περιβάλλον με χρήση λογισμικών, τα οποία έχουν καθιερωθεί στην επιστημονική κοινότητα: του εμπορικού λογισμικού Matlab και του λογισμικού Octave, που είναι ελεύθερος κλώνος ανοικτού κώδικα του λογισμικού Matlab. Επίσης, σχεδιάστηκαν εργαστηριακές ασκήσεις για την απόκτηση της ικανότητας χρήσης και προγραμματισμού αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται στα Σήματα και Συστήματα.

Η δομή του βιβλίου παρέχει τη δυνατότητα διδασκαλίας σε έξι (6) ροές γνώσεων:

1. Σήματα και Συστήματα (Θεωρία και Εργαστήριο)
2. Σήματα και Συστήματα (Θεωρία)
3. Σήματα και Συστήματα διακριτού χρόνου (Θεωρία και Εργαστήριο)
4. Σήματα και Συστήματα διακριτού χρόνου (Θεωρία)
5. Σήματα και Συστήματα συνεχούς χρόνου (Θεωρία και Εργαστήριο)
6. Σήματα και Συστήματα συνεχούς χρόνου (Θεωρία)

Η διάκριση των ροών γνώσεων γίνεται με τη βοήθεια έξι (6) αριθμών στην αρχή κάθε παραγράφου. Κάθε αριθμός είναι 1-6 αν η παράγραφος αφορά στην αντίστοιχη ροή γνώσεων ή είναι 0 αν η παράγραφος δεν αφορά στην αντίστοιχη ροή γνώσεων.

Λόγω του γεγονότος ότι πρόκειται για ηλεκτρονικό βιβλίο, ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στα στοιχεία πολυμεσικότητας και αλληλεπίδρασης/διαδραστικότητας. Στα στοιχεία πολυμεσικότητας περιλαμβάνονται οι ηχογραφημένες περιλήψεις στο τέλος κάθε κεφαλαίου, που βοηθούν το φοιτητή να μπορεί να ακούει συγκεντρωτικά τα βασικά σημεία του κεφαλαίου. Επίσης, στα στοιχεία διαδραστικότητας περιλαμβάνονται τα κριτήρια αξιολόγησης στο τέλος κάθε κεφαλαίου, για να δώσουν στο φοιτητή τη δυνατότητα ελέγχου των γνώσεων, που αποκτήθηκαν, καθώς και φιλικές τεχνικές προς το φοιτητή-χρήστη, όπως, radiobuttons, drag&drop. Τέλος, σχεδιάστηκε ειδικό διαδραστικό λογισμικό υπολογισμού πράξεων σημάτων διακριτού χρόνου.

Ευχαριστούμε τον κριτικό αναγνώστη κ. Δημήτρη Βέντζα για τις χρήσιμες υποδείξεις του.

Ευχαριστούμε τις συνεργάτιδες και φίλες κα Ευδοξία Κοκκίνου και κα Ευμορφία Κρήτου για τη συμβολή τους στην ανάπτυξη πολυμεσικού/διαδραστικού υλικού, για την τεχνική υποστήριξη και τη γραφιστική επιμέλεια.

Ευχαριστούμε τη συνάδελφο και φίλη Δρ. Έλενα Μανιάτη, φιλόλογο, για τη λεπτομερή γλωσσική επιμέλεια.

Ευχαριστούμε την κα Αντιγόνη Παναγιωτίδου για την πολύτιμη βοήθεια στη γραφιστική επιμέλεια των πολυμεσικών και διαδραστικών αντικειμένων.

Ευχαριστούμε τον κ. Ταξιάρχη Αλεξάνδρου, διπλωματούχο της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ, για την επιμέλεια του Τυπολόγιου των μετασχηματισμών.

Ευχαριστούμε την κα Ιωάννα Τζιάλλα, τελειόφοιτη φοιτήτρια της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ, η οποία βοήθησε στον προγραμματισμό και στο σχεδιασμό των διαδραστικών στοιχείων, με σκοπό τη σωστή κατανόηση και την εύκολη χρήση από τον αναγνώστη.

Ευχαριστούμε τον φίλο κ. Ιωάννη Βουρβουλάκη για τη συμβολή του στην έγκριση της πρότασης συγγραφής του συγγράμματος, ειδικά με τις ιδέες του στην ανάπτυξη πολυμεσικού/διαδραστικού υλικού.

Οι συγγραφείς

Νικόλαος Ασημάκης, Μαρία Αδάμ

# Κεφάλαιο 1 Σήματα διακριτού και συνεχούς χρόνου

## Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται ένας ορισμός της έννοιας του σήματος και παρουσιάζεται η ταξινόμηση των σημάτων. Αναλύονται οι βασικές ιδιότητες των σημάτων διακριτού και συνεχούς χρόνου, όπως διάρκεια, αιτιότητα, περιοδικότητα, συμμετρία και παρουσιάζονται τα βασικά σήματα συνεχούς και διακριτού χρόνου. Αναλύεται η αναπαράσταση των σημάτων σε προγραμματιστικό περιβάλλον. Αναλύεται η δειγματοληψία, δηλαδή η διαδικασία μετατροπής ενός σήματος συνεχούς χρόνου σε μία ακολουθία διακριτού χρόνου.

## Προαπαιτούμενη γνώση

Συναρτήσεις, ακολουθίες, ολοκληρώματα, σειρές, μιγαδικοί αριθμοί.

## 1.1. Ταξινόμηση σημάτων

### 1-2-3-4-5-6

Τα σήματα είναι φορείς πληροφοριών σχετικών με τα συστήματα από τα οποία προέρχονται και τα οποία περιγράφουν. Για παράδειγμα, η φωνή παράγεται από το φωνητικό σύστημα και μεταφέρει πληροφορίες σχετικές με τον ομιλητή, όπως η χροιά και η ψυχολογική κατάσταση, ενώ το ηλεκτροκαρδιογράφημα παράγεται από την καρδιά και μεταφέρει πληροφορίες σχετικά με την κατάσταση της καρδιάς.

Ένα **σήμα** ορίζεται ως **το σύνολο των τιμών που παίρνει μία φυσική ποσότητα**. Από μαθηματική άποψη, ένα σήμα είναι μία συλλογή μίας ή περισσότερων συναρτήσεων ή ακολουθιών (κανάλια) μίας ή περισσότερων μεταβλητών (διαστάσεις). Στην πλέον απλή περίπτωση, ένα σήμα είναι μία συνάρτηση ή ακολουθία μίας μεταβλητής. Η βασική κατηγοριοποίηση των σημάτων γίνεται με κριτήριο τον τύπο της ανεξάρτητης μεταβλητής, η οποία μπορεί να είναι ένα φυσικό μέγεθος, όπως χρόνος ή απόσταση. Συνήθως η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο πραγματικός χρόνος, για το λόγο αυτό έχει επικρατήσει να ονομάζεται **χρόνος**. Τα σήματα διακρίνονται σε α) **σήματα διακριτού χρόνου (discretetimesignals)**, όπου ο χρόνος πδέχεται συγκεκριμένες τιμές από το σύνολο των ακεραίων αριθμών  $\mathbb{Z}$  και β) **σήματα συνεχούς χρόνου (continuoustimesignals)**, όπου ο χρόνος  $t$  είναι συνεχής μεταβλητή με τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ . Η εξαρτημένη μεταβλητή μπορεί να είναι και αυτή ένα φυσικό μέγεθος και ονομάζεται **πλάτος**. Το πλάτος συμβολίζεται με  $x(n)$  για τα σήματα διακριτού χρόνου ή με  $x(t)$  για τα σήματα συνεχούς χρόνου. Η εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή το πλάτος, μπορεί επίσης να πάρει τιμές σε ένα συνεχές πεδίο τιμών, ή να πάρει συγκεκριμένες τιμές από ένα διακριτό πεδίο τιμών. Έτσι, με κριτήριο τον τύπο της ανεξάρτητης μεταβλητής (χρόνος) και της εξαρτημένης μεταβλητής (πλάτος), προκύπτουν οι παρακάτω τέσσερις κατηγορίες σημάτων, που παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.1:

- **σήματα διακριτού χρόνου συνεχούς πλάτους**, όπως είναι οι ημερήσιοι δείκτες του χρηματιστηρίου
- **σήματα διακριτού χρόνου διακριτού πλάτους** ή **ψηφιακά σήματα**, όπως είναι τα σήματα σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή
- **σήματα συνεχούς χρόνου συνεχούς πλάτους** ή **αναλογικά σήματα**, όπως είναι η θερμοκρασία ως συνάρτηση του χρόνου
- **σήματα συνεχούς χρόνου διακριτού πλάτους**, όπως είναι το πλήθος των «φάουλ» μίας ομάδας «μπάσκετ» σε σχέση με τον χρόνο

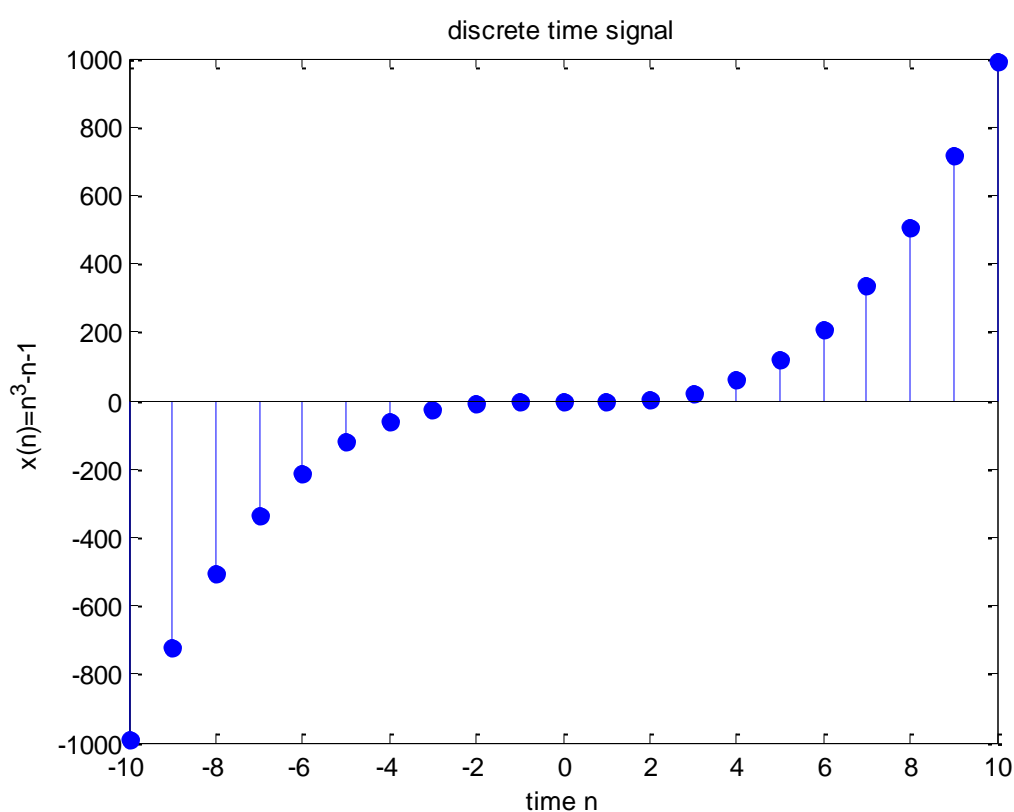
Σήμα	Χρόνος	Πλάτος
Διακριτού χρόνου	Διακριτός	Συνεχές
	Διακριτός	Διακριτό
Συνεχούς χρόνου	Συνεχής	Συνεχές
	Συνεχής	Διακριτό

Πίνακας 1.1 Κατηγορίες σημάτων.



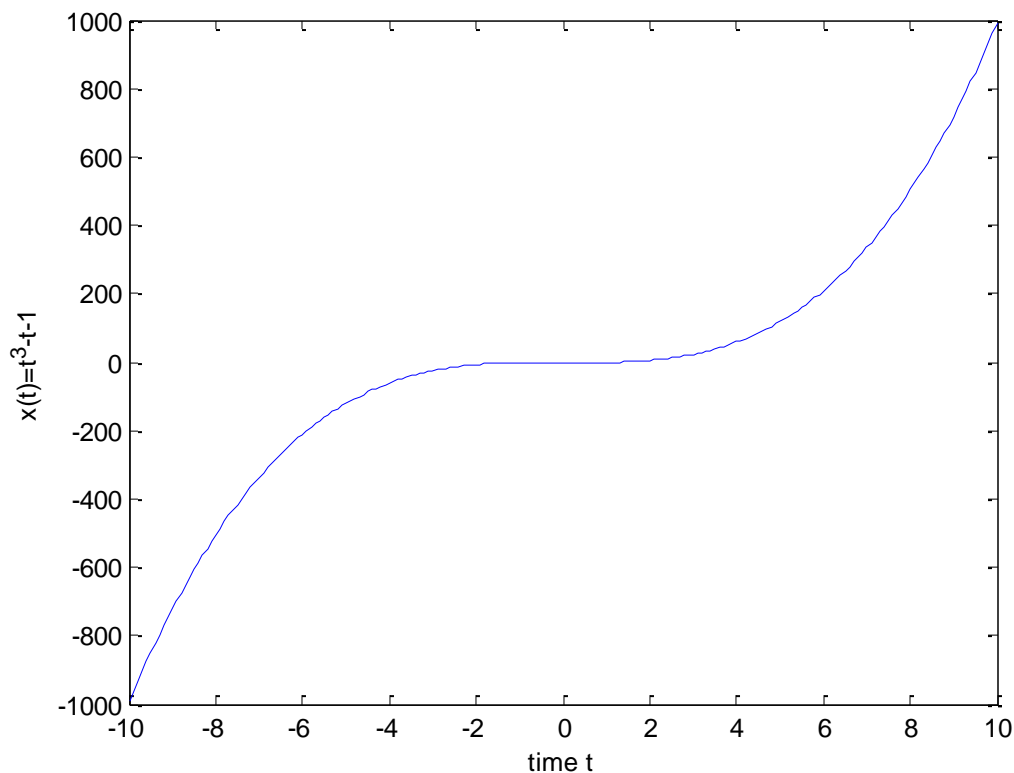
Χρήσιμη ξενόγλωσση βιβλιογραφία είναι τα βιβλία Damper, 1995, Ingle and Proakis, 2003, Lynn & Fuerst, 1989, Oppenheim, Willsky, Nawab, 2013, Proakis & Manolakis, 2007, Strum & Kirk, 1988. Χρήσιμη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία είναι τα βιβλία Hayes, 2000, McClellan, Schafer & Yoder, 2006, Ασημάκης, 2008, Θεοδωρίδης, Μπερμπερίδης, Κοφίδης, 2003, Καλουπτσίδης, 1994, Καραγιάννης & Μαραγκός, 2010, Καραγιάννης & Τζίτζιράχου, 2003, Καραμπογιός, 2009, Μάργαρης, 2014, Μουστακίδης, 2004, Παρασκευάς, 2014, Σκόδρας & Αναστασόπουλος, 2003, Φωτόπουλος & Βελώνη, 2008.

Ένα **σήμα διακριτού χρόνου** είναι, από μαθηματική άποψη, μία **ακολουθία** πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών που παριστάνεται ως ακολουθία  $x(n)$ , της οποίας η ανεξάρτητη μεταβλητή έχει πεδίο ορισμού διακριτές ακέραιες τιμές. Για παράδειγμα, το σήμα  $x(n) = n^3 - n - 1, n \in [-10:10]$ , το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 1.1, είναι ένα πραγματικό σήμα διακριτού χρόνου. Με  $[n_1:n_2]$  συμβολίζεται το σύνολο  $\{n_1, n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_2\}$ , όπου  $n_1$  και  $n_2$  ακέραιοι με  $n_1 \leq n_2$ .



Σχήμα 1.1 Σήμα διακριτού χρόνου.

Ένα **σήμα συνεχούς χρόνου** είναι, από μαθηματική άποψη, μία **συνάρτηση** πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών που παριστάνεται ως συνάρτηση  $x(t)$ , της οποίας η ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  έχει πεδίο ορισμού πραγματικές τιμές από ένα υποσύνολο του πραγματικού άξονα. Για παράδειγμα, το σήμα  $x(t) = t^3 - t - 1, t \in [-10,10]$ , το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 1.2, είναι ένα πραγματικό σήμα συνεχούς χρόνου.



Σχήμα 1.2 Σήμα συνεχούς χρόνου.

Όταν τα σήματα είναι συναρτήσεις ή ακολουθίες περισσότερων της μίας μεταβλητών, τότε ονομάζονται **πολυδιάστατα σήματα**. Για παράδειγμα, μία εικόνα είναι ένα δισδιάστατο σήμα  $x(n_1, n_2)$  με ανεξάρτητες μεταβλητές τις συντεταγμένες του επιπέδου και πλάτος τη φωτεινότητα της εικόνας. Επίσης, το βίντεο είναι ένα τρισδιάστατο σήμα με ανεξάρτητες μεταβλητές τις συντεταγμένες του χώρου και τον χρόνο και πλάτος τη φωτεινότητα του βίντεο.

Όταν τα σήματα είναι περισσότερες από μία συναρτήσεις ή ακολουθίες, τότε ονομάζονται πολυκαναλικά σήματα και παριστάνονται από μαθηματική άποψη με διάνυσματα. Για παράδειγμα, μία έγχρωμη εικόνα είναι ένα δισδιάστατο τρικαναλικό σήμα. Οι δύο διαστάσεις αντιστοιχούν στις συντεταγμένες του επιπέδου και τα τρία κανάλια αντιστοιχούν στις τιμές των τριών χρωμάτων Κόκκινο, Πράσινο, Μπλε (RGB: Red, Green, Blue). Η έγχρωμη εικόνα μπορεί να παρασταθεί με το διάνυσμα:

$$\underline{x}(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} x_R(n_1, n_2) \\ x_G(n_1, n_2) \\ x_B(n_1, n_2) \end{bmatrix}$$

Τέλος, όταν οι τιμές που παίρνει ένα σήμα σε κάθε χρονική στιγμή είναι δεδομένες χωρίς αβεβαιότητα, δηλαδή οι συναρτήσεις με τις οποίες παριστάνονται μαθηματικά είναι πλήρως ορισμένες, τότε το σήμα λέγεται **αιτιοκρατικό ή νομοτελειακό ή ντετερμινιστικό** σήμα. Υπάρχουν όμως και τα **τυχαία ή στοχαστικά** σήματα που δεν μπορούν να καθοριστούν με βεβαιότητα, δηλαδή δεν είναι δυνατή η ακριβής συναρτησιακή περιγραφή τους, οπότε απαιτείται η στατιστική περιγραφή τους. Έτσι, ένας θόρυβος ή ένα σήμα που περιγράφει το ύψος των κυμάτων σε μία λίμνη ή ένα σήμα που περιγράφει το ύψος των σταχυών σε ένα χωράφι, δεν είναι δυνατό να περιγραφεί από συνάρτηση, αλλά μπορεί να περιγραφεί με μία τυχαία μεταβλητή με ένα μέσο όρο και μία διασπορά. Στο ηλεκτρονικό βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με αιτιοκρατικά σήματα.

## 1.2. Σήματα διακριτού χρόνου

1-2-3-4-0-0

### 1.2.1. Το σήμα διακριτού χρόνου ως ακολουθία

Ένα σήμα διακριτού χρόνου παριστάνεται μαθηματικά ως μία **ακολουθία**. Η ανεξάρτητη μεταβλητή ονομάζεται **χρόνος** και συμβολίζεται με  $n$ . Πρόκειται για διακριτή μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε ακέραια τιμή. Η εξαρτημένη μεταβλητή ονομάζεται **πλάτος** και συμβολίζεται με  $x(n)$ . Το πλάτος μπορεί να πάρει πραγματικές ή μιγαδικές τιμές. Αν το πλάτος είναι πραγματικό, τότε το σήμα είναι πραγματικό σήμα διακριτού χρόνου. Αν το πλάτος είναι μιγαδικό, τότε το σήμα είναι μιγαδικό σήμα διακριτού χρόνου. Το μιγαδικό σήμα διακριτού χρόνου παριστάνεται μαθηματικά ως:

$$x(n) = a(n) + j \cdot b(n) = r(n) \cdot e^{j \cdot \varphi(n)} \quad (1.1)$$

όπου

- $a(n) = \text{Re}[x(n)]$  είναι η πραγματική συνιστώσα του  $x(n)$
- $b(n) = \text{Im}[x(n)]$  είναι η φανταστική συνιστώσα του  $x(n)$
- $r(n) = |x(n)| = \sqrt{a^2(n) + b^2(n)}$  είναι το μέτρο του  $x(n)$
- $\varphi(n) = \arg(x(n)) = \arctan \frac{\text{Im}(x(n))}{\text{Re}(x(n))} = \arctan \frac{b(n)}{a(n)}$  είναι η φάση του  $x(n)$

Παρατήρηση:

Το συζυγές σήμα του  $x(n)$  είναι το συζυγές μιγαδικό σήμα  $x^*(n) = a(n) - j \cdot b(n) = r(n) \cdot e^{-j \cdot \varphi(n)}$

όπου

- $a(n) = \text{Re}[x^*(n)] = \text{Re}[x(n)]$  είναι η πραγματική συνιστώσα του  $x^*(n)$
- $-b(n) = \text{Im}[x^*(n)] = -\text{Im}[x(n)]$  είναι η φανταστική συνιστώσα του  $x^*(n)$
- $r(n) = |x^*(n)| = |x(n)| = \sqrt{a^2(n) + b^2(n)}$  είναι το μέτρο του  $x^*(n)$
- $-\varphi(n) = \arg(x^*(n)) = -\arg(x(n))$  είναι η φάση του  $x^*(n)$

### 1.2.2. Διάρκεια σημάτων διακριτού χρόνου

Τα σήματα συνεχούς χρόνου διακρίνονται με κριτήριο τη διάρκειά τους σε σήματα **πεπερασμένης διάρκειας** και σε σήματα **άπειρης διάρκειας**. Ένα σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, όταν το σήμα υπάρχει σε ένα διάστημα χρόνου, δηλαδή αρχίζει κάποια χρονική στιγμή και τελειώνει κάποια άλλη χρονική στιγμή. Αυτό σημαίνει ότι έξω από αυτό τον χρονικό διάστημα το σήμα είναι μηδενικό και ότι το σήμα είναι μία πεπερασμένη ακολουθία. Ένα σήμα είναι σήμα άπειρης διάρκειας, όταν είναι μία άπειρη ακολουθία, δεξιάς πλευράς (η διάρκεια του σήματος αρχίζει κάποια χρονική στιγμή και εκτείνεται μέχρι το συν άπειρο), αριστερής πλευράς (η διάρκεια του σήματος εκτείνεται από το πλην άπειρο και τελειώνει κάποια χρονική στιγμή και), ή αμφίπλευρη η διάρκεια του σήματος εκτείνεται από το πλην άπειρο μέχρι το συν άπειρο). Οι κατηγορίες σημάτων με κριτήριο τη διάρκειά τους εμφανίζονται στον Πίνακα 1.2.

Διάρκεια	Σήμα	Χρόνος
Πεπερασμένη	πεπερασμένη ακολουθία	$n \in [n_1 : n_2]$
Άπειρη	ακολουθία δεξιάς πλευράς	$n \geq n_0$
Άπειρη	ακολουθία αριστερής πλευράς	$n \leq n_0$
Άπειρη	αμφίπλευρη ακολουθία	$-\infty < n < +\infty$

Πίνακας 1.2 Διάρκεια σημάτων διακριτού χρόνου.

### 1.2.3. Αιτιότητα σημάτων διακριτού χρόνου

Τα σήματα συνεχούς χρόνου διακρίνονται σε **αιτιατά** σήματα και σε **μη αιτιατά** ή **αναιτιατά** σήματα με κριτήριο τον χρόνο έναρξης ή λήξης τους.

Ένα σήμα είναι αιτιατό, όταν είναι μηδενικό για αρνητικές χρονικές στιγμές:

$$x(n) = 0, n < 0 \quad (1.2)$$

Ένα σήμα είναι αναιτιατό ή μη αιτιατό, όταν είναι μηδενικό για θετικές χρονικές στιγμές:

$$x(n) = 0, n > 0 \quad (1.3)$$

### 1.2.4. Περιοδικότητα σημάτων διακριτού χρόνου

Ένα σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)$  λέγεται **περιοδικό**, όταν για κάθε  $n$  υπάρχει ένας φυσικός αριθμός  $N$  μεγαλύτερος του 1, δηλαδή  $N \geq 2$ , για τον οποίο ισχύει:

$$x(n) = x(n + N), \forall n \quad (1.4)$$

Ο σταθερός αριθμός  $N$  λέγεται περίοδος. Ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο ισχύει η παραπάνω σχέση ονομάζεται **θεμελιώδης περίοδος**. Στην περίπτωση όπου  $N = 1$ , το σήμα είναι σταθερό.

### 1.2.5. Συμμετρία σημάτων διακριτού χρόνου

#### 1.2.5.1. Συμμετρία πραγματικού σήματος διακριτού χρόνου

Ένα σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)$  λέγεται **άρτιο**, όταν

$$x(n) = x(-n), \forall n \quad (1.5)$$

οπότε έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των τεταγμένων.

Ένα άρτιο σήμα έχει ίσες τιμές σε αντίθετους χρόνους.

Ένα σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)$  λέγεται **περιττό**, όταν

$$x(n) = -x(-n), \forall n \quad (1.6)$$

οπότε έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Ένα περιττό σήμα έχει αντίθετες τιμές σε αντίθετους χρόνους.

Παρατήρηση.

Αν ένα σήμα  $x(n)$  είναι περιττό, τότε  $x(0) = 0$ .

Πράγματι, για  $n = 0$  έχουμε  $x(0) = -x(-0) = -x(0) \Rightarrow 2 \cdot x(0) = 0 \Rightarrow x(0) = 0$ .

Μπορείτε να διερευνήσετε τη συμμετρία πραγματικών σημάτων διακριτού χρόνου με το Διαδραστικό πρόγραμμα 1.1.



#### Διαδραστικό πρόγραμμα 1.1 Συμμετρία πραγματικών σημάτων διακριτού χρόνου.

Κάθε πραγματικό σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)$  μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα άρτιου (even) σήματος  $x_e(n)$  και περιττού (odd) σήματος  $x_o(n)$ :

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \quad (1.7)$$

όπου

$$x_e(n) = \frac{1}{2} \cdot [x(n) + x(-n)] \quad (1.8)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2} \cdot [x(n) - x(-n)] \quad (1.9)$$

### 1.2.5.2. Ειδική συμμετρία πραγματικού σήματος διακριτού χρόνου

Για τα πραγματικά σήματα διακριτού χρόνου πεπερασμένης διάρκειας με  $n \in [0: N]$  υπάρχουν τέσσερις ειδικές συμμετρίες που σχετίζονται με το αν ο αριθμός με  $N$  είναι άρτιος ή περιττός και με το αν η συμμετρία είναι άρτια ή περιττή. Τα τέσσερα είδη ειδικών συμμετριών εμφανίζονται στον Πίνακα 1.3.

Το σήμα είναι άρτιο, όταν  $x(n) = x(N - n), n \in [0: N]$  και έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα  $x = \frac{N}{2}$ .

Το σήμα είναι περιττό, όταν  $x(n) = -x(N - n), n \in [0: N]$  και έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο  $\left(0, \frac{N}{2}\right)$ .

Διάρκεια	Συμμετρία	Κέντρο ή άξονας συμμετρίας	Είδος συμμετρίας
$N$ άρτιος	άρτια	άξονας $x = \frac{N}{2}$	I
$N$ άρτιος	περιττή	σημείο $\left(0, \frac{N}{2}\right)$	II
$N$ περιττός	άρτια	άξονας $x = \frac{N}{2}$ , δεν υπάρχει $x\left(\frac{N}{2}\right)$	III
$N$ περιττός	περιττή	σημείο $\left(0, \frac{N}{2}\right)$ , δεν υπάρχει $x\left(\frac{N}{2}\right)$	IV

Πίνακας 1.3 Συμμετρία σημάτων πεπερασμένης διάρκειας.

Μπορείτε να διερευνήσετε την ειδική συμμετρία πραγματικών σημάτων διακριτού χρόνου με το Διαδραστικό πρόγραμμα 1.2.



Διαδραστικό πρόγραμμα 1.2 Ειδική συμμετρία πραγματικών σημάτων διακριτού χρόνου.

### 1.2.5.3. Συμμετρία μιγαδικού σήματος διακριτού χρόνου

Ένα σήμα διακριτού χρόνου λέγεται **συζυγές συμμετρικό**, όταν

$$x(-n) = x^*(n), \forall n \quad (1.10)$$

Ένα σήμα διακριτού χρόνου λέγεται **συζυγές αντισυμμετρικό**, όταν

$$x(-n) = -x^*(n), \forall n \quad (1.11)$$

Παρατήρηση:  $x^*(n)$  συμβολίζει το συζυγές του  $x(n)$ .

## 1.2.6. Βασικά σήματα διακριτού χρόνου

### 1.2.6.1. Σήμα μοναδιαίου δείγματος

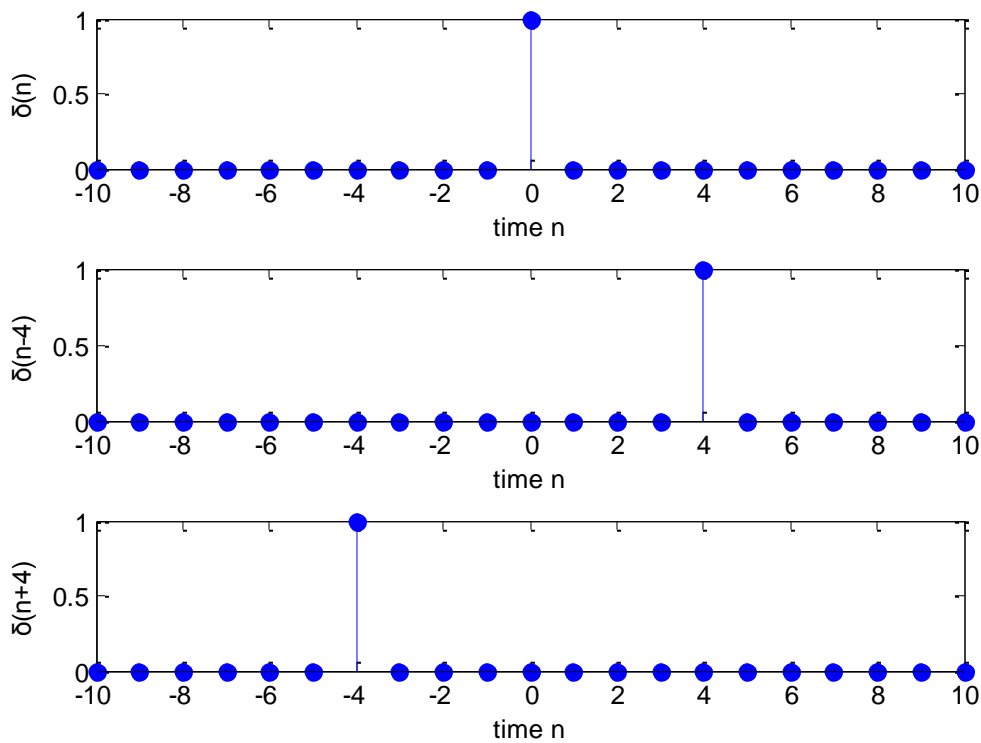
Το **σήμα μοναδιαίου δείγματος** ή **δέλτα του Kronecker**, ορίζεται να είναι:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

και στη γενική μορφή

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 1, n = n_0 \\ 0, n \neq n_0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Για παράδειγμα, θεωρώντας τον οριζόντιο άξονα ως το διακριτό χρόνο  $n$ , μπορούμε να υπολογίσουμε τα σήματα  $\delta(n)$ ,  $\delta(n-4)$ ,  $\delta(n+4)$  που έχουν τις τιμές τους στον κάθετο άξονα και παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3 Σήμα μοναδιαίου δείγματος.

Το σήμα μοναδιαίου δείγματος  $\delta(n)$  αναπαριστά μαθηματικά την εμφάνιση ενός φυσικού γεγονότος μία χρονική στιγμή και έχει ιδιαίτερη αξία στην Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων.

### 1.2.6.2. Σήμα μοναδιαίου βήματος

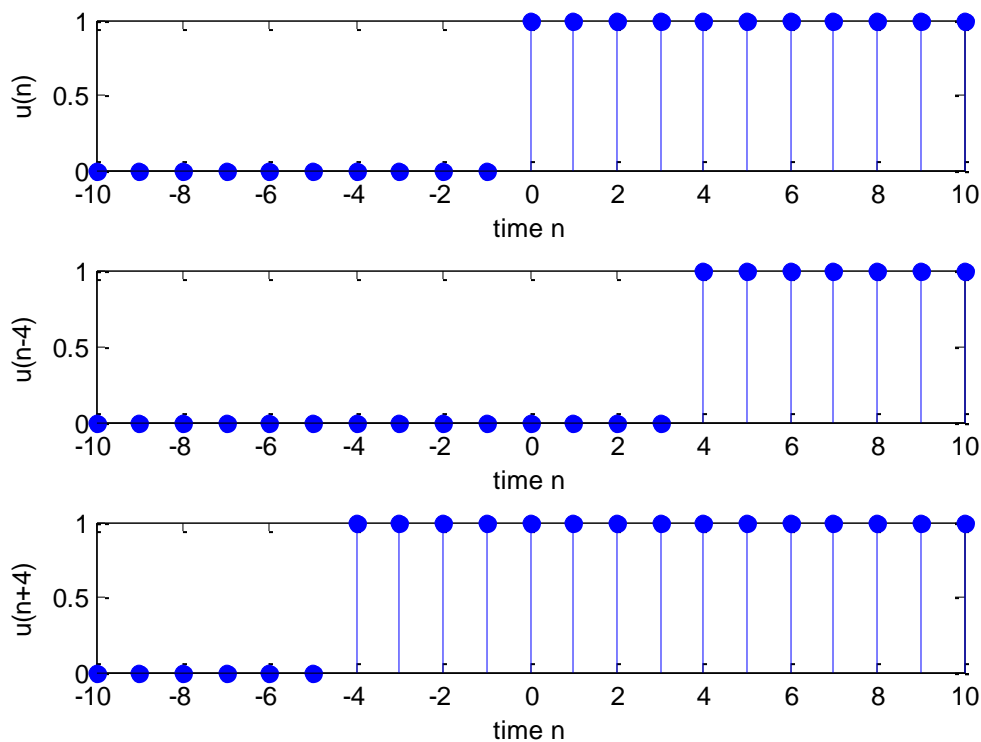
Το **σήμα μοναδιαίου βήματος**, ορίζεται να είναι:

$$u(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

και στη γενική μορφή

$$u(n - n_0) = \begin{cases} 1, n \geq n_0 \\ 0, n < n_0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Για παράδειγμα, θεωρώντας τον οριζόντιο άξονα ως το διακριτό χρόνο  $n$ , μπορούμε να υπολογίσουμε τα σήματα  $u(n)$ ,  $u(n-4)$ ,  $u(n+4)$  που έχουν τις τιμές τους στον κάθετο άξονα και παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.4.



Σχήμα 1.4 Σήμα μοναδιαίου βήματος.

Παρατηρήσεις.

Τα σήματα  $\delta(n)$  και  $u(n)$  συνδέονται με τη σχέση:

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1.16)$$

Το σήμα  $\delta(n) = u(n) - u(n-N)$  είναι ένας ψηφιακός παλμός πλάτους  $N$  χρονικών στιγμών, από τη χρονική στιγμή 0 έως και τη χρονική στιγμή  $N-1$ .

Το σήμα μοναδιαίου βήματος  $u(n)$  αναπαριστά μαθηματικά την εμφάνιση ενός φυσικού γεγονότος από μία χρονική στιγμή και μετά.

### 1.2.6.3. Ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου

Το **ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου** ορίζεται να είναι:

$$x(n) = A \cdot \sin(\omega \cdot n + \varphi) \quad (1.17)$$

όπου  $A$  είναι το πλάτος του σήματος,  $\omega$  είναι η συχνότητα και  $\varphi$  είναι η φάση του σήματος.

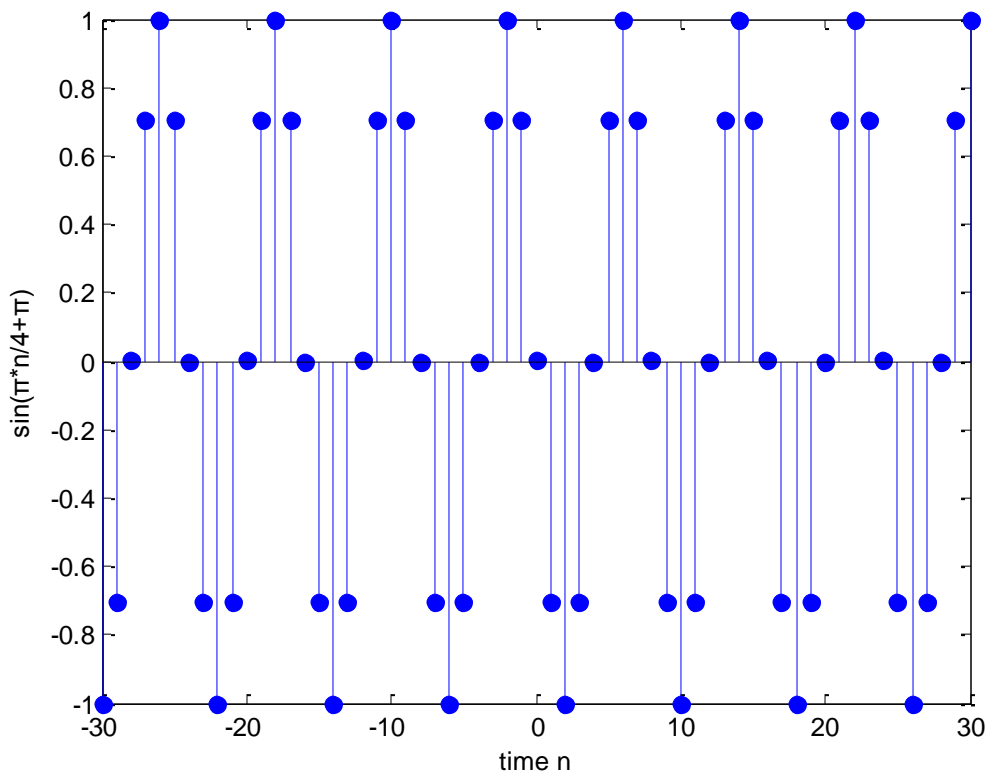
Το ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου δεν είναι πάντα περιοδικό. **Το ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου είναι περιοδικό, αν η συχνότητα  $\omega$  του σήματος είναι ρητό πολλαπλάσιο του  $2\pi$  και τότε η θεμελιώδης**

**περίοδος είναι  $N = \frac{2\pi}{\omega}$ .**

Πράγματι, για να ισχύει  $x(n) = x(n+N)$ , πρέπει να ισχύει  $A \cdot \sin(\omega \cdot n + \varphi) = A \cdot \sin(\omega \cdot (n+N) + \varphi)$ , που για  $k \in \mathbb{Z}$  δίνει  $\omega \cdot n + \varphi + 2k\pi = \omega \cdot n + \omega \cdot N + \varphi$  ή  $2k\pi = \omega \cdot N$ . Αυτό σημαίνει ότι για να είναι περιοδικό το ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου πρέπει  $\omega = 2\pi \frac{k}{N}$ . Για  $k=1$  η θεμελιώδης περίοδος είναι

$$N = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.18)$$

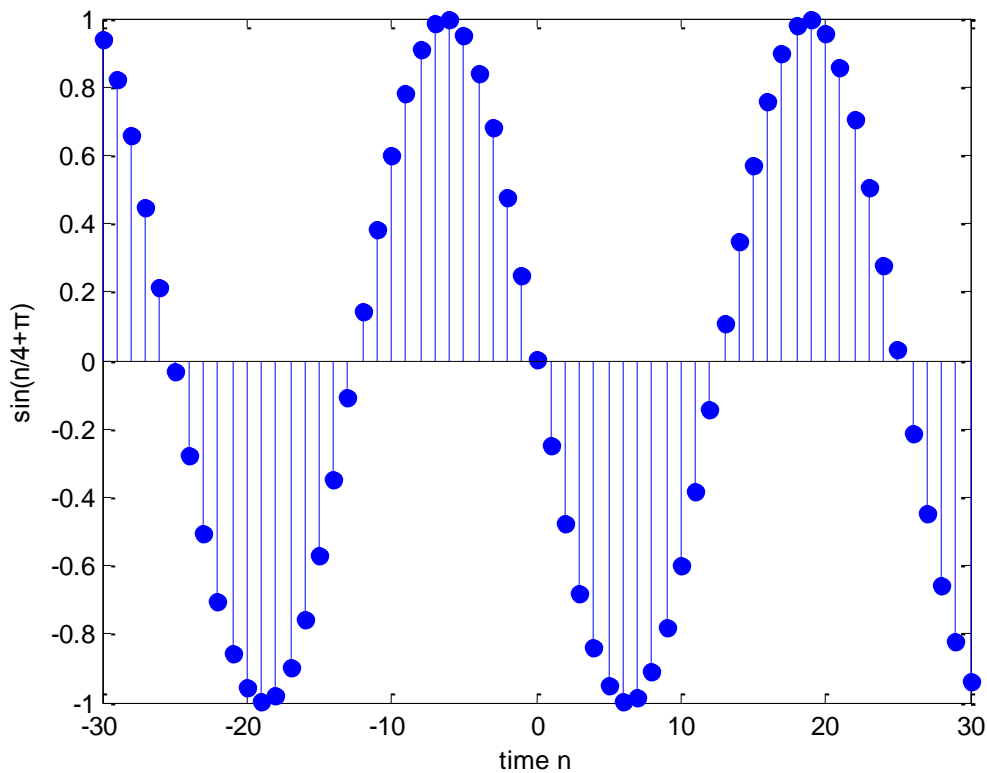
Το ημιτονοειδές σήμα  $x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot n + \pi\right)$ , το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.5, έχει συχνότητα  $\omega = \frac{\pi}{4}$ , που είναι ρητό πολλαπλάσιο του  $2\pi$  και επομένως το σήμα είναι περιοδικό, με θεμελιώδη περίοδο  $N = 8$ .



Σχήμα 1.5 Περιοδικό ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου.

Το ημιτονοειδές σήμα  $x(n) = \sin\left(\frac{1}{4} \cdot n + \pi\right)$ , το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.6, έχει συχνότητα  $\omega = \frac{1}{4}$ , που δεν είναι ρητό πολλαπλάσιο του  $2\pi$ . Επομένως το σήμα δεν είναι περιοδικό.





**Σχήμα 1.6** Μη περιοδικό ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου.

Μπορείτε να διερευνήσετε την περιοδικότητα ημιτονοειδούς σήματος διακριτού χρόνου με το Διαδραστικό πρόγραμμα 1.3.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 1.3** Περιοδικότητα ημιτονοειδούς σήματος διακριτού χρόνου.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

#### 1.2.6.4. Πραγματικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου

Το **πραγματικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου** ορίζεται να είναι:

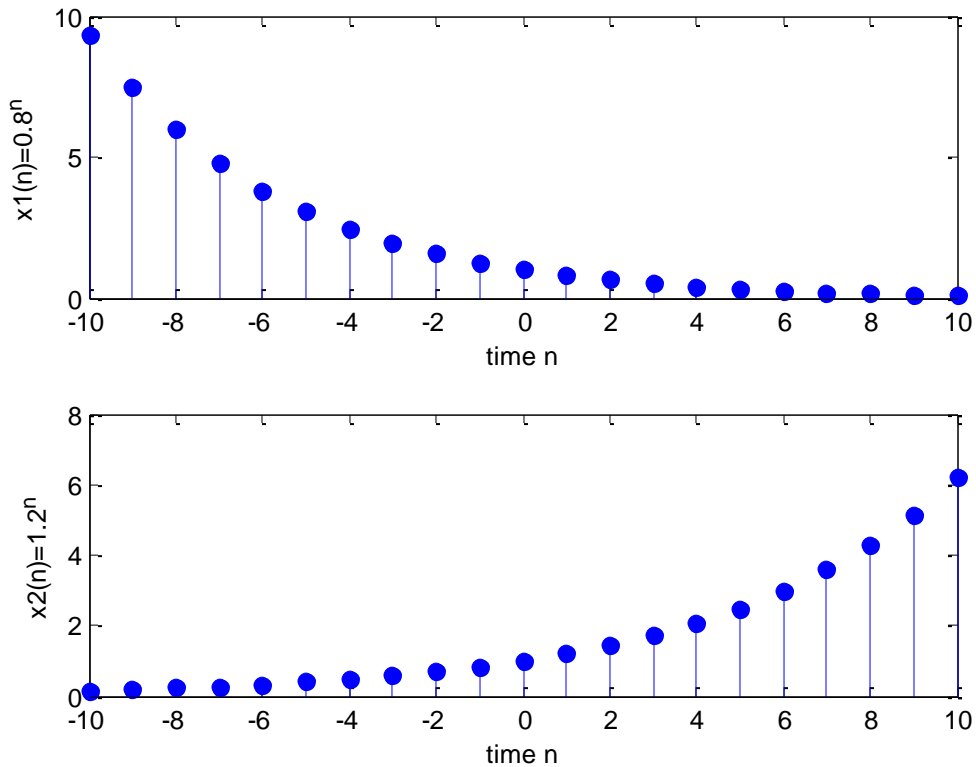
$$x(n) = r^n, r \in \mathbb{R}$$

(1.19)

όπου  $r$  είναι η βάση του εκθετικού σήματος.

Όταν  $|r| < 1$ , τότε το σήμα είναι μία φθίνουσα ακολουθία, ενώ όταν  $|r| > 1$ , τότε το σήμα είναι μία αύξουσα ακολουθία.

Στο Σχήμα 1.7 παρουσιάζονται τα σήματα  $x_1(n) = (0.8)^n$  και  $x_2(n) = (1.2)^n$ .



Σχήμα 1.7 Πραγματικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου.

Στην περίπτωση όπου  $|r| = 1$ , τότε το σήμα είναι σταθερό: αν  $r = 1$ , τότε  $x(n) = 1$ , ενώ αν  $r = -1$ , τότε  $x(n) = -1$ .

### 1.2.6.5. Φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου

Το **φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου** ορίζεται να είναι:

$$x(n) = e^{j\omega n} = \cos(\omega \cdot n) + j \cdot \sin(\omega \cdot n) = r(n) \cdot e^{j\varphi(n)} \quad (1.20)$$

όπου  $\omega$  είναι η συχνότητα του σήματος και

-  $\cos(\omega \cdot n) = \text{Re}[x(n)]$  είναι η πραγματική συνιστώσα του  $x(n)$

-  $\sin(\omega \cdot n) = \text{Im}[x(n)]$  είναι η φανταστική συνιστώσα του  $x(n)$

-  $r(n) = |x(n)| = \sqrt{\sin^2(\omega \cdot n) + \cos^2(\omega \cdot n)} = 1$  είναι το μέτρο του  $x(n)$

-  $\varphi(n) = \arg(x(n)) = \arctan \frac{\text{Im}(x(n))}{\text{Re}(x(n))} = \arctan \frac{\sin(\omega \cdot n)}{\cos(\omega \cdot n)} = \arctan(\tan(\omega \cdot n)) = \omega \cdot n$  είναι η φάση του  $x(n)$

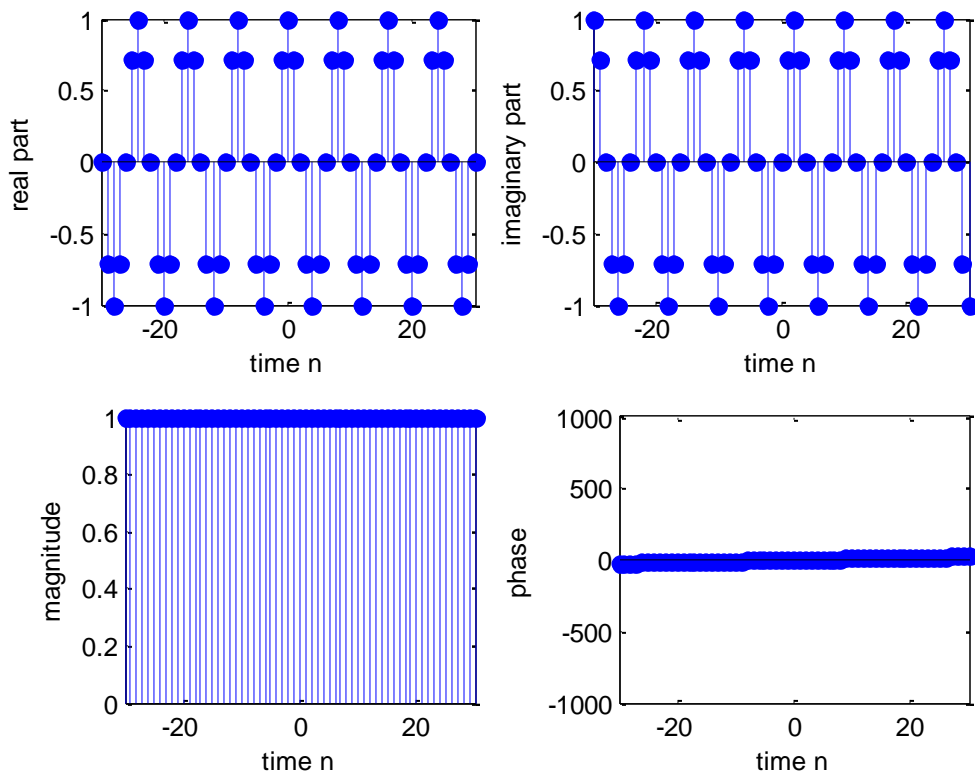
Παρατήρηση: το φανταστικό εκθετικό σήμα έχει γραμμική φάση (ως προς τον χρόνο  $n$ ).

Το φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου δεν είναι πάντα περιοδικό. **Το φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου είναι περιοδικό αν η συχνότητα  $\omega$  του σήματος είναι ρητό πολλαπλάσιο του  $2\pi$**  και τότε η **θεμελιώδης περίοδος είναι  $N = \frac{2\pi}{\omega}$** .

Πράγματι, για να ισχύει  $x(n) = x(n + N)$ , πρέπει να ισχύει  $e^{j\omega n} = e^{j\omega(n+N)}$ , δηλαδή  $e^{j\omega N} = 1 \Rightarrow \cos(\omega \cdot N) + j \cdot \sin(\omega \cdot N) = 1 + j \cdot 0 \Rightarrow 2k\pi = \omega \cdot N$ . Αυτό σημαίνει ότι για να είναι περιοδικό το φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού πρέπει να ισχύει  $\omega = 2\pi \frac{k}{N}$ , οπότε η θεμελιώδης περίοδος είναι

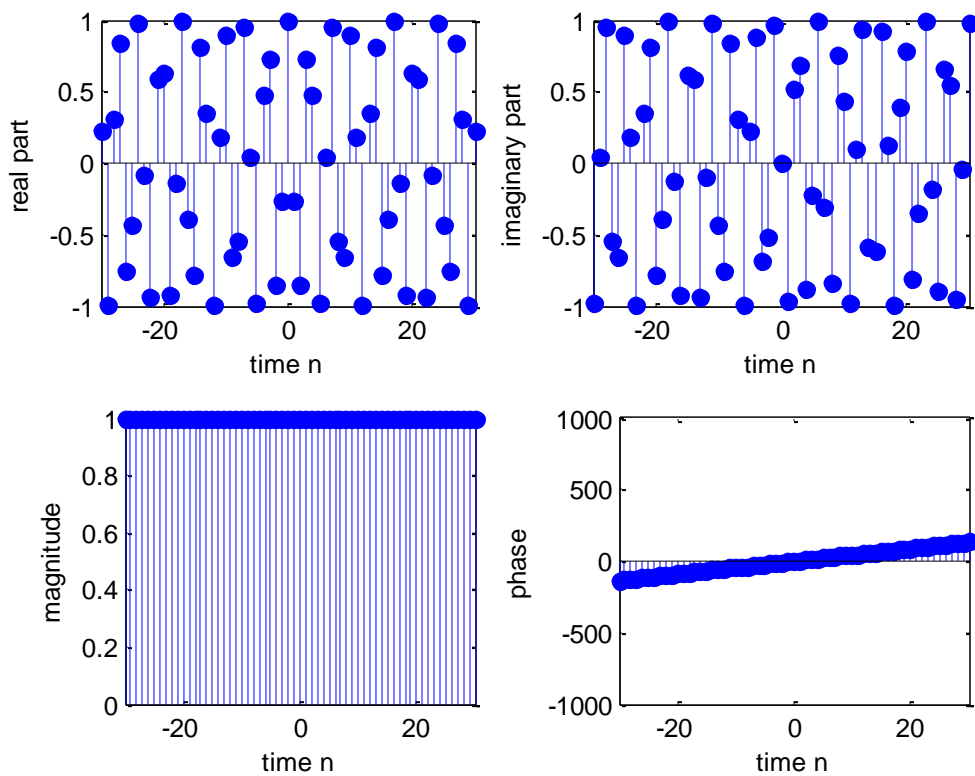
$$N = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.21)$$

Το φανταστικό εκθετικό σήμα  $x(n) = e^{j\pi n/4}$ , που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.8, έχει συχνότητα  $\omega = \frac{\pi}{4}$ , η οποία είναι ρητό πολλαπλάσιο του  $2\pi$  και επομένως το σήμα είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο  $N = 8$ .



**Σχήμα 1.8** Περιοδικό φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου.

Το φανταστικό εκθετικό σήμα  $x(n) = e^{j\pi\sqrt{2}n}$ , που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.9, έχει συχνότητα  $\omega = \pi \cdot \sqrt{2}$ , που δεν είναι ρητό πολλαπλάσιο του  $2\pi$ , επομένως το σήμα δεν είναι περιοδικό.



Σχήμα 1.9 Μη περιοδικό φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι τα φανταστικά εκθετικά σήματα με συχνότητες που απέχουν  $2\pi$  είναι ίσα, αφού  $e^{j\omega n} = e^{j(\omega+2\pi)n}$ .

### 1.2.6.6. Μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου

Το **μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου** ορίζεται να είναι:

$$x(n) = r^n \cdot e^{j\omega n} = r^n \cdot [\cos(\omega \cdot n) + j \cdot \sin(\omega \cdot n)] = r^n \cdot e^{j\varphi(n)} \quad (1.22)$$

όπου  $r$  είναι η βάση,  $\omega$  είναι η συχνότητα του σήματος και

-  $r^n \cdot \cos(\omega \cdot n) = \text{Re}[x(n)]$  είναι η πραγματική συνιστώσα του  $x(n)$

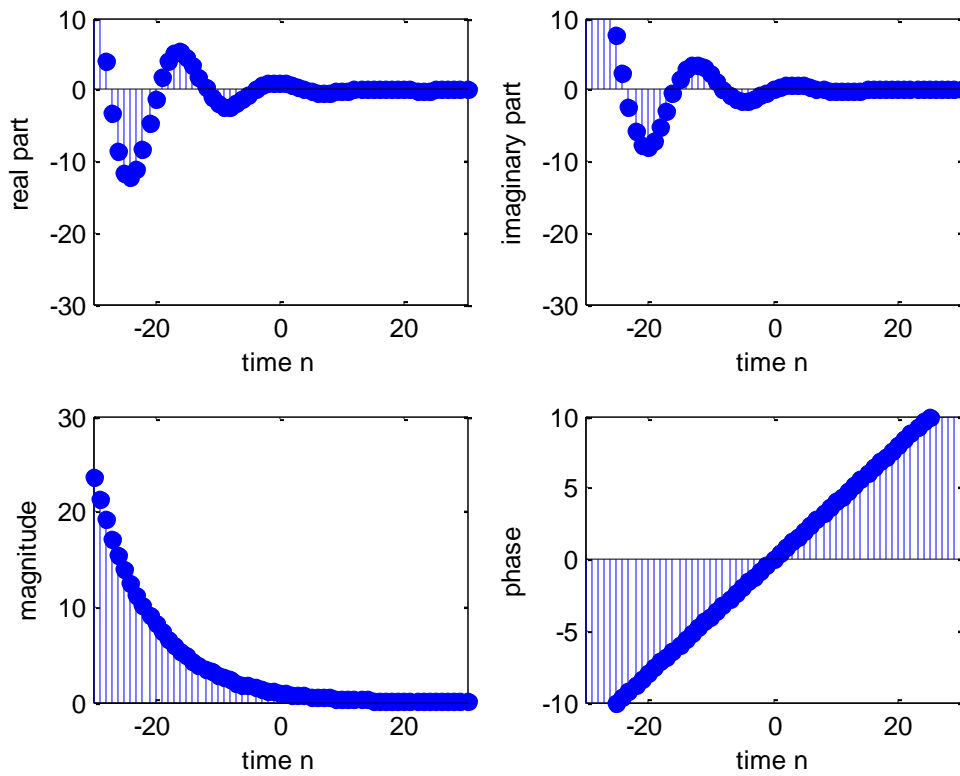
-  $r^n \cdot \sin(\omega \cdot n) = \text{Im}[x(n)]$  είναι η φανταστική συνιστώσα του  $x(n)$

-  $r^n = |x(n)|$  είναι το μέτρο του  $x(n)$

-  $\varphi(n) = \arg(x(n)) = \arctan \frac{\text{Im}(x(n))}{\text{Re}(x(n))} = \arctan \frac{r^n \cdot \sin(\omega \cdot n)}{r^n \cdot \cos(\omega \cdot n)} = \arctan(\tan(\omega \cdot n)) = \omega \cdot n$  είναι η φάση του  $x(n)$

Παρατήρηση: το μιγαδικό εκθετικό σήμα έχει γραμμική φάση (ως προς τον χρόνο  $n$ ).

Το σήμα  $x(n) = (0.9)^n \cdot e^{j0.4n}$  παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.10.



Σχήμα 1.10 Μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου.

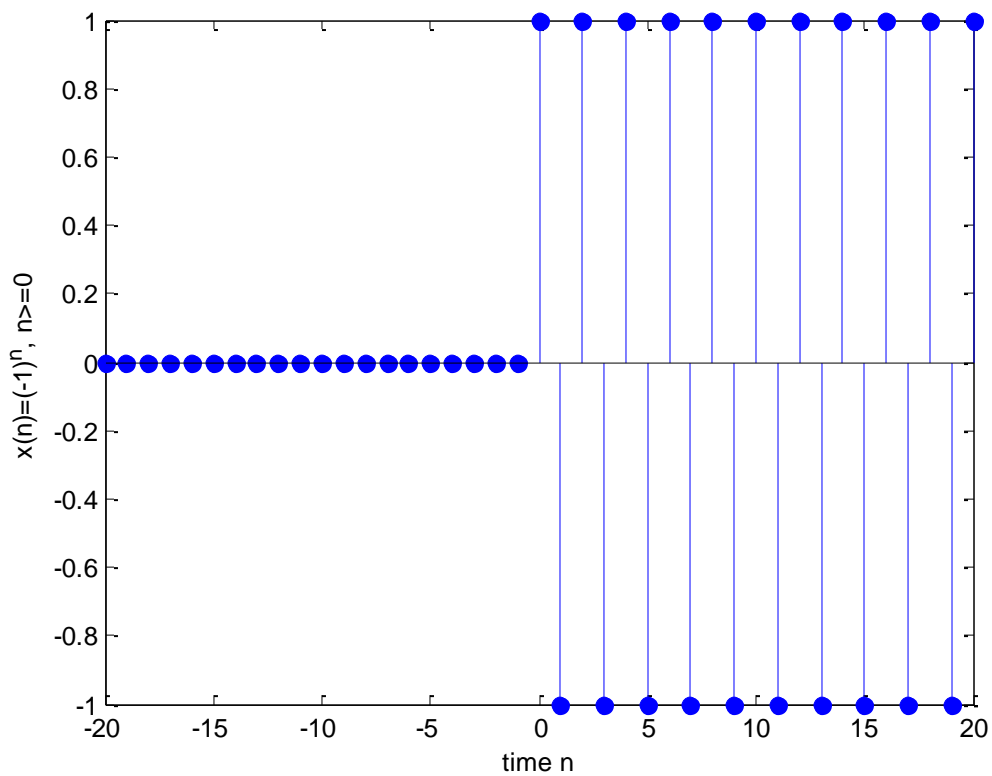
### 1.2.6.7. Μοναδιαίο εναλλακτικό σήμα

Το **μοναδιαίο εναλλακτικό σήμα** ορίζεται να είναι:

$$u_a(n) = \begin{cases} (-1)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

Οι τιμές του σήματος εναλλάσσονται ανάμεσα στις τιμές +1 και -1 για τις χρονικές στιγμές  $n=0,1,2,\dots$ . Η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή  $n=0$  είναι +1.

Το μοναδιαίο εναλλακτικό σήμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.11.



Σχήμα 1.11 Μοναδιαίο εναλλακτικό σήμα.

### 1.2.6.8. Σήμα μέγιστης παλινδρόμησης

Το **σήμα μέγιστης παλινδρόμησης** ορίζεται να είναι:

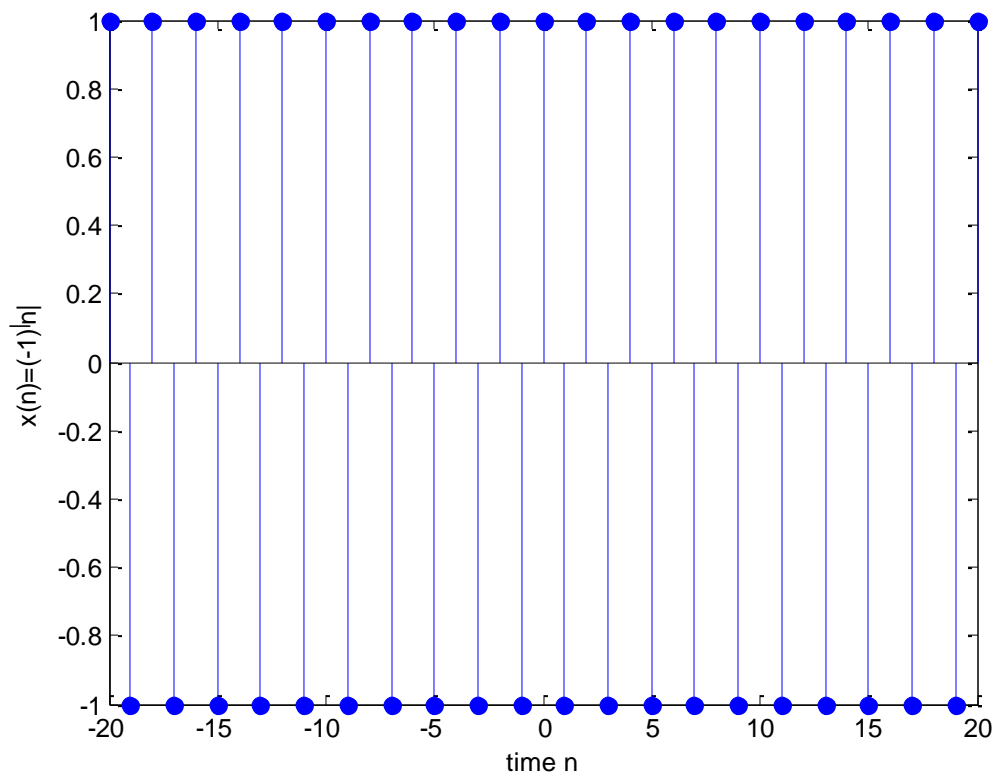
$$u_a^\pm(n) = (-1)^{|n|}, \forall n \quad (1.24)$$

Οι τιμές του σήματος εναλλάσσονται ανάμεσα στις τιμές +1 και -1 για όλες τις χρονικές στιγμές. Η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή  $n=0$  είναι +1.

Η σχέση του σήματος μέγιστης παλινδρόμησης και του μοναδιαίου εναλλακτικού σήματος είναι:

$$u_a(n) = u_a^\pm(n) \cdot u(n) \quad (1.25)$$

Το σήμα μέγιστης παλινδρόμησης παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.12.



Σχήμα 1.12 Σήμα μέγιστης παλινδρόμησης.

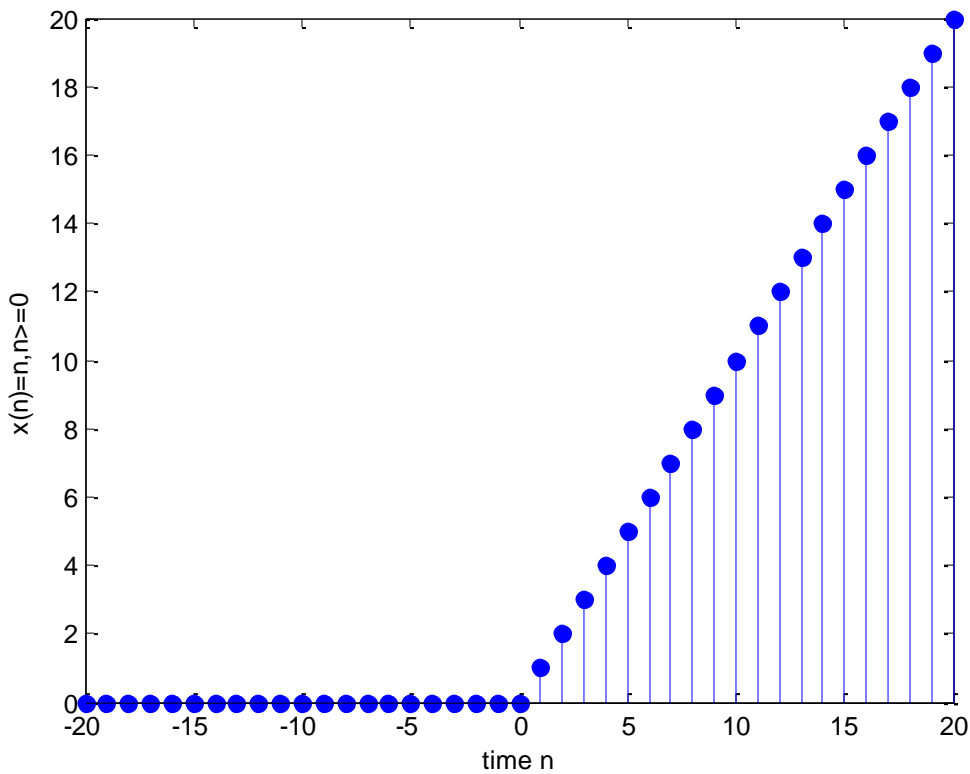
### 1.2.6.9. Σήμα μοναδιαίας κλίσης

Το **σήμα μοναδιαίας κλίσης** ορίζεται να είναι:

$$u_r(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

Οι τιμές του σήματος είναι ίσες με τις τιμές του χρόνου, για τις χρονικές στιγμές  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Το σήμα μοναδιαίας κλίσης παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.13.



Σχήμα 1.13 Σήμα μοναδιαίας κλίσης.

### 1.2.7. Ενέργεια και Ισχύς σημάτων διακριτού χρόνου

Η **ενέργεια**,  $E$ , ενός σήματος διακριτού χρόνου ορίζεται ως:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \quad (1.27)$$

Βέβαια, αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n)$$

Παράδειγμα.

Το σήμα  $x(n) = \delta(n) + 8\delta(n-5)$  έχει ενέργεια

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\delta(n) + 8\delta(n-5))^2 = 1^2 + 8^2 = 1 + 64 = 65$$

Η **μέση ισχύς**,  $P$ , ενός σήματος διακριτού χρόνου ορίζεται ως:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot N + 1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} x(n) \cdot x^*(n) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot N + 1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2 \right] \quad (1.28)$$

Βέβαια, αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot N + 1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} x^2(n) \right]$$

Παράδειγμα.

Για το σταθερό σήμα  $x(n) = \frac{1}{2}$  ισχύει

$$\sum_{n=-N}^{+N} x^2(n) = \sum_{n=-N}^{+N} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \sum_{n=-N}^{+N} \frac{1}{4} = (2 \cdot N + 1) \cdot \frac{1}{4}$$



οπότε το σήμα  $x(n) = \frac{1}{2}$  έχει ισχύ

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot N + 1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2 \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot N + 1} \cdot (2 \cdot N + 1) \cdot \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4}$$

Αν το σήμα είναι **περιοδικό** με θεμελιώδη περίοδο  $N$ , τότε η **μέση ισχύς** ορίζεται ως:

$$P_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot x^*(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \quad (1.29)$$

Βέβαια, αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε

$$P_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n)$$

Ένα σήμα λέγεται **σήμα ενέργειας**, αν έχει πεπερασμένη ενέργεια  $E < +\infty$  και μηδενική ισχύ  $P = 0$ .

Ένα σήμα λέγεται **σήμα ισχύος**, αν έχει πεπερασμένη ισχύ  $P < +\infty$  και άπειρη ενέργεια  $E = +\infty$ .

Παράδειγμα.

Το σήμα  $u(n)$  έχει ενέργεια

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [u(n)]^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} 0^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} 1^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$$

Επίσης

$$\sum_{n=-N}^{+N} x^2(n) = \sum_{n=-N}^{+N} [u(n)]^2 = \sum_{n=-N}^{-1} 0^2 + \sum_{n=0}^{+N} 1^2 = \sum_{n=0}^{+N} 1 = N + 1$$

οπότε το σήμα  $u(n)$  έχει ισχύ

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot N + 1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} x^2(n) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot N + 1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} [u(n)]^2 \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot N + 1} \cdot (N + 1) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1 + \frac{1}{N}}{2 + \frac{1}{N}} \right] = \frac{1}{2}$$

Άρα το σήμα  $u(n)$  είναι σήμα ισχύος.

### 1.2.8. Η συχνότητα στα σήματα διακριτού χρόνου

Η συχνότητα έχει σχέση με την ημιτονοειδή ακολουθία της μορφής:

$$x(n) = A \cdot \cos(\omega \cdot n + \varphi), \quad (1.30)$$

όπου  $A$  είναι το πλάτος,  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα (σε rad/δείγμα),  $\varphi$  είναι η φάση (σε rad) και  $n$  είναι ο διακριτός χρόνος ( $-\infty < n < +\infty$ ).

Η ημιτονοειδής ακολουθία είναι ένα περιοδικό σήμα με θεμελιώδη περίοδο

$$N = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.31)$$

μόνον όταν  $N = \frac{2\pi}{\omega}$  είναι ρητός αριθμός και τότε ισχύει

$$\omega = 2\pi \cdot f, \quad (1.32)$$

όπου  $f$  είναι η συχνότητα (σε κύκλους ανά δείγμα).

Τότε, τα παρακάτω σήματα ταυτίζονται:

$$x_k(n) = A \cdot \cos(\omega_k \cdot n + \varphi), \omega_k = \omega + 2k\pi, k = 0, 1, \dots$$

όπου

$$-\pi \leq \omega \leq +\pi. \quad (1.33)$$

Επομένως, **η περιοχή συχνοτήτων των σημάτων διακριτού χρόνου είναι πεπερασμένη:**

$$-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2} \quad (1.34)$$

### 1.2.9. Σήματα διακριτού χρόνου σε προγραμματιστικό περιβάλλον

1-0-3-0-0-0

Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται σε εργαστηριακές εφαρμογές σε προγραμματιστικό περιβάλλον με σκοπό την απόκτηση της ικανότητας χρήσης και προγραμματισμού αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται στα Σήματα και Συστήματα με χρήση λογισμικών που έχουν καθιερωθεί στην επιστημονική κοινότητα: του εμπορικού λογισμικού Matlab (The MathWorks Inc., The Student Edition of MATLAB, Prentice-Hall, 1997) και του λογισμικού Octave (<http://www.gnu.org/software/octave/octave.pdf>), που είναι ελεύθερος κλώνος ανοικτού κώδικα του λογισμικού Matlab. Χρήσιμη βιβλιογραφία για Matlab είναι το βιβλίο The MathWorks Inc., 2005. Χρήσιμη ξενόγλωσση βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι τα βιβλία Ingleand Proakis, 2003 και Leis, 2011. Χρήσιμη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι τα βιβλία Ασημάκης, 2008 (για σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου) και Παρασκευάς, 2014 (για σήματα και συστήματα συνεχούς χρόνου). Χρήσιμη βιβλιογραφία για Octave είναι τα βιβλία Eaton, Bateman, Hauberg, Wehbring, 2011 και Hansen, 2011.

Ένα πραγματικό σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)$  αναπαρίσταται χρησιμοποιώντας δυο διανύσματα: το διάνυσμα του πλάτους και το διάνυσμα χρόνου. Το διάνυσμα του πλάτους περιέχει τις τιμές του πλάτους του σήματος και το διάνυσμα του χρόνου περιέχει τις αντίστοιχες τιμές χρόνου. Το διάνυσμα χρόνου μπορεί να οριστεί χρησιμοποιώντας τιμές για την αρχή και το τέλος του διανύσματος ( $n=[0:100];$ ) ή μεταβλητές για την αρχή και το τέλος του διανύσματος ( $n1=0; n2=100; n=[n1:n2];$ ). Το διάνυσμα πλάτους μπορεί να οριστεί χρησιμοποιώντας τιμές. Είναι προφανές ότι για να είναι ένα σήμα σωστά ορισμένο πρέπει το μήκος του διανύσματος πλάτους να είναι ίσο με το μήκος του διανύσματος χρόνου. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `length` μπορεί να υπολογιστεί το μήκος των διανυσμάτων.

Για παράδειγμα, το πραγματικό σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)=2(n+1), n \in [0:2]$  μπορεί να οριστεί χρησιμοποιώντας τις εντολές:

```
n=0:2;  
x=[2 4 6];
```

Τα μιγαδικά σήματα διακριτού χρόνου έχουν πραγματικό και φανταστικό μέρος και βέβαια μέτρο και φάση. Επομένως, μπορούν να παρασταθούν με τρία διανύσματα ίσου μήκους, ένα διάνυσμα για τον χρόνο και δύο διανύσματα για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος. Προαιρετικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν δύο διανύσματα ίσου μήκους με το διάνυσμα του χρόνου για το μέτρο και τη φάση.

Στη συνέχεια δίνονται συναρτήσεις για τα βασικά σήματα διακριτού χρόνου. Ο προγραμματισμός των συναρτήσεων ακολουθεί τη λογική των συναρτήσεων κλασικής βιβλιογραφίας (Ingleand Proakis, 2003). Βέβαια, ο προγραμματισμός παρόμοιων συναρτήσεων μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους, που ταιριάζουν στο στυλ προγραμματισμού του προγραμματιστή.

Η συνάρτηση `signalimp` παράγει το σήμα μοναδιαίου δείγματος  $\delta(n-n_0)$ .

```
function [x,n]=signalimp(n0,n1,n2)  
% discrete impulse signal  
%  $\delta(n-n_0)$   $n=n1..n2$   
n=[n1:n2];  
x=[(n-n0)==0];
```

Η συνάρτηση `signalimp` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $n1$  και  $n2$  που ορίζουν τη διάρκεια  $[n1:n2]$  του σήματος και την παράμετρο  $n0$  που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή  $n_0$  που εμφανίζεται το μοναδιαίο δείγμα.

Η συνάρτηση έχει εξόδους το διάνυσμα  $n$  του χρόνου και το διάνυσμα  $x$  του πλάτους. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται ώστε να ισχύει  $n_1 \leq n_0 \leq n_2$ . Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή του σήματος  $\delta(n), n \in [-10:10]$  απαιτείται η κλήση `[x,n]=signalimp(0,-10,10)`, ενώ για την παραγωγή του σήματος  $\delta(n-2), n \in [-10,10]$  απαιτείται η κλήση `[x,n]=signalimp(2,-10,10)`.

Βέβαια, η συνάρτηση θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί προγραμματιστικά με άλλους τρόπους. Ενδεικτικά παρουσιάζεται ένας από αυτούς:

```
n=[n1:n2];  
x=zeros(1,length(n));  
x(n0-n1+1)=1;
```

Επίσης, η συνάρτηση θα μπορούσε να εμπλουτιστεί με εντολές ελέγχου της συνθήκης  $n_1 \leq n_0 \leq n_2$ .

Η συνάρτηση `signalstep` παράγει το σήμα μοναδιαίου βήματος  $u(n-n_0)$ .

```
function [x,n]=signalstep(n0,n1,n2)
% discrete step signal
% u(n-n0) n=n1..n2
n=[n1:n2];
x=[(n-n0)>=0];
```

Η συνάρτηση `signalstep` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $n_1$  και  $n_2$  που ορίζουν τη διάρκεια  $[n_1:n_2]$  του σήματος και την παράμετρο  $n_0$  που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή  $n_0$  που εμφανίζεται το μοναδιαίο βήμα. Η συνάρτηση έχει εξόδους το διάνυσμα  $n$  του χρόνου και το διάνυσμα  $x$  του πλάτους. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται ώστε να ισχύει  $n_1 \leq n_0 \leq n_2$ . Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή του σήματος  $u(n), n \in [-10:10]$  απαιτείται η κλήση `[x,n]=signalstep(0,-10,10)`, ενώ για την παραγωγή του σήματος  $u(n-2), n \in [-10,10]$  απαιτείται η κλήση `[x,n]=signalstep(2,-10,10)`.

Η συνάρτηση `signalsin` παράγει το ημιτονοειδές σήμα  $x(n) = A \cdot \sin(\omega \cdot n + \varphi)$ .

```
function [x,n]=signalsin(a,w,f,n1,n2)
% discrete sinusoidal signal
% x(n)=a*sin(w*n+f) n=n1..n2
n=[n1:n2];
x=a*sin(w.*n+f);
```

Η συνάρτηση `signalsin` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $n_1$  και  $n_2$  που ορίζουν τη διάρκεια  $[n_1:n_2]$  του σήματος, την παράμετρο  $a$  που αντιστοιχεί στο πλάτος  $A$ , την παράμετρο  $w$  που αντιστοιχεί στη συχνότητα  $\omega$  και την παράμετρο  $f$  που αντιστοιχεί στη φάση  $\varphi$  του σήματος. Η συνάρτηση έχει εξόδους το διάνυσμα  $n$  του χρόνου και το διάνυσμα  $x$  του πλάτους. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται ώστε να ισχύει  $n_1 \leq n_2$ . Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή του σήματος  $x(n) = 3 \cdot \sin(0.2 \cdot n + \pi), n \in [-20:20]$  απαιτείται η κλήση `[x,n]=signalsin(3,0.2,pi,-20,20)`.

Η συνάρτηση `signalrexp` παράγει το πραγματικό εκθετικό σήμα  $x(n) = r^n$ .

```
function [x,n]=signalrexp(r,n1,n2)
% discrete real exp signal
% r^n n=n1..n2
n=[n1:n2];
x=r.^n;
```

Η συνάρτηση `signalrexp` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $n_1$  και  $n_2$  που ορίζουν τη διάρκεια  $[n_1:n_2]$  του σήματος και την παράμετρο  $r$  που αντιστοιχεί στη βάση  $r$  του εκθετικού σήματος. Η συνάρτηση έχει εξόδους το διάνυσμα  $n$  του χρόνου και το διάνυσμα  $x$  του πλάτους. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται ώστε να ισχύει  $n_1 \leq n_2$ . Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή του σήματος  $x(n) = (1.4)^n, n \in [0:10]$  απαιτείται η κλήση `[x,n]=signalrexp(1.4,0,10)`.

Παρατήρηση. Η τελεία στην τελευταία εντολή αφορά στην πράξη ύψωση σε δύναμη που γίνεται με κάθε τιμή του διανύσματος  $n = [n_1:n_2]$ .

Η συνάρτηση `signaliexp` παράγει το φανταστικό εκθετικό σήμα  $x(n) = e^{j\omega n} = \cos(\omega \cdot n) + j \cdot \sin(\omega \cdot n)$ .

```
function [rex,imx,mx,fx,n]=signaliexp(w,n1,n2)
% discrete imaginary exp signal
% exp(jwn)=cos(wn)+jsin(wn) n=n1..n2
n=[n1:n2];
rex=cos(w*n);
imx=sin(w*n);
mx=1.^n;
```

`fx=w*n;`

Η συνάρτηση `signalieexp` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $n_1$  και  $n_2$  που ορίζουν τη διάρκεια  $[n_1 : n_2]$  του σήματος και την παράμετρο  $w$  που αντιστοιχεί στη συχνότητα  $\omega$  του φανταστικούεκθετικού σήματος. Η συνάρτηση έχει εξόδους το διάνυσμα  $n$  του χρόνου και τα διανύσματα `rex`, `imx`, `mx`, `fx` του πραγματικού μέρους, του φανταστικού μέρους, του πλάτους και της φάσης, αντίστοιχα. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται ώστε να ισχύει  $n_1 \leq n_2$ . Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή του σήματος  $x(n) = e^{j \cdot 0.2 \cdot n}$ ,  $n \in [-10 : 10]$  απαιτείται η κλήση `[x, n]=signalieexp(0.2, -10, 10)`.

Η συνάρτηση `signalcexp` παράγει το φανταστικό εκθετικό σήμα  $x(n) = r^n \cdot e^{j \cdot \omega \cdot n} = r^n \cdot [\cos(\omega \cdot n) + j \cdot \sin(\omega \cdot n)]$

```
function [rex, imx, mx, fx, n]=signalcexp(r, w, n1, n2)
% discrete complex exp signal
% r^n*exp(jwn)=(r^n)*{cos(wn)+jsin(wn)} n=n1..n2
n=[n1:n2];
mx=r.^n;
fx=w*n;
rex=mx.*cos(w*n);
imx=mx.*sin(w*n);
```

Η συνάρτηση `signalcexp` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $n_1$  και  $n_2$  που ορίζουν τη διάρκεια  $[n_1 : n_2]$  του σήματος, την παράμετρο  $r$  που αντιστοιχεί στη βάση  $r$  και την παράμετρο  $w$  που αντιστοιχεί στη συχνότητα  $\omega$  του φανταστικούεκθετικού σήματος. Η συνάρτηση έχει εξόδους το διάνυσμα  $n$  του χρόνου και τα διανύσματα `rex`, `imx`, `mx`, `fx` του πραγματικού μέρους, του φανταστικού μέρους, του πλάτους και της φάσης, αντίστοιχα. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται ώστε να ισχύει  $n_1 \leq n_2$ . Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή του σήματος  $x(n) = (0.8)^n \cdot e^{j \cdot 0.2 \cdot n}$ ,  $n \in [-10 : 10]$  απαιτείται η κλήση `[x, n]=signalcexp(0.8, 0.2, -10, 10)`.

### 1.3. Σήματα συνεχούς χρόνου

1-2-0-0-5-6

#### 1.3.1. Το σήμα συνεχούς χρόνου ως συνάρτηση

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου παριστάνεται μαθηματικά ως μία **συνάρτηση**. Η ανεξάρτητη μεταβλητή ονομάζεται **χρόνος** και συμβολίζεται με  $t$ . Πρόκειται για συνεχή μεταβλητή που δέχεται ως τιμή οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό. Η εξαρτημένη μεταβλητή ονομάζεται **πλάτος** και συμβολίζεται με  $x(t)$ . Το πλάτος μπορεί να πάρει πραγματικές ή μιγαδικές τιμές. Αν το πλάτος είναι πραγματικό, τότε το σήμα είναι πραγματικό σήμα συνεχούς χρόνου. Αν το πλάτος είναι μιγαδικό, τότε το σήμα είναι μιγαδικό σήμα συνεχούς χρόνου. Το μιγαδικό σήμα συνεχούς χρόνου παριστάνεται μαθηματικά ως:

$$x(t) = a(t) + j \cdot b(t) = r(t) \cdot e^{j \cdot \varphi(t)} \quad (1.35)$$

όπου

- $a(t) = \text{Re}[x(t)]$  είναι η πραγματική συνιστώσα του  $x(t)$
- $b(t) = \text{Im}[x(t)]$  είναι η φανταστική συνιστώσα του  $x(t)$
- $r(t) = |x(t)| = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$  είναι το μέτρο του  $x(t)$
- $\varphi(t) = \arg(x(t)) = \arctan \frac{\text{Im}(x(t))}{\text{Re}(x(t))} = \arctan \frac{b(t)}{a(t)}$  είναι η φάση του  $x(t)$

#### 1.3.2. Διάρκεια σημάτων συνεχούς χρόνου

Τα σήματα συνεχούς χρόνου διακρίνονται με κριτήριο τη διάρκειά τους σε σήματα **πεπερασμένης διάρκειας** και σήματα **άπειρης διάρκειας**.

Ένα σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, όταν το σήμα υπάρχει σε ένα διάστημα χρόνου, δηλαδή αρχίζει κάποια χρονική στιγμή και τελειώνει κάποια άλλη χρονική στιγμή. Αυτό σημαίνει ότι έξω από αυτό το διάστημα χρόνου το σήμα δεν υπάρχει, δηλαδή είναι μηδενικό:  $x(t) = \begin{cases} 0, t \leq t_1 \\ 0, t \geq t_2 \end{cases}$ .

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου είναι σήμα άπειρης διάρκειας, όταν τουλάχιστον ένα από τα  $t_1, t_2$  είναι άπειρο.

### 1.3.3. Αιτιότητα σημάτων συνεχούς χρόνου

Τα σήματα συνεχούς χρόνου διακρίνονται σε **αιτιατά** σήματα και σε **μη αιτιατά** ή **αναιτιατά** σήματα με κριτήριο τον χρόνο έναρξης ή λήξης τους.

Ένα σήμα είναι αιτιατό, όταν είναι μηδενικό για αρνητικές χρονικές στιγμές:

$$x(t) = 0, t < 0 \quad (1.36)$$

Ένα σήμα είναι αναιτιατό ή μη αιτιατό, όταν είναι μηδενικό για θετικές χρονικές στιγμές:

$$x(t) = 0, t > 0 \quad (1.37)$$

### 1.3.4. Περιοδικότητα σημάτων συνεχούς χρόνου

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$  λέγεται **περιοδικό**, όταν υπάρχει ένας θετικός αριθμός  $T$  για τον οποίο ισχύει:

$$x(t) = x(t + T), \forall t \quad (1.38)$$

Ο σταθερός αριθμός  $T$  λέγεται περίοδος. Η ελάχιστη δυνατή περίοδος είναι γνωστή ως **θεμελιώδης περίοδος**.

### 1.3.5. Συμμετρία

#### 1.3.5.1. Συμμετρία πραγματικού σήματος συνεχούς χρόνου

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$  λέγεται **άρτιο**, όταν ισχύει

$$x(-t) = x(t), \forall t \quad (1.39)$$

οπότε το σήμα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των τεταγμένων.

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$  λέγεται **περιττό**, όταν ισχύει

$$x(-t) = -x(t), \forall t \quad (1.40)$$

οπότε το σήμα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων:

Παρατήρηση.

Αν ένα σήμα  $x(t)$  είναι περιττό, τότε  $x(0) = 0$ .

Πράγματι, για  $t = 0$  έχουμε  $x(0) = -x(-0) = -x(0) \Rightarrow 2 \cdot x(0) = 0 \Rightarrow x(0) = 0$ .

Κάθε πραγματικό σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$  μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα άρτιου (even) σήματος  $x_e(t)$  και περιττού (odd) σήματος  $x_o(t)$ :

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (1.41)$$

όπου

$$x_e(t) = \frac{1}{2} \cdot [x(t) + x(-t)] \quad (1.42)$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2} \cdot [x(t) - x(-t)] \quad (1.43)$$

#### 1.3.5.2. Συμμετρία μιγαδικού σήματος συνεχούς χρόνου

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου λέγεται **συζυγές συμμετρικό**, όταν

$$x(-t) = x^*(t), \forall t \quad (1.44)$$

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου λέγεται **συζυγές αντισυμμετρικό**, όταν

$$x(-t) = -x^*(t), \forall t \quad (1.45)$$

Παρατήρηση:  $x^*(t)$  συμβολίζει το συζυγές του  $x(t)$ .

### 1.3.6. Βασικά σήματα συνεχούς χρόνου

#### 1.3.6.1. Σήμα μοναδιαίου παλμού

Το **σήμα μοναδιαίου παλμού** ή **συνάρτηση δέλτα του Dirac**, ορίζεται μέσω ενός γενικευμένου ολοκληρώματος να είναι μία απεικόνιση  $\delta(t)$  για την οποία ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0) \quad (1.46)$$

όπου  $f(t)$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $t = 0$ .

Αν για κάθε πραγματικό αριθμό  $t$  ισχύει  $f(t) = 1$ , τότε η (1.46) δίνει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.47)$$

Στη βιβλιογραφία, για παράδειγμα στο βιβλίο (Hsu, 1995, σελ. 7), αναφέρεται η σχέση:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad (1.48)$$

#### Ιδιότητες.

##### Ιδιότητα 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (1.49)$$

όπου  $f(t)$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $t = t_0$ .

##### Απόδειξη.

Θέτοντας  $t - t_0 = r$ , έχουμε  $t = r + t_0$  και  $dt = dr$ , οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r + t_0) \cdot \delta(r) dr = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r + t_0) \cdot \delta(r) dr = [f(r + t_0)]_{r=0} = f(t_0) \quad \blacksquare$$

##### Ιδιότητα 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(a \cdot t) \cdot dt = \frac{1}{|a|} \cdot f(0) \quad (1.50)$$

όπου  $f(t)$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $t = 0$  και  $a \neq 0$ .

##### Απόδειξη.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(a \cdot t) dt = \frac{1}{|a|} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{a}\right) \cdot \delta(t) dt = \frac{1}{|a|} \cdot f(0) \quad \blacksquare$$

##### Ιδιότητα 3.

$$\delta(a \cdot t) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t), a \neq 0 \quad (1.51)$$

##### Απόδειξη.

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. \blacksquare

##### Ιδιότητα 4.

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (1.52)$$

##### Απόδειξη.

Θέτοντας  $a = -1$  στην προηγούμενη ιδιότητα, προκύπτει:

$$\delta(-t) = \frac{1}{|-1|} \cdot \delta(t) = \delta(t) .$$

Προφανώς, η συνάρτηση  $\delta(t)$  είναι άρτια. ■

### 1.3.6.2. Μοναδιαίο βηματικό σήμα

Το **μοναδιαίο βηματικό σήμα** ορίζεται μαθηματικά ως:

$$u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \quad (1.53)$$

Παρατηρήσεις.

Η συνάρτηση  $u(t)$  είναι ασυνεχής.

Τα σήματα  $\delta(t)$  και  $u(t)$  συνδέονται με τη σχέση:

$$\delta(t) = \frac{d u(t)}{d t} \quad (1.54)$$

### 1.3.6.3. Ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου

Το **ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου** ορίζεται μαθηματικά ως:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (1.55)$$

όπου  $A$  είναι το πλάτος,  $\omega$  είναι η συχνότητα και  $\varphi$  είναι η φάση.

**Το ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .**

Πράγματι, για να ισχύει  $x(t) = x(t+T)$ , πρέπει να ισχύει  $A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = A \cdot \sin(\omega \cdot (t+T) + \varphi)$ , δηλαδή

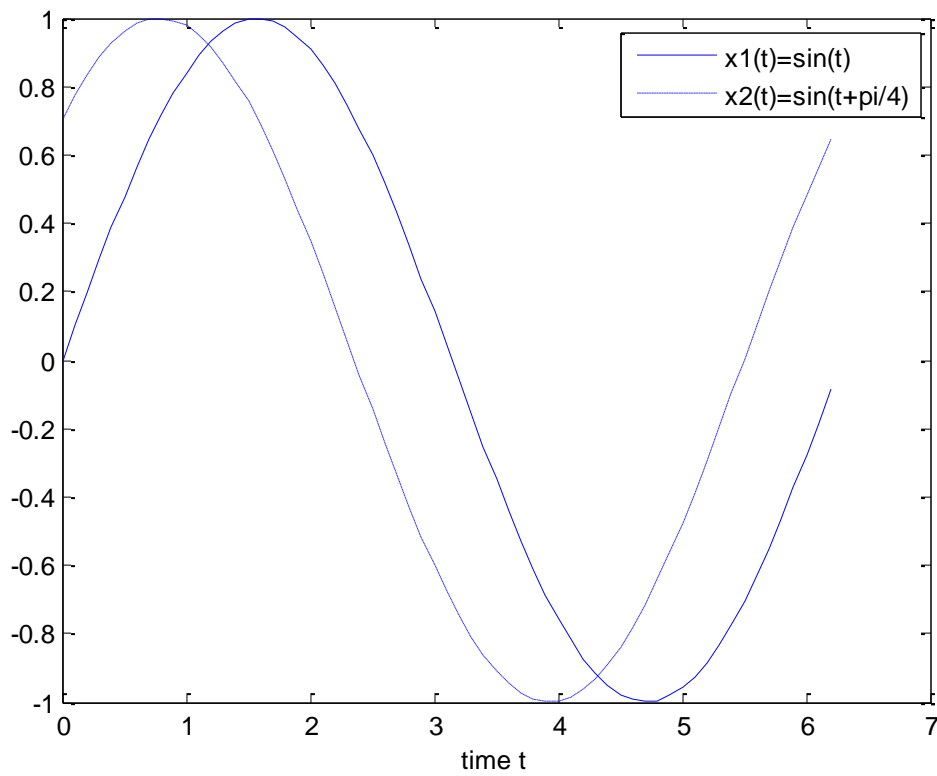
$\omega \cdot t + \varphi + 2k\pi = \omega \cdot t + \omega \cdot T + \varphi$  ή  $2k\pi = \omega \cdot T$ . Αυτό σημαίνει ότι το ημιτονοειδές σήμα είναι περιοδικό με

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{και θεμελιώδη περίοδο} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.56)$$

Για παράδειγμα, το ημιτονοειδές σήμα  $x(t) = \sin\left(4 \cdot t + \frac{\pi}{8}\right)$  είναι περιοδικό με περίοδο  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ .

Επίσης, στο Σχήμα 1.14 φαίνεται η μεταβολή φάσης για τα ημιτονοειδή σήματα

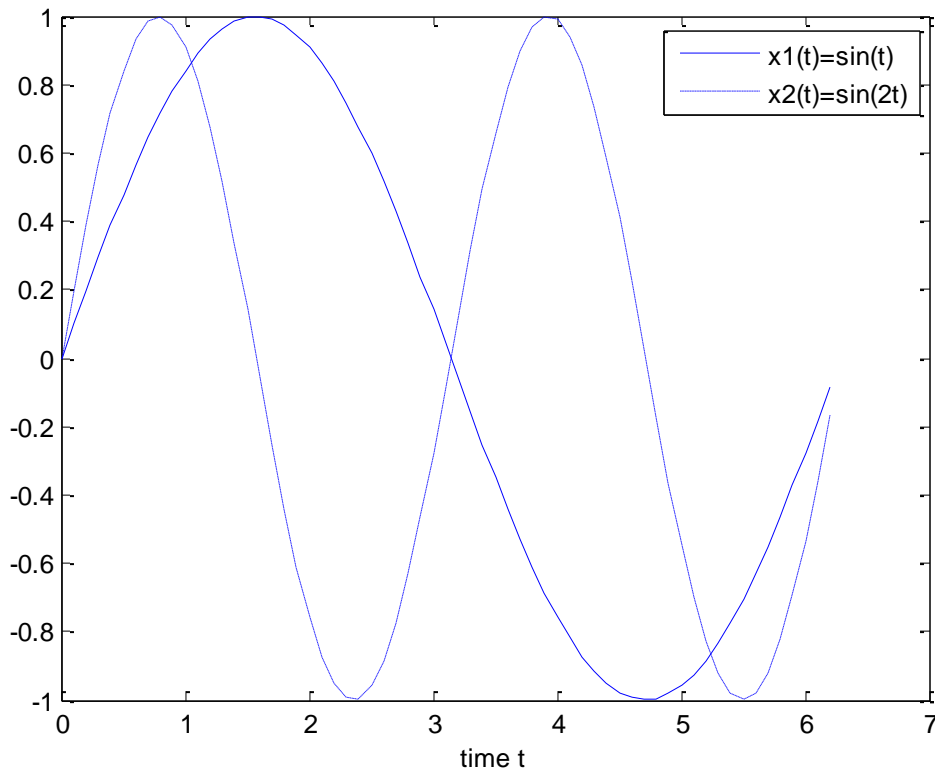
$$x_1(t) = \sin(t), t \in [0, 2\pi] \quad \text{και} \quad x_2(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right), t \in [0, 2\pi] .$$



**Σχήμα 1.14** Μεταβολή φάσης ημιτονοειδούς σήματος συνεχούς χρόνου.

Τέλος, στο Σχήμα 1.15 φαίνεται η μεταβολή συχνότητας για τα ημιτονοειδή σήματα  $x_1(t) = \sin(t), t \in [0, 2\pi]$  και  $x_2(t) = \sin(2 \cdot t), t \in [0, 2\pi]$ .





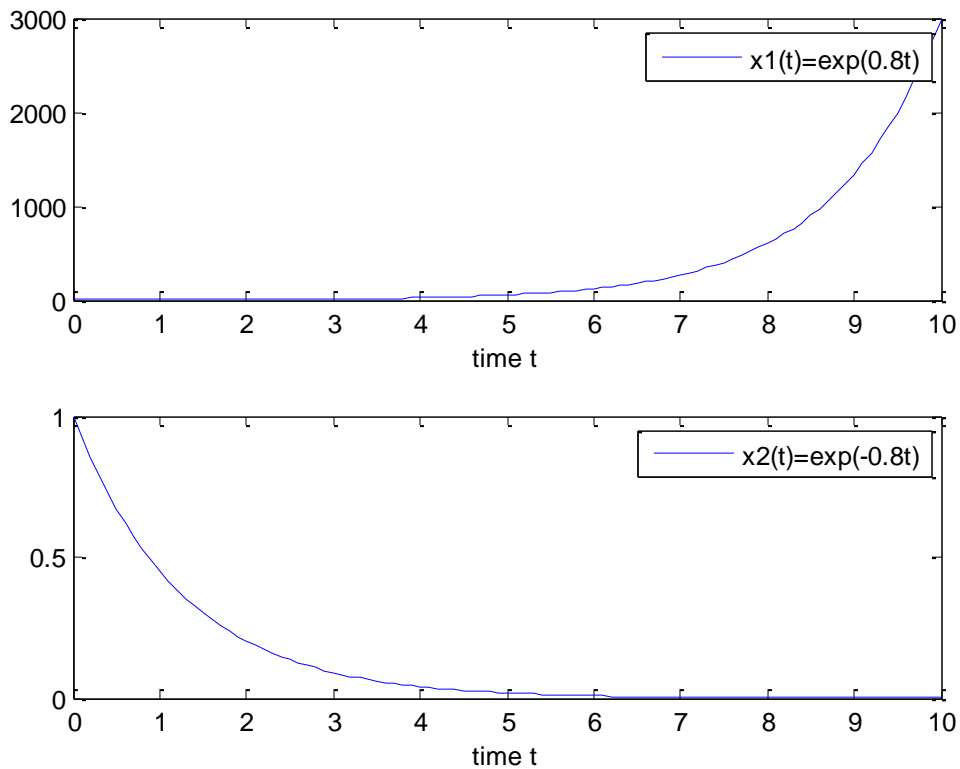
Σχήμα 1.15 Μεταβολή συχνότητας ημιτονοειδούς σήματος συνεχούς χρόνου.

#### 1.3.6.4. Πραγματικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου

Το **πραγματικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου** ορίζεται μαθηματικά ως:

$$x(t) = c \cdot e^{\sigma t} \quad (1.57)$$

Όταν  $\sigma > 0$ , τότε το πραγματικό εκθετικό σήμα είναι αύξουσα συνάρτηση (ως προς  $t$ ), όταν  $\sigma < 0$ , τότε το πραγματικό εκθετικό σήμα είναι φθίνουσα συνάρτηση (ως προς  $t$ ) και όταν  $\sigma = 0$ , τότε το πραγματικό εκθετικό σήμα είναι μία σταθερή συνάρτηση. Στο Σχήμα 1.16 παρουσιάζονται τα σήματα  $x_1(t) = e^{0.8t}, t \in [0, 10]$  και  $x_2(t) = e^{-0.8t}, t \in [0, 10]$



Σχήμα 1.16 Πραγματικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου.

### 1.3.6.5. Φανταστικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου

Το **φανταστικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου** ορίζεται μαθηματικά ως:

$$x(t) = e^{j\omega t} \quad (1.58)$$

Χρησιμοποιώντας την **ταυτότητα του Euler**

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

(1.59)

έχουμε

$$x(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t) = r(t) \cdot e^{j\varphi(t)} \quad (1.60)$$

όπου

-  $\cos(\omega \cdot t) = \text{Re}[x(t)]$  είναι η πραγματική συνιστώσα του  $x(t)$

-  $\sin(\omega \cdot t) = \text{Im}[x(t)]$  είναι η φανταστική συνιστώσα του  $x(t)$

-  $r(t) = |x(t)| = \sqrt{\sin^2(\omega \cdot t) + \cos^2(\omega \cdot t)} = 1$  είναι το μέτρο του  $x(t)$

-  $\varphi(t) = \arg(x(t)) = \arctan \frac{\text{Im}(x(t))}{\text{Re}(x(t))} = \arctan \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\cos(\omega \cdot t)} = \arctan(\tan(\omega \cdot t)) = \omega \cdot t$  είναι η φάση του  $x(t)$

**Το φανταστικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .**

Πράγματι, για να ισχύει  $x(t) = x(t+T)$ , πρέπει να ισχύει  $e^{j\omega t} = e^{j\omega(t+T)}$ , δηλαδή  $e^{j\omega T} = 1 \Rightarrow \cos(\omega \cdot T) + j \cdot \sin(\omega \cdot T) = 1 + j \cdot 0$  ή  $2k\pi = \omega \cdot T$ . Αυτό σημαίνει ότι το φανταστικό εκθετικό

σήμα είναι περιοδικό με περίοδο  $T = \frac{2k\pi}{\omega}$  και θεμελιώδη περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.61)$$

### 1.3.6.6. Μιγαδικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου

Το **μιγαδικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου** ορίζεται μαθηματικά ως:

$$x(t) = c \cdot e^{s \cdot t} = |c| \cdot e^{j \cdot \theta} \cdot e^{(\sigma + j \cdot \omega) \cdot t} = |c| \cdot e^{\sigma \cdot t} \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \theta)} = |c| \cdot e^{\sigma \cdot t} \cdot [\cos(\omega \cdot t + \theta) + j \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)] = r(t) \cdot e^{j \cdot \varphi(t)} \quad (1.62)$$

όπου

-  $|c| \cdot e^{\sigma \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) = \text{Re}[x(t)]$  είναι η πραγματική συνιστώσα του  $x(t)$

-  $|c| \cdot e^{\sigma \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) = \text{Im}[x(t)]$  είναι η φανταστική συνιστώσα του  $x(t)$

-  $r(t) = |x(t)| = |c| \cdot e^{\sigma \cdot t}$  είναι το μέτρο του  $x(t)$

-  $\varphi(t) = \arg(x(t)) = \omega \cdot t + \theta$  είναι η φάση του  $x(t)$

Όταν  $\sigma = 0$ , τότε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος είναι ημιτονοειδή σήματα (σταθερή ταλάντωση), όταν  $\sigma > 0$  είναι αυξάνοντα ημιτονοειδή σήματα (αύξουσα ταλάντωση) και όταν  $\sigma < 0$  είναι φθίνοντα ημιτονοειδή σήματα (φθίνουσα ταλάντωση).

Στη βιβλιογραφία (McClellan, Schafer, & Yoder, 2006) το μιγαδικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου ορίζεται μαθηματικά ως:

$$x(t) = A \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} = A \cdot [\cos(\omega \cdot t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)]$$

όπου  $A$  είναι το πλάτος,  $\omega$  είναι η συχνότητα (σε rad/sec) και  $\varphi$  είναι η φάση.

Τότε το μιγαδικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου γράφεται:

$$x(t) = A \cdot e^{j \cdot \varphi} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$$

όπου

$X = A \cdot e^{j \cdot \varphi}$  είναι το μιγαδικό πλάτος, αφού ( $|X| = A$ ), που ονομάζεται και φάσoρας.

### 1.3.7. Ενέργεια και Ισχύς σημάτων συνεχούς χρόνου

Η **ενέργεια**,  $E$ , ενός μη περιοδικού σήματος συνεχούς χρόνου ορίζεται ως:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.63)$$

Βέβαια, αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

Παράδειγμα.

Το σήμα  $x(t) = e^{-t}$ ,  $t > 0$  έχει ενέργεια

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^0 x^2(t) dt + \int_0^{+\infty} x^2(t) dt = 0 + \int_0^{+\infty} (e^{-t})^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} \cdot [e^{-2t}]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2} \cdot [0 - 1] = \frac{1}{2}.$$

Η **μέση ισχύς**,  $P$ , ενός σήματος συνεχούς χρόνου ορίζεται ως:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^{+T} x(t) \cdot x^*(t) dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt \right] \quad (1.64)$$

Βέβαια, αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt \right]$$

Παράδειγμα.

Για το σήμα  $x(t) = 5$  ισχύει

$$\int_{-T}^{+T} x^2(t) dt = \int_{-T}^{+T} 5^2 dt = \int_{-T}^{+T} 25 dt = [25 \cdot t]_{-T}^{+T} = 25 \cdot T - 25 \cdot (-T) = 50 \cdot T,$$

οπότε

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot T} \cdot 50 \cdot T \right] = 25.$$

Αν το σήμα είναι **περιοδικό** με θεμελιώδη περίοδο  $T$ , τότε η **μέση ισχύς** ορίζεται ως:

$$P_T = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot x^*(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |x(t)|^2 dt \quad (1.65)$$

Βέβαια, αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε

$$P_T = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x^2(t) dt$$

Ένα σήμα λέγεται **σήμα ενέργειας**, αν έχει πεπερασμένη ενέργεια  $E < +\infty$  και μηδενική ισχύ  $P = 0$ .

Ένα σήμα λέγεται **σήμα ισχύος**, αν έχει πεπερασμένη ισχύ  $P < +\infty$  και άπειρη ενέργεια  $E = +\infty$ .

### 1.3.8. Η συχνότητα στα σήματα συνεχούς χρόνου

Η συχνότητα έχει σχέση με την αρμονική ταλάντωση, δηλαδή με την περιοδική κίνηση που περιγράφεται από ημιτονοειδή συνάρτηση της μορφής:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (1.66)$$

όπου  $A$  είναι το πλάτος,  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα (σε rad/sec),  $\varphi$  είναι η φάση (σε rad) και  $t$  είναι ο συνεχής χρόνος ( $-\infty < t < +\infty$ ).

Η αρμονική ταλάντωση είναι ένα περιοδικό αναλογικό σήμα με θεμελιώδη περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.67)$$

και ισχύει:

$$\omega = 2\pi \cdot f \quad (1.68)$$

όπου  $f$  είναι η συχνότητα (σε κύκλους ανά δευτερόλεπτο: Hz).

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα το Euler, έχουμε:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = \frac{1}{2} A \cdot [e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}]$$

που σημαίνει ότι η συχνότητα μπορεί να είναι θετική ή αρνητική:

$$-\infty < \omega < +\infty \quad (1.69)$$

Επομένως, **η περιοχή συχνοτήτων των σημάτων συνεχούς χρόνου είναι άπειρη:**

$$-\infty < f < +\infty \quad (1.70)$$

Στον Πίνακα 1.4 παρουσιάζεται η συχνότητα στα σήματα συνεχούς και διακριτού χρόνου.

Συχνότητα	Συνεχής Χρόνος	Διακριτός Χρόνος
κυκλική συχνότητα	$-\infty < \omega < +\infty$	$-\pi \leq \omega \leq +\pi$
συχνότητα	$-\infty < f < +\infty$	$-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$

**Πίνακας 1.4** Η συχνότητα στα σήματα συνεχούς και διακριτού χρόνου.

Επειδή η περίοδος είναι θετικός αριθμός, γίνεται κατανοητό ότι η περίοδος  $T$  των σημάτων συνεχούς χρόνου μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός ( $T > 0$ ), ενώ η περίοδος  $N$  των σημάτων διακριτού χρόνου μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 1 ( $N \geq 2$ ).

### 1.3.9. Σήματα συνεχούς χρόνου σε προγραμματιστικό περιβάλλον

1-0-0-0-5-0

Ένα πραγματικό σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$  αναπαρίσταται χρησιμοποιώντας δυο διανύσματα: το διάνυσμα του πλάτους, που περιέχει τις τιμές του πλάτους του σήματος και το διάνυσμα του χρόνου, που περιέχει τις αντίστοιχες τιμές χρόνου. Το διάνυσμα χρόνου μπορεί να οριστεί χρησιμοποιώντας τιμές για την αρχή, το βήμα χρόνου και το τέλος του διανύσματος. Το διάνυσμα πλάτους μπορεί να οριστεί χρησιμοποιώντας πράξεις με το διάνυσμα του χρόνου. Είναι προφανές ότι για να είναι ένα σήμα σωστά ορισμένο πρέπει το μήκος του διανύσματος πλάτους να είναι ίσο με το μήκος του διανύσματος χρόνου. Για παράδειγμα, το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t) = 10t + 2, t \in [0, 100]$  μπορεί να οριστεί χρησιμοποιώντας τις εντολές:

```
t=0:0.1:10;
```

```
x=10*t+2;
```

Τα μιγαδικά σήματα συνεχούς χρόνου έχουν πραγματικό και φανταστικό μέρος και βέβαια μέτρο και φάση. Επομένως, μπορούν να παρασταθούν με τρία διανύσματα ίσου μήκους, ένα διάνυσμα για τον χρόνο και δύο διανύσματα για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος. Προαιρετικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν δύο διανύσματα ίσου μήκους με το διάνυσμα του χρόνου για το μέτρο και τη φάση.

## 1.4. Δειγματοληψία

1-2-0-0-0-0

### 1.4.1. Μετατροπή αναλογικού σε ψηφιακό

Τα σήματα συνεχούς χρόνου δεν μπορούμε να τα επεξεργαστούμε σε ψηφιακό περιβάλλον, δηλαδή με ψηφιακά μέσα. Επομένως, υπάρχει η ανάγκη μετατροπής τους σε ψηφιακά σήματα. Έτσι προκύπτει η σχέση των σημάτων συνεχούς χρόνου και των σημάτων διακριτού χρόνου. Η μετατροπή αναλογικού σε ψηφιακό (analog to digital conversion – ADC) είναι η διαδικασία μετατροπής ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακό. Η μετατροπή ψηφιακού σε αναλογικό (digital to analog conversion – DAC) είναι η διαδικασία μετατροπής ενός ψηφιακού σήματος σε αναλογικό.

Η μετατροπή αναλογικού σε ψηφιακό (analog to digital conversion – ADC) γίνεται σε τρία στάδια:

- περιοδική δειγματοληψία (sampling), όπου ένα σήμα συνεχούς χρόνου μετατρέπεται σε μία ακολουθία διακριτού χρόνου, παίρνοντας δείγματα του σήματος συνεχούς χρόνου σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου δειγματοληψίας
- κβάντιση (quantisation), όπου ακολουθία διακριτού χρόνου συνεχούς πλάτους, που προκύπτει από τη δειγματοληψία, μετατρέπεται σε μία ακολουθία διακριτού χρόνου διακριτού πλάτους
- κωδικοποίηση (encoding), όπου το ψηφιακό σήμα, που προκύπτει από την κβάντιση, μετατρέπεται σε μία ακολουθία κωδικών λέξεων, όπου κάθε διακριτή τιμή αντιστοιχεί σε έναν αριθμό bit.

### 1.4.2. Περιοδική Δειγματοληψία

Η περιοδική δειγματοληψία είναι πολύ σημαντική γιατί συνδέει τον αναλογικό κόσμο με τον ψηφιακό κόσμο.

**Περιοδική δειγματοληψία (sampling)** είναι η διαδικασία μετατροπής ενός σήματος συνεχούς χρόνου  $x_a(t)$  σε μία ακολουθία διακριτού χρόνου  $x(n)$  εξάγοντας και συγκρατώντας τις τιμές του σήματος συνεχούς χρόνου σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου δειγματοληψίας  $T_s$ , δηλαδή σε διακριτές χρονικές στιγμές:

$$x(n) = x_a(n \cdot T_s) \quad (1.71)$$

Ο ρυθμός δειγματοληψίας (σε δείγματα ανά sec) ή συχνότητα δειγματοληψίας (σε Hz) είναι:

$$f_s = \frac{1}{T_s} \quad (1.72)$$

Για παράδειγμα, δίνεται το αναλογικό σήμα  $x_a(t) = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) = A \cdot \cos(2\pi \cdot F \cdot t + \varphi)$ .

Θέτοντας

$$t = n \cdot T_s = \frac{n}{f_s}$$

έχουμε:

$$x(n) = x_a(n \cdot T_s) = A \cdot \cos(\Omega \cdot n \cdot T_s + \varphi) = A \cdot \cos(2\pi \cdot F \cdot n \cdot T_s + \varphi) = A \cdot \cos(\omega \cdot n + \varphi)$$

δηλαδή

$$\omega = 2\pi \cdot F \cdot T_s$$

Άρα

$$\omega = \Omega \cdot T_s \tag{1.73}$$

και

$$f = \frac{F}{f_s} \tag{1.74}$$

Όμως

$$-\pi \leq \omega \leq +\pi$$

οπότε

$$-\pi \cdot \frac{1}{T_s} = -\pi \cdot f_s \leq \Omega \leq +\pi \cdot f_s = +\pi \cdot \frac{1}{T_s}$$

δηλαδή

$$\Omega_{\max} = \pi \cdot f_s = \pi \cdot \frac{1}{T_s} \tag{1.75}$$

Επίσης

$$-\frac{1}{2} \leq f \leq +\frac{1}{2}$$

οπότε

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T_s} = -\frac{1}{2} \cdot f_s \leq F \leq +\frac{1}{2} \cdot f_s = +\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T_s}$$

δηλαδή

$$F_{\max} = \frac{1}{2} \cdot f_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T_s} \tag{1.76}$$

Αυτό σημαίνει ότι *με την περιοδική δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου πρέπει να γίνει αντιστοίχιση μίας περιοχής συχνοτήτων απείρου εύρους σε μία περιοχή συχνοτήτων πεπερασμένου εύρους.*

### 1.4.3. Θεώρημα δειγματοληψίας

Η συχνότητα με την οποία λαμβάνονται δείγματα ενός σήματος κατά τη διαδικασία της περιοδικής δειγματοληψίας πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια από τη μεγαλύτερη συχνότητα που περιέχεται στο σήμα

$$f_s \geq 2 \cdot F_{\max} \tag{1.77}$$

Η συχνότητα  $2 \cdot F_{\max}$  αναφέρεται ως όριο Nyquist.

Το Θεώρημα αναφέρεται ως θεώρημα Shannon.

*Αν τηρείται το Θεώρημα δειγματοληψίας, τότε είναι δυνατή η ανακατασκευή του αναλογικού σήματος από τα δείγματα.*

Για παράδειγμα θεωρούμε την περιοδική δειγματοληψία του ημιτονοειδούς αναλογικού σήματος

$$x_a(t) = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) = A \cdot \cos(2\pi \cdot F \cdot t + \varphi)$$

με ρυθμό δειγματοληψίας

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

Η δειγματοληψία παράγει το σήμα διακριτού χρόνου

$$x(n) = x_a(n \cdot T_s) = A \cdot \cos(2\pi \cdot F \cdot n \cdot T_s + \varphi) = A \cdot \cos\left(2\pi \cdot F \cdot n \cdot \frac{1}{f_s} + \varphi\right) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot n + \varphi)$$

όπου

$$f = \frac{F}{f_s}$$

$$\text{Αν } -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T_s} \leq F \leq +\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T_s}, \text{ τότε } -\frac{1}{2} \leq f \leq +\frac{1}{2}$$

δηλαδή αν τηρείται το Θεώρημα δειγματοληψίας, τότε υπάρχει ένα-προς-ένα αντιστοίχιση  $F$  και  $f$ , με αποτέλεσμα να είναι δυνατή η ανακατασκευή του αναλογικού σήματος από τα δείγματα.

**Αν δεν τηρείται το Θεώρημα δειγματοληψίας, τότε δεν είναι δυνατή η ανακατασκευή του αναλογικού σήματος από τα δείγματα, γιατί εμφανίζεται το φαινόμενο της επικάλυψης ή παραποίησης (aliasing).**

Για παράδειγμα θεωρούμε την περιοδική δειγματοληψία των ημιτονοειδών αναλογικών σημάτων

$$x_a(t) = A \cdot \cos(\Omega_k \cdot t + \varphi) = A \cdot \cos(2\pi \cdot F_k \cdot t + \varphi)$$

όπου για  $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$  ισχύει

$$F_k = F + k \cdot f_s$$

που σημαίνει ότι οι συχνότητες  $F_k$  είναι εκτός της περιοχής συχνοτήτων  $-\frac{1}{2} \leq f \leq +\frac{1}{2}$ , δηλαδή δεν τηρείται το Θεώρημα δειγματοληψίας.

Η περιοδική δειγματοληψία των αναλογικών σημάτων με ρυθμό δειγματοληψίας  $f_s = \frac{1}{T_s}$  παράγει το σήμα διακριτού χρόνου

$$\begin{aligned} x(n) = x_a(n \cdot T_s) &= A \cdot \cos(\Omega_k \cdot n \cdot T_s + \varphi) = A \cdot \cos(2\pi \cdot F_k \cdot n \cdot T_s + \varphi) = A \cdot \cos\left(2\pi \cdot (F + k \cdot f_s) \cdot n \cdot \frac{1}{f_s} + \varphi\right) \\ &= A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{F}{f_s} \cdot n + 2\pi \cdot k \cdot n + \varphi\right) = A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{F}{f_s} \cdot n + \varphi\right) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot n + \varphi) \end{aligned}$$

όπου

$$f = \frac{F}{f_s}.$$

Το σήμα που προκύπτει είναι ίσο με το σήμα  $x(n) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot n + \varphi)$  που προέρχεται από τη δειγματοληψία του ημιτονοειδούς αναλογικού σήματος  $x_a(t) = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) = A \cdot \cos(2\pi \cdot F \cdot t + \varphi)$ . Άρα υπάρχει άπειρο πλήθος ημιτονοειδών σημάτων συνεχούς χρόνου που αντιστοιχούν στην ίδια ακολουθία διακριτού χρόνου. Οι συχνότητες  $F_k = F + k \cdot f_s$ ,  $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$  δεν μπορούν να διακριθούν από τη συχνότητα  $F$  μετά τη δειγματοληψία και ονομάζονται **αντίγραφα (aliases)** της συχνότητας  $F$ , από όπου προκύπτει και το όνομα του φαινομένου της **επικάλυψης ή παραποίησης (aliasing)**.

Το θεώρημα δειγματοληψίας εξασφαλίζει τη δυνατότητα πλήρους ανακατασκευής του αναλογικού σήματος  $x_a(t)$  από τα δείγματα  $x(n) = x_a(n \cdot T_s)$ . Ένα σήμα συνεχούς χρόνου  $x_a(t)$  που δεν έχει συχνότητες μεγαλύτερες της  $F_{\max}$  μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως από τα δείγματα  $x(n) = x_a(n \cdot T_s)$ , αν η συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$  ικανοποιεί τη σχέση  $f_s \geq 2 \cdot F_{\max}$ .

Παρατηρήσεις:

1. Η ισότητα ισχύει αν το αναλογικό σήμα  $x_a(t)$  δεν περιέχει τη συχνότητα  $F_{\max}$ .
2. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι δεν υπάρχει όφελος να γίνει δειγματοληψία με συχνότητα μεγαλύτερη της συχνότητας του ορίου Nyquist, γιατί η ανακατασκευή του αναλογικού σήματος είναι έτσι κι αλλιώς δυνατή.

3. Είναι δυνατή η δειγματοληψία με συχνότητα μικρότερη της συχνότητας του ορίου Nyquist στην ειδική περίπτωση όπου το σήμα πληροφορίας (χρήσιμο σήμα) περιέχει τις συχνότητες  $[0, F']$  και ο θόρυβος (άχρηστο σήμα) περιέχει τις συχνότητες  $[F', F]$ . Τότε μπορεί να γίνει δειγματοληψία με συχνότητα  $F + F' \leq f_s < 2 \cdot F'$  (όριο Nyquist), γιατί αν και θα παρουσιαστεί το φαινόμενο της επικάλυψης, αλλοίωση θα υποστούν μόνον οι συχνότητες του θορύβου και όχι του σήματος πληροφορίας. Βασική υπόθεση είναι το σήμα πληροφορίας (χρήσιμο σήμα) και ο θόρυβος (άχρηστο σήμα) δεν περιέχουν κοινές συχνότητες.

#### 1.4.4. Ανακατασκευή αναλογικού σήματος από τα δείγματα

Αν το αναλογικό σήμα  $x_a(t)$  έχει πεπερασμένο εύρος συχνοτήτων, δηλαδή δεν έχει συχνότητες μεγαλύτερες της  $F_{\max}$  και γίνει δειγματοληψία με συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$  που ικανοποιεί τη σχέση  $f_s \geq 2 \cdot F_{\max}$ , οπότε από τη δειγματοληψία προκύπτει το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n) = x_a(n \cdot T_s)$ , τότε είναι δυνατή η **πλήρης ανακατασκευή** του αναλογικού σήματος από τα δείγματα:

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ x(n) \cdot \text{sinc} \left( \frac{t}{T_s} - n \right) \right] \quad (1.78)$$

όπου

$$\text{sinc}(\tau) = \frac{\sin(\tau \cdot \pi)}{\tau \cdot \pi} \quad (1.79)$$

είναι η **συνάρτηση δειγματοληψίας (sinecardinal-sinc)**.

Η συνάρτηση δειγματοληψίας υπάρχει στο διάστημα  $(-\infty, +\infty)$ , για αυτό δεν είναι δυνατή η ανακατασκευή σε πραγματικό χρόνο.

Οπότε η ανακατασκευή του αναλογικού σήματος γίνεται με χρήση της συνάρτησης  $\sigma(\cdot)$ :

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ x(n) \cdot \varphi \left( \frac{t}{T_s} - n \right) \right] \quad (1.80)$$

όπου συνήθως χρησιμοποιείται

α. η κλιμακωτή συνάρτηση

$$\sigma(\tau) = 1, -\frac{1}{2} \leq \tau \leq \frac{1}{2} \quad (1.81)$$

β. η τριγωνική συνάρτηση

$$\sigma(\tau) = 1 - |\tau|, -1 \leq \tau \leq 1 \quad (1.82)$$

γ. η χρονικά περιορισμένη συνάρτηση δειγματοληψίας

$$\sigma(\tau) = \text{sinc}(\tau), -N \leq \tau \leq N \quad (1.83)$$

με  $N$  θετικό ακέραιο αριθμό.

### 1.5. Λυμένες Ασκήσεις

#### Σήματα διακριτού χρόνου

##### 1-2-3-4-0-0

1. Το γινόμενο ενός άρτιου σήματος διακριτού χρόνου επί ένα περιττό σήμα διακριτού χρόνου είναι ένα περιττό σήμα διακριτού χρόνου.

Λύση.

Έστω ότι:

το σήμα  $x_1(n)$  είναι άρτιο:  $x_1(-n) = x_1(n)$

και

το σήμα  $x_2(n)$  είναι περιττό:  $x_2(-n) = -x_2(n)$



Τότε για το γινόμενο τους  $x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$  χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ιδιότητες μπορούμε να γράψουμε:

$$x(-n) = x_1(-n) \cdot x_2(-n) = x_1(n) \cdot [-x_2(n)] = -[x_1(n) \cdot x_2(n)] = -x(n)$$

που σημαίνει ότι το σήμα  $x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$  είναι περιττό.

2. Το άθροισμα των τιμών περιττού σήματος διακριτού χρόνου είναι μηδέν.

Λύση.

Έστω ότι το σήμα  $x(n)$  είναι περιττό:  $x(-n) = -x(n)$

Τότε το άθροισμα των τιμών του είναι:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) + x(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} x(n) = -\sum_{n=1}^{+\infty} x(n) + x(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} x(n) = x(0) = 0$$

Γιατί  $x(0) = 0$ , για κάθε περιττό σήμα όπως αποδείχθηκε στην παράγραφο 3.5.

3. Να εξετάσετε ως προς τη συμμετρία το σήμα  $x(n) = j \cdot e^{j \cdot \pi \cdot n/4}$ .

Λύση.

$$x(n) = j \cdot e^{j \cdot \pi \cdot n/4} = j \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right) \right] = -\sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right) + j \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)$$

Οπότε,

$$x(-n) = -\sin\left(-\frac{\pi \cdot n}{4}\right) + j \cdot \cos\left(-\frac{\pi \cdot n}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right) + j \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)$$

και

$$x^*(-n) = \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right) - j \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)$$

Άρα

$$x^*(-n) = -x(n) = -\sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right) + j \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right),$$

δηλαδή το σήμα  $x(n) = j \cdot e^{j \cdot \pi \cdot n/4}$  είναι συζυγές αντισυμμετρικό.

4. Να εξετάσετε ως προς την περιοδικότητα το σήμα  $x(n) = \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{6} + 0.1\right)$

Λύση.

Το σήμα  $x_1(n) = \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{5}\right)$  έχει συχνότητα  $\omega_1 = \frac{\pi}{5}$ , που είναι ρητό πολλαπλάσιο του  $2\pi$  και είναι περιοδικό

με θεμελιώδη περίοδο  $N_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 10$ .

Το σήμα  $x_2(n) = \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{6} + 0.1\right)$  έχει συχνότητα  $\omega_2 = \frac{\pi}{6}$ , που είναι ρητό πολλαπλάσιο του  $2\pi$  και είναι

περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο  $N_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 12$ .

Γενικά ισχύει ότι: το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με θεμελιώδεις περιόδους  $N_1$  και  $N_2$  είναι περιοδικό

σήμα με θεμελιώδη περίοδο ίση με  $N = \frac{N_1 \cdot N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)} = \text{ΕΚΠ}(10, 12)$ .

$$N = \frac{N_1 N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)} = \text{ΕΚΠ}(N_1, N_2)$$

Επομένως, το άθροισμα  $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$  είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο

$$N = \frac{N_1 \cdot N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)} = \frac{10 \cdot 12}{\text{ΜΚΔ}(10, 12)} = \frac{120}{2} = 60$$

5. Να διερευνήσετε αν το σήμα  $\delta(n)$  είναι σήμα ενέργειας ή σήμα ισχύος.

Λύση.

Το σήμα  $\delta(n)$

έχει ενέργεια

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\delta(n)]^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} [\delta(n)]^2 + [\delta(0)]^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} [\delta(n)]^2 = 1^2 = 1$$

Επίσης

$$\sum_{n=-N}^{+N} [\delta(n)]^2 = \sum_{n=-N}^{-1} [\delta(n)]^2 + [\delta(0)]^2 + \sum_{n=1}^{+N} [\delta(n)]^2 = 1^2 = 1$$

οπότε το σήμα  $\delta(n)$  έχει ισχύ

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot N + 1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} [\delta(n)]^2 \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot N + 1} \cdot 1 \right] = 0$$

Άρα το σήμα  $\delta(n)$  είναι σήμα ενέργειας.

### Σήματα συνεχούς χρόνου

#### 1-2-0-0-5-6

1. Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα του Euler για να εκφράσετε το  $\sin(t)$  και το  $\cos(t)$  συναρτήσει των  $e^{j \cdot t}$  και  $e^{-j \cdot t}$ .

Λύση.

Από την ταυτότητα του Euler έχουμε:

$$e^{j \cdot t} = \cos(t) + j \cdot \sin(t)$$

και

$$e^{-j \cdot t} = \cos(-t) + j \cdot \sin(-t) = \cos(t) - j \cdot \sin(t)$$

Αθροίζοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$e^{j \cdot t} + e^{-j \cdot t} = 2 \cdot \cos(t),$$

οπότε

$$\cos(t) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j \cdot t} + e^{-j \cdot t})$$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$e^{j \cdot t} - e^{-j \cdot t} = 2 \cdot j \cdot \sin(t)$$

οπότε

$$\sin(t) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot (e^{j \cdot t} - e^{-j \cdot t}) = -\frac{1}{2} \cdot j \cdot (e^{j \cdot t} - e^{-j \cdot t})$$

2. Να εξετάσετε ως προς τη συμμετρία το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t) = \sin(2 \cdot t)$ .

Λύση.

Το σήμα  $x(t) = \sin(2 \cdot t)$  είναι περιττό, γιατί μπορούμε να γράψουμε

$$x(-t) = \sin(-2 \cdot t) = -\sin(2 \cdot t) = -x(t)$$

3. Δίνεται το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t) = \begin{cases} -5t, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$

Να αναλύσετε το σήμα σε άθροισμα άρτιας και περιττής συνιστώσας.

Λύση.

Το σήμα αναλύεται σε άθροισμα άρτιου και περιττού μέρους ως εξής:

άρτιασυνιστώσα:

$$x_e(t) = \frac{1}{2} \cdot [x(t) + x(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2}[-5t + (-t)] = \frac{1}{2}(-6t) = -3t, t < 0 \\ \frac{1}{2}[t + (-5 \cdot (-t))] = \frac{1}{2}[t + 5t] = 3t \geq 0 \end{cases}$$

περιττή συνιστώσα:

$$x_o(t) = \frac{1}{2} \cdot [x(t) - x(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2}[-5t - (-t)] = \frac{1}{2}[-5t + t] = -2t, t < 0 \\ \frac{1}{2}[t - (-5 \cdot (-t))] = \frac{1}{2}[t - 5t] = -2t \geq 0 \end{cases}$$

Άρα  $x_o(t) = -2t, \forall t$ .

4. Να εξετάσετε ως προς την περιοδικότητα το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t) = \sin(5 \cdot t + \pi)$ .

Λύση.

Το σήμα  $x(t) = \sin(5 \cdot t + \pi)$  έχει συχνότητα  $\omega = 5$  και είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο  $\omega = \frac{2\pi}{5}$ .

### Δειγματοληψία

#### 1-2-0-0-0-0

1. Δίνεται το ημιτονοειδές αναλογικό σήμα

$$x_a(t) = 4 \cdot \cos\left(200 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας ώστε να τηρείται το Θεώρημα δειγματοληψίας.

Να υπολογίσετε το σήμα διακριτού χρόνου, που προκύπτει από δειγματοληψία με αυτήν την ελάχιστη συχνότητα.

Λύση.

Η συχνότητα του ημιτονοειδούς αναλογικού σήματος είναι  $F = 100\text{Hz}$ . Επομένως, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας ώστε να τηρείται το Θεώρημα δειγματοληψίας είναι ίση με  $f_s = 2 \cdot F = 200\text{Hz}$ .

Τότε, το σήμα διακριτού χρόνου, που προκύπτει από δειγματοληψία με αυτή την ελάχιστη συχνότητα είναι:

$$x(n) = x_a(n \cdot T_s) = 4 \cdot \cos\left(200 \cdot \pi \cdot n \cdot T_s + \frac{\pi}{4}\right) = 4 \cdot \cos\left(200 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{1}{f_s} + \frac{\pi}{4}\right) = 4 \cdot \cos\left(\pi \cdot n + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}(-1)^{|n|}$$

2. Δίνεται το ημιτονοειδές αναλογικό σήμα

$$x_a(t) = 3 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t)$$

από το οποίο λαμβάνονται δείγματα με ρυθμό δειγματοληψίας  $f_s = 75\text{Hz}$ .

α. Να εξετάσετε αν τηρείται το Θεώρημα δειγματοληψίας.

β. Να υπολογίσετε τη συχνότητα του ημιτονοειδούς σήματος διακριτού χρόνου, που προκύπτει από τη δειγματοληψία.

Λύση.

α. Η συχνότητα του ημιτονοειδούς αναλογικού σήματος είναι  $F = 50\text{Hz}$ . Επομένως ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας ώστε να τηρείται το Θεώρημα δειγματοληψίας είναι  $f_s = 2 \cdot F = 100\text{Hz}$ .

Αφού όμως λαμβάνονται δείγματα με ρυθμό δειγματοληψίας  $f_s = 75\text{Hz}$ , δεν τηρείται το Θεώρημα δειγματοληψίας.

β. Το σήμα διακριτού χρόνου που προκύπτει από τη δειγματοληψία είναι:

$$\begin{aligned} x(n) &= x_a(n \cdot T_s) = 3 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot n \cdot T_s) = 3 \cdot \cos\left(100 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{1}{f_s}\right) = 3 \cdot \cos\left(\frac{100}{75} \cdot \pi \cdot n\right) \\ &= 3 \cdot \cos\left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot n\right) = 3 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot n - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot n\right) = 3 \cdot \cos\left(\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot n\right) \end{aligned}$$

Οπότε

$$\omega = \frac{2\pi}{3}$$

και η συχνότητα του ημιτονοειδούς σήματος διακριτού χρόνου που προκύπτει από τη δειγματοληψία είναι

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{3}$$

$$(ή F = f \cdot f_s = \frac{1}{3} \cdot 75\text{Hz} = 25\text{Hz} )$$

## 1.6. Ασκήσεις

### Σήματα διακριτού χρόνου

#### 1-2-3-4-0-0

1. Να αποδείξετε ότι αν το σήμα χρόνου  $x(n)$  είναι πραγματικό, τότε το σήμα  $y(n) = x(n) + x(-n)$  είναι άρτιο.

2. Να αποδείξετε ότι αν το σήμα  $x(n)$  είναι περιττό, τότε το σήμα  $y(n) = x^2(n)$  είναι άρτιο.

3. Να εξετάσετε ως προς τη συμμετρία το σήμα  $x(n) = e^{j\pi n/4}$ .

4. Να εξετάσετε ως προς την περιοδικότητα το σήμα  $x(n) = a^n, n \geq 0, a \in \mathbb{R}$ .

5. Να εξετάσετε ως προς την περιοδικότητα το σήμα  $x(n) = e^{j\pi n/16}$ .

6. Να εξετάσετε ως προς την περιοδικότητα το σήμα  $x(n) = e^{j\pi n/4} + \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{5} + 0.1\right)$ .

7. Να εξετάσετε ως προς την περιοδικότητα το σήμα  $x(n) = e^{j\pi n/4} + \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{3}\right) + \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{5} + 0.1\right)$ .

8. Να διερευνήσετε αν το σταθερό σήμα  $x(n) = c, c \in \mathbb{R}$  είναι σήμα ενέργειας ή σήμα ισχύος.

9. Να αποδείξετε ότι η ενέργεια ενός πραγματικού σήματος διακριτού χρόνου είναι ίση με το άθροισμα των ενεργειών του άρτιου και του περιττού μέρους του σήματος.

10. Να υπολογίσετε τη μέση ισχύ του περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου  $x(n) = y(n \bmod 3)$ , όπου  $y(n) = 2\delta(n) + 3\delta(n-1) + 4\delta(n-2)$ .

### Σήματα συνεχούς χρόνου

#### 1-2-0-0-5-6

1. Αν το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$  είναι άρτιο και περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο  $2\pi$ , να αποδείξετε ότι

$$\int_{-\pi}^{+\pi} x(t) dt = 2 \cdot \int_0^{+\pi} x(t) dt$$

2. Αν το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$  είναι περιττό και περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο  $2\pi$ , να αποδείξετε

$$\text{ότι } \int_{-\pi}^{+\pi} x(t) dt = 0$$

3. Να εξετάσετε ως προς την περιοδικότητα το σήμα  $x(t) = \sin\left(4 \cdot t + \frac{\pi}{8}\right)$ .

4. Να εξετάσετε ως προς την περιοδικότητα το σήμα  $x(t) = (0.8)^{2t}$ .

5. Να εξετάσετε ως προς τη συμμετρία το σήμα  $x(t) = \sin\left(4 \cdot t + \frac{\pi}{8}\right)$ .

6. Να εξετάσετε ως προς τη συμμετρία το σήμα  $x(t) = (0.8)^{2t}$ .

7. Να υπολογίσετε την ενέργεια και τη μέση ισχύ του σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t) = 2 \cdot e^{-2t}$ .

8. Να υπολογίσετε τη μέση ισχύ του περιοδικού σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t) = 3 \cdot \cos(2 \cdot t)$ .

### Δειγματοληψία

#### 1-2-0-0-0-0

1. Δίνεται το ημιτονοειδές αναλογικό σήμα

$$x_a(t) = 4 \cdot \cos(300 \cdot \pi \cdot t)$$

Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας ώστε να τηρείται το Θεώρημα δειγματοληψίας.

Να υπολογίσετε το σήμα διακριτού χρόνου που προκύπτει από δειγματοληψία με αυτήν την ελάχιστη συχνότητα.

2. Δίνεται το ημιτονοειδές αναλογικό σήμα

$$x_a(t) = 6 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t)$$

από το οποίο λαμβάνονται δείγματα με ρυθμό δειγματοληψίας  $f_s = 75\text{Hz}$ .

Να αποδείξετε ότι δεν τηρείται το Θεώρημα δειγματοληψίας.

Να υπολογίσετε την πλησιέστερη προς την  $f_s/2$  συχνότητα του ημιτονοειδούς σήματος που δίνει τα ίδια δείγματα με αυτά που λαμβάνονται από τη δειγματοληψία.

## 1.7. Εργαστηριακές Ασκήσεις

### Εργαστηριακή Άσκηση 1 Σήματα διακριτού χρόνου

#### 1-0-3-0-0-0

1. Πραγματικό σήμα διακριτού χρόνου

Να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n) = n - 2, n \in [-3:3]$ .

Να χρησιμοποιήσετε τις συναρτήσεις `disp` και `display` για να εμφανίσετε τις τιμές του σήματος.

Να μελετήσετε τις συναρτήσεις `figure`, `subplot`, `stem`, `xlabel`, `ylabel`, `axis`, `title`, `text`, `legend`, `hold`.

Να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση `stem` για να σχεδιάσετε το σήμα.

2. Σήμα μοναδιαίου δείγματος (ακολουθία μοναδιαίου δείγματος)

Να σχεδιάσετε τα σήματα  $\delta(n), \delta(n-10), \delta(n+1)$ .

3. Σήμα μοναδιαίου βήματος (μοναδιαία βηματική ακολουθία)

Να σχεδιάσετε τα σήματα  $u(n), u(n-5), u(n+2)$ .

4. Πραγματικό εκθετικό σήμα

Να σχεδιάσετε το σήμα  $x(n) = (0.5)^n, n \in [0, 10]$ .

5. Φανταστικό εκθετικό σήμα

Να σχεδιάσετε την πραγματική συνιστώσα, τη φανταστική συνιστώσα, το μέτρο και τη φάση του σήματος  $x(n) = e^{j\pi n/2}, n \in [-50: 50]$ .

6. Μιγαδικό εκθετικό σήμα

Να σχεδιάσετε την πραγματική συνιστώσα, τη φανταστική συνιστώσα, το μέτρο και τη φάση του σήματος  $x(n) = 0.2 \cdot e^{0.3j\pi n}, n \in [-50: 50]$ .

7. Ημιτονοειδές σήμα

Να σχεδιάσετε το σήμα  $x(n) = 4 \cdot \sin\left(0.1 \cdot n + \frac{\pi}{2}\right), n \in [0: 50]$ .

8. Να σχεδιάσετε το σήμα μοναδιαίας κλίσης  $u_r(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}, n \in [-10: 10]$ .

9. Περιοδικότητα φανταστικού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου

α. Να σχεδιάσετε την πραγματική συνιστώσα, τη φανταστική συνιστώσα, το μέτρο και τη φάση του σήματος  $x(n) = e^{j\pi n/6}, n \in [-50: 50]$ .

Να βρείτε τη θεμελιώδη περίοδο.

β. Να σχεδιάσετε την πραγματική συνιστώσα, τη φανταστική συνιστώσα, το μέτρο και τη φάση του σήματος  $x(n) = e^{j\sqrt{2}\pi n}, n \in [-50: 50]$ .

Να αποδείξετε ότι το σήμα δεν είναι περιοδικό.

10. Περιοδικότητα ημιτονοειδούς σήματος διακριτού χρόνου

α. Να σχεδιάσετε το σήμα  $x(n) = \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4} + \frac{\pi}{2}\right), n \in [-50: 50]$ .

Να βρείτε τη θεμελιώδη περίοδο.

β. Να σχεδιάσετε το σήμα  $x(n) = \sin\left(\frac{n}{4} + \frac{\pi}{2}\right), n \in [-50: 50]$ .

Να αποδείξετε ότι το σήμα δεν είναι περιοδικό.

11. Περιοδικότητα σήματος διακριτού χρόνου

Να μελετήσετε τη συνάρτηση `seqperiod`. Η συνάρτηση `seqperiod` είναι διαθέσιμη σε Matlab, αλλά δεν είναι διαθέσιμη σε Octave.

Να γράψετε τη συνάρτηση

```
p = signalperiodic(x, n)
```

με εισόδους τον χρόνο και το πλάτος ενός πραγματικού σήματος διακριτού χρόνου και έξοδο την παράμετρο `p` που θα είναι η θεμελιώδης περίοδος αν το σήμα είναι περιοδικό, ή μηδέν αν το σήμα δεν είναι περιοδικό.

12. Ανάλυση πραγματικού σήματος σε άθροισμα άρτιου σήματος και περιττού σήματος

Να γράψετε τη συνάρτηση

```
[xe, xo, m] = signalevenodd(x, n)
```

με εισόδους το διάνυσμα `n` του χρόνου και το διάνυσμα `x` του πλάτους του σήματος και εξόδους το διάνυσμα `m` του χρόνου και τα διανύσματα `xe` και `xo` της άρτιας και του περιττού σήματος του σήματος αντίστοιχα.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση `flipplr` και να τη χρησιμοποιήσετε.

Να κάνετε έλεγχο ότι το σήμα είναι πραγματικό χρησιμοποιώντας την εντολή:

```
if any (imag(x) ~= 0)
```

```

    error('x is not a real sequence')
end

```

Να σχεδιάσετε το σήμα  $x(n) = u(n) - u(n-30)$ .

Να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση `signalevenodd` για να αναλύσετε το σήμα σε άθροισμα άρτιου σήματος και περιττού σήματος.

Να σχεδιάσετε τα σήματα.

13. Γινόμενο ενός άρτιου σήματος επί ένα περιττό σήμα είναι ένα περιττό σήμα

Να σχεδιάσετε το σήμα  $x(n) = (0.9)^n, n \in [0:10]$ .

Να αναλύσετε το σήμα σε άθροισμα άρτιου σήματος  $x_e(n)$  και περιττού σήματος  $x_o(n)$ .

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε το σήμα  $y(n) = x_e(n) \cdot x_o(n)$  για να επιβεβαιώσετε ότι το γινόμενο ενός άρτιου σήματος επί ένα περιττό σήμα είναι ένα περιττό σήμα.

14. Συμμετρία πραγματικού σήματος διακριτού χρόνου

Να γράψετε τη συνάρτηση

```
s = signalsymmetric(x, n)
```

με εισόδους τον χρόνο  $n$  και το πλάτος  $x$  ενός πραγματικού σήματος διακριτού χρόνου και έξοδο την παράμετρο  $s$  που θα είναι 1 αν το σήμα είναι άρτιο, 2 αν το σήμα είναι περιττό, ή μηδέν αν το σήμα δεν είναι συμμετρικό.

15. Ειδική συμμετρία πραγματικού σήματος διακριτού χρόνου

Να γράψετε τη συνάρτηση

```
s = signalspecialsymmetric(x, n)
```

με εισόδους τον χρόνο  $n$  και το πλάτος  $x$  ενός πραγματικού σήματος διακριτού χρόνου και έξοδο την παράμετρο  $s$  που θα είναι 1-4 ανάλογα με το είδος της ειδικής συμμετρίας αν το σήμα είναι συμμετρικό, ή μηδέν αν το σήμα δεν είναι συμμετρικό.

16. Περιοδικό συμμετρικό σήμα διακριτού χρόνου

Ένα περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου με θεμελιώδη περίοδο  $N$  λέγεται **άρτιο περιοδικό**, όταν

$$x(n) = x(N - n), \forall n$$

Ένα περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου με θεμελιώδη περίοδο  $N$  λέγεται **περιττό περιοδικό**, όταν

$$x(n) = -x(N - n), \forall n$$

Να γράψετε τη συνάρτηση

```
[p, s] = signalspersym(x, n)
```

με εισόδους τον χρόνο  $n$  και το πλάτος  $x$  ενός πραγματικού σήματος διακριτού χρόνου και εξόδους την παράμετρο  $p$ , που θα είναι η θεμελιώδης περίοδος, αν το σήμα είναι περιοδικό, ή μηδέν αν το σήμα δεν είναι περιοδικό και την παράμετρο  $s$  που θα είναι 1 αν το σήμα είναι άρτιο περιοδικό ή 2 αν το σήμα είναι περιττό περιοδικό, ή μηδέν αν το σήμα δεν είναι συμμετρικό.

17. Μη τήρηση θεωρήματος δειγματοληψίας

Να παράγετε και να σχεδιάσετε το σήμα συνεχούς χρόνου  $x_c(t) = \cos(10 \cdot \pi \cdot t)$ .

Να κάνετε περιοδική δειγματοληψία με ρυθμό δειγματοληψίας  $f_s = 3\text{Hz}$ .

Να αποδείξετε ότι δεν τηρείται το Θεώρημα δειγματοληψίας.

Να ανακατασκευάσετε το αναλογικό σήμα χρησιμοποιώντας την χρονικά περιορισμένη συνάρτηση δειγματοληψίας με  $N = 2$ .

18. Τήρηση θεωρήματος δειγματοληψίας

Να παράγετε και να σχεδιάσετε το σήμα συνεχούς χρόνου  $x_c(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot t)$ .

Να κάνετε περιοδική δειγματοληψία με ρυθμό δειγματοληψίας  $f_s = 3\text{Hz}$ .

Να αποδείξετε ότι τηρείται το Θεώρημα δειγματοληψίας.

Να ανακατασκευάσετε το αναλογικό σήμα χρησιμοποιώντας

- α. την κλιμακωτή συνάρτηση
- β. την τριγωνική συνάρτηση
- γ. την χρονικά περιορισμένη συνάρτηση δειγματοληψίας με  $N = 1$
- δ. την χρονικά περιορισμένη συνάρτηση δειγματοληψίας με  $N = 2$

## Εργαστηριακή Άσκηση 2 Σήματα συνεχούς χρόνου

1-0-0-0-5-0

1. Πραγματικό σήμα συνεχούς χρόνου

Να παράγετε το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t) = t^3 + 2t^2 + t - 1, t \in [0, 10]$ .

Να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση plot για να σχεδιάσετε το σήμα.

2. Ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου: μεταβολή στο πλάτος

Να σχεδιάσετε τα σήματα  $x_1(t) = 2 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right), t \in [0, 8\pi]$  και  $x_2(t) = 4 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right), t \in [0, 8\pi]$ ,

για να διαπιστώσετε τη μεταβολή στο πλάτος.

3. Ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου: μεταβολή στη συχνότητα

Να σχεδιάσετε τα σήματα  $x_1(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right), t \in [0, 8\pi]$  και  $x_2(t) = \sin\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right), t \in [0, 8\pi]$ ,

για να διαπιστώσετε τη μεταβολή στη συχνότητα.

4. Ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου: μεταβολή στη φάση

Να σχεδιάσετε τα σήματα  $x_1(t) = \sin(t), t \in [0, 4\pi]$  και  $x_2(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right), t \in [0, 4\pi]$ ,

για να διαπιστώσετε τη μεταβολή στη φάση.

5. Πραγματικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου

Να σχεδιάσετε το σήμα  $x(t) = (0.5)^{2t}, t \in [0, 10]$

6. Φανταστικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου

Να σχεδιάσετε το σήμα  $x(t) = e^{4 \cdot j \cdot t}, t \in [0, 10]$

δηλαδή να σχεδιάσετε την πραγματική συνιστώσα, τη φανταστική συνιστώσα, το μέτρο και τη φάση.

7. Μιγαδικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου

Να σχεδιάσετε το σήμα  $x(t) = 10 \cdot e^{(2+j) \cdot t}, t \in [0, 10]$

δηλαδή να σχεδιάσετε την πραγματική συνιστώσα, τη φανταστική συνιστώσα, το μέτρο και τη φάση.

8. Να σχεδιάσετε το σήμα ράμπας  $r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, t \in [-10, 10]$ .

## 1.8. Περίληψη (ηχογραφημένη)

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη του Κεφαλαίου 1 με τον Ήχο 1.1.



Ήχος 1.1 Περίληψη Κεφαλαίου 1.

## Σήματα διακριτού χρόνου



### 1-2-3-4-0-0

Τα σήματα διακρίνονται σε σήματα συνεχούς χρόνου και σε σήματα διακριτού χρόνου.

Ένα σήμα διακριτού χρόνου παριστάνεται μαθηματικά ως μία ακολουθία. Η ανεξάρτητη μεταβλητή ονομάζεται χρόνος και συμβολίζεται με  $n$ . Πρόκειται για διακριτή μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε ακέραια τιμή. Η εξαρτημένη μεταβλητή ονομάζεται πλάτος και συμβολίζεται με  $x(n)$ .

Το ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου είναι περιοδικό, αν η συχνότητα  $\omega$  του σήματος είναι ρητό πολλαπλάσιο του  $2\pi$  και τότε η θεμελιώδης περίοδος είναι  $N = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Το φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου είναι περιοδικό, αν η συχνότητα  $\omega$  του σήματος είναι ρητό πολλαπλάσιο του  $2\pi$  και τότε η θεμελιώδης περίοδος είναι  $N = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Ένα σήμα λέγεται σήμα ενέργειας αν έχει πεπερασμένη ενέργεια και μηδενική ισχύ.

Ένα σήμα λέγεται σήμα ισχύος αν έχει πεπερασμένη ισχύ και άπειρη ενέργεια.

Η περιοχή συχνοτήτων των σημάτων διακριτού χρόνου είναι πεπερασμένη:  $-\frac{1}{2} < f < +\frac{1}{2}$ .

### Σήματα συνεχούς χρόνου

#### 1-2-0-0-5-6

Τα σήματα διακρίνονται σε σήματα συνεχούς χρόνου και σε σήματα διακριτού χρόνου.

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου παριστάνεται μαθηματικά ως μία συνάρτηση. Η ανεξάρτητη μεταβλητή ονομάζεται χρόνος και συμβολίζεται με  $t$ . Πρόκειται για συνεχή μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Η εξαρτημένη μεταβλητή ονομάζεται πλάτος και συμβολίζεται με  $x(t)$ .

Το ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Το φανταστικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Ένα σήμα λέγεται σήμα ενέργειας αν έχει πεπερασμένη ενέργεια και μηδενική ισχύ.

Ένα σήμα λέγεται σήμα ισχύος αν έχει πεπερασμένη ισχύ και άπειρη ενέργεια.

Η περιοχή συχνοτήτων των σημάτων συνεχούς χρόνου είναι άπειρη:  $-\infty < f < +\infty$ .

### Δειγματοληψία

#### 1-2-0-0-0-0

Περιοδική δειγματοληψία (sampling) είναι η διαδικασία μετατροπής ενός σήματος συνεχούς χρόνου σε μία ακολουθία διακριτού χρόνου εξάγοντας και συγκερατώντας τις τιμές του σήματος συνεχούς χρόνου σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου δειγματοληψίας.

Θεώρημα δειγματοληψίας Shannon/Nyquist: Η συχνότητα με την οποία λαμβάνονται δείγματα ενός σήματος κατά τη διαδικασία της περιοδικής δειγματοληψίας πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια από τη μεγαλύτερη συχνότητα που περιέχεται στο σήμα.

Αν τηρείται το Θεώρημα δειγματοληψίας, τότε είναι δυνατή η ανακατασκευή του αναλογικού σήματος από τα δείγματα, ενώ αν δεν τηρείται, τότε δεν είναι δυνατή η ανακατασκευή του αναλογικού σήματος από τα δείγματα, γιατί εμφανίζεται το φαινόμενο της επικάλυψης ή παραποίησης (aliasing).

### Βιβλιογραφία/Αναφορές

Damper, R. I. (1995). *Introduction to Discrete-Time Signals and Systems*. Chapman & Hall.

Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S., Wehbring R. (2011). *GNU Octave* (3rd ed.).

Hansen J. S. (2011). *GNU Octave Beginner's Guide*. Packt Publishing.

Hayes, M. H. (2000). *Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος*. Εκδόσεις Τζιόλα.

Hsu, H. (1995). *Signals and Systems*. McGraw Hill.

Ingle, V. K., & Proakis, J. G. (2003). *Digital Signal Processing using MATLAB*. Stamford, CT: Thomson Brooks Cole.

- Leis, J. W. (2011). *Digital Signal Processing using MATLAB for students and researchers*. J. Wiley and Sons.
- Lynn, P. A., & Fuerst, W. (1989). *Introductory Digital Signal Processing With Computer Applications*. J. Wiley and Sons.
- McClellan, J. H., Schafer, R. W., Yoder, M. A. (2006). *Θεμελιώδεις Έννοιες της Επεξεργασίας Σημάτων*. Φιλομάθεια. Μετάφραση – Επιστημονική Επιμέλεια: Ε. Ζ. Ψαράκης.
- Oppenheim A. V., Willsky, A. S., Nawab, S. H. (2013). *Signals & Systems* (2<sup>nd</sup> ed.), Pearson.
- Proakis, J. G., & Manolakis D. G. (2007). *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*. Prentice–Hall.
- Strum, R. D., & Kirk, D. E. (1988). *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*. Addison–Wesley Publishing Company.
- The MathWorks Inc. (2005). *Signal Processing Toolbox User’s Guide*.
- Ασημάκης, Ν. (2008). *Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων*. Gutenberg.
- Θεοδωρίδης, Σ., Μπερμπερίδης, Κ., Κοφίδης, Λ. (2003). *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων*. Εκδόσεις τυπωθήτω.
- Καλουπτσίδης, Ν. (1994). *Σήματα, Συστήματα και Αλγόριθμοι*. Διάυλος.
- Καραγιάννης, Γ., & Μαραγκός, Π. (2010). *Βασικές Αρχές Σημάτων και Συστημάτων*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου.
- Καραγιάννης, Γ., & Τζιτζιράχου, Κ. (2003). *Εισαγωγή στα Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου.
- Καραμπογιάς, Σ. (2009). *Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Καραμπογιά.
- Μάργαρης, Α. (2014). *Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Μουστακίδης, Γ. (2004). *Βασικές Τεχνικές Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Παρασκευάς, Μ. (2014). *Σήματα και Συστήματα Συνεχούς Χρόνου με Matlab*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Σκόδρας, Α., & Αναστασόπουλος, Β. (2003). *Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων και Σημάτων*. ΕΑΠ.
- Φωτόπουλος, Π., & Βελώνη, Α. (2008). *Σήματα και Συστήματα*. Σύγχρονη Εκδοτική.

## Κριτήρια αξιολόγησης

### Κριτήριο αξιολόγησης 1

**1-2-3-4-0-0**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 1 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 1.4.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 1.4** Κριτήριο αξιολόγησης 1.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

### Κριτήριο αξιολόγησης 2

**1-2-0-0-5-6**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 2 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 1.5.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 1.5** *Κριτήριο αξιολόγησης 2.*

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

## Κεφάλαιο 2. Πράξεις σημάτων διακριτού και συνεχούς χρόνου

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι πράξεις σημάτων διακριτού και συνεχούς χρόνου. Αναλύονται οι πράξεις μετασχηματισμού πλάτους και οι πράξεις μετασχηματισμού χρόνου. Παρουσιάζεται η γραμμική συνέλιξη των σημάτων διακριτού και συνεχούς χρόνου.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Συναρτήσεις, ακολουθίες, ολοκληρώματα, σειρές.

### 2.1. Πράξεις σημάτων διακριτού χρόνου

1-2-3-4-0-0

#### 2.1.1. Ταξινόμηση πράξεων σημάτων διακριτού χρόνου

Οι πράξεις σημάτων διακριτού χρόνου διακρίνονται σε πράξεις μετασχηματισμού πλάτους και σε πράξεις μετασχηματισμού χρόνου.

Οι πράξεις μετασχηματισμού πλάτους, όπου μεταβάλλεται το πλάτος των σημάτων είναι:

- Πρόσθεση
- Πολλαπλασιασμός
- Κλιμάκωση στο πλάτος

Οι πράξεις μετασχηματισμού χρόνου, όπου δεν μεταβάλλεται το πλάτος των σημάτων, αλλά η χρονική διάρκειά τους είναι:

- Μετατόπιση ή ολίσθηση
- Αναδίπλωση ή ανάκλαση
- Κλιμάκωση στον χρόνο

Τέλος, μία ιδιαίτερη πράξη των σημάτων διακριτού χρόνου είναι η γραμμική συνέλιξη, όπου μεταβάλλεται τόσο το πλάτος, όσο και ο χρόνος.

Χρήσιμη ξενόγλωσση βιβλιογραφία είναι τα βιβλία Damper, 1995, Ingle and Proakis, 2003, Lynn & Fuerst, 1989, Oppenheim, Willsky, Nawab, 2013, Proakis & Manolakis, 2007, Strum & Kirk, 1988. Χρήσιμη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία είναι τα βιβλία Hayes, 2000, McClellan, Schafer & Yoder, 2006, Ασημάκης, 2008, Θεοδωρίδης, Μπερμπερίδης, Κοφίδης, 2003, Καλουπτσίδης, 1994, Καραγιάννης & Μαραγκός, 2010, Καραγιάννης & Τζίτζιράχου, 2003, Καραμπογιάνης, 2009, Μάργαρης, 2014, Μουστακίδης, 2004, Παρασκευάς, 2014, Σκούδρας & Αναστασόπουλος, 2003, Φωτόπουλος & Βελώνη, 2008.

#### 2.1.2. Πράξεις μετασχηματισμού πλάτους

##### 2.1.2.1. Πρόσθεση σημάτων

Η **πρόσθεση** δύο σημάτων διακριτού χρόνου  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$  παράγει ένα νέο σήμα  $x(n)$  με πλάτος το άθροισμα των πλατών των σημάτων που προστίθενται:

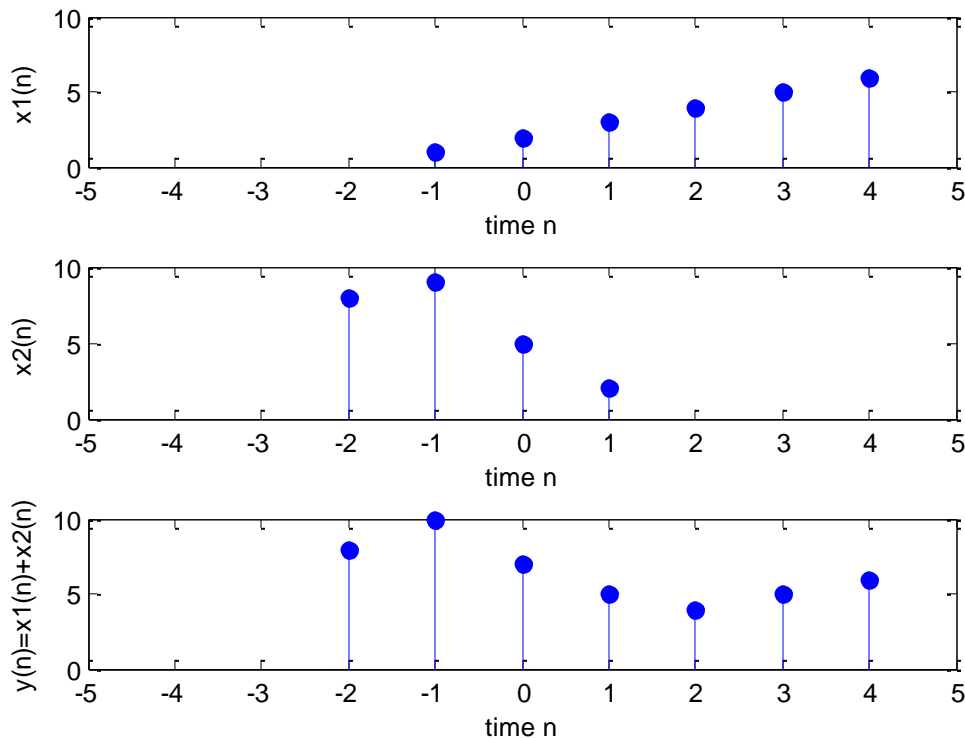
$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad (2.1)$$

Όταν τα σήματα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε το άθροισμά τους είναι και αυτό ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας. Αν το σήμα  $x_1(n)$  έχει διάρκεια το διάστημα  $[A_1 : T_1]$  με  $A_1 \leq T_1$  (όπου  $A_1$  και  $T_1$  είναι ακέραιοι αριθμοί) και το σήμα  $x_2(n)$  έχει διάρκεια το διάστημα  $[A_2 : T_2]$  με  $A_2 \leq T_2$  (όπου  $A_2$  και  $T_2$  είναι ακέραιοι αριθμοί), τότε το άθροισμα  $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$  έχει διάρκεια το διάστημα  $[A : T]$ , όπου  $[A : T] = [\min(A_1, A_2) : \max(T_1, T_2)]$ . Το άθροισμα υπάρχει στην ένωση των διαστημάτων χρόνου των σημάτων που αθροίζονται. Αν τα διαστήματα χρόνου των σημάτων που αθροίζονται είναι ξένα μεταξύ τους, τότε το άθροισμα στο διάστημα χρόνου ανάμεσα σε αυτά τα διαστήματα χρόνου είναι μηδέν.

Παράδειγμα.

Στο Σχήμα 2.1 φαίνεται η πρόσθεση των σημάτων:

$x_1(n) = n + 2, n \in [-1:4]$  και  $x_2(n) = [8,9,5,2], n \in [-2:1]$ .



Σχήμα 2.1 Πρόσθεση σημάτων διακριτού χρόνου.

### 2.1.2.2. Πολλαπλασιασμός σημάτων

Ο **πολλαπλασιασμός** δύο σημάτων διακριτού χρόνου  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$  παράγει ένα νέο σήμα  $x(n)$  με πλάτος το γινόμενο των πλατών των σημάτων που πολλαπλασιάζονται:

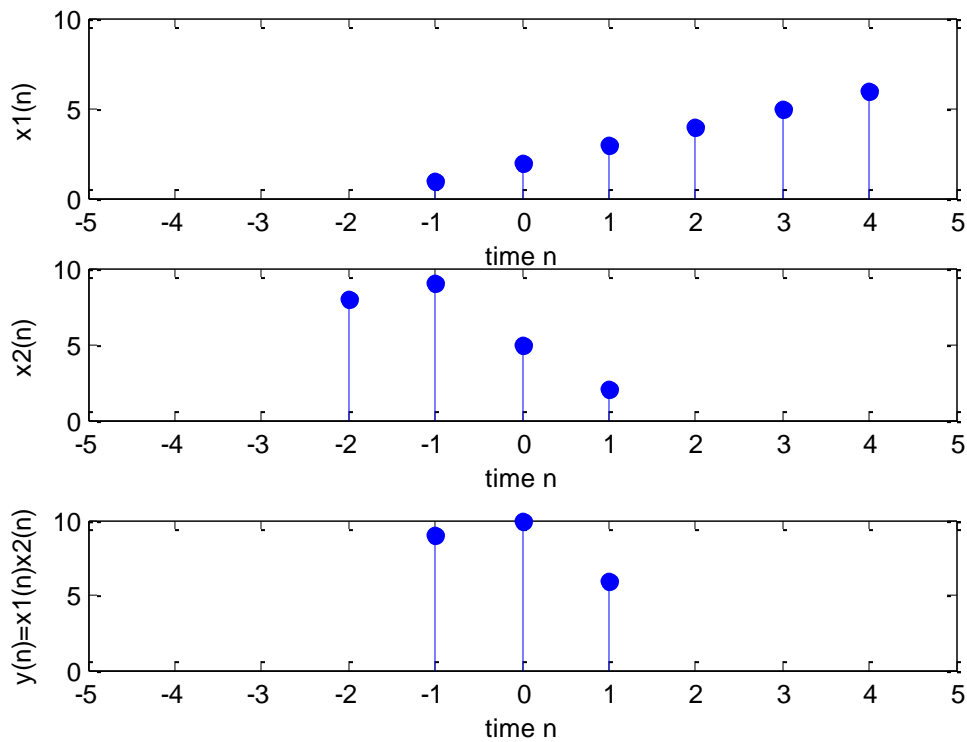
$$x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n) \quad (2.2)$$

Όταν τα σήματα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε το γινόμενό τους είναι και αυτό ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας. Αν το σήμα  $x_1(n)$  έχει διάρκεια το διάστημα  $[A_1 : T_1]$  με  $A_1 \leq T_1$  (όπου  $A_1$  και  $T_1$  είναι ακέραιοι αριθμοί) και το σήμα  $x_2(n)$  έχει διάρκεια το διάστημα  $[A_2 : T_2]$  με  $A_2 \leq T_2$  (όπου  $A_2$  και  $T_2$  είναι ακέραιοι αριθμοί), τότε το άθροισμα  $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$  έχει διάρκεια το διάστημα  $[A : T]$ , όπου  $[A : T] = [\min(A_1, A_2) : \max(T_1, T_2)]$ . Το γινόμενο υπάρχει στην τομή των διαστημάτων χρόνου των σημάτων που πολλαπλασιάζονται. Αν τα διαστήματα χρόνου των σημάτων που αθροίζονται είναι ξένα μεταξύ τους, τότε το γινόμενο είναι μηδέν.

Παράδειγμα.

Στο Σχήμα 2.2 φαίνεται ο πολλαπλασιασμός των σημάτων:

$x_1(n) = n + 2, n \in [-1:4]$  και  $x_2(n) = [8,9,5,2], n \in [-2:1]$ .



Σχήμα 2.2 Πολλαπλασιασμός σημάτων διακριτού χρόνου.

Παρατήρηση.

Ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος  $x(n)$  επί το σήμα  $u(n)$ , παράγει ένα σήμα  $x_r(n) = x(n) \cdot u(n)$  που αποτελείται από τις τιμές του σήματος  $x(n)$  για κάθε χρονική στιγμή  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

### 2.1.2.3. Κλιμάκωση στο πλάτος

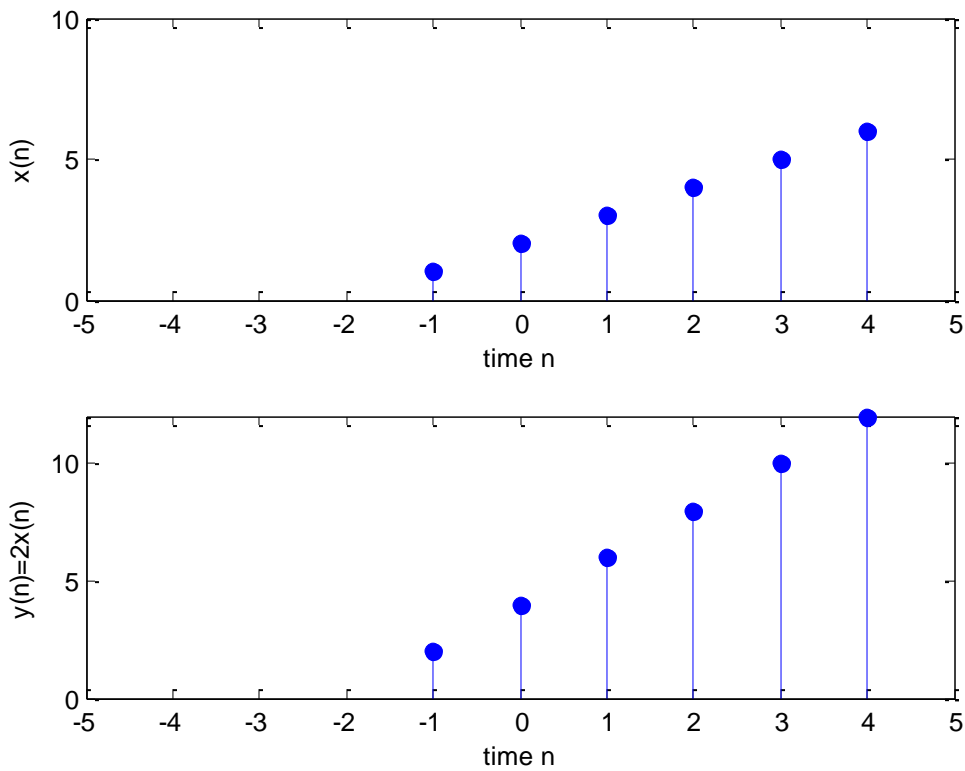
Η **κλιμάκωση στο πλάτος** ενός σήματος διακριτού χρόνου  $x(n)$  παράγει ένα νέο σήμα  $y(n)$  με πλάτος το πλάτος του σήματος  $x(n)$  πολλαπλασιασμένο επί έναν πραγματικό συντελεστή  $c \in \mathbb{R}$ :

$$y(n) = c \cdot x(n) \quad (2.3)$$

Όταν το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε η κλιμάκωση στο πλάτος του σήματος είναι και αυτό ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας και μάλιστα έχει την ίδια διάρκεια με το αρχικό σήμα. Όταν  $|c| > 1$ , τότε το πλάτος του αρχικού σήματος αυξάνεται κατά απόλυτη τιμή, ενώ όταν  $|c| < 1$ , τότε μειώνεται. Όταν  $c = 1$ , τότε  $y(n) = x(n)$ , ενώ όταν  $c = -1$ , τότε  $y(n) = -x(n)$ .

Παράδειγμα.

Στο Σχήμα 2.3 φαίνεται η κλιμάκωση στο πλάτος  $y(n) = 2 \cdot x(n)$  του σήματος  $x(n) = n + 2, n \in [-1: 4]$ .



Σχήμα 2.3 Κλιμάκωση στο πλάτος σήματος διακριτού χρόνου.

### 2.1.3. Πράξεις μετασχηματισμού χρόνου

#### 2.1.3.1. Μετατόπιση ή ολίσθηση

Η **μετατόπιση** ή **ολίσθηση** ενός σήματος διακριτού χρόνου  $x(n)$  παράγει ένα νέο σήμα

$$y(n) = x(n - n_0) \quad (2.4)$$

με πλάτος το πλάτος του σήματος  $x(n)$  μετατοπισμένο δεξιά ή αριστερά κατά  $n_0$  χρονικές στιγμές.

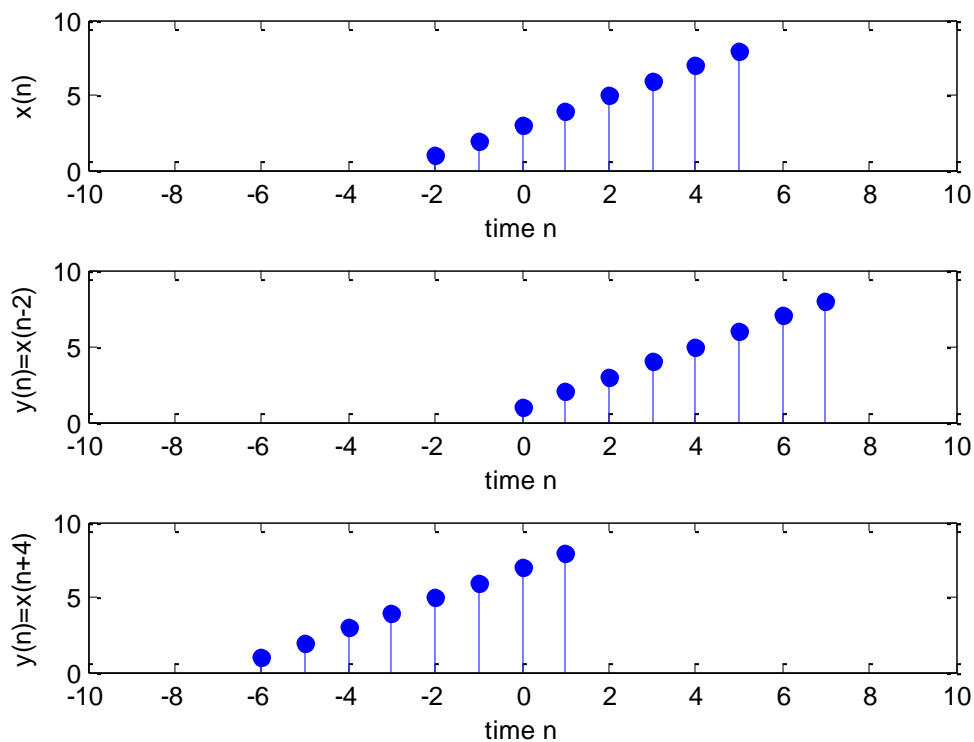
Αν  $n_0 > 0$ , τότε η μετατόπιση γίνεται δεξιά και έχουμε **καθυστέρηση**.

Αν  $n_0 < 0$ , τότε η μετατόπιση γίνεται αριστερά και έχουμε **πρωτοπορία**.

Αν  $n_0 = 0$ , τότε το σήμα δεν μετατοπίζεται.

Παράδειγμα.

Στο Σχήμα 2.4 παρουσιάζεται το σήμα  $x(n) = n + 3, n \in [-2:5]$  και οι μετατοπίσεις  $x(n - 2)$  και  $x(n + 4)$ .



Σχήμα 2.4 Μετατόπιση.

Μπορείτε να διερευνήσετε τη μετατόπιση σημάτων διακριτού χρόνου με το Διαδραστικό πρόγραμμα 2.1.



Διαδραστικό πρόγραμμα 2.1 Μετατόπιση σημάτων διακριτού χρόνου.

### 2.1.3.2. Αναδίπλωση ή ανάκλαση

**Αναδίπλωση ή ανάκλαση (fold)** είναι η πράξη όπου παράγεται το συμμετρικό σήμα του σήματος  $x(n)$  ως προς τον άξονα των τεταγμένων, οπότε παρατηρείται το φαινόμενο του «καθρεπτισμού» ως προς τον άξονα των τεταγμένων.

Κατά την αναδίπλωση, από το αρχικό σήμα  $x(n)$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[n_1 : n_2]$  με  $n_1 \leq n_2$  (όπου  $n_1$  και  $n_2$  είναι ακέραιοι αριθμοί), παράγεται το σήμα

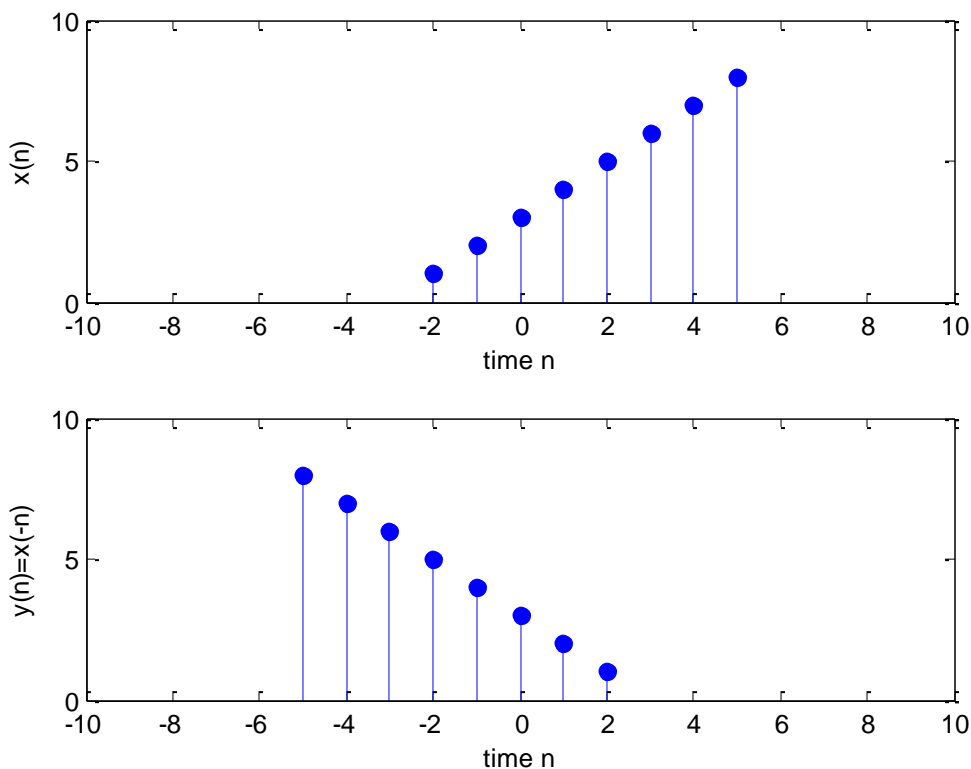
$$y(n) = x(-n) \quad (2.5)$$

με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[-n_2 : n_1]$  και τιμές, τις συμμετρικές ως προς τον άξονα των τεταγμένων τιμές του αρχικού σήματος  $x(n)$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή  $n = 0$ , αν υπάρχει, παραμένει η ίδια.

Παράδειγμα.

Στο Σχήμα 2.5 παρουσιάζεται το σήμα  $x(n) = n + 3, n \in [-2 : 5]$  και η αναδίπλωση  $x(-n)$ .





Σχήμα 2.5 Αναδίπλωση.

Μπορείτε να διερευνήσετε την αναδίπλωση σημάτων διακριτού χρόνου με το Διαδραστικό πρόγραμμα 2.2.



Διαδραστικό πρόγραμμα 2.2 Αναδίπλωση σημάτων διακριτού χρόνου.

### 2.1.3.3. Κλιμάκωση στον χρόνο

Η **κλιμάκωση στον χρόνο** ενός σήματος διακριτού χρόνου  $x(n)$  παράγει ένα νέο σήμα

$$y(n) = x(c \cdot n) \quad (2.6)$$

όπου  $c$  είναι  $c = M$  ή  $c = \frac{1}{M}$  και  $M$  θετικός ακέραιος.

Αν  $c = M$  και  $M$  θετικός ακέραιος, τότε το σήμα «συρρικνώνεται» και έχουμε **διαίρεση συχνότητας**. Στη διαίρεση συχνότητας γίνεται δειγματοληψία του σήματος κάθε  $M$  χρονικές στιγμές. Αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή  $n = 0$ , αν υπάρχει, παραμένει η ίδια.

Αν  $c = \frac{1}{M}$  και  $M$  θετικός ακέραιος, τότε το σήμα «απλώνεται» και έχουμε **πολλαπλασιασμό συχνότητας**.

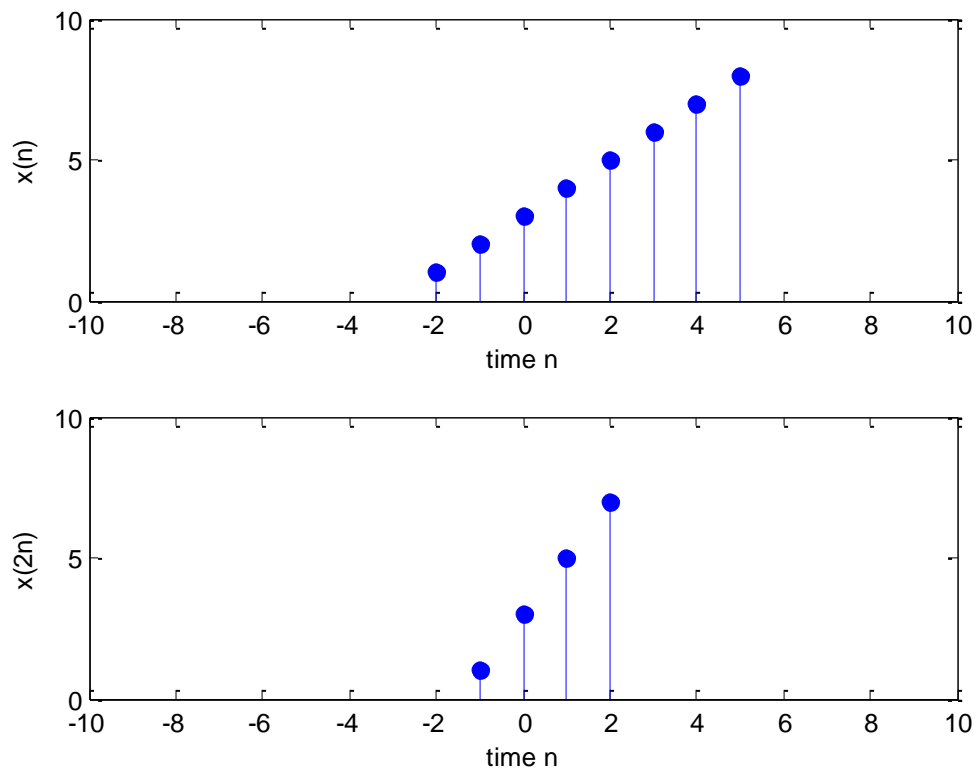
Στον πολλαπλασιασμό συχνότητας γίνεται «άπλωμα» του σήματος κάθε  $M$  χρονικές στιγμές. Αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή  $n = 0$ , αν υπάρχει, παραμένει η ίδια. Επίσης, αξίζει να

σημειωθεί ότι οι τιμές του σήματος  $y(n) = x\left(\frac{n}{M}\right)$  είναι μηδέν όταν  $\frac{n}{M} \notin \mathbb{Z}$ .

Αν  $c = 1$ , τότε το σήμα δεν μεταβάλλεται.

Παράδειγμα.

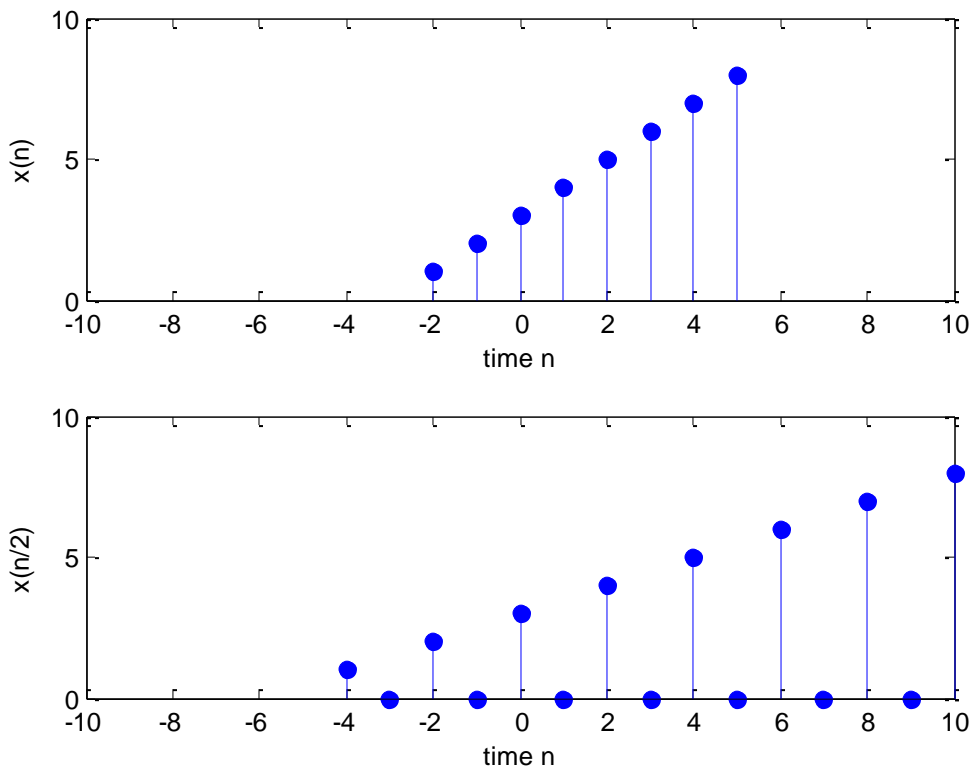
Στο Σχήμα 2.6 φαίνεται η διαίρεση συχνότητας  $y(n) = x(2 \cdot n)$  του σήματος  $x(n) = n + 3, n \in [-2:5]$ .



**Σχήμα 2.6**Κλιμάκωση στον χρόνο: διαίρεση συχνότητας.

Παράδειγμα.

Στο Σχήμα 2.7 φαίνεται ο πολλαπλασιασμός συχνότητας  $y(n) = x\left(\frac{n}{2}\right)$  του σήματος  $x(n) = n + 3, n \in [-2:5]$ .



**Σχήμα 2.7**Κλιμάκωση στον χρόνο: πολλαπλασιασμός συχνότητας.

Μπορείτε να διερευνήσετε την κλιμάκωση στον χρόνο σημάτων διακριτού χρόνου με το Διαδραστικό πρόγραμμα 2.3.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 2.3**Κλιμάκωση στον χρόνο σημάτων διακριτού χρόνου.

### 2.1.4. Προτεραιότητα πράξεων μετασχηματισμού χρόνου σημάτων διακριτού χρόνου

Προσοχή χρειάζεται στη σειρά εκτέλεσης των πράξεων μετασχηματισμού χρόνου. Η σειρά των πράξεων της μετατόπισης, της αναδίπλωσης και της κλιμάκωσης στον χρόνο οδηγεί σε διαφορετικά αποτελέσματα. Επίσης παίζει ρόλο ο τύπος της μετατόπισης (καθυστέρηση ή πρωτοπορία) και ο τύπος της κλιμάκωσης στον χρόνο (διαίρεση συχνότητας ή πολλαπλασιασμός συχνότητας).

#### Αναδίπλωση και μετατόπιση

Υπάρχουν οι παρακάτω τέσσερις περιπτώσεις σειράς εκτέλεσης των πράξεων της αναδίπλωσης και της μετατόπισης (καθυστέρηση ή πρωτοπορία) κατά  $n_0$  χρονικές στιγμές, όπου  $n_0 > 0$ :

1. Καθυστέρηση και Αναδίπλωση

$$x(n) \xrightarrow{\text{καθυστέρηση}} x(n - n_0) \xrightarrow{\text{αναδίπλωση}} x(-n - n_0)$$

2. Αναδίπλωση και Καθυστέρηση

$$x(n) \xrightarrow{\text{αναδίπλωση}} x(-n) \xrightarrow{\text{καθυστέρηση}} x(-(n - n_0)) = x(-n + n_0)$$

3. Πρωτοπορία και Αναδίπλωση

$$x(n) \xrightarrow{\text{πρωτοπορία}} x(n + n_0) \xrightarrow{\text{αναδίπλωση}} x(-n + n_0)$$

#### 4. Αναδίπλωση και Πρωτοπορία

$$x(n) \xrightarrow{\text{αναδίπλωση}} x(-n) \xrightarrow{\text{πρωτοπορία}} x(-(n+n_0)) = x(-n-n_0)$$

Είναι προφανές ότι:

Καθυστέρηση και Αναδίπλωση δεν οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα με Αναδίπλωση και Καθυστέρηση.

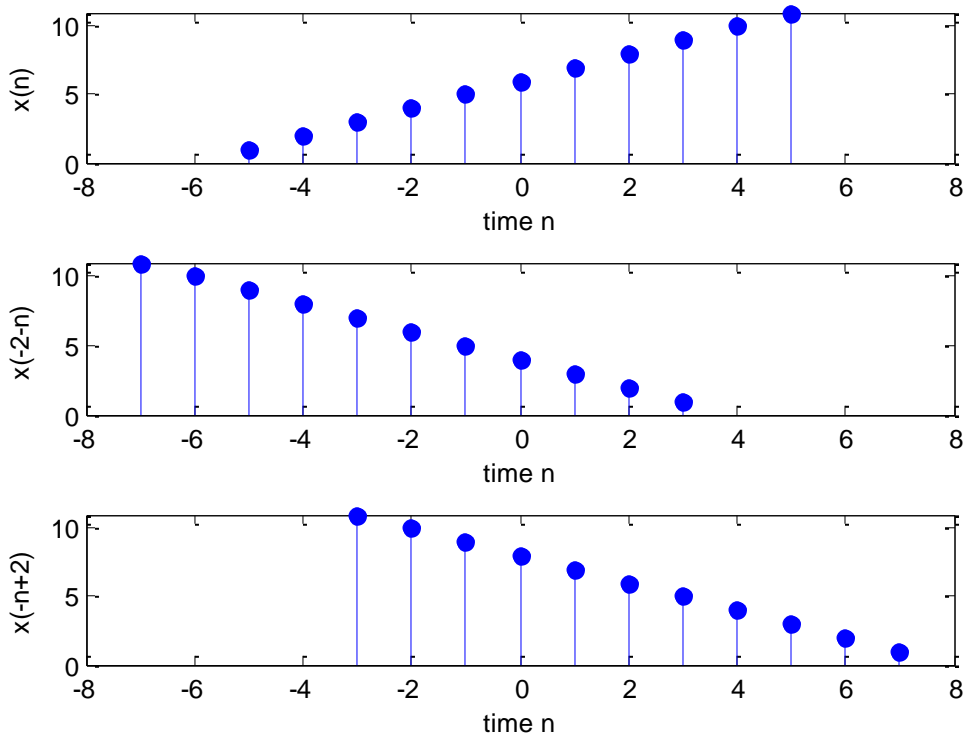
Πρωτοπορία και Αναδίπλωση δεν οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα με Αναδίπλωση και Πρωτοπορία.

Καθυστέρηση και Αναδίπλωση οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα με Αναδίπλωση και Πρωτοπορία.

Αναδίπλωση και Καθυστέρηση οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα με Πρωτοπορία και Αναδίπλωση.

Επομένως, γενικά **οι πράξεις Αναδίπλωση και Μετατόπιση δεν αντιμετατίθενται.**

Στο Σχήμα 2.8 παρουσιάζεται το σήμα  $x(n) = n + 6, n \in [-5:5]$  και τα σήματα  $x(-n-2)$  και  $x(-n+2)$ .



Σχήμα 2.8 Μετατόπιση και αναδίπλωση.

#### Αναδίπλωση και Κλιμάκωση στον χρόνο

Υπάρχουν οι παρακάτω τέσσερις περιπτώσεις σειράς εκτέλεσης των πράξεων της αναδίπλωσης και της κλιμάκωσης στον χρόνο (διαίρεση συχνότητας ή πολλαπλασιασμός συχνότητας):

1. Αναδίπλωση και Διαίρεση συχνότητας

$$x(n) \xrightarrow{\text{αναδίπλωση}} x(-n) \xrightarrow{\text{διαίρεση}} x(-(c \cdot n)) = x(-c \cdot n)$$

2. Διαίρεση συχνότητας και Αναδίπλωση

$$x(n) \xrightarrow{\text{διαίρεση}} x(c \cdot n) \xrightarrow{\text{αναδίπλωση}} x(c \cdot (-n)) = x(-c \cdot n)$$

3. Αναδίπλωση και Πολλαπλασιασμός συχνότητας

$$x(n) \xrightarrow{\text{αναδίπλωση}} x(-n) \xrightarrow{\text{πολλαπλασιασμός}} x\left(-\left(\frac{n}{c}\right)\right) = x\left(-\frac{n}{c}\right)$$

4. Πολλαπλασιασμός συχνότητας και Αναδίπλωση

$$x(n) \xrightarrow{\text{πολλαπλασιασμός}} x\left(\frac{n}{c}\right) \xrightarrow{\text{αναδίπλωση}} x\left(\frac{(-n)}{c}\right) = x\left(-\frac{n}{c}\right)$$

Είναι προφανές ότι:

Αναδίπλωση και Διαίρεση συχνότητας οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα με Διαίρεση συχνότητας και Αναδίπλωση.

Αναδίπλωση και Πολλαπλασιασμός συχνότητας οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα με Πολλαπλασιασμός συχνότητας και Αναδίπλωση.

Επομένως, γενικά *οι πράξεις Αναδίπλωση και Κλιμάκωση στον χρόνο αντιμετωπίζονται.*

### Μετατόπιση και Κλιμάκωση στον χρόνο

Υπάρχουν οι παρακάτω οκτώ περιπτώσεις σειράς εκτέλεσης των πράξεων της μετατόπισης (καθυστερήση ή πρωτοπορία) και της κλιμάκωσης στον χρόνο (διαίρεση συχνότητας ή πολλαπλασιασμός συχνότητας):

1. Καθυστερήση και Διαίρεση συχνότητας

$$x(n) \xrightarrow{\text{καθυστερήση}} x(n - n_0) \xrightarrow{\text{διαίρεση}} = x((c \cdot n) - n_0) = x(c \cdot n - n_0)$$

2. Διαίρεση συχνότητας και Καθυστερήση

$$x(n) \xrightarrow{\text{διαίρεση}} x(c \cdot n) \xrightarrow{\text{καθυστερήση}} x(c \cdot (n - n_0)) = x(c \cdot n - c \cdot n_0)$$

3. Πρωτοπορία και Διαίρεση συχνότητας

$$x(n) \xrightarrow{\text{πρωτοπορία}} x(n + n_0) \xrightarrow{\text{διαίρεση}} = x((c \cdot n) + n_0) = x(c \cdot n + n_0)$$

4. Διαίρεση συχνότητας και Πρωτοπορία

$$x(n) \xrightarrow{\text{διαίρεση}} x(c \cdot n) \xrightarrow{\text{πρωτοπορία}} = x(c \cdot (n + n_0)) = x(c \cdot n + c \cdot n_0)$$

5. Καθυστερήση και Πολλαπλασιασμός συχνότητας

$$x(n) \xrightarrow{\text{καθυστερήση}} x(n - n_0) \xrightarrow{\text{πολλαπλασιασμός}} = x\left(\left(\frac{n}{c}\right) - n_0\right) = x\left(\frac{n}{c} - n_0\right)$$

6. Πολλαπλασιασμός συχνότητας και Καθυστερήση

$$x(n) \xrightarrow{\text{πολλαπλασιασμός}} x\left(\frac{n}{c}\right) \xrightarrow{\text{καθυστερήση}} = x\left(\frac{(n - n_0)}{c}\right) = x\left(\frac{n}{c} - \frac{n_0}{c}\right)$$

7. Πρωτοπορία και Πολλαπλασιασμός συχνότητας

$$x(n) \xrightarrow{\text{πρωτοπορία}} x(n + n_0) \xrightarrow{\text{πολλαπλασιασμός}} x\left(\left(\frac{n}{c}\right) + n_0\right) = x\left(\frac{n}{c} + n_0\right)$$

8. Πολλαπλασιασμός συχνότητας και Πρωτοπορία

$$x(n) \xrightarrow{\text{πολλαπλασιασμός}} x\left(\frac{n}{c}\right) \xrightarrow{\text{πρωτοπορία}} = x\left(\frac{(n + n_0)}{c}\right) = x\left(\frac{n}{c} + \frac{n_0}{c}\right)$$

Επομένως, γενικά *οι πράξεις Μετατόπιση και Κλιμάκωση στον χρόνο δεν αντιμετωπίζονται.*

### Μετατόπιση, Κλιμάκωση στον χρόνο και Αναδίπλωση

Δίνονται δύο παραδείγματα σειράς εκτέλεσης των πράξεων της μετατόπισης, της κλιμάκωσης στον χρόνο και της αναδίπλωσης:

1. Καθυστερήση, Διαίρεση συχνότητας και Αναδίπλωση

$$x(n) \xrightarrow{\text{καθυστερήση}} x(n - n_0) \xrightarrow{\text{διαίρεση}} x(c \cdot n - n_0) \xrightarrow{\text{αναδίπλωση}} x(-c \cdot n - n_0)$$

2. Πρωτοπορία, Διαίρεση συχνότητας και Αναδίπλωση

$$x(n) \xrightarrow{\text{πρωτοπορία}} x(n + n_0) \xrightarrow{\text{διαίρεση}} x(c \cdot n + n_0) \xrightarrow{\text{αναδίπλωση}} x(-c \cdot n + n_0)$$

Συμπερασματικά, η σειρά των πράξεων της μετατόπισης, της αναδίπλωσης και της κλιμάκωσης στον χρόνο οδηγεί σε διαφορετικά αποτελέσματα. Παίζει ρόλο ο τύπος της μετατόπισης (καθυστερήση ή πρωτοπορία) και ο τύπος της κλιμάκωσης στον χρόνο (διαίρεση συχνότητας ή πολλαπλασιασμός συχνότητας). Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζεται η σειρά των πράξεων της μετατόπισης, της αναδίπλωσης και της κλιμάκωσης στον χρόνο που απαιτείται ανάλογα με το σήμα που πρόκειται να παραχθεί.

Σήμα	Σειρά πράξεων
$x(n)$	
$x(n - n_0)$	Καθυστέρηση
$x(n + n_0)$	Πρωτοπορία
$x(-n)$	Αναδίπλωση
$x(c \cdot n)$	Διαίρεση συχνότητας
$x\left(\frac{n}{c}\right)$	Πολλαπλασιασμός συχνότητας
$x(-n - n_0)$	Καθυστέρηση και Αναδίπλωση ή Αναδίπλωση και Πρωτοπορία
$x(-n + n_0)$	Πρωτοπορία και Αναδίπλωση ή Αναδίπλωση και Καθυστέρηση
$x(-c \cdot n)$	Αναδίπλωση και Διαίρεση συχνότητας ή Διαίρεση συχνότητας και Αναδίπλωση
$x\left(-\frac{n}{c}\right)$	Αναδίπλωση και Πολλαπλασιασμός συχνότητας ή Πολλαπλασιασμός συχνότητας και Αναδίπλωση
$x(c \cdot n - n_0)$	Καθυστέρηση και Διαίρεση συχνότητας ή Διαίρεση συχνότητας και Καθυστέρηση
$x(c \cdot n + n_0)$	Πρωτοπορία και Διαίρεση συχνότητας ή Διαίρεση συχνότητας και Πρωτοπορία
$x\left(\frac{n}{c} - n_0\right)$	Καθυστέρηση και Πολλαπλασιασμός συχνότητας
$x\left(\frac{n}{c} + n_0\right)$	Πρωτοπορία και Πολλαπλασιασμός συχνότητας
$x(-c \cdot n - n_0)$	Καθυστέρηση, Διαίρεση συχνότητας και Αναδίπλωση
$x(-c \cdot n + n_0)$	Πρωτοπορία, Διαίρεση συχνότητας και Αναδίπλωση

**Πίνακας 2.1** Μετατόπιση, Αναδίπλωση, Κλιμάκωση στον χρόνο.

### 2.1.5. Ανάλυση σημάτων διακριτού χρόνου

Στο σημείο αυτό δίνεται ο τύπος της ανάλυσης σημάτων διακριτού χρόνου, που είναι πολύ σημαντικός στην Επεξεργασία Σημάτων:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot \delta(n - k) \quad (2.7)$$

Ο τύπος περιγράφει ένα σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)$  δίνοντας πληροφορία για το πλάτος του σήματος κάθε χρονική στιγμή: τη χρονική στιγμή  $k$  το σήμα έχει πλάτος  $x(k)$ .

Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(n) = \begin{cases} 1, n = -3 \\ 2, n = -2 \\ 3, n = -1 \\ 4, n = 0 \\ 3, n = 1 \\ 2, n = 2 \\ 1, n = 3 \end{cases}$$

μπορεί να γραφτεί

$$x(n) = \sum_{k=-3}^{+3} x(k) \cdot \delta(n - k) = 1 \cdot \delta(n + 3) + 2 \cdot \delta(n + 2) + 3 \cdot \delta(n + 1) + 4 \cdot \delta(n) + 3 \cdot \delta(n - 1) + 2 \cdot \delta(n - 2) + 1 \cdot \delta(n - 3)$$

Ο τύπος δίνει πληροφορία για το πλάτος του σήματος κάθε χρονική στιγμή: τη χρονική στιγμή  $n = -3$  το σήμα έχει πλάτος 1, τη χρονική στιγμή  $n = -2$  το σήμα έχει πλάτος 2, τη χρονική στιγμή  $n = -1$  το σήμα έχει

πλάτος3, τη χρονική στιγμή  $n=0$  το σήμα έχει πλάτος4, τη χρονική στιγμή  $n=1$  το σήμα έχει πλάτος3, τη χρονική στιγμή  $n=2$  το σήμα έχει πλάτος2 και τη χρονική στιγμή  $n=3$  το σήμα έχει πλάτος1.

## 2.1.6. Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

### 2.1.6.1. Ορισμός γραμμικής συνέλιξης

Η **γραμμική συνέλιξη (linear convolution)** δύο σημάτων διακριτού χρόνου  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$  ορίζεται ως ακολούθως:

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n-k) \quad (2.8)$$

Το σύμβολο της γραμμικής συνέλιξης είναι το «\*».

### 2.1.6.2. Γραμμική συνέλιξη σημάτων άπειρης διάρκειας

Όταν τα σήματα είναι άπειρης διάρκειας, τότε η γραμμική συνέλιξη είναι και αυτή ένα σήμα άπειρης διάρκειας. Ο υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης δύο σημάτων διακριτού χρόνου άπειρης διάρκειας στηρίζεται στις σειρές.

Παράδειγμα.

Δίνονται τα σήματα  $x_1(n) = a^n \cdot u(n)$  με  $a \neq 1$  και  $x_2(n) = u(n)$

Η γραμμική συνέλιξη  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$  είναι:

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k)$$

Για  $n < 0$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k) + \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k).$$

$$\text{Επειδή ισχύει } u(k) = 0 \text{ όταν } k < 0, \text{ έχουμε } \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k \cdot 0 \cdot u(n-k) = 0.$$

$$\text{Επειδή ισχύει } u(n-k) = 0 \text{ όταν } n < 0 \leq k (\Rightarrow n-k < 0), \text{ έχουμε } \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cdot u(k) \cdot 0 = 0.$$

Επομένως, για  $n < 0$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k) + \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k \cdot u(k) \cdot 0 + \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cdot u(k) \cdot 0 = 0 + 0 = 0.$$

Για  $n \geq 0$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k) + \sum_{k=0}^n a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k).$$

$$\text{Επειδή ισχύει } u(k) = 0 \text{ όταν } k < 0, \text{ έχουμε } \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k \cdot 0 \cdot u(n-k) = 0.$$

Επειδή ισχύει  $u(k) = 1$  όταν  $k \geq 0$  και  $u(n-k) = 1$  όταν  $k \leq n$ , έχουμε

$$\sum_{k=0}^n a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k) = \sum_{k=0}^n a^k \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

$$\text{Επειδή ισχύει } u(n-k) = 0 \text{ όταν } n < k, \text{ έχουμε } \sum_{k=n+1}^{+\infty} a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a^k \cdot u(k) \cdot 0 = 0.$$

Επομένως, για  $n \geq 0$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k) + \sum_{k=0}^n a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a^k \cdot u(k) \cdot u(n-k) = 0 + \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + 0 = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Άρα

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

Δηλαδή για κάθε ακέραιο  $n$ , η συνέλιξη των σημάτων  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$  είναι:

$$x(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \cdot u(n)$$

### 2.1.6.3. Γραμμική συνέλιξη σημάτων πεπερασμένης διάρκειας

Όταν τα σήματα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε η γραμμική συνέλιξη είναι και αυτή ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας:

Αν το σήμα  $x_1(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[A_1 : T_1]$  (όπου  $A_1$  και  $T_1$  είναι ακέραιοι αριθμοί) με μήκος  $L_1 = T_1 - A_1 + 1$  και το σήμα  $x_2(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[A_2 : T_2]$  (όπου  $A_2$  και  $T_2$  είναι ακέραιοι αριθμοί) με μήκος  $L_2 = T_2 - A_2 + 1$ , τότε η γραμμική συνέλιξη  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[A : T] = [A_1 + A_2 : T_1 + T_2]$  με μήκος  $L = L_1 + L_2 - 1$ .

Πράγματι:

$$L = T - A + 1 = (T_1 + T_2) - (A_1 + A_2) - 1 = (T_1 - A_1 + 1) + (T_2 - A_2 + 1) - 1 = L_1 + L_2 - 1$$

Επομένως η γραμμική συνέλιξη σημάτων πεπερασμένης διάρκειας αρχίζει από το άθροισμα των αρχών των δύο σημάτων και τελειώνει στο άθροισμα των τελών των δύο σημάτων.

Η γραμμική συνέλιξη δύο σημάτων διακριτού χρόνου πεπερασμένης διάρκειας υπολογίζεται ακολουθώντας μία από τις παρακάτω μεθοδολογίες:

(α) χρήση των πράξεων της αναδίπλωσης και της μετατόπισης,

(β) χρήση πινάκων και

(γ) χρήση της διαδικασίας υπολογισμού πολλαπλασιασμού πολυωνύμων.

#### (α) Χρήση πράξεων αναδίπλωσης και μετατόπισης

Ο υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης δύο σημάτων διακριτού χρόνου πεπερασμένης διάρκειας μπορεί να γίνει με χρήση των πράξεων της αναδίπλωσης και της μετατόπισης, όπως φαίνεται από τον ορισμό της γραμμικής συνέλιξης.

Παράδειγμα.

Δίνονται τα σήματα

$$x_1(n) = 4\delta(n+1) + 5\delta(n) + 6\delta(n-1) + 7\delta(n-2)$$

και

$$x_2(n) = 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$$

Το σήμα  $x_1(n)$  υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[-1 : 2]$  και το σήμα  $x_2(n)$  στον χρονικό διάστημα  $[1 : 3]$ .

Τότε η γραμμική συνέλιξη  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$  υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[0 : 5]$ .

Ο υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης φαίνεται παρακάτω:

$k$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
$x_1(k)$			4	5	6	7			
$x_2(k)$					3	2	1		
$x_2(-k)$	1	2	3						$x(0) = 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 7 = 12$
$x_2(1-k)$		1	2	3					$x(1) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 7 = 23$
$x_2(2-k)$			1	2	3				$x(2) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 0 \cdot 7 = 32$
$x_2(3-k)$				1	2	3			$x(3) = 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 = 38$
$x_2(4-k)$					1	2	3		$x(4) = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 20$



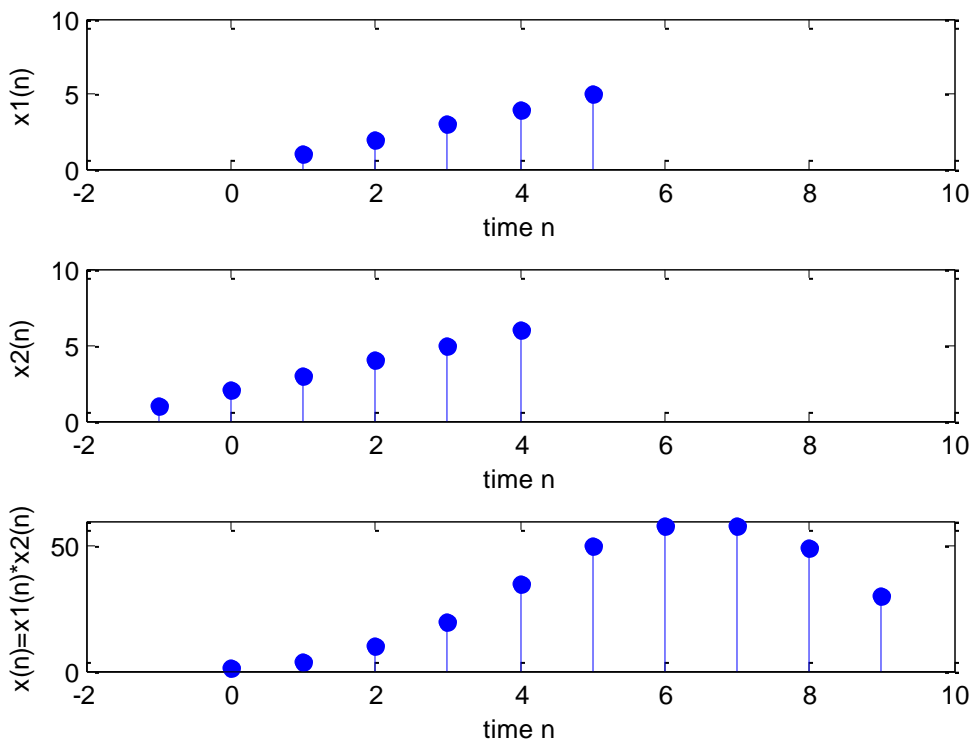
$x_2(5-k)$					1	2	3	$x(5) = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 7 = 7$
------------	--	--	--	--	---	---	---	--

Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης

Η διαδικασία του υπολογισμού της γραμμικής συνέλιξης γίνεται σε τέσσερα βήματα:

1. Αναδίπλωση του ενός σήματος.
2. Μετατόπιση του αναδιπλωμένου σήματος στο διάστημα χρόνου του άλλου(αμετακίνητου) σήματος. Η μετατόπιση γίνεται από τη στιγμή που το αναδιπλωμένο σήμα εισέρχεται στο διάστημα χρόνου του σταθερού σήματος μέχρι τη στιγμή που το αναδιπλωμένο σήμα εξέρχεται από το διάστημα χρόνου του σταθερού σήματος.
3. Πολλαπλασιασμός των τιμών του αμετακίνητου σήματος με τις τιμές του μετατοπισμένου σήματος.
4. Πρόσθεση των τιμών.

Στο Σχήμα 2.9 παρουσιάζονται τα σήματα  $x_1(n) = n, n \in [1:5]$ ,  $x_2(n) = n + 2, n \in [-1:4]$  καθώς και η γραμμική συνέλιξη  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ .



Σχήμα 2.9 Γραμμική συνέλιξη.

Είναι φανερό ότι η γραμμική συνέλιξη είναι μία πράξη κατά την οποία μεταβάλλεται τόσο το πλάτος όσο και ο χρόνος.

Μπορείτε να διερευνήσετε την γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου με το Διαδραστικό πρόγραμμα 2.4.



Διαδραστικό πρόγραμμα 2.4 Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου.

## (β) Χρήση πινάκων

Ο υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης δύο σημάτων διακριτού χρόνου πεπερασμένης διάρκειας μπορεί να γίνει με χρήση πινάκων.

Αν το σήμα  $x_1(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[A_1 : T_1]$  (όπου  $A_1$  και  $T_1$  είναι ακέραιοι αριθμοί) με μήκος  $L_1 = T_1 - A_1 + 1$  και το σήμα  $x_2(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[A_2 : T_2]$  (όπου  $A_2$  και  $T_2$  είναι ακέραιοι αριθμοί) με μήκος  $L_2 = T_2 - A_2 + 1$ , τότε η γραμμική συνέλιξη  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$  είναι σήμα πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[A : T] = [A_1 + A_2 : T_1 + T_2]$  με μήκος  $L = L_1 + L_2 - 1$ .

Η γραμμική συνέλιξη μπορεί να εκφραστεί σε μορφή πινάκων:

$$\underline{x} = P \cdot \underline{x}_1$$

όπου

- το διάνυσμα  $\underline{x}_1$  έχει τις τιμές του σήματος  $x_1(n)$  και είναι διαστάσεων  $L_1 \times 1$
- ο πίνακας  $P$  έχει τις τιμές του σήματος  $x_2(n)$  αναδιπλωμένες και μετατοπισμένες και είναι διαστάσεων  $L \times L_1$
- το διάνυσμα  $\underline{x}$  έχει τις τιμές της συνέλιξης  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$  και είναι διαστάσεων  $L \times 1$

Παράδειγμα.

Δίνονται τα σήματα

$$x_1(n) = 4\delta(n+1) + 5\delta(n) + 6\delta(n-1) + 7\delta(n-2)$$

και

$$x_2(n) = 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3).$$

Το σήμα  $x_1(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[-1 : 2]$  με μήκος  $L_1 = 4$ .

Το σήμα  $x_2(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[1 : 3]$  με μήκος  $L_2 = 3$ .

Έτσι η γραμμική συνέλιξη  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$  είναι σήμα πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[0 : 5]$  με μήκος  $L = 6$ .

Από το σήμα  $x_1(n)$  προκύπτει το διάνυσμα  $\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$  διαστάσεων  $4 \times 1$ .

Από το σήμα  $x_2(n)$  προκύπτει ο πίνακας  $P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  διαστάσεων  $6 \times 4$ .

Τότε η γραμμική συνέλιξη  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$  έχει τιμές, τις τιμές του διανύσματος

$$\underline{x} = P \cdot \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 23 \\ 32 \\ 38 \\ 20 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ διαστάσεων } 6 \times 1.$$

Παρατήρηση: Ο πίνακας  $P$  είναι πίνακας Toeplitz (όλα τα στοιχεία κατά μήκος κάθε διαγωνίου έχουν την ίδια τιμή) και αποτελείται από το σκιασμένο μέρος του πίνακα υπολογισμού της γραμμικής συνέλιξης της προηγούμενης παραγράφου.

### (γ) Χρήση διαδικασίας υπολογισμού πολλαπλασιασμού πολυωνύμων

Ο υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης δύο σημάτων διακριτού χρόνου πεπερασμένης διάρκειας μπορεί να γίνει με χρήση της διαδικασίας υπολογισμού πολλαπλασιασμού κατάλληλων πολυωνύμων, με συντελεστές τα πλάτη των σημάτων. Οι συντελεστές του γινομένου αντιστοιχούν στο πλάτος της γραμμικής συνέλιξης των σημάτων.

Παράδειγμα.

Δίνονται τα σήματα

$$x_1(n) = 4\delta(n+1) + 5\delta(n) + 6\delta(n-1) + 7\delta(n-2)$$

και

$$x_2(n) = 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$$

Θεωρούνται τα πολυώνυμα:

$$f(x) = 4 + 5 \cdot x + 6 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3$$

και

$$g(x) = 3 + 2 \cdot x + x^2$$

που έχουν συντελεστές τις τιμές των σημάτων.

Τότε ο πολλαπλασιασμός των πολυωνύμων είναι:

$$f(x) \cdot g(x) = (4 + 5 \cdot x + 6 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3) \cdot (3 + 2 \cdot x + x^2) = 12 + 23 \cdot x + 32 \cdot x^2 + 38 \cdot x^3 + 20 \cdot x^4 + 7 \cdot x^5$$

ή

$$g(x) \cdot f(x) = (3 + 2 \cdot x + x^2) \cdot (4 + 5 \cdot x + 6 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3) = 12 + 23 \cdot x + 32 \cdot x^2 + 38 \cdot x^3 + 20 \cdot x^4 + 7 \cdot x^5$$

Είναι φανερό ότι οι συντελεστές του γινομένου των πολυωνύμων είναι οι τιμές της γραμμικής συνέλιξης

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) .$$

#### 2.1.6.4. Ιδιότητες γραμμικής συνέλιξης

##### Ταυτοτικό στοιχείο

**Ταυτοτικό στοιχείο** της γραμμικής συνέλιξης είναι το σήμα μοναδιαίου δείγματος  $\delta(n)$  :

$$x(n) * \delta(n) = x(n) \tag{2.9}$$

##### Απόδειξη.

Από το ορισμό της γραμμικής συνέλιξης έχουμε:

$$x(n) * \delta(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$$

Από τον τύπο της ανάλυσης σημάτων (2.7) έχουμε:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$$

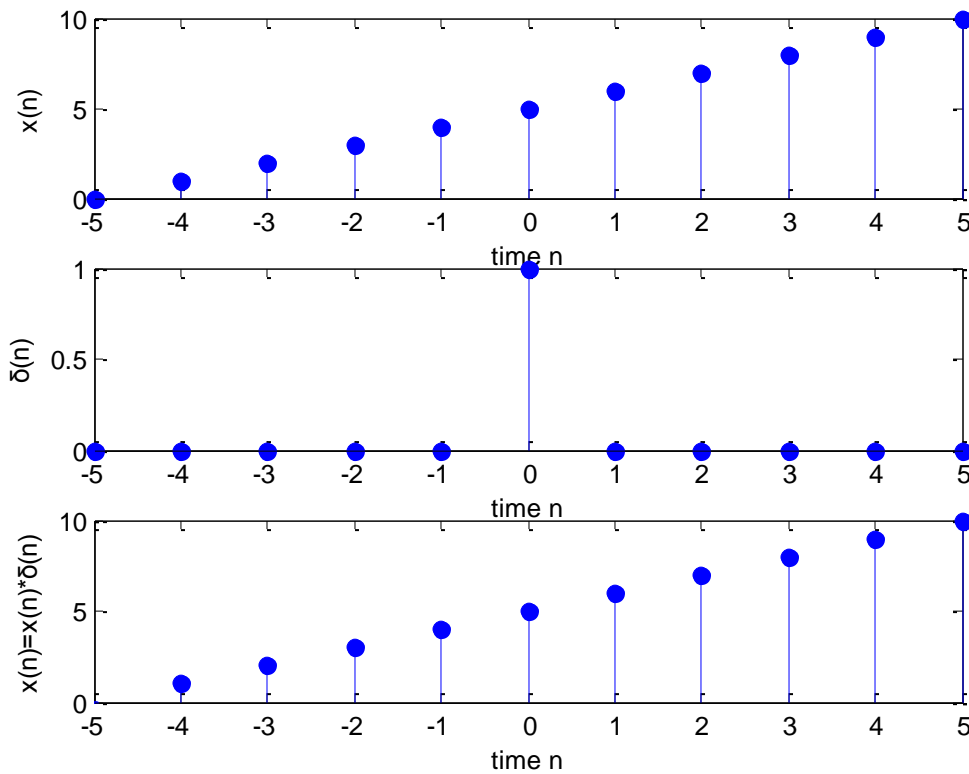
Άρα:

$$x(n) * \delta(n) = x(n) \quad \blacksquare$$

Η γραμμική συνέλιξη οποιουδήποτε σήματος  $x(n)$  με το σήμα μοναδιαίου δείγματος  $\delta(n)$  είναι το ίδιο το σήμα  $x(n)$  .

Στο Σχήμα 2.10 παρουσιάζεται το σήμα  $x(n) = n + 5, n \in [-5:5]$  και η συνέλιξη

$$x(n) * \delta(n) = x(n) .$$



Σχήμα 2.10 Ταυτοτικό στοιχείο γραμμικής συνέλιξης.

Επίσης ισχύει:

$$x(n) * \delta(n - n_0) = x(n - n_0)$$

(2.10)

**Απόδειξη.**

Από το ορισμό της γραμμικής συνέλιξης έχουμε:

$$x(n) * \delta(n - n_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot \delta(n - n_0 - k)$$

Από τον τύπο της ανάλυσης σημάτων (2.7) έχουμε:

$$x(n - n_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot \delta(n - n_0 - k)$$

Άρα

$$x(n) * \delta(n - n_0) = x(n - n_0)$$



**Αντιμεταθετική ιδιότητα**

Η **αντιμεταθετική ιδιότητα** της γραμμικής συνέλιξης είναι:

$$x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n)$$

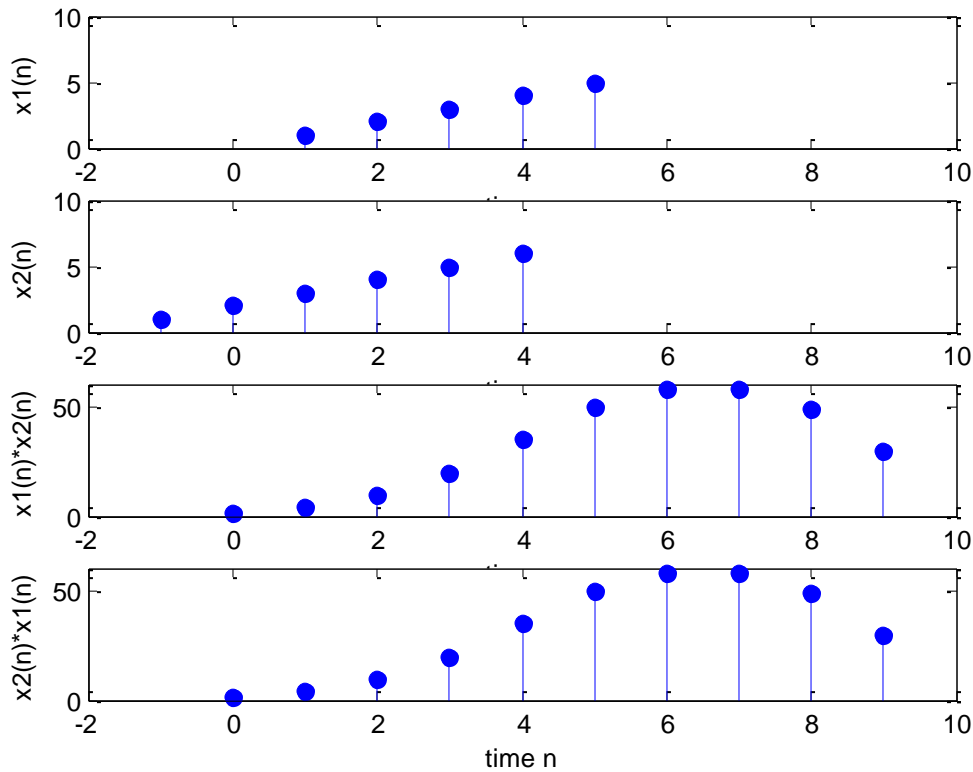
(2.11)

**Απόδειξη.**

Από τον ορισμό της γραμμικής συνέλιξης, την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού και την αλλαγή μεταβλητής  $m = n - k$  έχουμε:

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n - k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2(n - k) \cdot x_1(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_2(m) \cdot x_1(n - m) = x_2(n) * x_1(n) \blacksquare$$

Η ισχύς της αντιμεταθετικής ιδιότητας επιβεβαιώνεται από τα παραδείγματα της προηγούμενης παραγράφου. Στο Σχήμα 2.11 παρουσιάζονται τα σήματα  $x_1(n) = n, n \in [1 : 5]$  και  $x_2(n) = n + 2, n \in [-1 : 4]$ , καθώς και οι ίσες μεταξύ τους συνέλιξεις  $x_1(n) * x_2(n)$  και  $x_2(n) * x_1(n)$ .



Σχήμα 2.11 Αντιμεταθετική ιδιότητα γραμμικής συνέλιξης.

### Προσεταιριστική ιδιότητα

Η **προσεταιριστική ιδιότητα** της γραμμικής συνέλιξης είναι:

$$x_1(n) * (x_2(n) * x_3(n)) = (x_1(n) * x_2(n)) * x_3(n) \quad (2.12)$$

#### Απόδειξη.

Θέτουμε  $z(n) = x_2(n) * x_3(n)$ . Από τον ορισμό της γραμμικής συνέλιξης σε συνδυασμό με την αντιμεταθετική ιδιότητα της γραμμικής συνέλιξης έχουμε:

$$z(n) = x_2(n) * x_3(n) = x_3(n) * x_2(n) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x_3(\ell) \cdot x_2(n - \ell)$$

οπότε για οποιονδήποτε ακέραιο  $k$  γράφουμε:  $z(n - k) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x_3(\ell) \cdot x_2(n - k - \ell)$ .

Επίσης, χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα που ισχύει στους πραγματικούς αριθμούς, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} x_1(n) * (x_2(n) * x_3(n)) &= x_1(n) * z(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot z(n - k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot \left( \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x_3(\ell) \cdot x_2(n - k - \ell) \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_3(\ell) \cdot x_2(n - k - \ell) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n - k - \ell) \cdot x_3(\ell) \end{aligned}$$

Όμοια, θέτοντας  $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ , από τον ορισμό της γραμμικής συνέλιξης έχουμε:

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n - k)$$

οπότε για οποιονδήποτε ακέραιο  $k$  γράφουμε:  $y(n - k) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n - \ell - k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n - k - \ell)$ .

Από την αντιμεταθετική ιδιότητα της γραμμικής συνέλιξης και την αντιμεταθετική και προσεταιριστική ιδιότητα που ισχύει στους πραγματικούς αριθμούς, μπορούμε να γράψουμε:

$$(x_1(n) * x_2(n)) * x_3(n) = y(n) * x_3(n) = x_3(n) * y(n) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x_3(\ell) \cdot y(n-k)$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x_3(\ell) \cdot \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n-k-\ell) \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x_3(\ell) \cdot x_1(k) \cdot x_2(n-k-\ell) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n-k-\ell) \cdot x_3(\ell)$$

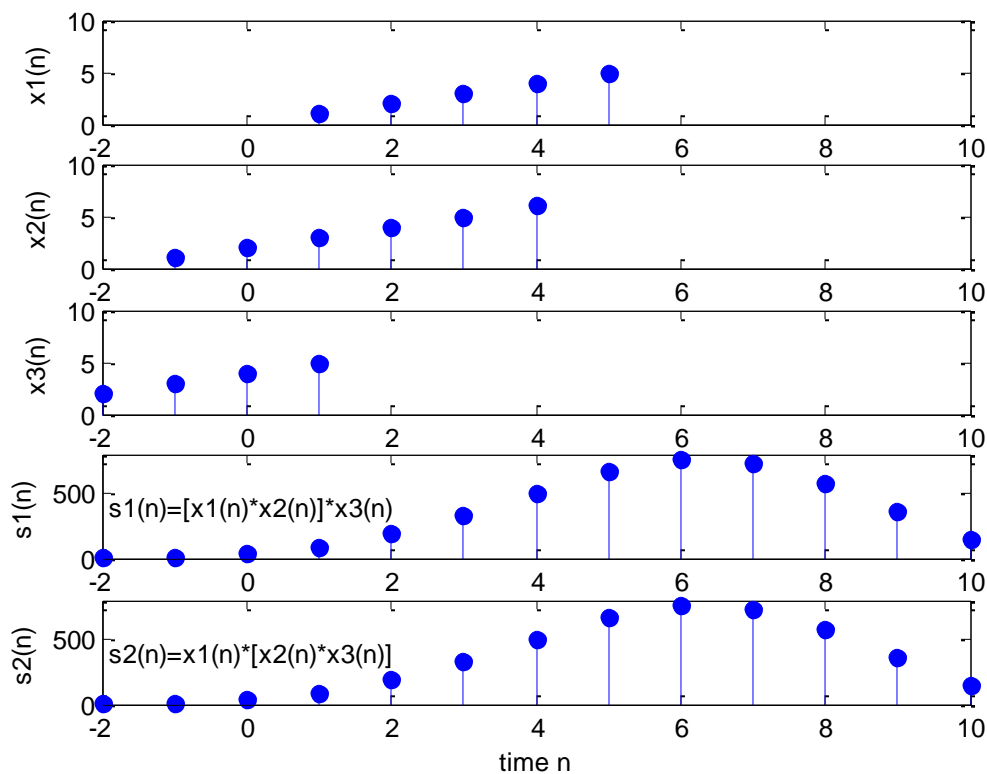
Επομένως

$$x_1(n) * (x_2(n) * x_3(n)) = (x_1(n) * x_2(n)) * x_3(n) \blacksquare$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα έχει μεγάλη σημασία στα Γραμμικά Συστήματα και ιδιαίτερα στα Συστήματα που συνδέονται σε σειρά, όπως θα εξηγηθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Η προσεταιριστική ιδιότητα μαζί με την αντιμεταθετική ιδιότητα έχουν ως αποτέλεσμα το γεγονός ότι η γραμμική συνέλιξη πολλών σημάτων υπολογίζεται ανεξάρτητα από τη σειρά με την οποία γίνεται η συνέλιξη των σημάτων.

Στο Σχήμα 2.12 παρουσιάζονται τα σήματα  $x_1(n) = n, n \in [1:5]$ ,  $x_2(n) = n + 2, n \in [-1:4]$  και  $x_3(n) = n + 4, n \in [-2:1]$ , καθώς και τα ίσα μεταξύ τους σήματα  $x_1(n) * x_2(n) * x_3(n)$  και  $[x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n)$ .



Σχήμα 2.12 Προσεταιριστική ιδιότητα γραμμικής συνέλιξης.

### Επιμεριστική ιδιότητα

Η **επιμεριστική ιδιότητα** της γραμμικής συνέλιξης είναι:

$$x_1(n) * (x_2(n) + x_3(n)) = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n) \quad (2.13)$$

### Απόδειξη.

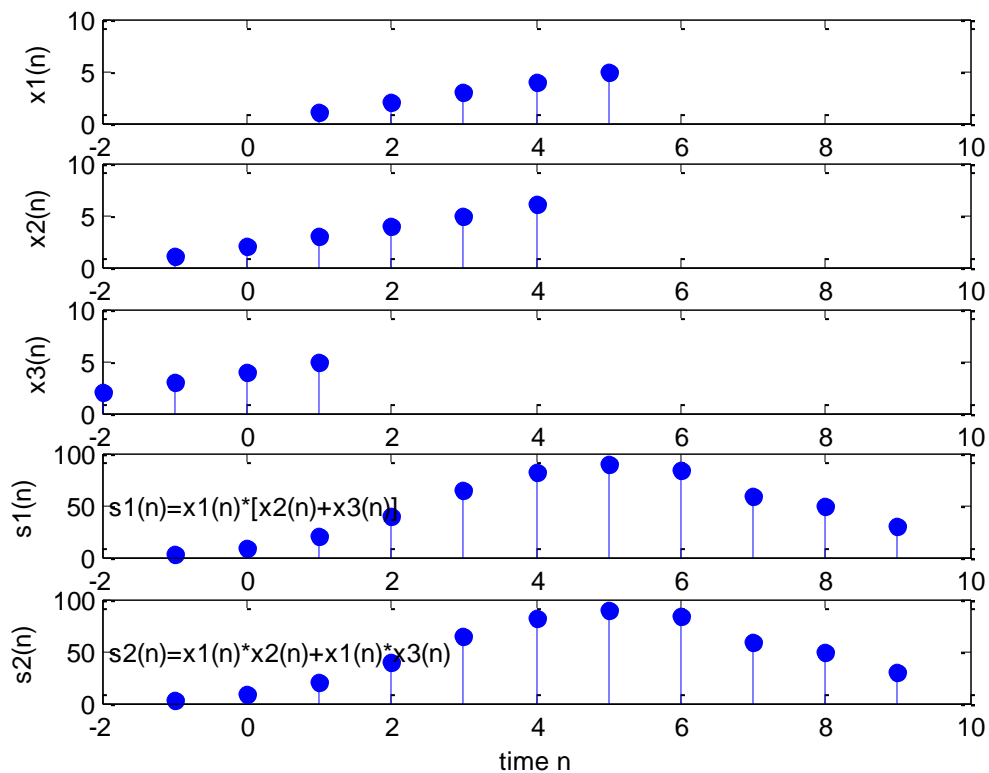
Από τον ορισμό της γραμμικής συνέλιξης και την επιμεριστική ιδιότητα που ισχύει στους πραγματικούς αριθμούς, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_3(n-k) = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot (x_2(n-k) + x_3(n-k)) = x_1(n) * (x_2(n) + x_3(n))
 \end{aligned}$$



Η προσεταιριστική ιδιότητα έχει μεγάλη σημασία στα Γραμμικά Συστήματα και ιδιαίτερα στα Συστήματα που συνδέονται παράλληλα, όπως θα εξηγηθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Στο Σχήμα 2.13 παρουσιάζονται τα σήματα  $x_1(n) = n, n \in [1:5]$ ,  $x_2(n) = n + 2, n \in [-1:4]$  και  $x_3(n) = n + 4, n \in [-2:1]$ , καθώς και τα ίσα μεταξύ τους σήματα  $x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)]$  και  $[x_1(n) * x_2(n)] + [x_1(n) * x_3(n)]$ .



Σχήμα 2.13 Επιμεριστική ιδιότητα γραμμικής συνέλιξης.

## 2.1.7. Συσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου

### 2.1.7.1. Ετεροσυσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου

Η **ετεροσυσχέτιση (crosscorrelation)** δύο πραγματικών σημάτων διακριτού χρόνου  $x(n)$  και  $y(n)$  ορίζεται ως ακολούθως:

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot y(n+k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot y(k-n) \tag{2.14}$$

Η ετεροσυσχέτιση σχετίζεται με τη γραμμική συνέλιξη:

$$r_{xy}(n) = x(n) * y(-n) \tag{2.15}$$

**Απόδειξη.**

$$x(n) * y(-n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot y(-(n-k)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot y(k-n) = r_{xy}(n) \quad \blacksquare$$

Είναι προφανές ότι η ετεροσυσχέτιση μπορεί να υπολογιστεί μέσω της γραμμικής συνέλιξης.

Όταν τα σήματα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε η ετεροσυσχέτιση είναι και αυτή ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας. Ο υπολογισμός της ετεροσυσχέτισης μπορεί να γίνει με χρήση των πράξεων της αναδίπλωσης και της μετατόπισης. Στην πραγματικότητα δεν απαιτείται η αναδίπλωση του μετατοπιζόμενου σήματος, γιατί πρέπει να αναδιπλωθεί δύο φορές, γεγονός που σημαίνει ότι επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση.

Αν το σήμα  $x(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[A_x : T_x]$  (όπου  $A_x$  και  $T_x$  είναι ακέραιοι αριθμοί) με μήκος  $L_x = T_x - A_x + 1$  και το σήμα  $y(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[A_y : T_y]$  (όπου  $A_y$  και  $T_y$  είναι ακέραιοι αριθμοί) με μήκος  $L_y = T_y - A_y + 1$ , τότε το σήμα  $y(-n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[-T_y : -A_y]$  με μήκος  $L_y$  και η ετεροσυσχέτιση  $r_{xy}(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[A_x - T_y : T_x - A_y]$ .

Παράδειγμα.

Δίνονται τα σήματα

$$x(n) = 4\delta(n+1) + 5\delta(n)$$

και

$$y(n) = \delta(n-2) + 2\delta(n-3) + 3\delta(n-4)$$

Το σήμα  $x(n)$  υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[-1:0]$  και το σήμα  $y(n)$  στον χρονικό διάστημα  $[2:4]$ . Τότε το σήμα  $y(-n)$  υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[-4:-2]$  και η ετεροσυσχέτιση  $r_{xy}(n)$  υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[-5:-2]$ .

Ο υπολογισμός της ετεροσυσχέτισης  $r_{xy}(n)$  φαίνεται παρακάτω:

$k$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
$x(k)$			4	5					
$y(k)$						1	2	3	
$y(5+k)$	1	2	3						$r_{xy}(-5) = 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 = 12$
$y(4+k)$		1	2	3					$r_{xy}(-4) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$
$y(3+k)$			1	2	3				$r_{xy}(-3) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 14$
$y(2+k)$				1	2	3			$r_{xy}(-2) = 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 5$

Υπολογισμός ετεροσυσχέτισης

Το σήμα  $x(n)$  υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[-1:0]$  και το σήμα  $y(n)$  στον χρονικό διάστημα  $[2:4]$ . Τότε το σήμα  $x(-n)$  υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[0:1]$  και η ετεροσυσχέτιση  $r_{yx}(n)$  υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[2:5]$ .

Ο υπολογισμός της ετεροσυσχέτισης  $r_{yx}(n)$  φαίνεται παρακάτω:

$k$	-1	0	1	2	3	4	5	
$x(k)$	4	5						
$y(k)$				1	2	3		
$x(k-2)$			4	5				$r_{yx}(2) = 5 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 5$
$x(k-3)$				4	5			$r_{yx}(3) = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 14$
$x(k-4)$					4	5		$r_{yx}(4) = 0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 23$
$x(k-5)$						4	5	$r_{yx}(5) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 12$

Υπολογισμός ετεροσυσχέτισης



Αξίζει να σημειωθεί ότι ισχύει:

$$r_{xy}(n) = r_{yx}(-n) \quad (2.16)$$

**Απόδειξη.**

$$r_{yx}(-n) = y(-n) * x(-(-n)) = y(-n) * x(n) = x(n) * y(-n) = r_{xy}(n) \quad \blacksquare$$

### 2.1.7.2. Αυτοσυσχέτιση σήματος διακριτού χρόνου

Η **αυτοσυσχέτιση (autocorrelation)** ενός πραγματικού σήματος διακριτού χρόνου ορίζεται ως ακολούθως:

$$r_x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot x(n+k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot x(k-n) \quad (2.17)$$

Η αυτοσυσχέτιση σχετίζεται με τη γραμμική συνέλιξη:

$$r_x(n) = x(n) * x(-n) \quad (2.18)$$

**Απόδειξη.**

$$x(n) * x(-n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot x(-(n-k)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot x(k-n) = r_x(n) \quad \blacksquare$$

Είναι προφανές ότι η αυτοσυσχέτιση μπορεί να υπολογιστεί μέσω της γραμμικής συνέλιξης.

Όταν ένα σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε η αυτοσυσχέτιση είναι και αυτή ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας. Ο υπολογισμός της αυτοσυσχέτισης μπορεί να γίνει με χρήση των πράξεων της αναδίπλωσης και της μετατόπισης. Στην πραγματικότητα δεν απαιτείται η αναδίπλωση του μετατοπιζόμενου σήματος, γιατί πρέπει να αναδιπλωθεί δύο φορές, γεγονός που σημαίνει ότι επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση.

Αν το σήμα  $x(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[A_x : T_x]$  με μήκος  $L_x = T_x - A_x + 1$ , τότε το σήμα  $x(-n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[-T_x : -A_x]$  με μήκος  $L_x$  και η αυτοσυσχέτιση  $r_x(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[A_x - T_x : T_x - A_x]$ .

Παράδειγμα.

Δίνεται το σήμα

$$x(n) = 2\delta(n+2) + 4\delta(n) + 5\delta(n-1)$$

Το σήμα  $x(n)$  υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[-2:1]$ . Τότε το σήμα  $x(-n)$  υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[-1:2]$  και η αυτοσυσχέτιση  $r_x(n)$  υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[-3:3]$ .

Ο υπολογισμός της αυτοσυσχέτισης  $r_x(n)$  φαίνεται παρακάτω:

$k$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
$x(k)$				2	0	4	5				
$x(k+3)$	2	0	4	5							$r_x(-3) = 5 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 = 10$
$x(k+2)$		2	0	4	5						$r_x(-2) = 4 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 = 8$
$x(k+1)$			2	0	4	5					$r_x(-1) = 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 4 + 0 \cdot 5 = 20$
$x(k)$				2	0	4	5				$r_x(0) = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 45$
$x(k-1)$					2	0	4	5			$r_x(1) = 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 20$
$x(k-2)$						2	0	4	5		$r_x(2) = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 5 = 8$
$x(k-3)$							2	0	4	5	$r_x(3) = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 10$

Υπολογισμός αυτοσυσχέτισης

Αξίζει να σημειωθεί ότι **η αυτοσυσχέτιση έχει άρτια συμμετρία:**

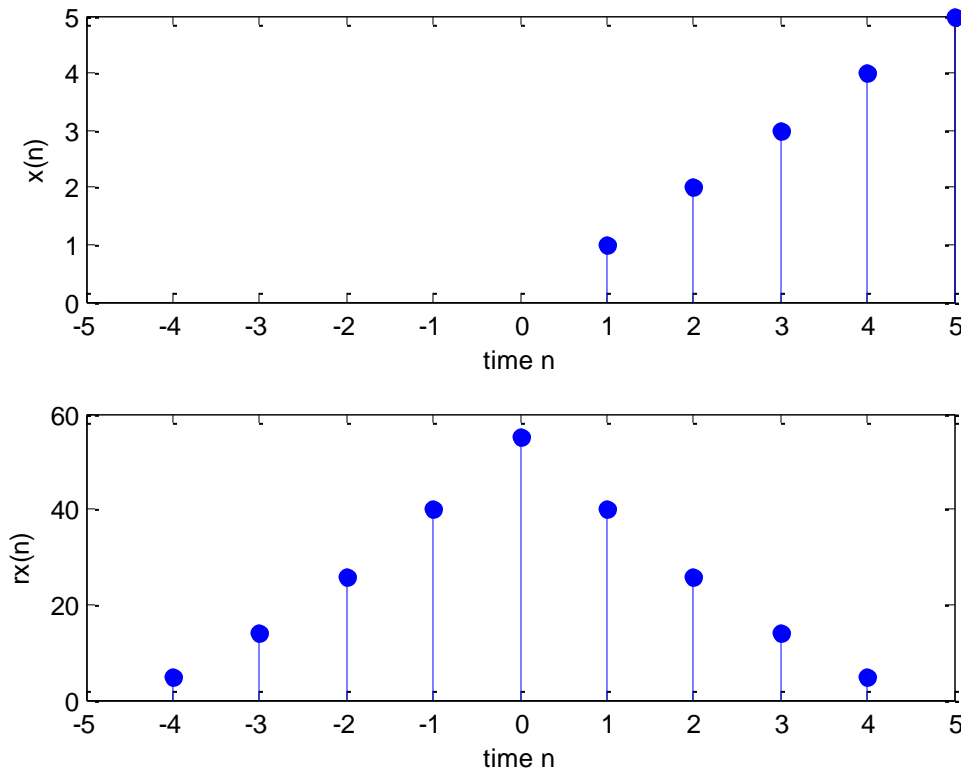
$$r_x(n) = r_x(-n) \quad (2.19)$$

**Απόδειξη.**

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.18) και την αντιμεταθετική ιδιότητα της γραμμικής συνέλιξης, μπορούμε να γράψουμε:

$$r_x(-n) = x(-n) * x(-(-n)) = x(-n) * x(n) = x(n) * x(-n) = r_x(n) \quad \blacksquare$$

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.14 παρουσιάζεται το σήμα  $x(n) = n, n \in [1:5]$  και η αυτοσυσχέτιση  $r_x(n)$ , όπου φαίνεται ότι είναι άρτιο σήμα.



Σχήμα 2.14 Αυτοσυσχέτιση.

Επίσης, αξίζει να σημειωθεί η αυτοσυσχέτιση ενός πραγματικού σήματος διακριτού χρόνου σχετίζεται με την ενέργεια του σήματος:

$$r_x(0) = E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n) \quad (2.20)$$

Τέλος, η αυτοσυσχέτιση ενός πραγματικού σήματος ισχύος διακριτού χρόνου ορίζεται ως ακολούθως:

$$\bar{r}_x(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} x(k) \cdot x(n+k) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} x(k) \cdot x(k-n) \right] \quad (2.21)$$

Τότε η αυτοσυσχέτιση σχετίζεται με την μέση ισχύ του πραγματικού σήματος:

$$\bar{r}_x(0) = P = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} x^2(n) \right] \quad (2.22)$$

### 2.1.8. Πράξεις σημάτων διακριτού χρόνου σε προγραμματιστικό περιβάλλον 1-0-3-0-0-0

Χρήσιμη βιβλιογραφία για Matlab είναι το βιβλίο The MathWorks Inc., 2005. Χρήσιμη ξενόγλωσση βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι τα βιβλία Ingle and Proakis, 2003 και Leis, 2011. Χρήσιμη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι τα βιβλία Ασημάκης, 2008 (για σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου) και Παρασκευάς, 2014 (για σήματα και συστήματα συνεχούς χρόνου). Χρήσιμη βιβλιογραφία για Octave είναι τα βιβλία Eaton, Bateman, Hauberg, Wehbring, 2011 και Hansen, 2011.

Η συνάρτηση `signaladd` παράγει το άθροισμα δύο σημάτων.

```
function [y,n]=signaladd(x1,n1,x2,n2)
% addition
```

```

% y(n)=x1(n)+x2(n)
n=min(min(n1),min(n2)):max(max(n1),max(n2));
y1=zeros(1,length(n));
y2=y1;
y1(find((n>=min(n1))&(n<=max(n1))==1))==x1;
y2(find((n>=min(n2))&(n<=max(n2))==1))==x2;
y=y1+y2;

```

Η συνάρτηση `signaladd` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $x_1, n_1$ , που είναι το πλάτος και ο χρόνος του πρώτου σήματος και τις παραμέτρους  $x_2, n_2$ , που είναι το πλάτος και ο χρόνος του δεύτερου σήματος. Η συνάρτηση έχει εξόδους τις παραμέτρους  $y$  και  $n$ , που είναι το πλάτος και ο χρόνος του αθροίσματος. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στη χρήση των παραμέτρων  $n_1, n_2$  και  $n$ , γιατί είναι διανύσματα. Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή του σήματος  $y(n) = x_1(n) + x_2(n)$  με  $x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1)$  και  $x_2(n) = 3\delta(n-1) + 4\delta(n-3)$  απαιτείται η κλήση `x1=[1 2]; n1=[0 1]; x2=[3 0 4], n2=[1 3]; [y,n]= signaladd (x1,n1,x2,n2).`

Η συνάρτηση `signalmult` παράγει το γινόμενο δύο σημάτων.

```

function [y,n]=signalmult(x1,n1,x2,n2)
% multiplication
% y(n)=x1(n)x2(n)
n=min(min(n1),min(n2)):max(max(n1),max(n2));
y1=zeros(1,length(n));
y2=y1;
y1(find((n>=min(n1))&(n<=max(n1))==1))==x1;
y2(find((n>=min(n2))&(n<=max(n2))==1))==x2;
y=y1.*y2;

```

Η συνάρτηση `signalmult` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $x_1, n_1$ , που είναι το πλάτος και ο χρόνος του πρώτου σήματος και τις παραμέτρους  $x_2, n_2$ , που είναι το πλάτος και ο χρόνος του δεύτερου σήματος. Η συνάρτηση έχει εξόδους τις παραμέτρους  $y$  και  $n$ , που είναι το πλάτος και ο χρόνος του γινομένου. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στη χρήση των παραμέτρων  $n_1, n_2$  και  $n$ , γιατί είναι διανύσματα. Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή του σήματος  $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$  με  $x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1)$  και  $x_2(n) = 3\delta(n-1) + 4\delta(n-3)$  απαιτείται η κλήση `x1=[1 2]; n1=[0 1]; x2=[3 0 4], n2=[1 3]; [y,n]= signalmult (x1,n1,x2,n2).`

Η συνάρτηση `signalshift` υλοποιεί τη μετατόπιση ή ολίσθηση σήματος.

```

function [y,n]=signalshift(x,m,n0)
% shift
% y(n)=x(n-n0)
n=m+n0;
y=x;

```

Η συνάρτηση `signalshift` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $x, m$  που είναι το πλάτος και ο χρόνος του σήματος και την παράμετρο  $n_0$ , που είναι ο χρόνος μετατόπισης. Η συνάρτηση έχει εξόδους τις παραμέτρους  $y$  και  $n$ , που είναι το πλάτος και ο χρόνος του μετατοπισμένου σήματος. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στη χρήση της παραμέτρου  $m$ , γιατί είναι διάνυσμα. Επίσης, ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στη χρήση της παραμέτρου  $n_0$ , γιατί αφορά στην κατεύθυνση της μετατόπισης: αν  $n_0 > 0$ , τότε η μετατόπιση γίνεται δεξιά και έχουμε καθυστέρηση, αν  $n_0 < 0$ , τότε η μετατόπιση γίνεται αριστερά και έχουμε πρωτοπορία, ενώ αν  $n_0 = 0$ , τότε το σήμα δεν μετατοπίζεται. Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή του σήματος  $y(n) = x(n-5)$  με  $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1)$  απαιτείται η κλήση `x=[1 2]; m=[0 1]; [y,n]= signalshift (x,m,5)`, ενώ για την παραγωγή του σήματος  $y(n) = x(n+4)$  με  $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1)$  απαιτείται η κλήση `x=[1 2]; m=[0 1]; [y,n]= signalshift (x,m,-4).`

Η συνάρτηση `signalfold` υλοποιεί την αναδίπλωση ή ανάκλαση σήματος.

```

function [y,n]=signalfold(x,n)

```

```

% fold
% y(n)=x(-n)
y=fliplr(x);
n=-fliplr(n);

```

Η συνάρτηση `signalfold` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $x, n$ , που είναι το πλάτος και ο χρόνος του σήματος. Η συνάρτηση έχει εξόδους τις παραμέτρους  $y$  και  $n$ , που είναι το πλάτος και ο χρόνος του αναδιπλωμένου σήματος. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στη χρήση της παραμέτρου  $n$ , γιατί είναι διάνυσμα και γιατί χρησιμοποιείται ως παράμετρος εισόδου για τον χρόνο του σήματος και ως παράμετρος εξόδου για τον χρόνο του αναδιπλωμένου σήματος. Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή του σήματος  $y(n) = x(-n)$  με  $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$  απαιτείται η κλήση `x=[1 2 3]; n=[0 1 2]; [y,n]=signalfold(x,n)`.

Η συνάρτηση `signalscaldiv` υλοποιεί τη διαίρεση συχνότητας σήματος.

```

function[y]=signalscaldiv(c,x)
% frequency division
% x(n) n=1:l
% y(n)=x(cn)
% c>1
nl=length(x);
m=floor(nl/c);
for i=1:m
    y(i)=x(i*c);
end;

```

Η διαίρεση συχνότητας ενός σήματος διακριτού χρόνου  $x(n)$  παράγει ένα νέο σήμα  $y(n) = x(c \cdot n)$ , όπου  $c \in \mathbb{N}$ . Η συνάρτηση `signalscaldiv` έχει εισόδους την παράμετρο  $x$ , που είναι το πλάτος του σήματος και την παράμετρο  $c$ , που αφορά στον τρόπο «συρρίκνωσης» του σήματος και που πρέπει να είναι θετικός ακέραιος αριθμός. Η συνάρτηση έχει έξοδο την παράμετρο  $y$  που είναι το πλάτος του σήματος που προκύπτει από τη διαίρεση συχνότητας. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στη χρήση της συνάρτησης, γιατί η αφορά σε σήματα πεπερασμένης διάρκειας που αρχίζουν τη χρονική στιγμή  $n=1$ . Αυτός είναι ο λόγος που η συνάρτηση δεν ασχολείται με τον χρόνο του σήματος. Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή του σήματος  $y(n) = x(2 \cdot n)$  με  $x(n) = n, n \in [1:10]$  απαιτείται η κλήση `x=[1:10]; [y]=signalscaldiv(2,x)`.

Η συνάρτηση `signalscaltmul` υλοποιεί τον πολλαπλασιασμό συχνότητας σήματος.

```

function[y]=signalscaltmul(c,x)
% frequency multiplication
% x(n) n=1:l
% y(n)=x(n/c)
% c>1
nl=length(x);
m=nl*c;
for i=1:m
    y(i)=0;
if mod(i,c)==0
    y(i)=x(i/c);
end;
end;

```

Ο πολλαπλασιασμός συχνότητας ενός σήματος διακριτού χρόνου  $x(n)$  παράγει ένα νέο σήμα  $y(n) = x\left(\frac{n}{c}\right)$ ,

όπου  $c \in \mathbb{N}$ . Η συνάρτηση `signalscaltmul` έχει εισόδους την παράμετρο  $x$ , που είναι το πλάτος του σήματος και την  $H$  συνάρτηση `signalscaltmul` έχει εισόδους την παράμετρο  $x$ , που είναι το πλάτος του σήματος και την παράμετρο  $c$ , που αφορά στον τρόπο «απλώματος» του σήματος και που πρέπει να είναι θετικός ακέραιος αριθμός. Η συνάρτηση έχει έξοδο την παράμετρο  $y$ , που είναι το πλάτος του σήματος που

προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό συχνότητας. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στη χρήση της συνάρτησης γιατί η αφορά σε σήματα πεπερασμένης διάρκειας που αρχίζουν τη χρονική στιγμή  $n=1$ . Αυτός είναι ο λόγος που η συνάρτηση δεικνύεται με τον χρόνο του σήματος. Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή του

σήματος  $y(n) = x\left(\frac{n}{2}\right)$  με  $x(n) = n, n \in [1,10]$  απαιτείται η κλήση  $x = [1:10];$   
 $[y] = \text{signalscalsmul}(2, x).$

Η συνάρτηση `signalconv` υλοποιεί τη γραμμική συνέλιξη δύο σημάτων.

```
function [x, nx] = signalconv(x1, nx1, x2, nx2)
% linear convolution
% x(n) = x1(n) * x2(n)
nyb = nx1(1) + nx2(1);
nye = nx1(length(x1)) + nx2(length(x2));
nx = [nyb:nye];
x = conv(x1, x2);
```

Η συνάρτηση `signalconv` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $x_1, nx_1$ , που είναι το πλάτος και ο χρόνος του πρώτου σήματος και τις παραμέτρους  $x_2, nx_2$ , που είναι το πλάτος και ο χρόνος του δεύτερου σήματος. Η συνάρτηση έχει εξόδους τις παραμέτρους  $x$  και  $nx$ , που είναι το πλάτος και ο χρόνος του σήματος της γραμμικής συνέλιξης των δύο σημάτων. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στη χρήση των παραμέτρων  $nx_1$  και  $nx_2$  γιατί είναι διανύσματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνάρτηση χρησιμοποιεί τη συνάρτηση `conv`, η οποία χρησιμοποιείται για πολλαπλασιασμό πολυωνύμων και υπολογίζει το πλάτος της γραμμικής συνέλιξης, χωρίς να υπολογίζει τον χρόνο ύπαρξής της. Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή του σήματος  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$  με  $x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1)$  και  $x_2(n) = 3\delta(n-1) + 4\delta(n-3)$  απαιτείται η κλήση  $x_1 = [1 2]; nx_1 = [0 1]; x_2 = [3 0 4], nx_2 = [1 3]; [x, nx] = \text{signalconv}(x_1, nx_1, x_2, nx_2).$  Να μελετήσετε τη συνάρτηση `conv`.

## 2.2. Πράξεις σημάτων συνεχούς χρόνου

1-2-0-0-5-6

### 2.2.1. Ταξινόμηση πράξεων σημάτων συνεχούς χρόνου

Οι πράξεις σημάτων συνεχούς χρόνου διακρίνονται σε πράξεις μετασχηματισμού πλάτους και σε πράξεις μετασχηματισμού χρόνου.

Οι πράξεις μετασχηματισμού πλάτους, όπου μεταβάλλεται το πλάτος των σημάτων είναι:

- Πρόσθεση
- Πολλαπλασιασμός
- Κλιμάκωση στο πλάτος

Οι πράξεις μετασχηματισμού χρόνου, όπου δεν μεταβάλλεται το πλάτος των σημάτων, αλλά η χρονική διάρκειά τους είναι:

- Μετατόπιση ή ολίσθηση
- Αναδίπλωση ή ανάκλαση
- Κλιμάκωση στον χρόνο

Τέλος, μία ιδιαίτερη πράξη των σημάτων διακριτού χρόνου είναι η συνέλιξη, όπου μεταβάλλεται τόσο το πλάτος, όσο και ο χρόνος.

### 2.2.2. Πράξεις μετασχηματισμού πλάτους

#### 2.2.2.1. Πρόσθεση σημάτων

Η **πρόσθεση** δύο σημάτων συνεχούς χρόνου  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  παράγει ένα νέο σήμα  $x(t)$  με πλάτος το άθροισμα των πλάτων των σημάτων, που προστίθενται:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (2.23)$$

Όταν τα σήματα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε το άθροισμά τους είναι και αυτό ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας. Το άθροισμα υπάρχει στην ένωση των διαστημάτων χρόνου των σημάτων που αθροίζονται. Αν τα διαστήματα του χρόνου των σημάτων που αθροίζονται είναι ξένα μεταξύ τους, τότε το άθροισμα στο διάστημα του χρόνου ανάμεσα σε αυτά τα διαστήματα χρόνου είναι μηδέν.

### 2.2.2.2. Πολλαπλασιασμός σημάτων

Ο **πολλαπλασιασμός** δύο σημάτων συνεχούς χρόνου  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  παράγει ένα νέο σήμα  $x(t)$  με πλάτος το γινόμενο των πλατών των σημάτων, που πολλαπλασιάζονται:

$$x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \quad (2.24)$$

Όταν τα σήματα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε το γινόμενό τους είναι και αυτό ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας. Το γινόμενο υπάρχει στην τομή των διαστημάτων χρόνου των σημάτων που πολλαπλασιάζονται. Αν τα διαστήματα του χρόνου των σημάτων που πολλαπλασιάζονται είναι ξένα μεταξύ τους, τότε το γινόμενο είναι μηδέν.

### 2.2.2.3. Κλιμάκωση στο πλάτος

Η **κλιμάκωση στο πλάτος** ενός σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t)$  παράγει ένα νέο σήμα  $y(t)$  με πλάτος το πλάτος του σήματος  $x(t)$  πολλαπλασιασμένο επί έναν πραγματικό συντελεστή  $c \in \mathbb{R}$ :

$$y(t) = c \cdot x(t) \quad (2.25)$$

Όταν το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε η κλιμάκωση στο πλάτος του σήματος είναι και αυτό ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας και μάλιστα έχει την ίδια διάρκεια με το αρχικό σήμα.

## 2.2.3. Πράξεις μετασχηματισμού χρόνου

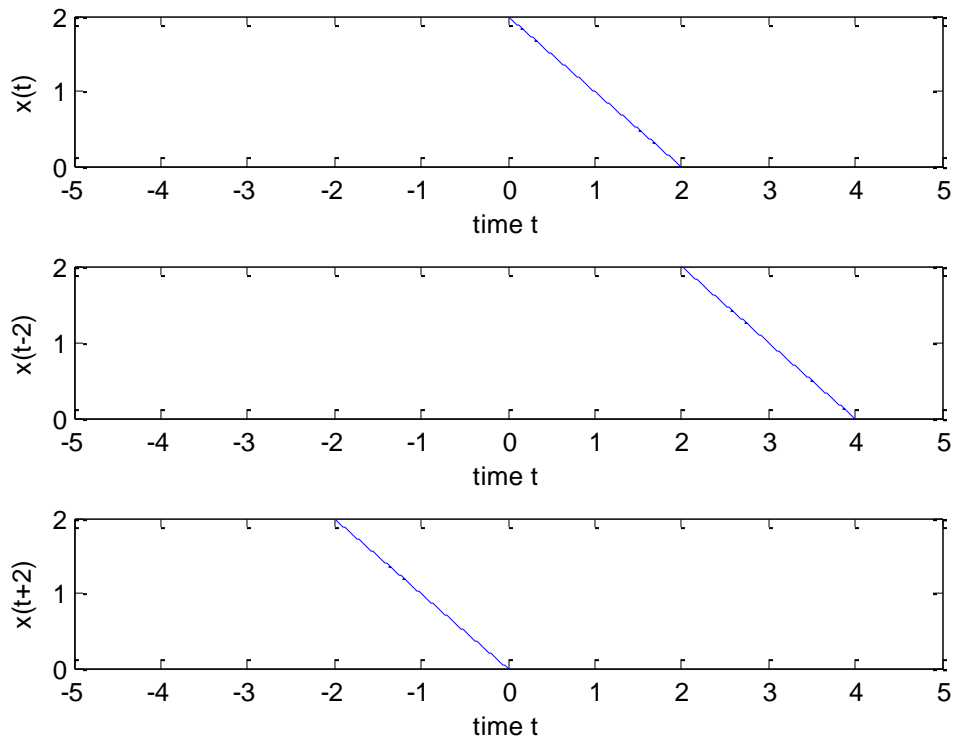
### 2.2.3.1. Μετατόπιση ή ολίσθηση

Η **μετατόπιση** ή **ολίσθηση** ενός σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t)$  παράγει ένα νέο σήμα

$$y(t) = x(t - t_0) \quad (2.26)$$

με πλάτος το πλάτος του σήματος  $x(t)$  μετατοπισμένο δεξιά ή αριστερά κατά  $t_0$ .

Στο Σχήμα 2.15 παρουσιάζεται το σήμα  $x(t) = 2 - t, t \in [0, 2]$  και οι μετατοπίσεις  $x(t - 2)$  και  $x(t + 2)$ .



Σχήμα 2.15 Μετατόπιση ή ολίσθηση.

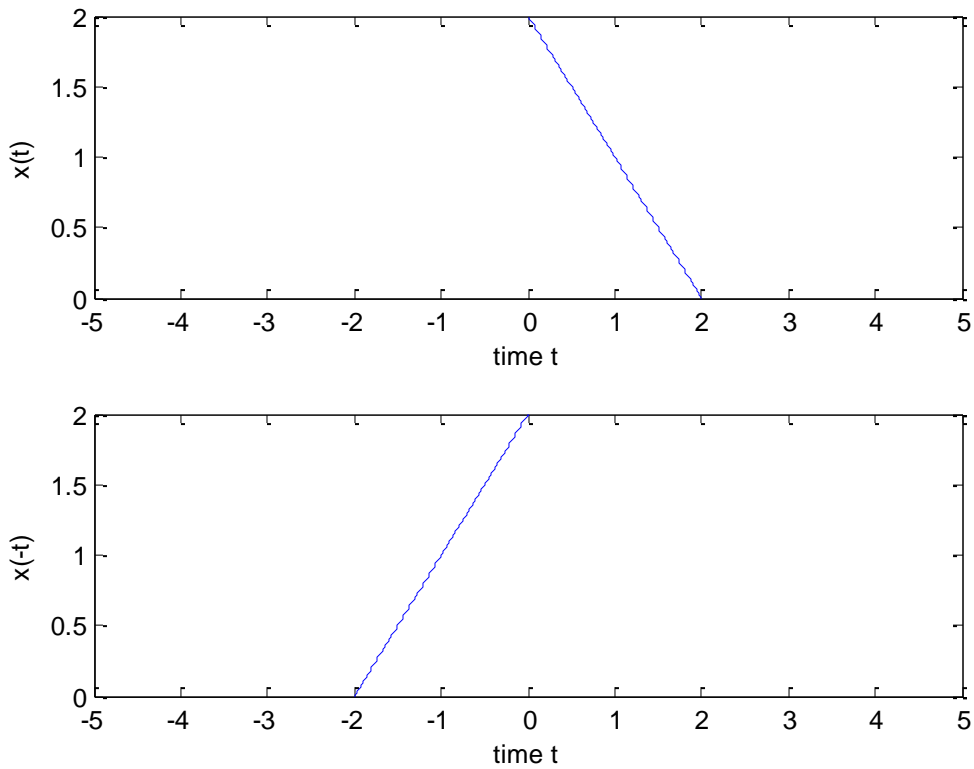
### 2.2.3.2. Αναδίπλωση ή Ανάκλαση

Η **αναδίπλωση** ή **ανάκλαση** ενός σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t)$  παράγει το συμμετρικό σήμα του σήματος  $x(t)$  ως προς τον άξονα των τεταγμένων

$$y(t) = x(-t) \tag{2.27}$$

Η πράξη της αναδίπλωσης έχει ως αποτέλεσμα την εναλλαγή μεταξύ «μέλλοντος» και «παραελθόντος» του σήματος, δηλαδή παρατηρείται το φαινόμενο του «καθρεπτισμού» ως προς τον άξονα των τεταγμένων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , αν υπάρχει, παραμένει η ίδια.

Στο Σχήμα 2.16 παρουσιάζεται το σήμα  $x(t) = 2 - t, t \in [0, 2]$  και η αναδίπλωση  $x(-t)$ .



Σχήμα 2.16 Αναδίπλωση ή ανάκλαση.

### 2.2.3.3. Κλιμάκωση στον χρόνο

Η **κλιμάκωση στον χρόνο** ενός σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t)$  παράγει ένα νέο σήμα

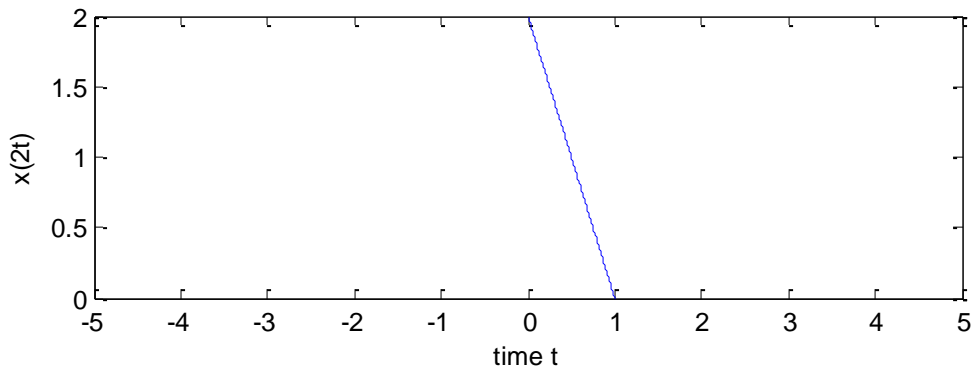
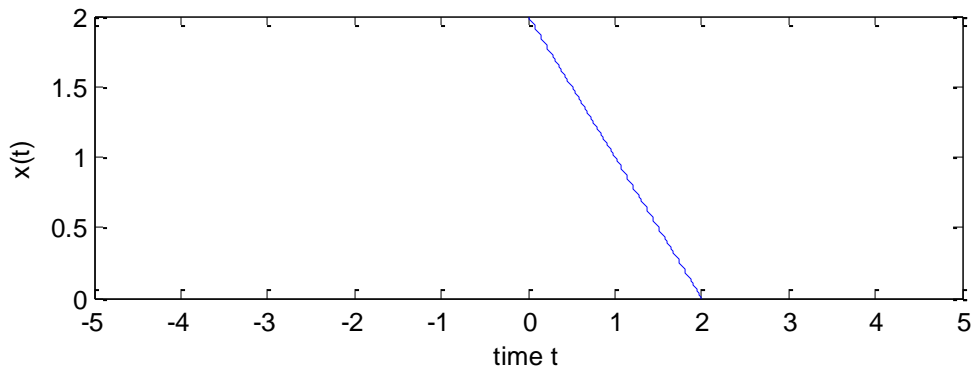
$$y(t) = x(c \cdot t) \quad (2.28)$$

όπου  $c$  είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

Αν  $c > 1$ , τότε το σήμα  $x(t)$  «συρρικνώνεται» ή «συστέλλεται», ενώ αν  $0 < c < 1$ , τότε το σήμα  $x(t)$  «απλώνεται» ή «διαστέλλεται».

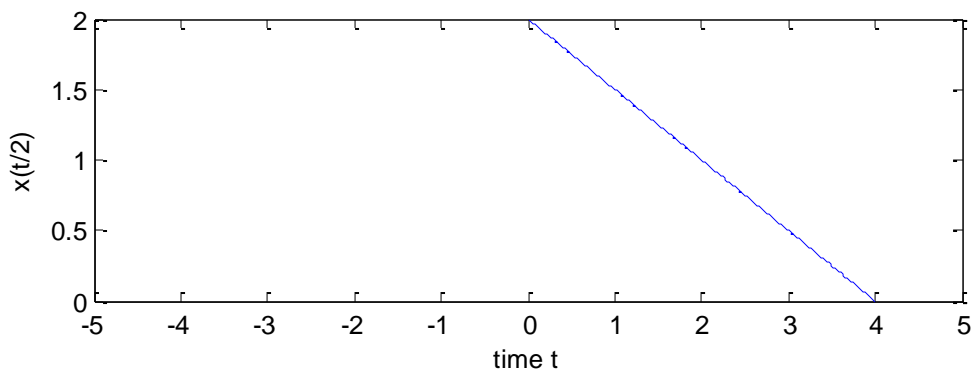
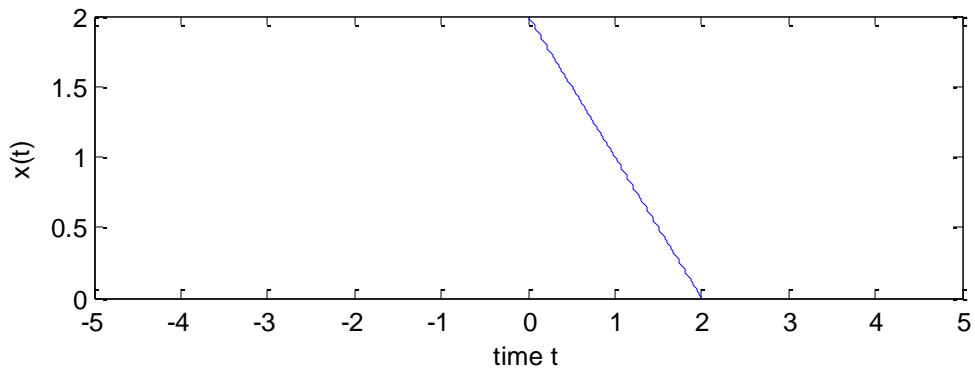
Στο Σχήμα 2.17 φαίνεται η συστολή  $y(t) = x(2 \cdot t)$  του σήματος  $x(t) = 2 - t, t \in [0, 2]$ .





**Σχήμα 2.17**Κλιμάκωση στον χρόνο: συστολή.

Στο Σχήμα 2.18 φαίνεται η διαστολή  $y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$  του σήματος  $x(t) = 2 - t, t \in [0, 2]$ .



**Σχήμα 2.18**Κλιμάκωση στον χρόνο: διαστολή.

## 2.2.4. Ανάλυση σημάτων συνεχούς χρόνου

Στο σημείο αυτό δίνεται ο τύπος της ανάλυσης σημάτων συνεχούς χρόνου, που είναι πολύ σημαντικός στην Επεξεργασία Σημάτων:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \cdot \Delta \quad (2.29)$$

Ο τύπος αποτελεί προσέγγιση του σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t)$  με το κλιμακωτό σήμα  $\tilde{x}(t)$ .

Όταν  $\Delta \rightarrow 0$ , τότε

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \tilde{x}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \cdot \Delta$$

και

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \quad (2.30)$$

Ο τύπος περιγράφει ένα σήμα συναρτήσεως της συνάρτησης δέλτα.

## 2.2.5. Συνέλιξη σημάτων συνεχούς χρόνου

### 2.2.5.1. Ορισμός συνέλιξης

Η **συνέλιξη (convolution)** δύο σημάτων συνεχούς χρόνου  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  ορίζεται ως ακολούθως:

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau \quad (2.31)$$

### 2.2.5.2. Υπολογισμός συνέλιξης

Η διαδικασία του υπολογισμού της συνέλιξης γίνεται σε τέσσερα βήματα:

1. Αναδίπλωση του σήματος  $x_2(t)$
2. Μετατόπιση του αναδιπλωμένου σήματος
3. Πολλαπλασιασμός του «αμετακίνητου» σήματος  $x_1(t)$  με το μετατοπισμένο σήμα
4. Ολοκλήρωση του γινομένου (υπολογισμός του εμβαδού που δημιουργείται από την γραφική παράσταση του γινομένου και του άξονα του χρόνου).

Παράδειγμα.

Δίνονται τα σήματα συνεχούς χρόνου  $x_1(t) = 2, t \in [0, 4]$  και  $x_2(t) = 2 - t, t \in [0, 2]$ .

Να υπολογίσετε την συνέλιξη  $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$ .

Για  $t < 0$  έχουμε  $x(t) = x_1(t) * x_2(t) = 0$ .

Για  $0 \leq t < 2$  έχουμε

$$\begin{aligned} x(t) = x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t 2 \cdot (2 - (t - \tau)) d\tau = 2 \cdot \int_0^t (2 - t + \tau) d\tau \\ &= 2 \cdot [(2 - t) \cdot \tau]_0^t + 2 \cdot \left[ \frac{\tau^2}{2} \right]_0^t = 2 \cdot (2 - t) \cdot t + 2 \cdot \frac{t^2}{2} = 4 \cdot t - t^2 \end{aligned}$$

Για  $2 \leq t < 4$  έχουμε

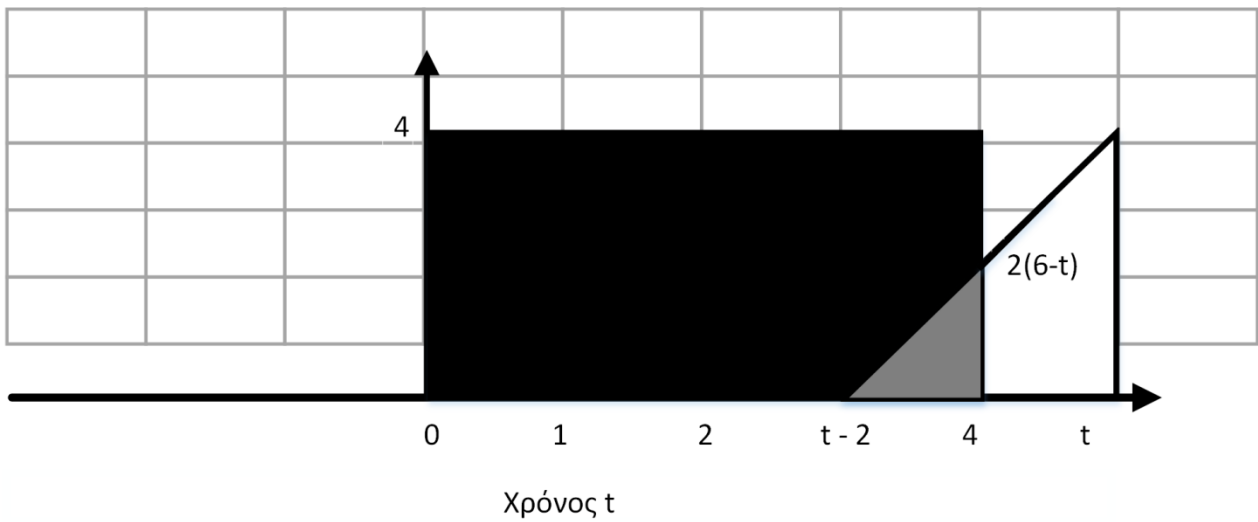
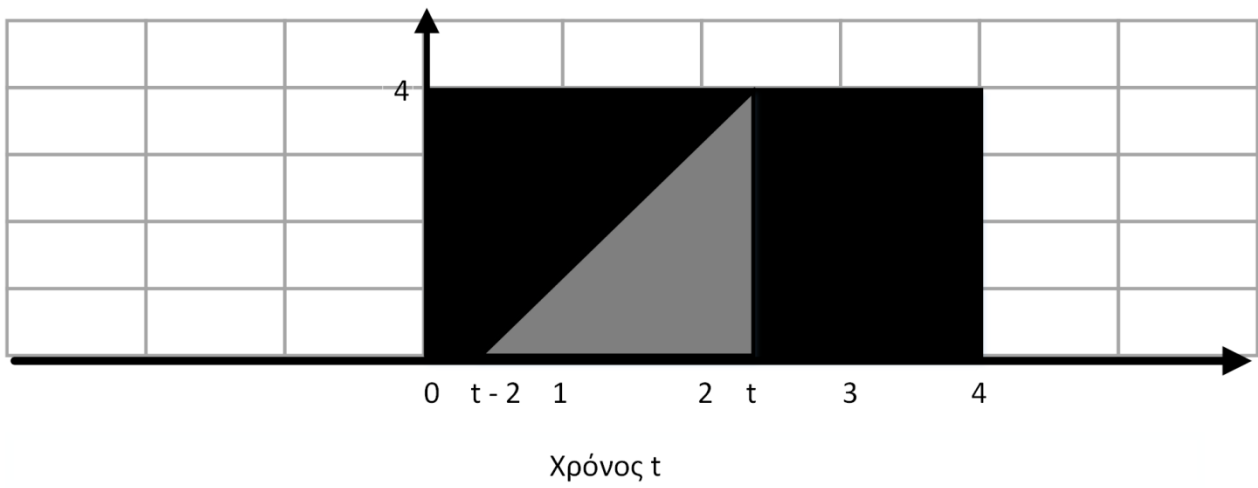
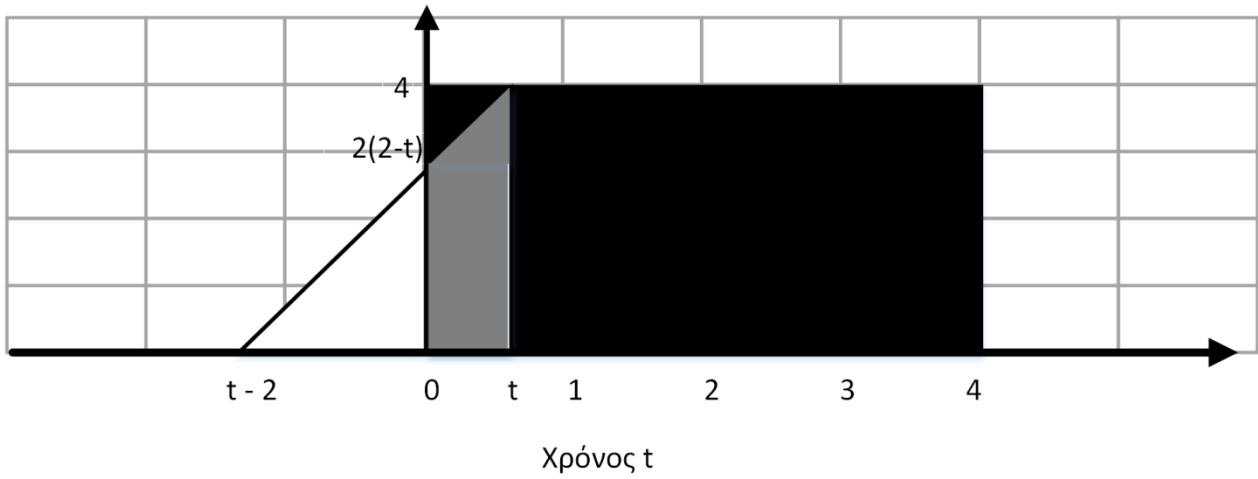
$$\begin{aligned}
x(t) = x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) d\tau = \int_{t-2}^t 2 \cdot (2-(t-\tau)) d\tau = 2 \cdot \int_{t-2}^t (2-t+\tau) d\tau \\
&= 2 \cdot [(2-t) \cdot \tau]_{t-2}^t + 2 \cdot \left[ \frac{\tau^2}{2} \right]_{t-2}^t = 2 \cdot [(2-t) \cdot t - (2-t) \cdot (t-2)] + 2 \cdot \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{(t-2)^2}{2} \right] \\
&= 2 \cdot [(2-t) \cdot t - (2-t) \cdot t + (2-t) \cdot 2] + 2 \cdot \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{t^2 - 4 \cdot t + 4}{2} \right] \\
&= 2 \cdot (2-t) \cdot 2 + 2 \cdot \left[ \frac{4 \cdot t - 4}{2} \right] = 8 - 4 \cdot t + 4 \cdot t - 4 = 4
\end{aligned}$$

Για  $4 \leq t < 6$  έχουμε

$$\begin{aligned}
x(t) = x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) d\tau = \int_{t-2}^4 2 \cdot (2-(t-\tau)) d\tau = 2 \cdot \int_{t-2}^4 (2-t+\tau) d\tau \\
&= 2 \cdot [(2-t) \cdot \tau]_{t-2}^4 + 2 \cdot \left[ \frac{\tau^2}{2} \right]_{t-2}^4 = 2 \cdot [(2-t) \cdot 4 - (2-t) \cdot (t-2)] + 2 \cdot \left[ \frac{4^2}{2} - \frac{(t-2)^2}{2} \right] \\
&= 2 \cdot [(2-t) \cdot 4 - (2-t) \cdot t + (2-t) \cdot 2] + 2 \cdot \left[ \frac{4^2}{2} - \frac{t^2 - 4 \cdot t + 4}{2} \right] \\
&= 2 \cdot [(2-t) \cdot 6 - (2-t) \cdot t] + 2 \cdot \left[ \frac{16}{2} - \frac{t^2 - 4 \cdot t + 4}{2} \right] = 2 \cdot [(2-t) \cdot (6-t)] + 2 \cdot \left[ \frac{-t^2 + 4 \cdot t + 12}{2} \right] \\
&= 2 \cdot t^2 - 16 \cdot t + 24 - t^2 + 4 \cdot t + 12 = t^2 - 12 \cdot t + 36
\end{aligned}$$

Για  $t \geq 6$  έχουμε  $x(t) = x_1(t) * x_2(t) = 0$ .

Στο Σχήμα 2.19 φαίνεται ο υπολογισμός της συνέλιξης με τα εμβαδά που δημιουργούνται από την γραφική παράσταση του γινομένου και του άξονα του χρόνου).



Σχήμα 2.19 Υπολογισμός συνέλιξης σημάτων συνεχούς χρόνου με εμβαδά.

Τα εμβαδά είναι:

Για  $0 \leq t < 2$

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (4 + 2 \cdot (2 - t)) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (4 + 4 - 2 \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (8 - 2 \cdot t) = 4t - t^2$$

Για  $2 \leq t < 4$

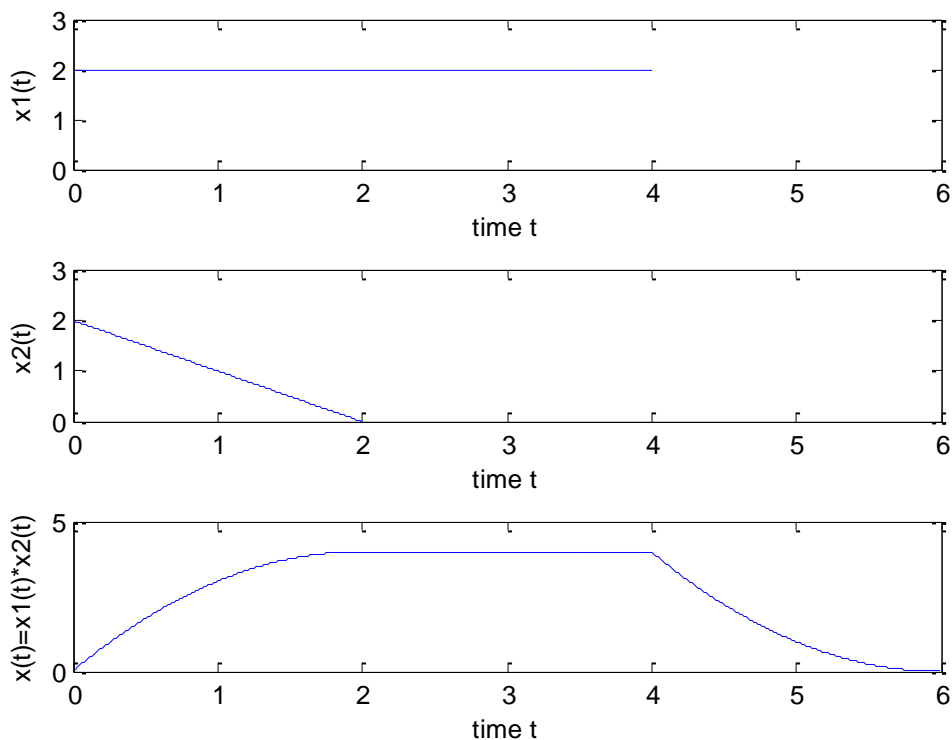
$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (t - (t - 2)) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (t - t + 2) = 4$$

Για  $4 \leq t < 6$  έχουμε

$$E_3 = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot (6 - t)) \cdot (4 - (t - 2)) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (6 - t) \cdot (6 - t) = t^2 - 12 \cdot t + 36$$

και βέβαια υπάρχει απόλυτη συμφωνία με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της συνέλιξης.

Στο Σχήμα 2.20 παρουσιάζονται τα σήματα συνεχούς χρόνου  $x_1(t) = 2, t \in [0, 4]$  και  $x_2(t) = 2 - t, t \in [0, 2]$  και η συνέλιξη  $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$ .



**Σχήμα 2.20** Συνέλιξη σημάτων συνεχούς χρόνου.

### 2.2.5.3. Ιδιότητες συνέλιξης

#### Ταυτοτικό στοιχείο

**Ταυτοτικό στοιχείο** της συνέλιξης είναι το σήμα μοναδιαίου παλμού  $\delta(t)$  :

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \tag{2.32}$$

#### Απόδειξη.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέλιξης και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 4 (1.52), εφόσον το σήμα  $x(t)$  είναι συνεχές στο  $t$ , έχουμε:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(-(\tau - t)) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(\tau - t) d\tau = x(t) \blacksquare$$

### Αντιμεταθετική ιδιότητα

Η **αντιμεταθετική ιδιότητα** της συνέλιξης είναι:

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t) \quad (2.33)$$

#### Απόδειξη.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέλιξης, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής μέσω της αντικατάστασης  $\lambda = t - \tau$  και από τη γνωστή ιδιότητα των ολοκληρωμάτων

$$\int_a^b f(t) d\tau = - \int_b^a f(t) dt, \text{ έχουμε:}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t - \tau) \cdot x_1(\tau) d\tau \\ &= - \int_{+\infty}^{-\infty} x_2(\lambda) \cdot x_1(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\lambda) \cdot x_1(t - \lambda) d\lambda = x_2(t) * x_1(t) \end{aligned}$$



### Προσεταιριστική ιδιότητα

Η **προσεταιριστική ιδιότητα** της συνέλιξης είναι:

$$x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t)) = (x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t) \quad (2.34)$$

#### Απόδειξη.

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.



### Επιμεριστική ιδιότητα

Η **επιμεριστική ιδιότητα** της συνέλιξης είναι:

$$x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t) \quad (2.35)$$

#### Απόδειξη.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέλιξης και την ιδιότητα των ολοκληρωμάτων

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) + g(t)) dt, \text{ έχουμε:}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_3(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) + x_1(\tau) \cdot x_3(t - \tau)) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot (x_2(t - \tau) + x_3(t - \tau)) d\tau = x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) \end{aligned}$$



## 2.2.6. Συσχέτιση σημάτων συνεχούς χρόνου

### 2.2.6.1. Ετεροσυσχέτιση σημάτων συνεχούς χρόνου

Η **ετεροσυσχέτιση (crosscorrelation)** δύο πραγματικών σημάτων  $x(t)$  και  $y(t)$  συνεχούς χρόνου ορίζεται ως ακολούθως:

$$r_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau + t) \cdot y(\tau) d\tau \quad (2.36)$$

Η ετεροσυσχέτιση σχετίζεται με τη συνέλιξη:

$$r_{xy}(t) = x(t) * y(-t) \quad (2.37)$$

**Απόδειξη.**

$$x(t) * y(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(-(t-\tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(\tau-t) d\tau = r_{xy}(t) \quad \blacksquare$$

Είναι προφανές ότι η ετεροσυσχέτιση μπορεί να υπολογιστεί μέσω της γραμμικής συνέλιξης.

Ο υπολογισμός της ετεροσυσχέτισης μπορεί να γίνει με χρήση των πράξεων της αναδίπλωσης και της μετατόπισης. Στην πραγματικότητα δεν απαιτείται η αναδίπλωση του μετατοπιζόμενου σήματος, γιατί πρέπει να αναδιπλωθεί δύο φορές, γεγονός που σημαίνει ότι επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ισχύει:

$$r_{xy}(t) = r_{yx}(-t) \quad (2.38)$$

**Απόδειξη.**

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.37) που συνδέει την ετεροσυσχέτιση με τη συνέλιξη και την αντιμεταθετική ιδιότητα της συνέλιξης (2.33), μπορούμε να γράψουμε:

$$r_{yx}(-t) = y(-t) * x(-(-t)) = y(-t) * x(t) = x(-t) * y(-t) = r_{xy}(t) \quad \blacksquare$$

### 2.2.6.2. Αυτοσυσχέτιση σήματος συνεχούς χρόνου

Η **αυτοσυσχέτιση (autocorrelation)** ενός πραγματικού σήματος συνεχούς χρόνου ορίζεται ως ακολούθως:

$$r_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot x(\tau-t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau+t) \cdot x(\tau) d\tau \quad (2.39)$$

Η αυτοσυσχέτιση σχετίζεται με τη συνέλιξη:

$$r_x(t) = x(t) * x(-t) \quad (2.40)$$

**Απόδειξη.**

$$x(t) * x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot x(-(t-\tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot x(\tau-t) d\tau = r_x(t) \quad \blacksquare$$

Είναι προφανές ότι η αυτοσυσχέτιση μπορεί να υπολογιστεί μέσω της γραμμικής συνέλιξης.

Ο υπολογισμός της αυτοσυσχέτισης μπορεί να γίνει με χρήση των πράξεων της αναδίπλωσης και της μετατόπισης. Στην πραγματικότητα δεν απαιτείται η αναδίπλωση του μετατοπιζόμενου σήματος, γιατί πρέπει να αναδιπλωθεί δύο φορές, γεγονός που σημαίνει ότι επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η **αυτοσυσχέτιση έχει άρτια συμμετρία**:

$$r_x(t) = r_x(-t) \quad (2.41)$$

**Απόδειξη.**

Χρησιμοποιώντας τη (2.39) έχουμε:

$$r_x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot x(\tau-(-t)) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot x(\tau+t) d\tau = r_x(t) \quad \blacksquare$$

Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι η αυτοσυσχέτιση ενός πραγματικού σήματος συνεχούς χρόνου σχετίζεται με την ενέργεια του σήματος:

$$r_x(0) = E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \quad (2.42)$$

Τέλος, η **αυτοσυσχέτιση** ενός πραγματικού **σήματος ισχύος** συνεχούς χρόνου ορίζεται ως ακολούθως:

$$\bar{r}_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{+T} x(\tau) \cdot x(\tau-t) d\tau \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{+T} x(\tau+t) \cdot x(\tau) d\tau \right] \quad (2.43)$$

Τότε η αυτοσυσχέτιση σχετίζεται με την μέση ισχύ του σήματος:

$$\bar{r}_x(0) = P = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt \right] \quad (2.44)$$

### 2.3. Λυμένες ασκήσεις

#### Πράξεις σημάτων διακριτού χρόνου

##### 1-2-3-4-0-0

1. Να βρείτε τη συνθήκη (που αφορά στον χρόνο) που πρέπει να ικανοποιείται, ώστε ένα σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)$  να έχει το ίδιο πεδίο ορισμού με το σήμα  $x(-n)$ .

Λύση.

Αν το αρχικό σήμα  $x(n)$  έχει πεδίο ορισμού το διάστημα  $[n_1 : n_2]$ , τότε το σήμα  $x(-n)$  έχει πεδίο ορισμού το διάστημα  $[-n_2 : -n_1]$ . Για να έχουν τα δύο σήματα το ίδιο πεδίο ορισμού πρέπει να ισχύει  $n_1 = -n_2$  ή  $n_1 + n_2 = 0$ , το οποίο σημαίνει ότι το 0 είναι το κέντρο συμμετρίας του διαστήματος  $[n_1 : n_2]$ .

2. Δίνονται τα σήματα διακριτού χρόνου

$$x_1(n) = 5\delta(n-1) + 10\delta(n-2)$$

$$x_2(n) = 4\delta(n) - \delta(n-1)$$

Να υπολογίσετε τις πράξεις

α.  $x_1(-n) + 3 \cdot x_2(n-3)$

β.  $3 \cdot x_1\left(\frac{n}{2}\right) + x_2(2 \cdot n - 1)$

Λύση.

α.  $x_1(-n) + 3 \cdot x_2(n-3)$

$n$	-2	-1	0	1	2	3	4
$x_1(n)$				5	10		
$x_2(n)$			4	-1			
$x_1(-n)$	10	5					
$x_2(n-3)$						4	-1
$3 \cdot x_2(n-3)$						12	-3
$x_1(-n) + 3 \cdot x_2(n-3)$	10	5	0	0	0	12	-3

β.  $3 \cdot x_1\left(\frac{n}{2}\right) + x_2(2 \cdot n - 1)$

$n$	-2	-1	0	1	2	3	4				
$x_1(n)$				5	10						
$x_2(n)$			4	-1							
$x_1\left(\frac{n}{2}\right)$				0	5	0	10				
$3 \cdot x_1\left(\frac{n}{2}\right)$				0	15	0	30				
$x_2(n-1)$				4	-1						
$x_2(2 \cdot n - 1)$				-1							
$3 \cdot x_1\left(\frac{n}{2}\right) + x_2(2 \cdot n - 1)$				-1	15	0	30				

3. Δίνονται τα σήματα διακριτού χρόνου



$$x_1(n) = \delta(n+2) + 2\delta(n+1) + 3\delta(n-1)$$

$$x_2(n) = \delta(n) + 6\delta(n-1)$$

Να υπολογίσετε τη γραμμική συνέλιξη  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ .

Λύση.

Το σήμα  $x_1(n)$  υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[-2:1]$  και το σήμα  $x_2(n)$  στον χρονικό διάστημα  $[0:1]$ . Τότε η γραμμική συνέλιξη υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[-2:2]$ .

Ο υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης φαίνεται παρακάτω:

$k$	-3	-2	-1	0	1	2	
$x_1(k)$		1	2	0	3		
$x_2(k)$				1	6		
$x_2(-k)$			6	1			
$x_2(1-k)$	6	1					$x(-2) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 1$
$x_2(2-k)$		6	1				$x(-1) = 6 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 8$
$x_2(3-k)$			6	1			$x(0) = 0 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 12$
$x_2(4-k)$				6	1		$x(1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 3$
$x_2(5-k)$					6	1	$x(2) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 6 \cdot 3 = 18$

4. Δίνονται τα σήματα διακριτού χρόνου

$$x(n) = 2\delta(n) + 4\delta(n-1) + 6\delta(n-2)$$

$$y(n) = \delta(n) + 3\delta(n-1)$$

Να υπολογίσετε την ετεροσυσχέτιση  $r_{xy}(n)$ .

Λύση.

Το σήμα  $x_1(n)$  υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[0:2]$  και το σήμα  $x_2(n)$  στον χρονικό διάστημα  $[0:1]$ . Τότε το σήμα  $x_2(-n)$  υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[-1:0]$  και η ετεροσυσχέτιση  $r_{xy}(n)$  υπάρχει στον χρονικό διάστημα  $[-1:2]$ .

Ο υπολογισμός της ετεροσυσχέτισης  $r_{xy}(n)$  φαίνεται παρακάτω:

$k$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
$x(k)$				2	4	6			
$y(k)$				1	3				
$y(k+1)$			1	3					$r_{xy}(-1) = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 6 = 6$
$y(k)$				1	3				$r_{xy}(0) = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 6 = 14$
$y(k-1)$					1	3			$r_{xy}(1) = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 22$
$y(k-2)$						1	3		$r_{xy}(2) = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 6 = 6$

5. Δίνεται το σήμα αυτοσυσχέτισης

$$r_x(n) = 2\delta(n+1) + 5\delta(n) + 2\delta(n-1)$$

Να βρείτε το σήμα πεπερασμένης διάρκειας  $x(n)$  από το οποίο προήλθε, αν γνωρίζετε ότι το σήμα αρχίζει τη χρονική στιγμή  $n=0$ .

Λύση.

Αρχικά παρατηρούμε ότι το σήμα  $x(n)$  μπορεί να είναι σήμα αυτοσυσχέτισης αφού είναι άρτιο σήμα. Το σήμα  $x(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[0:\Delta]$ . Τότε το σήμα  $x(-n)$  είναι

πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[-\Delta:0]$  και η αυτοσυσχέτιση  $r_x(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[-\Delta:\Delta]$ .

Όμως, από την εξίσωση του σήματος αυτοσυσχέτισης είναι προφανές ότι το σήμα  $x(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[-1:1]$ . Επομένως πρέπει να ισχύει  $\Delta=1$ . Άρα το σήμα  $x(n)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας στον χρονικό διάστημα  $[0:1]$ , με τιμές  $x(0)$  και  $x(1)$  που πρέπει να υπολογιστούν.

Ο υπολογισμός της αυτοσυσχέτισης  $r_x(n)$  φαίνεται παρακάτω:

$k$	-1	0	1	2	
$x(k)$		$x(0)$	$x(1)$		
$x(k+1)$	$x(0)$	$x(1)$			$r_x(-1) = x(1) \cdot x(0) + 0 \cdot x(1) = 2$
$x(k)$		$x(0)$	$x(1)$		$r_x(0) = x(0) \cdot x(0) + x(1) \cdot x(1) = 5$
$x(k-1)$			$x(0)$	$x(1)$	$r_x(1) = 0 \cdot x(0) + x(0) \cdot x(1) = 2$

Επομένως, πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} x(1) \cdot x(0) = 2 \\ x^2(0) + x^2(1) = 5 \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} x(1) \cdot x(0) = 2 \\ x^2(0) + \frac{4}{x^2(0)} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1) \cdot x(0) = 2 \\ x^4(0) - 5 \cdot x^2(0) + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1) \cdot x(0) = 2 \\ x^2(0) = 4 \text{ ή } x^2(0) = 1 \end{cases}$$

δηλαδή

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ x(1) = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x(0) = -1 \\ x(1) = -2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x(0) = 2 \\ x(1) = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x(0) = -2 \\ x(1) = -1 \end{cases}$$

Άρα το ζητούμενο σήμα είναι ένα από τα:

$$x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1)$$

$$x_2(n) = -\delta(n) - 2\delta(n-1)$$

$$x_3(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1)$$

$$x_4(n) = -2\delta(n) - \delta(n-1)$$

### Πράξεις σημάτων συνεχούς χρόνου

#### 1-2-0-0-5-6

1. Δίνεται το σήμα συνεχούς χρόνου

$$x(t) = \begin{cases} 4t + 4, & -1 \leq t < 0 \\ 4 - t, & 0 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε το σήμα  $y(t) = x(-t)$ .

Λύση.

$$y(t) = x(-t) = \begin{cases} 4(-t) + 4, & -1 \leq -t < 0 \\ 4 - (-t), & 0 \leq -t \leq 4 \end{cases} = \begin{cases} -4t + 4, & 0 < t \leq 1 \\ 4 + t, & -4 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

2. Δίνεται το σήμα συνεχούς χρόνου

$$x(t) = 1 - |t|, -1 \leq t \leq 1$$

Να υπολογίσετε το σήμα  $y(t) = x(-t - 4)$ .

Λύση.

$$y(t) = x(-t - 4) = 1 - |-t - 4| = 1 - |t + 4|, -5 \leq t \leq -3$$

## 2.4. Ασκήσεις

### Πράξεις σημάτων διακριτού χρόνου

#### 1-2-3-4-0-0

1. Δίνονται τα σήματα διακριτού χρόνου

$$x_1(n) = 3\delta(n+1) + 5\delta(n) + 7\delta(n-2)$$

$$x_2(n) = 4\delta(n) + 5\delta(n-1) + 6\delta(n-2)$$

Να υπολογίσετε τις πράξεις

α.  $x_1(n) + x_2(n)$

β.  $x_1(n) \cdot x_2(n)$

γ.  $3 \cdot x_1(n) + 5 \cdot x_2(n)$

δ.  $x_1(n+5)$

ε.  $x_2(n-3)$

στ.  $x_1(-n)$

ζ.  $x_1(n+3) + x_2(-n)$

η.  $x_1(2 \cdot n)$

θ.  $x_2\left(\frac{n}{2}\right)$

2. Δίνεται το σήμα διακριτού χρόνου

$$x(n) = 3\delta(n+1) + 5\delta(n) - 6\delta(n-1) + 7\delta(n-2) - 3\delta(n-3) - 8\delta(n-4) + 2\delta(n-5)$$

Να υπολογίσετε τις πράξεις

α.  $x(-n-3)$

β.  $x(-n+3)$

γ.  $3 \cdot x(-3 \cdot n)$

δ.  $x\left(-\frac{n}{2}\right)$

ε.  $x(n-3)$

στ.  $x(2 \cdot n-3)$

ζ.  $x(2 \cdot n+3)$

η.  $x\left(\frac{n}{2}-1\right)$

θ.  $x\left(\frac{n}{2}+1\right)$

3. Δίνεται το σήμα διακριτού χρόνου

$$x(n) = (3-n) \cdot [u(n) - u(n-8)]$$

Να υπολογίσετε τις πράξεις

α.  $x(2-n)$

β.  $x(-2-n)$

γ.  $4 \cdot x(2 \cdot n-n)$

δ.  $x(5-2 \cdot n)$

4. Να υπολογίσετε τις παρακάτω γραμμικές συνελίξεις

α.  $5\delta(n) * 4\delta(n)$

β.  $[\delta(n) + \delta(n-1)] * [\delta(n) + \delta(n-2)]$

γ.  $[2\delta(n) + \delta(n-1)] * [\delta(n+1) + 2\delta(n-1)]$

$$\delta. [2\delta(n) + \delta(n-1)] * [\delta(n+1) + 2\delta(n-1)] * [\delta(n+1) - \delta(n)]$$

$$\epsilon. [\delta(n+1) + \delta(n)] * [u(n) - u(n-2)]$$

5. Δίνονται τα σήματα

$$x_1(n) = \delta(n+1) + \delta(n-1)$$

$$x_2(n) = \delta(n+1) - \delta(n) + \delta(n-2)$$

Να υπολογίσετε την ετεροσυσχέτιση  $r_{xy}(n)$  και την ετεροσυσχέτιση  $r_{yx}(n)$ .

6. Να υπολογιστεί η τιμή της παραμέτρου  $a$  έτσι ώστε το σήμα

$$r_{xy}(n) = (-a+2)\delta(n+1) + 4\delta(n) + (a-2)\delta(n-1)$$

να είναι σήμα αυτοσυσχέτισης.

7. Να υπολογιστεί σήμα  $x(n)$  που έχει αυτοσυσχέτιση  $r_x(n) = 3\delta(n)$ .

8. Να υπολογίσετε τις γραμμικές συνελιξίες σημάτων άπειρης διάρκειας:

$$\alpha. \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) * u(n)$$

$$\beta. u(n) * u(n)$$

9. Να αποδείξετε ότι η αυτοσυσχέτιση του σήματος  $x(n) = a^n \cdot u(n), |a| < 1$  είναι  $r_x(n) = \frac{1}{1-a^2} a^{|n|}$ .

10. Δίνεται το σήμα αυτοσυσχέτισης

$$r_x(n) = \delta(n+1) + 10\delta(n) + \delta(n-1)$$

Να βρείτε το σήμα πεπερασμένης διάρκειας  $x(n)$  από το οποίο προήλθε.

### Πράξεις σημάτων συνεχούς χρόνου

#### 1-2-0-0-5-6

1. Δίνεται το σήμα συνεχούς χρόνου

$$x(t) = \begin{cases} 4 \cdot (t+1), & -1 \leq t < 0 \\ 4-t, & 0 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τα σήματα  $y_1(t) = x(2 \cdot t)$  και  $y_2(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$ .

2. Δίνεται το σήμα συνεχούς χρόνου

$$x(t) = \begin{cases} 4 \cdot (t+1), & -1 \leq t < 0 \\ 4-t, & 0 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε το σήμα  $y(t) = x(2 \cdot t - 1)$ .

3. Δίνεται το σήμα συνεχούς χρόνου

$$x(t) = \begin{cases} -5t, & t < 0 \\ t, & 0 \geq 0 \end{cases}$$

Να γράψετε το σήμα ως άθροισμα άρτιου και περιττού σήματος

4. Δίνονται τα σήματα συνεχούς χρόνου

$$x_1(t) = 1, 0 \leq t \leq 4$$

$$x_2(t) = 3 - t, 0 \leq t \leq 3$$

Να υπολογίσετε την συνέλιξη  $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$

## 2.5. Εργαστηριακές Ασκήσεις

### Εργαστηριακή Άσκηση 3 Πράξεις σημάτων διακριτού χρόνου

**1-0-3-0-0-0**

1. Πρόσθεση σημάτων διακριτού χρόνου

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα παρακάτω σήματα διακριτού χρόνου:

α.  $x_1(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-3)$

β.  $x_2(n) = u(n) + u(n-1) + u(n-3)$

γ.  $x_3(n) = u(n) + u_r(n), n \in [0:10]$

δ.  $x_4(n) = e^{j\pi n/2} + e^{j\pi n/4}, n \in [0:10]$

2. Πρόσθεση περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου:

$$x_1(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot n + 0.1\right)$$

$$x_2(n) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n + 0.2\right)$$

Να υπολογίσετε τις θεμελιώδεις περιόδους των δύο σημάτων.

Να παράγετε και να σχεδιάσετε το άθροισμα  $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ .

Να υπολογίσετε τη θεμελιώδη περίοδο του αθροίσματος και να επιβεβαιώσετε ότι το άθροισμα περιοδικών σημάτων είναι περιοδικό σήμα με θεμελιώδη περίοδο ίση με το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των θεμελιωδών περιόδων των σημάτων που προστίθενται.

3. Πολλαπλασιασμός σημάτων διακριτού χρόνου

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα παρακάτω σήματα διακριτού χρόνου:

α.  $x_1(n) = \delta(n-1) \cdot u(n-1)$

β.  $x_2(n) = e^{j\pi n/2} \cdot e^{j\pi n/4}, n \in [0:10]$

γ.  $x_3(n) = \delta(n-2) \cdot [u(n) - u(n-10)]$

δ.  $x_4(n) = [\sin(2 \cdot n) + \cos(2 \cdot n) + \pi] \cdot [u(n) - u(n-20)]$

4. Πολλαπλασιασμός περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου:

α.  $x_1(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot n + 0.1\right)$

β.  $x_2(n) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n + 0.2\right)$

Να υπολογίσετε τις θεμελιώδεις περιόδους των δύο σημάτων.

Να παράγετε και να σχεδιάσετε το γινόμενο  $x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$ .

Να εξετάσετε ως προς την περιοδικότητα το σήμα  $x(n)$ .

5. Κλιμάκωση στο πλάτος σήματος διακριτού χρόνου

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα διακριτού χρόνου:

$$x_1(n) = (0.3)^n, n \in [0:10]$$

$$x_2(n) = 4 \cdot x_1(n).$$

6. Πράξεις μετασχηματισμού πλάτους σημάτων διακριτού χρόνου

Να παράγετε και να σχεδιάσετε το σήμα διακριτού χρόνου:

$$x(n) = 5 \cdot [(0.2)^n + (0.3)^n] \cdot [u(n) - u(n-10)]$$

7. Μετατόπιση ή ολίσθηση

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα διακριτού χρόνου:

$$x(n) = 3\delta(n+2) + 4\delta(n+1) + \delta(n) + 5\delta(n-1) + 8\delta(n-2)$$

$$x_1(n) = x(n-4)$$

$$x_2(n) = x(n+6)$$

8. Αναδίπλωση

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα διακριτού χρόνου:

$$x(n) = 3\delta(n+2) + 4\delta(n+1) + \delta(n) + 5\delta(n-1) + 8\delta(n-2)$$

$$y(n) = x(-n)$$

9. Κλιμάκωση στον χρόνο

Να μελετήσετε τις συναρτήσεις  $\text{signalscaldiv}$  και  $\text{signalscaldiv}$ .

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα διακριτού χρόνου:

$$x(n) = 2\delta(n-1) + 4\delta(n-2) + 6\delta(n-3) + 4\delta(n-4) + 2\delta(n-5)$$

$$x_1(n) = x(3 \cdot n)$$

$$x_2(n) = x\left(\frac{n}{3}\right)$$

10. Κλιμάκωση στον χρόνο– γενίκευση

Να μελετήσετε τις συναρτήσεις  $\text{signalscaldiv}$  και  $\text{signalscaldiv}$  που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για σήματα πεπερασμένης διάρκειας που αρχίζουν τη χρονική στιγμή  $n=1$ . Να γράψετε γενικευμένες συναρτήσεις για κλιμάκωση στον χρόνο που να μην έχουν αυτόν τον περιορισμό.

Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί διαχωρίζοντας το σήμα σε τρία τμήματα: ένα τμήμα που αντιστοιχεί σε αρνητικό χρόνο, ένα τμήμα που αντιστοιχεί σε χρόνο ίσο με μηδέν και ένα τμήμα που αντιστοιχεί σε θετικό χρόνο. Η κλιμάκωση στον χρόνο για το τμήμα που αντιστοιχεί σε θετικό χρόνο μπορεί να υλοποιηθεί με χρήση των παραπάνω συναρτήσεων. Η κλιμάκωση στον χρόνο του τμήματος που αντιστοιχεί σε χρόνο ίσο με μηδέν είναι ίση με το ίδιο αυτό το τμήμα. Η κλιμάκωση στον χρόνο για το τμήμα που αντιστοιχεί σε αρνητικό χρόνο μπορεί να υλοποιηθεί με αναδίπλωση του τμήματος που αντιστοιχεί σε αρνητικό χρόνο, κλιμάκωση στον χρόνο του νέου σήματος (με χρήση των παραπάνω συναρτήσεων) και πάλι αναδίπλωση. Η κλιμάκωση στον χρόνο του αρχικού σήματος προκύπτει από τη συνένωση των κλιμακώσεων στον χρόνο των τριών τμημάτων.

11. Τετραγωνικό σήμα

Το τετραγωνικό σήμα διακριτού χρόνου έχει τη μορφή  $u(n+n_0) - u(n-(n_0+1))$ .

Να παράγετε το τετραγωνικό σήμα  $u(n+4) - u(n-5)$

12. Τριγωνικό σήμα

Το τριγωνικό σήμα μπορεί να παραχθεί χρησιμοποιώντας το σήμα  $\delta(n)$  ή χρησιμοποιώντας το σήμα  $u(n)$ .

Για παράδειγμα, το τριγωνικό σήμα διακριτού χρόνου

$$x(n) = \begin{cases} 1, n = -2 \\ 2, n = -1 \\ 3, n = 0 \\ 2, n = 1 \\ 1, n = 2 \end{cases}$$

μπορεί να γραφτεί συναρτήσει του σήματος  $\delta(n)$  ως

$$x(n) = \delta(n+2) + 2\delta(n+1) + 3\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

ή συναρτήσει του σήματος  $u(n)$  ως

$$x(n) = u(n+2) + u(n+1) + u(n) - u(n-1) - u(n-2) - u(n-3)$$

Να παράγετε και να σχεδιάσετε το τριγωνικό σήμα  $x(n)$  χρησιμοποιώντας το σήμα  $\delta(n)$  και το σήμα  $u(n)$ .

### 13. Μετατόπιση και αντιστροφή

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα διακριτού χρόνου:

$$x(n) = n + 6, n \in [-5:5]$$

$$x_1(n) = x(3-n)$$

$$x_2(n) = x(-3-n)$$

### 14. Πράξεις μετασχηματισμού πλάτους και χρόνου σημάτων διακριτού χρόνου

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα διακριτού χρόνου:

$$x(n) = \begin{cases} n-3, n \in [-5:-1] \\ n+3, n \in [0:5] \end{cases}$$

$$y(n) = 4 \cdot x(n-2) - 3 \cdot x(n+5)$$

## Εργαστηριακή Άσκηση 4 Συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

### 1-0-3-0-0-0

#### 1. Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης

Να μελετήσετε τη συνάρτηση `conv` και τη συνάρτηση `signalconv`.

Να παράγετε τα σήματα  $x_1(n) = n + 2, n \in [0:10]$  και  $x_2(n) = n + 5, n \in [0:20]$ .

Να παράγετε και να εμφανίσετε τις τιμές της γραμμικής συνέλιξης χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `conv`.

Να παράγετε και να σχεδιάσετε το σήμα  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$  χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `signalconv`.

#### 2. Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης με χρήση πίνακα

Να παράγετε τα σήματα  $x_1(n) = n + 6, n \in [1:3]$  και  $x_2(n) = n, n \in [1:3]$ .

Να παράγετε το διάνυσμα  $\underline{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$  διαστάσεων  $3 \times 1$ .

Να παράγετε τον πίνακα Toeplitz  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  διαστάσεων  $5 \times 3$ .

Να υπολογίσετε το διάνυσμα  $\underline{x} = P \cdot \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$  διαστάσεων  $5 \times 1$ .

Να παράγετε και να εμφανίσετε τις τιμές της γραμμικής συνέλιξης  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$  χρησιμοποιώντας τον παραπάνω πίνακα Toeplitz.

### 3. Ταυτοτικό στοιχείο

Να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot [u(n) - u(n-10)]$

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα  $x(n)$  και  $x(n) * \delta(n)$ .

Τι παρατηρείτε;

### 4. Αντιμεταθετική ιδιότητα

Να παράγετε τα σήματα διακριτού χρόνου  $x_1(n) = n, n \in [0:10]$  και  $x_2(n) = n + 2, n \in [0:20]$ .

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα  $x_1(n) * x_2(n)$  και  $x_2(n) * x_1(n)$

Τι παρατηρείτε;

### 5. Προσεταιριστική ιδιότητα

Να παράγετε τα σήματα διακριτού χρόνου  $x_1(n) = n, n \in [0:10]$  και  $x_2(n) = n + 2, n \in [0:20]$  και  $x_3(n) = n + 3, n \in [0:30]$ .

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα  $x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)]$  και  $[x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n)$ .

Τι παρατηρείτε;

### 6. Επιμεριστική ιδιότητα

Να παράγετε τα σήματα διακριτού χρόνου  $x_1(n) = n, n \in [0:10]$  και  $x_2(n) = n + 2, n \in [0:20]$  και  $x_3(n) = n + 3, n \in [0:30]$ .

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα  $x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)]$  και  $[x_1(n) * x_2(n)] + [x_1(n) * x_3(n)]$ .

Τι παρατηρείτε;

### 7. Ετεροσυσχέτιση (crosscorrelation)

Να μελετήσετε τη συνάρτηση `xcorr` και τη συνάρτηση `signalconv`.

Να παράγετε τα σήματα διακριτού χρόνου  $x(n) = n, n \in [0:10]$  και  $y(n) = n + 2, n \in [0:20]$

Να παράγετε και να εμφανίσετε τις τιμές της ετεροσυσχέτισης  $r_{xy}(n)$  χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `xcorr`.

Να παράγετε και να σχεδιάσετε την ετεροσυσχέτιση  $r_{xy}(n)$  χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `signalconv`.

Τι παρατηρείτε;

### 8. Αυτοσυσχέτιση (autocorrelation)

Να μελετήσετε τη συνάρτηση `xcorr` και τη συνάρτηση `signalconv`.

Να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n) = n, n \in [0:10]$ .

Να παράγετε και να εμφανίσετε τις τιμές της αυτοσυσχέτισης  $r_x(n)$  χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `xcorr`.

Να παράγετε και να σχεδιάσετε την αυτοσυσχέτιση  $r_x(n)$  χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `signalconv`.

Τι παρατηρείτε;

### 9. Αυτοσυσχέτιση πραγματικού εκθετικού σήματος



Η αυτοσυσχέτιση του σήματος  $x(n) = a^n \cdot u(n)$ ,  $|a| < 1$  είναι  $r_x(n) = \frac{1}{1-a^2} a^{|n|}$ .

Να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n)$ ,  $n \in [0:20]$ .

Να παράγετε και να εμφανίσετε τις τιμές της αυτοσυσχέτισης  $r_x(n)$  χρησιμοποιώντας τον παραπάνω θεωρητικό τύπο.

Να παράγετε και να σχεδιάσετε την αυτοσυσχέτισης  $r_x(n)$  χρησιμοποιώντας συνέλιξη.

Τι παρατηρείτε;

### Εργαστηριακή Άσκηση 5 Πράξεις σημάτων συνεχούς χρόνου

#### 1-0-0-0-5-0

1. Πρόσθεση σημάτων συνεχούς χρόνου

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα συνεχούς χρόνου:

α.  $x_1(t) = (0.5)^{2t} + (0.5)^{-2t}$ ,  $t \in [0,10]$

β.  $x_2(t) = \cos(t) + \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $t \in [0, 4\pi]$

2. Πολλαπλασιασμός σημάτων συνεχούς χρόνου

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα συνεχούς χρόνου:

α.  $x_1(n) = (0.5)^{2t} \cdot \cos(t)$ ,  $t \in [-10,10]$ , όπου  $r(t)$  είναι το σήμα ράμπας

β.  $x_2(n) = e^{j\pi n/2} \cdot e^{j\pi n/4}$ ,  $n \in [0,10]$

3. Κλιμάκωση στο πλάτος σήματος συνεχούς χρόνου

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα συνεχούς χρόνου:

$x_1(t) = (0.5)^t$ ,  $t \in [0,10]$

$x_2(t) = 10 \cdot x_1(t)$ .

4. Μετατόπιση ή ολίσθηση

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα συνεχούς χρόνου:

$x(t) = (0.5)^t$ ,  $t \in [0,10]$

$x_1(t) = x(t-2)$

$x_2(t) = x(t+2)$

5. Αναδίπλωση

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα συνεχούς χρόνου:

$x(t) = (0.5)^t$ ,  $t \in [0,10]$

$y(t) = x(-t)$

6. Κλιμάκωση στον χρόνο

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα συνεχούς χρόνου:

$x(t) = (0.5)^t$ ,  $t \in [0,10]$

$x_1(t) = x(2 \cdot t)$

$x_2(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$

7. Μετατόπιση και αντιστροφή

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = (0.5)^t, t \in [0, 10]$$

$$x_2(t) = x(2-t)$$

$$x_2(t) = x(-2-t)$$

8. Πράξεις μετασχηματισμού πλάτους και χρόνου σημάτων συνεχούς χρόνου

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = e^{0.2|t|}, t \in [-10, 10]$$

$$y(t) = 2 \cdot x(t-1) - 3 \cdot x(t+3)$$

### Εργαστηριακή Άσκηση 6 Συνέλιξη σημάτων συνεχούς χρόνου

**1-0-0-0-5-0**

1. Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης

Να παράγετε τα σήματα συνεχούς χρόνου  $x_1(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right), t \in [0, 10]$  και  $x_2(t) = \sin\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right), t \in [0, 10]$ .

Να παράγετε και να σχεδιάσετε το σήμα  $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$ .

2. Αντιμεταθετική ιδιότητα

Να παράγετε τα σήματα συνεχούς χρόνου  $x_1(t) = (0.4)^t, t \in [0, 10]$  και  $x_2(t) = (0.6)^t, t \in [0, 10]$ .

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα  $x_1(t) * x_2(t)$  και  $x_2(t) * x_1(t)$

Τι παρατηρείτε;

3. Προσεταιριστική ιδιότητα

Να παράγετε τα σήματα συνεχούς χρόνου  $x_1(t) = (0.4)^t, t \in [0, 10]$ ,  $x_2(t) = (0.5)^t, t \in [0, 10]$  και  $x_3(t) = (0.6)^t, t \in [0, 10]$ .

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα  $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)]$  και  $[x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$ .

Τι παρατηρείτε;

4. Επιμεριστική ιδιότητα

Να παράγετε τα σήματα συνεχούς χρόνου  $x_1(t) = (0.4)^t, t \in [0, 10]$ ,  $x_2(t) = (0.5)^t, t \in [0, 10]$  και  $x_3(t) = (0.6)^t, t \in [0, 10]$ .

Να παράγετε και να σχεδιάσετε τα σήματα  $x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)]$  και  $[x_1(t) * x_2(t)] + [x_1(t) * x_3(t)]$ .

Τι παρατηρείτε;

5. Ετεροσυσχέτιση (crosscorrelation)

Να παράγετε τα σήματα συνεχούς χρόνου  $x_1(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right), t \in [0, 10]$  και  $x_2(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right), t \in [0, 10]$

Να παράγετε και να σχεδιάσετε την ετεροσυσχέτιση  $r_{xy}(t)$  και την ετεροσυσχέτιση  $r_{yx}(t)$ .

6. Αυτοσυσχέτιση (autocorrelation)

Να παράγετε το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t) = \begin{cases} 4 \cdot (t+1), & -1 \leq t < 0 \\ 4-t, & 0 \leq t \leq 4 \end{cases}$

Να παράγετε και να σχεδιάσετε την αυτοσυσχέτιση  $r_x(t)$ .

## 2.6. Περίληψη (ηχογραφημένη)

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη του Κεφαλαίου 2 με τον Ήχο 2.1.



### Ήχος 2.1 Περίληψη Κεφαλαίου 2.

#### Πράξεις σημάτων διακριτού χρόνου

##### 1-2-3-4-0-0

Η πρόσθεση δύο σημάτων διακριτού χρόνου  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$  παράγει ένα νέο σήμα  $x(n)$  με πλάτος το άθροισμα των πλατών των σημάτων που προστίθενται.

Ο πολλαπλασιασμός δύο σημάτων διακριτού χρόνου  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$  παράγει ένα νέο σήμα  $x(n)$  με πλάτος το γινόμενο των πλατών των σημάτων που πολλαπλασιάζονται.

Η κλιμάκωση στο πλάτος ενός σήματος διακριτού χρόνου  $x(n)$  παράγει ένα νέο σήμα  $y(n) = c \cdot x(n)$  με πλάτος το πλάτος του σήματος  $x(n)$  πολλαπλασιασμένο επί έναν πραγματικό συντελεστή  $c$ .

Η μετατόπιση ή ολίσθηση ενός σήματος διακριτού χρόνου  $x(n)$  παράγει ένα νέο σήμα  $y(n) = x(n - n_0)$  με πλάτος το πλάτος του σήματος  $x(n)$  μετατοπισμένο δεξιά ή αριστερά κατά  $n_0$  χρονικές στιγμές. Αν  $n_0 > 0$ , τότε η μετατόπιση γίνεται δεξιά και έχουμε καθυστέρηση. Αν  $n_0 < 0$ , τότε η μετατόπιση γίνεται αριστερά και έχουμε πρωτοπορία. Αν  $n_0 = 0$ , τότε το σήμα δεν μετατοπίζεται.

Αναδίπλωση ή ανάκλαση (fold) είναι η πράξη όπου παράγεται το συμμετρικό σήμα του σήματος  $x(n)$  ως προς τον άξονα των τεταγμένων.

Η κλιμάκωση στον χρόνο ενός σήματος διακριτού χρόνου  $x(n)$  παράγει ένα νέο σήμα  $y(n) = x(c \cdot n)$ . Αν  $c = M$ , όπου  $M$  θετικός ακέραιος, τότε το σήμα «συρρικνώνεται» και έχουμε διαίρεση συχνότητας. Αν

$c = \frac{1}{M}$ , όπου  $M$  θετικός ακέραιος, τότε το σήμα «απλώνεται» και έχουμε πολλαπλασιασμό συχνότητας. Αν

$c = 1$ , τότε το σήμα δεν μεταβάλλεται.

Οι πράξεις Αναδίπλωση και Μετατόπιση δεν αντιμετατίθενται.

Οι πράξεις Αναδίπλωση και Κλιμάκωση στον χρόνο αντιμετατίθενται.

Οι πράξεις Μετατόπιση και Κλιμάκωση στον χρόνο δεν αντιμετατίθενται.

Η γραμμική συνέλιξη σημάτων πεπερασμένης διάρκειας αρχίζει από το άθροισμα των αρχών των δύο σημάτων και τελειώνει στο άθροισμα των τελών των δύο σημάτων.

Η αυτοσυσχέτιση έχει άρτια συμμετρία.

#### Πράξεις σημάτων συνεχούς χρόνου

##### 1-2-0-0-5-6

Η πρόσθεση δύο σημάτων συνεχούς χρόνου  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  παράγει ένα νέο σήμα  $x(t)$  με πλάτος το άθροισμα των πλατών των σημάτων που προστίθενται.

Ο πολλαπλασιασμός δύο σημάτων διακριτού χρόνου  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  παράγει ένα νέο σήμα  $x(t)$  με πλάτος το γινόμενο των πλατών των σημάτων που πολλαπλασιάζονται.

Η κλιμάκωση στο πλάτος ενός σήματος διακριτού χρόνου  $x(t)$  παράγει ένα νέο σήμα  $y(t) = c \cdot x(t)$  με πλάτος το πλάτος του σήματος  $x(t)$  πολλαπλασιασμένο επί έναν πραγματικό συντελεστή  $c$ .

Η μετατόπιση ή ολίσθηση ενός σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t)$  παράγει ένα νέο σήμα  $y(t) = x(t - t_0)$  με πλάτος το πλάτος του σήματος  $x(t)$  μετατοπισμένο δεξιά ή αριστερά κατά  $t_0$ .

Η αναδίπλωση ή ανάκλαση ενός σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t)$  παράγει το συμμετρικό σήμα του σήματος  $x(t)$  ως προς τον άξονα των τεταγμένων  $y(t) = x(-t)$ .

Η κλιμάκωση στον χρόνο ενός σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t)$  παράγει ένα νέο σήμα  $y(t) = x(c \cdot t)$  όπου  $c$  είναι ένας θετικός πραγματικός συντελεστής. Αν  $c > 1$ , τότε το σήμα  $x(t)$  «συρρικνώνεται» ή «συστελλεται», ενώ αν  $0 < c < 1$ , τότε το σήμα  $x(t)$  «απλώνεται» ή «διαστελλεται».

## 2.7. Λογισμικό υπολογισμού πράξεων σημάτων διακριτού χρόνου

1-2-3-4-0-0

Μπορείτε να διερευνήσετε τις πράξεις σημάτων διακριτού χρόνου με το Διαδραστικό πρόγραμμα 2.5.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 2.5** Λογισμικό υπολογισμού πράξεων σημάτων διακριτού χρόνου.

### Βιβλιογραφία/Αναφορές

- Damper, R. I. (1995). *Introduction to Discrete-Time Signals and Systems*. Chapman & Hall.
- Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S., Wehbring R. (2011). *GNU Octave* (3rd ed.).
- Hansen J. S. (2011). *GNU Octave Beginner's Guide*. Packt Publishing.
- Hayes, M. H. (2000). *Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Ingle, V. K., & Proakis, J. G. (2003). *Digital Signal Processing using MATLAB*. Stamford, CT: Thomson Brooks Cole.
- Leis, J. W. (2011). *Digital Signal Processing using MATLAB for students and researchers*. J. Wiley and Sons.
- Lynn, P. A., & Fuerst, W. (1989). *Introductory Digital Signal Processing With Computer Applications*. J. Wiley and Sons.
- McClellan, J. H., Schafer, R. W., Yoder, M. A. (2006). *Θεμελιώδεις Έννοιες της Επεξεργασίας Σημάτων*. Φιλομάθεια. Μετάφραση – Επιστημονική Επιμέλεια: Ε. Ζ. Ψαράκης.
- Oppenheim A. V., Willsky, A. S., Nawab, S. H. (2013). *Signals & Systems* (2<sup>nd</sup> ed.), Pearson.
- Proakis, J. G., & Manolakis D. G. (2007). *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*. Prentice-Hall.
- Strum, R. D., & Kirk, D. E. (1988). *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*. Addison-Wesley Publishing Company.
- The MathWorks Inc (2005). *Signal Processing Toolbox User's Guide*.
- Ασημάκης, Ν. (2008). *Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων*. Gutenberg.
- Θεοδωρίδης, Σ., Μπερμπερίδης, Κ., Κοφίδης, Λ. (2003). *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων*. Εκδόσεις τυπωθήτω.
- Καλουπτσίδης, Ν. (1994). *Σήματα, Συστήματα και Αλγόριθμοι*. Δίαυλος.
- Καραγιάννης, Γ., & Μαραγκός, Π. (2010). *Βασικές Αρχές Σημάτων και Συστημάτων*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου.
- Καραγιάννης, Γ., & Τζίτζιράχου, Κ. (2003). *Εισαγωγή στα Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου.
- Καραμπογιάς, Σ. (2009). *Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Καραμπογιά.
- Μάργαρης, Α. (2014). *Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Μουστακίδης, Γ. (2004). *Βασικές Τεχνικές Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Παρασκευάς, Μ. (2014). *Σήματα και Συστήματα Συνεχούς Χρόνου με Matlab*. Εκδόσεις Τζιόλα.

Σκόδρας, Α., & Αναστασόπουλος, Β. (2003). *Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων και Σημάτων*. ΕΑΠ.  
Φωτόπουλος, Π., & Βελώνη, Α. (2008). *Σήματα και Συστήματα*. Σύγχρονη Εκδοτική.

## **Κριτήρια αξιολόγησης**

### **Κριτήριο αξιολόγησης 1**

**1-2-3-4-0-0**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 1 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 2.6.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 2.6** Κριτήριο αξιολόγησης 1.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

### **Κριτήριο αξιολόγησης 2**

**1-2-3-4-0-0**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 2 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 2.7.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 2.7** Κριτήριο αξιολόγησης 2.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

### **Κριτήριο αξιολόγησης 3**

**1-2-3-4-0-0**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 3 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 2.8.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 2.8** Κριτήριο αξιολόγησης 3.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

### **Κριτήριο αξιολόγησης 4**

**1-2-0-0-5-6**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 4 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 2.9.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 2.9** *Κριτήριο αξιολόγησης 4.*

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

## Κεφάλαιο 3 Συστήματα διακριτού και συνεχούς χρόνου

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται ένας ορισμός της έννοιας του συστήματος διακριτού και συνεχούς χρόνου. Αναλύονται οι βασικές ιδιότητες των συστημάτων διακριτού χρόνου: αρχή της επαλληλίας, ομογένεια, γραμμικότητα, χρονική αμεταβλητότητα, γραμμικότητα και χρονική αμεταβλητότητα, αιτιότητα, ευστάθεια, αντιστρεψιμότητα. Παρουσιάζονται τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα διακριτού χρόνου και αναλύεται η έννοια της κρουστικής απόκρισης. Αναλύεται η έννοια των συστημάτων πεπερασμένης και άπειρης κρουστικής απόκρισης και παρουσιάζεται η αναπαράστασή τους με χρήση εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές. Παρουσιάζονται τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα συνεχούς χρόνου και η έννοια της απόκρισης μοναδιαίου παλμού. Παρουσιάζεται η αναπαράσταση των γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων συνεχούς χρόνου με χρήση διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.

### Προαπαιτούμενη γνώση

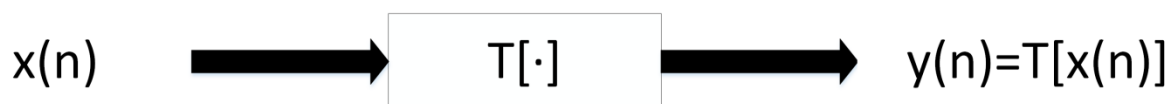
Συνέλιξη, εξισώσεις διαφορών, διαφορικές εξισώσεις.

### 3.1. Συστήματα διακριτού χρόνου

1-2-3-4-0-0

#### 3.1.1. Ορισμός

Ένα **σύστημα διακριτού χρόνου** (φίλτρο) είναι ένας μετασχηματισμός (transform) του σήματος εισόδου σε ένα σήμα εξόδου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Το σύστημα διακριτού χρόνου έχει είσοδο ένα σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)$  και έξοδο ένα άλλο σήμα διακριτού χρόνου  $y(n)=T[x(n)]$  όπου ο μετασχηματισμός συμβολίζεται με  $T[\cdot]$ . Η έξοδος του συστήματος ονομάζεται **απόκριση** του συστήματος.



Σχήμα 3.1 Σύστημα διακριτού χρόνου.

Χρήσιμη ξενόγλωσση βιβλιογραφία είναι τα βιβλία Damper, 1995, Ingle and Proakis, 2003, Lynn & Fuerst, 1989, Oppenheim, Willsky, Nawab, 2013, Proakis & Manolakis, 2007, Strum & Kirk, 1988. Χρήσιμη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία είναι τα βιβλία Hayes, 2000, McClellan, Schafer & Yoder, 2006, Ασημάκης, 2008, Θεοδωρίδης, Μπερμπερίδης, Κοφίδης, 2003, Καλουπτσίδης, 1994, Καραγιάννης & Μαραγκός, 2010, Καραγιάννης & Τζιτζιράχου, 2003, Καραμπογιάς, 2009, Μάργαρης, 2014, Μουστακίδης, 2004, Παρασκευάς, 2014, Σκόδρας & Αναστασόπουλος, 2003, Φωτόπουλος & Βελώνη, 2008.

#### 3.1.2. Ιδιότητες συστημάτων διακριτού χρόνου

##### 3.1.2.1. Αρχή της επαλληλίας ή αρχή της υπέρθεσης

Η **αρχή της επαλληλίας** ή **αρχή της υπέρθεσης** εκφράζεται με τον τύπο:

$$T\left[\sum_{i=1}^N x_i(n)\right] = \sum_{i=1}^N T[x_i(n)] \quad (3.1)$$

Η σημασία της αρχής της επαλληλίας είναι ότι αν στο σύστημα τεθεί ως είσοδος το άθροισμα επιμέρους εισόδων, τότε το σύστημα παράγει μία απόκριση, που είναι το άθροισμα των επί μέρους αποκρίσεων. Σε ένα σύστημα που υπακούει στην αρχή της επαλληλίας, η συνολική επίδραση στο σύστημα λόγω επί μέρους εισόδων που αθροίζονται είναι ίση με το άθροισμα των επιδράσεων στο σύστημα των επί μέρους εισόδων.

Για παράδειγμα, στο σύστημα  $y(n) = T[x(n)] = x(n) + x(-n)$  ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Πράγματι, αν στο σύστημα  $y(n) = T[x(n)] = x(n) + x(-n)$  τεθούν τα σήματα  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$  ως είσοδοι, τότε το σύστημα παράγει τις εξόδους  $y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(n) + x_1(-n)$  και  $y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2(n) + x_2(-n)$ . Αν στο σύστημα τεθεί ως είσοδος το άθροισμα των δύο εισόδων  $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ , τότε το σύστημα παράγει την έξοδο  $y(n) = T[x(n)] = T[x_1(n) + x_2(n)]$ . Τότε, η έξοδος γράφεται:

$$\begin{aligned} y(n) = T[x(n)] &= T[x_1(n) + x_2(n)] = [x_1(n) + x_2(n)] + [x_1(-n) + x_2(-n)] \\ &= [x_1(n) + x_1(-n)] + [x_2(n) + x_2(-n)] \\ &= T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n) \end{aligned}$$

Επομένως, η έξοδος είναι το άθροισμα των επί μέρους εξόδων, οπότε ισχύει η αρχή της επαλληλίας.

### 3.1.2.2. Ομογένεια

Η **ομογένεια** εκφράζεται με τον τύπο:

$$T[c \cdot x(n)] = c \cdot T[x(n)] \quad (3.2)$$

όπου  $c$  είναι πραγματικός αριθμός.

Η σημασία της ομογένειας είναι ότι αν στο σύστημα τεθεί ως είσοδος ένα πολλαπλάσιο ενός αρχικού σήματος, τότε το σύστημα παράγει μία απόκριση, που είναι το ίδιο πολλαπλάσιο της απόκρισης του συστήματος στην είσοδο του αρχικού σήματος.

Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(n) = T[x(n)] = \frac{x^2(n)}{x(n-2)}$$

είναι ομογενές.

Πράγματι, αν στο σύστημα τεθεί το σήμα  $x(n)$  ως είσοδος, τότε το σύστημα παράγει την έξοδο  $y(n) = T[x(n)]$ . Αν στο σύστημα τεθεί το σήμα  $x_1(n) = c \cdot x(n)$  ως είσοδος, δηλαδή ένα πολλαπλάσιο της αρχικής εισόδου, τότε το σύστημα παράγει την έξοδο  $y_1(n) = T[x_1(n)]$ .

Τότε, η έξοδος γράφεται:

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = \frac{x_1^2(n)}{x_1(n-2)} = \frac{[c \cdot x(n)]^2}{[c \cdot x(n-2)]} = \frac{c^2 \cdot x^2(n)}{c \cdot x(n-2)} = c \cdot \frac{x^2(n)}{x(n-2)} = c \cdot T[x(n)] = c \cdot y(n)$$

Επομένως, η έξοδος είναι το ίδιο πολλαπλάσιο της αρχικής εξόδου, οπότε το σύστημα είναι ομογενές.

### 3.1.2.3. Γραμμικότητα

Η **γραμμικότητα** εκφράζεται με τον τύπο:

$$T\left[\sum_{i=1}^N c_i \cdot x_i(n)\right] = \sum_{i=1}^N c_i \cdot T[x_i(n)] \quad (3.3)$$

για οποιεσδήποτε σταθερές  $c_i, i=1,2,\dots,N$ .

Αν ένα σύστημα υπακούει στην αρχή της επαλληλίας και είναι ομογενές, τότε το σύστημα είναι **γραμμικό (linear)**. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα γραμμικό σύστημα, αν η είσοδος ενός συστήματος είναι ο γραμμικός συνδυασμός σημάτων, τότε η έξοδος του συστήματος είναι ίση με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων του συστήματος στις εισόδους.

Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(n) = T[x(n)] = x(n) \cdot \sin(\pi \cdot n)$$

είναι γραμμικό.

Πράγματι, αν στο σύστημα τεθούν τα σήματα  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$  ως είσοδοι, τότε το σύστημα παράγει τις εξόδους  $y_1(n)$  και  $y_2(n)$ . Αν στο σύστημα τεθεί ως είσοδος το σήμα  $x(n) = c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$ , τότε το σύστημα παράγει την έξοδο  $y(n)$ .



Τότε, η έξοδος γράφεται:

$$\begin{aligned}y(n) &= T[x(n)] = x(n) \cdot \sin(\pi \cdot n) = [c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)] \cdot \sin(\pi \cdot n) \\ &= c_1 \cdot x_1(n) \cdot \sin(\pi \cdot n) + c_2 \cdot x_2(n) \cdot \sin(\pi \cdot n) \\ &= c_1 \cdot T[x_1(n)] + c_2 \cdot T[x_2(n)] = c_1 \cdot y_1(n) + c_2 \cdot y_2(n)\end{aligned}$$

Επομένως, το σύστημα είναι γραμμικό.

### 3.1.2.4. Χρονική Αμεταβλητότητα

Η **χρονική αμεταβλητότητα** εκφράζεται με τον τύπο:

$$y(n) = T[x(n)] \Rightarrow y(n - n_0) = T[x(n - n_0)] \quad (3.4)$$

Η σημασία της χρονικής αμεταβλητότητας είναι ότι αν στο σύστημα τεθεί ως είσοδος ένα σήμα μετατοπισμένο στον χρόνο (καθυστέρηση ή πρωτοπορία), τότε το σύστημα παράγει μία νέα απόκριση, που είναι η απόκριση του συστήματος στο αρχικό (μη μετατοπισμένο σήμα), το ίδιο μετατοπισμένη στον χρόνο. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα είναι **χρονικά αμετάβλητο (time invariant)**.

Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(n) = T[x(n)] = x^2(n)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Πράγματι, αν στο σύστημα τεθεί το σήμα  $x(n)$  ως είσοδος, τότε το σύστημα παράγει την έξοδο  $y(n) = T[x(n)]$ . Αν στο σύστημα τεθεί το σήμα  $x_1(n) = x(n - n_0)$  ως είσοδος, δηλαδή η αρχική είσοδος μετατοπισμένη κατά  $n_0$  χρονικές στιγμές, τότε το σύστημα παράγει την έξοδο  $y_1(n) = T[x_1(n)]$ .

Τότε, η έξοδος γράφεται:

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1^2(n) = [x(n - n_0)]^2 = T[x(n - n_0)] = y(n - n_0)$$

Επομένως, το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Σε ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα, η επίδραση στο σύστημα λόγω κάποιας εισόδου είναι ανεξάρτητη από τον χρόνο επίδρασης, δηλαδή το σύστημα έχει την ίδια συμπεριφορά στον χρόνο.

### 3.1.2.5. Γραμμικότητα και Χρονική Αμεταβλητότητα

Ένα σύστημα που συνδυάζει την ιδιότητα της γραμμικότητας και της χρονικής αμεταβλητότητας ονομάζεται **γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (Linear Time Invariant – LTI)** σύστημα.

### 3.1.2.6. Αιτιότητα

Η **αιτιότητα** εκφράζεται με τον τύπο:

$$y(n = n_0) = f(x(n \leq n_0)) \quad (3.5)$$

που σημαίνει ότι η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από εισόδους της ίδιας χρονικής στιγμής ή προηγούμενων χρονικών στιγμών. Όταν δεν συμβαίνει αυτό, τότε το σύστημα είναι μη **αιτιατό** ή **αναιτιατό**.

Για παράδειγμα, το σύστημα  $y(n) = T[x(n)] = x(n) + x(n - 1)$  είναι αιτιατό, γιατί η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται την είσοδο της ίδιας χρονικής στιγμής και της προηγούμενης χρονικής στιγμής. Αντίθετα, το σύστημα  $y(n) = T[x(n)] = x(n) + x(n + 1)$  είναι αναιτιατό, γιατί η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από την είσοδο της ίδιας χρονικής στιγμής και της επόμενης χρονικής στιγμής.

### 3.1.2.7. Ευστάθεια

Η ευστάθεια ενός συστήματος δίνει πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο που ανταποκρίνεται η απόκριση του συστήματος σε μία διαταραχή πεπερασμένου πλάτους. Ένα σύστημα είναι **ευσταθές (stable)**, όταν **κάθε φραγμένη είσοδος παράγει επίσης φραγμένη έξοδο**. Η ευστάθεια (stability) εκφράζεται με τον τύπο:

$$|x(n)| = L_x < +\infty \Rightarrow |y(n)| = L_y < +\infty \quad (3.6)$$

(όπου  $L_x$  και  $L_y$  θετικοί αριθμοί), που σημαίνει ότι όταν η είσοδος είναι φραγμένη, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη. Όταν συμβαίνει αυτό, τότε το σύστημα είναι ευσταθές (stable), ενώ όταν δεν συμβαίνει, τότε το σύστημα είναι ασταθές. Αυτού του είδους η ευστάθεια ονομάζεται BIBOευστάθεια (BoundedInputBoundedOutput).

Για παράδειγμα, αν ένα σύστημα έχει είσοδο  $x(n) = u(n)$  και απόκριση  $y(n) = a^n \cdot u(n)$ ,  $0 < a < 1$ , τότε το σύστημα είναι ευσταθές.

Πράγματι, για κάθε ακέραιο αριθμό  $n$ , έχουμε  $|x(n)| = |u(n)| = 1 < +\infty$ , οπότε το σήμα εισόδου είναι φραγμένο.

Επίσης, για την απόκριση έχουμε:  $|y(n)| = |a^n \cdot u(n)| = |a^n| \cdot |u(n)| = |a|^n \cdot |u(n)| < 1 < +\infty$ , οπότε το σήμα εξόδου είναι φραγμένο.

### 3.1.2.8. Αντιστρεψιμότητα

Η **αντιστρεψιμότητα** εκφράζεται με τον τύπο:

$$x_1(n) \neq x_2(n) \Rightarrow y_1(n) = T[x_1(n)] \neq y_2(n) = T[x_2(n)] \quad (3.7)$$

Ένα σύστημα είναι αντιστρέψιμο, όταν η είσοδος μπορεί να προσδιοριστεί από την έξοδο με μοναδικό τρόπο. Το αντιστρέψιμο σύστημα παράγει διαφορετικές εξόδους για διαφορετικές εισόδους.

Αν ένα σύστημα είναι αντιστρέψιμο (δηλαδή υπάρχει το αντίστροφο σύστημα) και συνδέσουμε σε σειρά το σύστημα και το αντίστροφο σύστημα, τότε η είσοδος του συστήματος είναι ίση με την έξοδο του αντίστροφου συστήματος.

## 3.1.3. Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα – LTI Συστήματα

### 3.1.3.1. Κρουστική απόκριση

**Κρουστική απόκριση (impulse response)**,  $h(n)$ , ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος ονομάζεται η έξοδος (απόκριση)  $y(n) = h(n)$  του συστήματος στην κρουστική είσοδο  $x(n) = \delta(n)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2. Η κρουστική απόκριση ενός LTI συστήματος εκφράζει τη συμπεριφορά του συστήματος όταν στην είσοδο συμβεί ένα μεμονωμένο ξαφνικό γεγονός (κρουστική είσοδος).



Σχήμα 3.2 Κρουστική απόκριση.

Από το Σχήμα 3.2 είναι φανερό ότι θεωρώντας το σήμα μοναδιαίου δείγματος  $\delta(n)$  ως κρουστική είσοδο του LTI συστήματος, δηλαδή  $x(n) = \delta(n)$ , τότε η απόκριση  $y(n)$  του συστήματος είναι ίση με την κρουστική απόκριση του συστήματος, δηλαδή  $y(n) = h(n)$  και ταυτίζεται με τη γραμμική συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση, δηλαδή ισχύει:

$$y(n) = h(n) = h(n) * \delta(n) \quad (3.8)$$

ως άμεση συνέπεια της ιδιότητας του ταυτοτικού στοιχείου της γραμμικής συνέλιξης του προηγούμενου κεφαλαίου.

Παρατηρήσεις.

1. Είναι φανερό ότι για την κρουστική απόκριση ισχύει η σχέση:

$$h(n) = h(n) * \delta(n) \quad (3.9)$$

2. Επειδή το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, ισχύει η σχέση:

$$y(n - n_0) = h(n) * x(n - n_0) \quad (3.10)$$

Γενικεύοντας, σε ένα **γραμμικό αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση σύστημα (Linear Time Invariant – LTI)** με γνωστή κρουστική απόκριση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3, η είσοδος  $x(n)$  και η έξοδος (απόκριση)  $y(n)$  συνδέονται με τη σχέση:

$$y(n) = h(n) * x(n) \quad (3.11)$$

δηλαδή η απόκριση  $y(n)$  ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος είναι ίση με τη συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$  με την είσοδο  $x(n)$ .



Σχήμα 3.3 LTI σύστημα διακριτού χρόνου.

### Απόδειξη.

Σύμφωνα με τον τύπο της ανάλυσης σημάτων διακριτού χρόνου του προηγούμενου κεφαλαίου, η είσοδος του LTI συστήματος γράφεται:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot \delta(n - k)$$

και τότε η έξοδος (απόκριση) του LTI συστήματος, που είναι  $y(n) = T[x(n)]$ , γράφεται:

$$\begin{aligned} y(n) = T[x(n)] &= T\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot \delta(n - k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T[x(k) \cdot \delta(n - k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot T[\delta(n - k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n - k) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \end{aligned}$$

επειδή

- το LTI σύστημα είναι γραμμικό, οπότε ισχύει η αρχή της επαλληλίας, με αποτέλεσμα ο μετασχηματισμός να μπορεί να αναλυθεί όπως στην (3.1),
- το LTI σύστημα είναι γραμμικό, οπότε είναι ομογενές, με αποτέλεσμα οι συντελεστές  $x(k)$  να συμπεριφέρονται όπως ο συντελεστής  $c$  στην (3.2) που δεν εξαρτώνται από τον χρόνο  $n$ , επομένως μπορούν να τεθούν εκτός του μετασχηματισμού,
- το LTI σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, οπότε από την (3.4) αυτό σημαίνει ότι  $y(n) = h(n) = T[x(n)] = T[\delta(n)] \Rightarrow y(n - k) = h(n - k) = T[x(n - k)] = T[\delta(n - k)]$ ,
- ισχύει ο ορισμός της γραμμικής συνέλιξης σημάτων διακριτού χρόνου του προηγούμενου κεφαλαίου,
- ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα της γραμμικής συνέλιξης. ■

Επομένως, η σημασία της κρουστικής απόκρισης είναι τεράστια: Αν η κρουστική απόκριση είναι γνωστή, τότε για κάθε είσοδο στο LTI σύστημα είναι δυνατή η γνώση της εξόδου (με συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης και της εισόδου). Άρα η κρουστική απόκριση χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά του συστήματος και για το λόγο αυτό η γνώση της αρκεί για την περιγραφή του LTI συστήματος.

Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (LTI) σύστημα είναι αιτιατό, όταν

$$h(n) = 0, n < 0 \quad (3.12)$$

δηλαδή όταν η κρουστική απόκριση είναι ένα σήμα που αρχίζει τη χρονική στιγμή  $n = 0$ .

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ευσταθές ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (LTI) σύστημα είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = L < +\infty \quad (3.13)$$

(όπου  $L$  θετικός αριθμός, που σημαίνει ότι το άθροισμα των πλατών της κρουστικής απόκρισης είναι φραγμένο.

Για παράδειγμα, το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (LTI) σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(n) = a^n \cdot u(n), 0 < a < 1$$

είναι ευσταθές.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} h(n) = a^n \cdot u(n) &\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n \cdot u(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot u(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot u(n) + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot u(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \end{aligned}$$

επειδή  $0 < a < 1$ .

### 3.1.3.2. Σύνδεση συστημάτων σε σειρά

Ένα LTI σύστημα με κρουστική απόκριση  $h_1(n)$  συνδέεται σε σειρά με ένα LTI σύστημα με κρουστική απόκριση  $h_2(n)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4. Το πρώτο σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$  και έξοδο  $w(n)$ . Το δεύτερο σύστημα έχει είσοδο, την έξοδο του πρώτου συστήματος  $w(n)$  και έξοδο  $y(n)$ .

Η σύνδεση σε σειρά των δύο συστημάτων είναι ισοδύναμη με ένα LTI σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) \quad (3.14)$$

#### Απόδειξη.

Για τα δύο συστήματα που είναι συνδεδεμένα σε σειρά ισχύει:

$$y(n) = h_2(n) * w(n)$$

$$w(n) = h_1(n) * x(n)$$

οπότε

$$y(n) = h_2(n) * w(n) = h_2(n) * [h_1(n) * x(n)] = [h_2(n) * h_1(n)] * x(n)$$

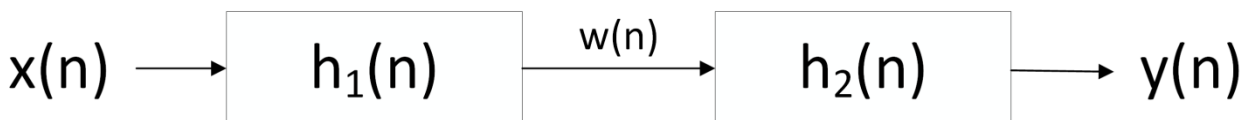
επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα της γραμμικής συνέλιξης (όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο).

Όμως, το σύστημα είναι LTI, οπότε από την (3.11) για την έξοδο έχουμε:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

Επομένως, επειδή ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα της συνέλιξης, έχουμε:

$$h(n) = h_2(n) * h_1(n) = h_1(n) * h_2(n) \quad \blacksquare$$



Σχήμα 3.4 Σύνδεση συστημάτων διακριτού χρόνου σε σειρά.

Γενικεύοντας, αν συνδεθούν σε σειρά  $N$  συστήματα διακριτού χρόνου, όπου  $N$  ακέραιος με  $N \geq 2$ , τότε η συνολική κρουστική απόκριση είναι:

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) * \dots * h_N(n),$$

δηλαδή η συνολική κρουστική απόκριση ενός LTI συστήματος, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα **σε σειρά**, είναι η **συνέλιξη** των κρουστικών αποκρίσεων επί μέρους συστημάτων.

### 3.1.3.3. Σύνδεση συστημάτων παράλληλα

Ένα LTI σύστημα με κρουστική απόκριση  $h_1(n)$  συνδέεται παράλληλα με ένα LTI σύστημα με κρουστική απόκριση  $h_2(n)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.5. Το πρώτο σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$  και έξοδο  $w(n)$ . Το δεύτερο σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$  και έξοδο  $v(n)$ . Οι έξοδοι  $w(n)$  και  $v(n)$  των δύο συστημάτων αθροίζονται και δίνουν την συνολική έξοδο  $y(n)$ .

Η παράλληλη σύνδεση των δύο συστημάτων είναι ισοδύναμη με ένα LTI σύστημα με κρουστική απόκριση  $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$  (3.15)

#### Απόδειξη.

Για τα δύο συστήματα που είναι συνδεδεμένα παράλληλα ισχύει:

$$v(n) = h_2(n) * x(n)$$

$$w(n) = h_1(n) * x(n)$$

οπότε

$$y(n) = v(n) + w(n) = h_2(n) * x(n) + h_1(n) * x(n) = [h_2(n) + h_1(n)] * x(n)$$

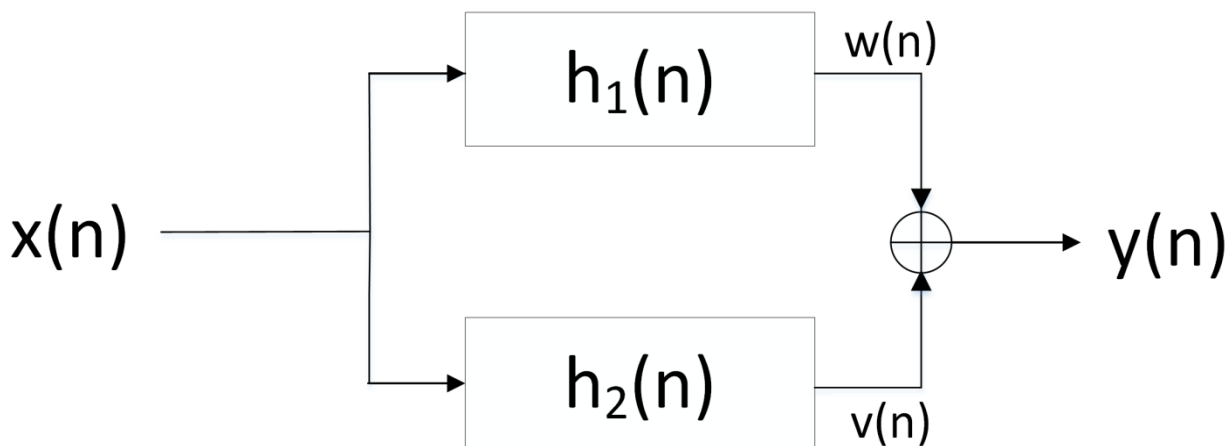
επειδή ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα της γραμμικής συνέλιξης (όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο).

Όμως, το σύστημα είναι LTI, οπότε από την (3.11) για την έξοδο έχουμε:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις, καταλήγουμε:

$$h(n) = h_2(n) + h_1(n) = h_1(n) + h_2(n) \blacksquare$$



Σχήμα 3.5 Σύνδεση συστημάτων διακριτού χρόνου παράλληλα.

Γενικεύοντας, αν συνδεθούν παράλληλα  $N$  συστήματα διακριτού χρόνου, όπου  $N$  ακέραιος με  $N \geq 2$ , τότε η συνολική κρουστική απόκριση είναι:

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) + \dots + h_N(n),$$

δηλαδή η συνολική κρουστική απόκριση ενός LTI συστήματος, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα **παράλληλα**, είναι το **άθροισμα** των κρουστικών αποκρίσεων επί μέρους συστημάτων.

### 3.1.4. Γραμμικές εξισώσεις διαφορών

### 3.1.4.1. Αναπαράσταση LTI συστημάτων με γραμμικές εξισώσεις διαφορών

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται από μία **γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές**:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) \quad (3.16)$$

και αρχικές συνθήκες εξόδου  $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$  και αρχικές συνθήκες εισόδου  $x(-1), x(-2), \dots, x(-M)$ .

Οι σταθεροί (ανεξάρτητοι του χρόνου) συντελεστές είναι:  $a_k, k=1, 2, \dots, N$  και  $b_k, k=0, 1, \dots, M$ .

Η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές είναι ένας ανοικτός τύπος υπολογισμού της απόκρισης του συστήματος, δεδομένων βέβαια των σταθερών συντελεστών. Επομένως συνιστά έναν επαναληπτικό τρόπο υπολογισμού της εξόδου. Όταν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε οι αρχικές συνθήκες εισόδου είναι μηδενικές. Στην περίπτωση αυτή, για να υπολογιστεί η έξοδος  $y(0)$  απαιτούνται μόνον οι αρχικές συνθήκες εξόδου  $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ .

Για παράδειγμα, δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI σύστημα:

$$y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) - 4y(n-1) + 5y(n-2)$$

Η εξίσωση διαφορών γράφεται

$$y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) - [4y(n-1) - 5y(n-2)]$$

οπότε είναι προφανές ότι  $M=1, N=2$  και ότι οι σταθεροί συντελεστές είναι:

$$b_0 = 2, b_1 = 3, a_1 = 4, a_2 = -5$$

Είναι φανερό ότι η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές συνιστά έναν επαναληπτικό τρόπο υπολογισμού της εξόδου, γιατί για να υπολογιστεί η έξοδος σε μία χρονική στιγμή πρέπει να έχει υπολογιστεί η έξοδος τις δύο προηγούμενες χρονικές στιγμές.

Στη βιβλιογραφία, για παράδειγμα στο βιβλίο (Φωτόπουλος & Βελώνη, 2008), η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές εμφανίζεται και στη μορφή:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad (3.17)$$

Θεωρώντας ότι  $a_0 \neq 0$ , διαιρούμε και τα δύο μέλη με το συντελεστή  $a_0$  και προκύπτει μορφή αντίστοιχη της εξίσωσης διαφορών (3.16).

Για παράδειγμα, δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει ένα LTI σύστημα:

$$4y(n) = 3x(n) + 2x(n-2) - 4y(n-1) + 5y(n-2)$$

Διαιρώντας με το συντελεστή του  $y(n)$  η εξίσωση διαφορών γράφεται

$$y(n) = \frac{3}{4}x(n) + \frac{1}{2}x(n-2) - [y(n-1) - \frac{5}{4}y(n-2)]$$

οπότε είναι προφανές ότι  $M=2, N=2$  και ότι οι σταθεροί συντελεστές είναι:

$$b_0 = \frac{3}{4}, b_1 = 0, b_2 = \frac{1}{2}, a_1 = 1, a_2 = -\frac{5}{4}$$

Τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα (LTI) συστήματα (φίλτρα) διακρίνονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τη διάρκεια της κρουστικής τους απόκρισης:

- τα φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (Finite duration Impulse Response – FIR)
- τα φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (Infinite duration Impulse Response – IIR)

### 3.1.4.2. Συστήματα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης – FIR φίλτρα

Τα **φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (Finite duration Impulse Response – FIR)** περιγράφονται από την εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad (3.18)$$

και ονομάζονται **φίλτρα κινητού μέσου όρου (Moving Average – MA)** τάξης  $M$ .

Η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή ενός FIR φίλτρου εξαρτάται από εισόδους του συστήματος την ίδια και προηγούμενες χρονικές στιγμές.

Είναι φανερό ότι η εξίσωση διαφορών των FIR φίλτρων αποτελεί ειδική περίπτωση της (γενικής) γραμμικής εξίσωσης διαφορών της προηγούμενης παραγράφου, όπου λείπει το δεύτερο άθροισμα.

Η κρουστική απόκριση  $h(n)$  ενός φίλτρου πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης δίνεται από τη σχέση:

$$h(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot \delta(n-k) \quad (3.19)$$

Είναι φανερό ότι η κρουστική απόκριση είναι ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συντελεστές της εξίσωσης διαφορών που περιγράφει ένα FIR φίλτρο είναι ίδιοι με τους συντελεστές της κρουστικής απόκρισης του FIR φίλτρου.

Μπορείτε να διερευνήσετε τα FIR φίλτρα με το Διαδραστικό πρόγραμμα 3.1.



### Διαδραστικό πρόγραμμα 3.1 FIR φίλτρα.

Η κρουστική απόκριση ενός FIR φίλτρου είναι ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας. Όταν η είσοδος στο φίλτρο είναι άπειρης διάρκειας, τότε και η απόκριση του φίλτρου είναι άπειρης διάρκειας.

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y(n) = 8x(n) + 3x(n-1) - 2x(n-3),$$

που περιγράφει ένα FIR φίλτρο με  $M = 3$  και σταθερούς συντελεστές:

$$b_0 = 8, b_1 = 3, b_2 = 0, b_3 = -2$$

Παράδειγμα 2.

Φίλτρο πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης: FIR – MA

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα FIR φίλτρο

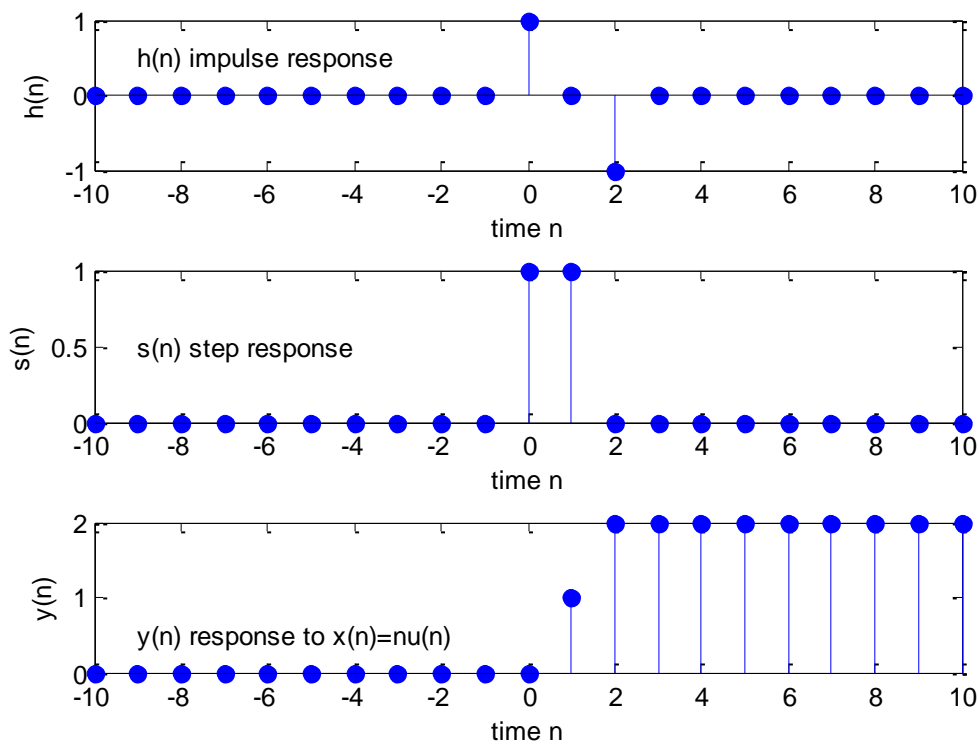
$$y(n) = x(n) - x(n-2)$$

Το φίλτρο είναι τάξης  $M = 2$  και οι συντελεστές είναι:

$$b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = -1$$

Στο Σχήμα 3.6 παρουσιάζονται:

- η κρουστική απόκριση  $h(n)$  του φίλτρου, δηλαδή η έξοδος του συστήματος για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$
- η βηματική απόκριση  $s(n)$  του φίλτρου, δηλαδή η έξοδος του συστήματος για είσοδο  $x(n) = u(n)$
- η απόκριση  $y(n)$  του φίλτρου για είσοδο  $x(n) = n \cdot u(n)$



Σχήμα 3.6 FIR φίλτρο.

### 3.1.4.3. Συστήματα άπειρης κρουστικής απόκρισης – IIR φίλτρα

Τα **φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (Infiniteduration Impulse Response – IIR)** περιγράφονται από τη γενική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) \quad (3.20)$$

και ονομάζονται **αυτοπαλινδρομούμενα φίλτρα κινητού μέσου όρου (AutoRegressive Moving Average – ARMA)** τάξης  $(N, M)$ .

Στην ειδική περίπτωση όπου  $M = 0$  και  $b_0 = 1$ , τα IIR φίλτρα περιγράφονται από την (ειδική) εξίσωση διαφορών:

$$y(n) = x(n) - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) \quad (3.21)$$

και ονομάζονται **αυτοπαλινδρομούμενα φίλτρα (AutoRegressive – AR)** τάξης  $N$ .

Η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή ενός IIR φίλτρου εξαρτάται από τις εξόδους του συστήματος τις προηγούμενες χρονικές στιγμές, όταν πρόκειται για AR φίλτρα, ή τόσο από εισόδους του συστήματος την ίδια και προηγούμενες χρονικές στιγμές όσο και από τις εξόδους του συστήματος τις προηγούμενες χρονικές στιγμές, όταν πρόκειται για ARMA φίλτρα. Πάντως και στις δύο περιπτώσεις, **η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή ενός IIR φίλτρου εξαρτάται από εξόδους του συστήματος τις προηγούμενες χρονικές στιγμές**. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι η εξίσωση διαφορών παρέχει τη δυνατότητα να περιγραφεί ένα σύστημα με κρουστική απόκριση άπειρης διάρκειας χρησιμοποιώντας ένα πεπερασμένο πλήθος συντελεστών.

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y(n) = x(n) + 8y(n-1) - 3y(n-2),$$

που περιγράφει ένα IIR φίλτρο με  $N = 2$  και σταθερούς συντελεστές:



$$a_1 = -8, a_2 = 3$$

Πρόκειται για AR φίλτροτάξης  $N = 2$ , όπου η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από τις εξόδους τις δύο προηγούμενες χρονικές στιγμές.

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y(n) = x(n) - x(n-1) + 8y(n-1) - 3y(n-2) - y(n-3),$$

που περιγράφει ένα IIR φίλτρο με  $M = 1$ ,  $N = 3$  και σταθερούς συντελεστές:

$$b_0 = 1, b_1 = -1, a_1 = -8, a_2 = 3, a_3 = 1$$

Πρόκειται για ARMA φίλτροτάξης  $(N, M) = (3, 1)$ , όπου η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται τόσο από τις εισόδους την ίδια και την προηγούμενη χρονική στιγμή, όσο και από τις από τις εξόδους τις τρεις προηγούμενες χρονικές στιγμές.

Η κρουστική απόκριση  $h(n)$  ενός φίλτρου άπειρης κρουστικής απόκρισης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$h(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot \delta(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k \cdot h(n-k) \quad (3.22)$$

Θεωρώντας ότι  $h(n) = 0, n < 0$ , έχουμε:

για  $0 \leq n \leq M$

$$h(0) = b_0$$

$$h(1) + a_1 \cdot h(0) = b_1$$

...

$$h(M) + a_1 \cdot h(M-1) + \dots + a_N \cdot h(0) = b_M$$

από όπου υπολογίζονται οι πρώτες  $M+1$  τιμές της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$ :

$$h(0) = b_0$$

$$h(1) = b_1 - a_1 \cdot h(0)$$

...

$$h(M) = b_M - a_1 \cdot h(M-1) - \dots - a_N \cdot h(0)$$

Για  $n \geq M+1$ , έχουμε:

$$h(n) = - \sum_{k=1}^N a_k \cdot h(n-k)$$

Παράδειγμα.

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει ένα IIR φίλτρο:

$$y(n) = b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n-1) - a_1 \cdot y(n-1)$$

Τότε, η κρουστική απόκριση  $h(n)$  ικανοποιεί τη σχέση:

$$h(n) = b_0 \cdot \delta(n) + b_1 \cdot \delta(n-1) - a_1 \cdot h(n-1), n \geq 0$$

Επομένως

για  $n = 0$  έχουμε

$$h(0) = b_0$$

για  $n = 1$  έχουμε

$$h(1) = b_1 - a_1 \cdot h(0)$$

για  $n \geq 2$  έχουμε

$$h(n) = -a_1 \cdot h(n-1)$$

Έτσι

$$h(0) = b_0$$

$$h(1) = b_1 - a_1 \cdot h(0) = b_1 - a_1 \cdot b(0)$$

$$h(2) = -a_1 \cdot h(1) = -a_1 \cdot [b_1 - a_1 \cdot b_0] = [-a_1] \cdot b_1 + [-a_1]^2 \cdot b_0$$

$$h(3) = -a_1 \cdot h(2) = -a_1 \cdot [-a_1 \cdot b_1 + a_1^2 \cdot b_0] = [-a_1]^2 \cdot b_1 + [-a_1]^3 \cdot b_0$$

κ.ο.κ., οπότε καταλήγουμε στις σχέσεις

$$h(0) = b_0$$

$$h(n) = [-a_1]^{n-1} \cdot b_1 + [-a_1]^n \cdot b_0, n \geq 1$$

Άρα

$$h(n) = [-a_1]^{n-1} \cdot b_1 \cdot u(n-1) + [-a_1]^n \cdot b_0 \cdot u(n)$$

Μπορείτε να διερευνήσετε τα IIR φίλτρα με  $N = 1$  και  $M = 1$  με το Διαδραστικό πρόγραμμα 3.2.



### Διαδραστικό πρόγραμμα 3.2 IIR φίλτρα.

Η κρουστική απόκριση ενός IIR φίλτρου είναι ένα σήμα άπειρης διάρκειας. Όταν η είσοδος στο φίλτρο είναι άπειρης διάρκειας, τότε και η απόκριση του φίλτρου είναι άπειρης διάρκειας.

Παράδειγμα 1.

Φίλτρο πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης: IIR –AR

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει ένα IIR φίλτρο:

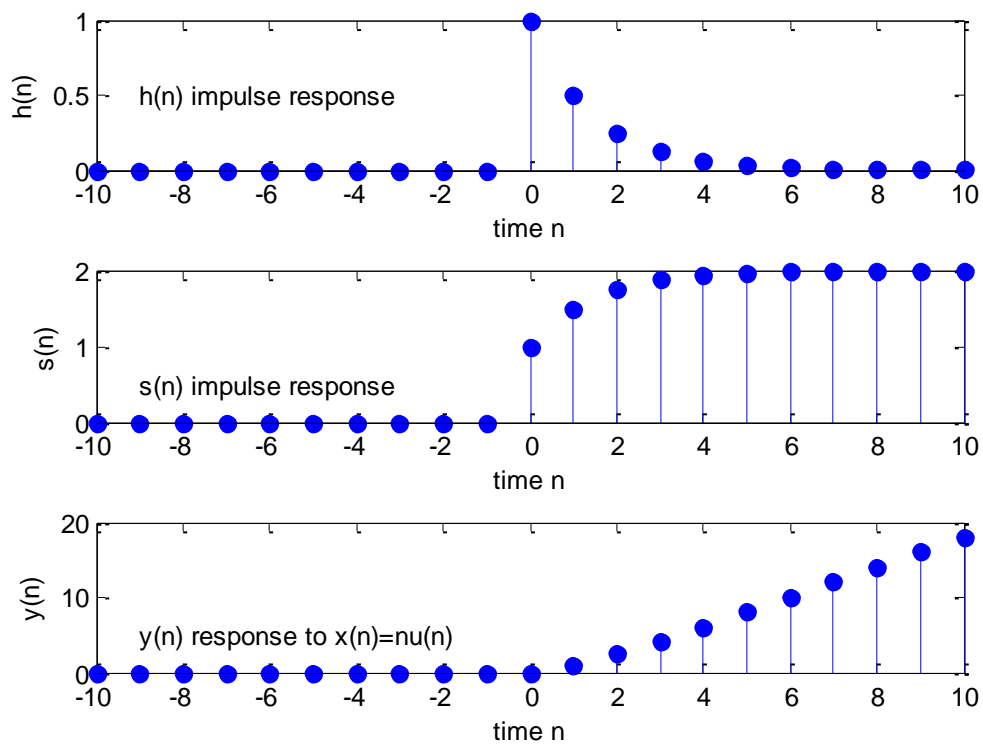
$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2} y(n-1)$$

Το φίλτρο είναι τάξης  $N = 1$  με συντελεστή

$$a_1 = -\frac{1}{2}.$$

Στο Σχήμα 3.7 παρουσιάζονται:

- η κρουστική απόκριση  $h(n)$  του φίλτρου, δηλαδή η έξοδος του συστήματος για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$
- η βηματική απόκριση  $s(n)$  του φίλτρου, δηλαδή η έξοδος του συστήματος για είσοδο  $x(n) = u(n)$
- η απόκριση  $y(n)$  του φίλτρου για είσοδο  $x(n) = n \cdot u(n)$



Σχήμα 3.7 IIR-AR φίλτρο.

Παράδειγμα 2.

Φίλτρο πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης: IIR –ARMA

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει ένα IIR φίλτρο:

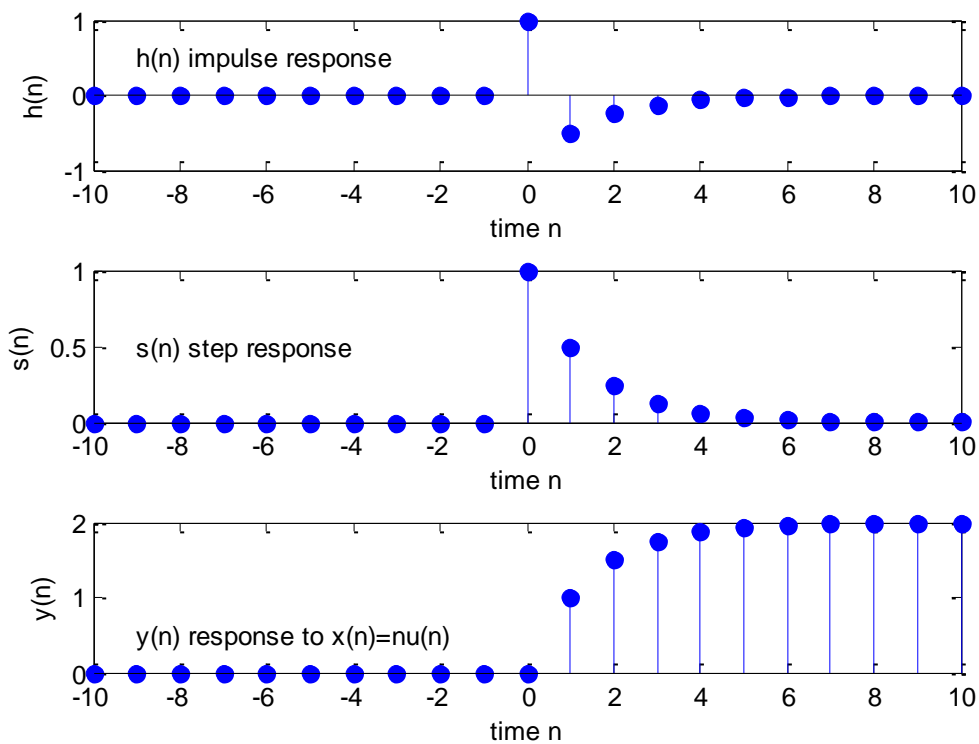
$$y(n) = x(n) - x(n-1) + \frac{1}{2}y(n-1)$$

Το φίλτρο είναι τάξης  $(N, M) = (1, 1)$  με συντελεστή:

$$a_1 = -\frac{1}{2}.$$

Στο Σχήμα 3.8 παρουσιάζονται:

- η κρουστική απόκριση  $h(n)$  του φίλτρου, δηλαδή η έξοδος του συστήματος για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$
- η βηματική απόκριση  $s(n)$  του φίλτρου, δηλαδή η έξοδος του συστήματος για είσοδο  $x(n) = u(n)$
- η απόκριση  $y(n)$  του φίλτρου για είσοδο  $x(n) = n \cdot u(n)$



Σχήμα 3.8 IIR-ARMA φίλτρο.

### 3.1.4.4. Επίλυση εξισώσεων διαφορών για IIR φίλτρα

Κάθε IIR φίλτρο περιγράφεται από τη γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y(n) = x(n) - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k)$$

όταν πρόκειται για ARφίλτρο

ή από τη γενικότερη γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k)$$

όταν πρόκειται για ARMAφίλτρο.

Η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές συνιστά έναν επαναληπτικό τρόπο υπολογισμού της εξόδου, γιατί για να υπολογιστεί η έξοδος σε μία χρονική στιγμή πρέπει να έχει υπολογιστεί η έξοδος σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Έτσι, η μορφή αυτή των IIRφίλτρων είναι ανοιχτή μορφή, γιατί η έξοδος υπολογίζεται επαναληπτικά.

Το γεγονός η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή ενός IIRφίλτρου εξαρτάται από εξόδους του συστήματος τις προηγούμενες χρονικές στιγμές οδηγεί στην αναγκαιότητα να υπάρχουν **αρχικές συνθήκες**. Το πλήθος των αρχικών συνθηκών είναι ίσο με την τιμή του  $N$ , δηλαδή της τάξης  $N$  του IIR-ARφίλτρου ή του μέρους  $N$  της τάξης  $(N, M)$  του IIR-ARMAφίλτρου. Έτσι, οι απαιτούμενες  $N$  αρχικές συνθήκες είναι:

$$y(-1), y(-2), \dots, y(-N).$$

Για παράδειγμα, δίνεται η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y(n) = x(n) - y(n-1)$$

που περιγράφει ένα IIR-ARφίλτρο.

Είναι προφανές ότι:

για να υπολογιστεί η έξοδος  $y(0)$  απαιτείται η γνώση της προηγούμενης εξόδου  $y(-1)$ ,

για να υπολογιστεί η έξοδος  $y(1)$  απαιτείται η γνώση της προηγούμενης εξόδου  $y(0)$ , για να υπολογιστεί η έξοδος  $y(2)$  απαιτείται η γνώση της προηγούμενης εξόδου  $y(1)$  κ.ο.κ.. Αν λοιπόν το φίλτρο «δουλεύει» για τις χρονικές στιγμές  $n \geq 0$ , τότε η έξοδος  $y(-1)$  δεν είναι διαθέσιμη. Επομένως, χρειάζεται μία αρχική συνθήκη, η τιμή  $y(-1)$ , για να «δουλέψει» το φίλτρο, δηλαδή για να αρχίσει να παράγει εξόδους.

Επίλυση των εξισώσεων διαφορών για ΠΡ φίλτρα ονομάζεται ο υπολογισμός κλειστής μορφής των ΠΡ φίλτρων, δηλαδή η εύρεση μη επαναληπτικών τύπων για τον υπολογισμό της εξόδου του φίλτρου, οπότε η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή υπολογίζεται απ'ευθείας γνωρίζοντας μόνο τον χρόνο, χωρίς να απαιτείται η γνώση προηγούμενων εξόδων.

### Μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων διαφορών για ΠΡ φίλτρα

Η μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων διαφορών για ΠΡ φίλτρα προϋποθέτει τη γνώση της εξίσωσης διαφορών

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k)$$

με τις αρχικές συνθήκες  $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ .

Η **γενική λύση** της εξίσωσης διαφορών, δηλαδή η κλειστή μορφή της εξόδου, δίνεται από τη σχέση:

$$y(n) = y_p(n) + y_h(n) \quad (3.23)$$

και είναι ίση με το άθροισμα της μερικής λύσης  $y_p(n)$  της ομογενούς λύσης  $y_h(n)$ .

Η **μερική λύση (partial solution)**  $y_p(n)$  αντιστοιχεί στην **απόκριση του συστήματος για δεδομένη είσοδο και με μηδενικές αρχικές συνθήκες**. Στον Πίνακα 3.1. δίνεται η μερική λύση όταν είναι δεδομένη η είσοδος. Όταν η είσοδος αποτελείται από άθροισμα τέτοιων εισόδων, τότε η μερική λύση αποτελείται από άθροισμα τέτοιων μερικών λύσεων.

Είσοδος	Μερική λύση
$c$	$c_1$
$c \cdot \delta(n)$	0
$c \cdot u(n)$	$c_1$
$c \cdot n$	$c_1 \cdot n + c_2$
$c \cdot a^n$	$c_1 \cdot a^n$
$c \cdot \cos(\omega \cdot n)$	$c_1 \cdot \sin(\omega \cdot n) + c_2 \cdot \cos(\omega \cdot n)$
$c \cdot a^n \cdot \cos(\omega \cdot n)$	$c_1 \cdot a^n \cdot \sin(\omega \cdot n) + c_2 \cdot a^n \cdot \cos(\omega \cdot n)$

**Πίνακας 3.1** Μερική λύση εξισώσεων διαφορών.

Παρατήρηση.

Όταν η είσοδος στο φίλτρο είναι η κρουστική συνάρτηση  $\delta(n)$ , τότε η μερική λύση είναι  $y_h(n) = 0$ .

**Ομογενής λύση (homogenous solution)**  $y_h(n)$  αντιστοιχεί στην **απόκριση του συστήματος για μηδενική είσοδο και με δεδομένες αρχικές συνθήκες**. Στην περίπτωση αυτή, δηλαδή όταν  $x(n) = 0$ , η εξίσωση διαφορών γράφεται:

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) = 0 \quad (3.24)$$

και ονομάζεται **ομογενής εξίσωση διαφορών**.

Ομογενής λύση έχει τη μορφή

$$y_h(n) = z^n \quad (3.25)$$

Η αντικατάσταση της ομογενούς λύσης στην ομογενή εξίσωση διαφορών δίνει:

$$z^n + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{n-k} = 0 \Rightarrow z^{n-N} [z^N + a_1 \cdot z^{N-1} + \dots + a_{N-1} \cdot z + a_N] = 0$$

που οδηγεί στην **χαρακτηριστική εξίσωση**

$$z^N + a_1 \cdot z^{N-1} + \dots + a_{N-1} \cdot z + a_N = 0 \quad (3.26)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι βαθμού  $N$ , όπως το αντίστοιχο **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**  $f(z) = z^N + a_1 \cdot z^{N-1} + \dots + a_{N-1} \cdot z + a_N$  και έχει  $N$  ρίζες  $z_k, k=1, 2, \dots, N$ .

Η μορφή της ομογενούς λύσης εξαρτάται από το είδος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Συγκεκριμένα,

- αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει **απλές** (διακεκριμένες) ρίζες, τότε η ομογενής λύση δίνεται από τον τύπο:

$$y_h(n) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot z_k^n, n \geq 0 \quad (3.27)$$

με προσδιοριστέους συντελεστές  $A_k, k=1, 2, \dots, N$

- αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει κάποια πολλαπλή ρίζα, έστω  $z_1$  με **πολλαπλότητα**  $m$ , τότε η ομογενής λύση δίνεται από τον τύπο:

$$y_h(n) = [A_1 + A_2 \cdot n + \dots + A_m \cdot n^{m-1}] \cdot z_1^n + \sum_{k=m+1}^N A_k \cdot z_k^n \quad (3.28)$$

με προσδιοριστέους συντελεστές  $A_k, k=1, 2, \dots, N$ .

Στις λύσεις (3.27) και (3.28) ο υπολογισμός (προσδιορισμός) των συντελεστών γίνεται λύνοντας ένα σύστημα  $N$  εξισώσεων με  $N$  αγνώστους (τους συντελεστές  $A_k, k=1, 2, \dots, N$ ). Οι  $N$  εξισώσεις του συστήματος προκύπτουν από την εξίσωση της αρχικής εξίσωσης διαφορών με τη γενική λύση, αντικαθιστώντας σε αυτή την ισότητα τις αρχικές συνθήκες για  $n=0, 1, \dots, N-1$ .

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η εξίσωση διαφορών

$$y(n) = x(n) + 2y(n-1)$$

με αρχική συνθήκη:  $y(-1) = 0$ .

Πρόκειται για IIR-ARφίλτρο τάξης  $N=1$ .

Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση  $h(n)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$ .

Η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών είναι:

$$y(n) = y_p(n) + y_h(n)$$

Επειδή η είσοδος είναι  $x(n) = \delta(n)$ , σύμφωνα με τον Πίνακα 3.1, η μερική λύση είναι:

$$y_p(n) = 0$$

Ομογενής λύση έχει τη μορφή

$$y_h(n) = z^n$$

Η αντικατάσταση της ομογενούς λύσης στην ομογενή εξίσωση διαφορών

$$y(n) - 2y(n-1) = 0$$

δίνει:

$$z^n - 2z^{n-1} = 0 \Rightarrow z^{n-1} [z - 2] = 0$$

που οδηγεί στην χαρακτηριστική εξίσωση

$$z - 2 = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $f(z) = z - 2$  είναι πρώτου βαθμού και έχει μία ρίζα  $z_1 = 2$ , οπότε η ομογενής λύση γράφεται:

$$y_h(n) = A \cdot z_1^n = A \cdot 2^n$$

Έτσι, η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών δίνεται από τον τύπο:

$$y(n) = y_p(n) + y_h(n) = 0 + A \cdot 2^n = A \cdot 2^n$$

Για  $n=0$ , από την αρχική εξίσωση διαφορών έχουμε:

$$y(0) = x(0) + 2y(-1) = \delta(0) + 2 \cdot 0 = 1 + 0 = 1$$

και από τη γενική λύση έχουμε:

$$y(0) = A \cdot 2^0 = A \cdot 1 = A$$

Επομένως ο συντελεστής είναι  $A=1$ .

Συνεπώς, η γενική λύση γράφεται

$$y(n) = 2^n, \text{ που έχει νόημα για } n \geq 0.$$

Δηλαδή η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι

$$h(n) = 2^n \cdot u(n).$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ρίζα  $z_1 = 2$  του χαρακτηριστικού πολυωνύμου εμφανίζεται στη λύση.

Αν η αρχική συνθήκη μεταβληθεί σε  $y(-1) = 2$ , τότε

για  $n=0$ , από την αρχική εξίσωση διαφορών έχουμε:

$$y(0) = x(0) + 2y(-1) = \delta(0) + 2 \cdot 2 = 1 + 4 = 5$$

και από τον κλειστό τύπο της λύσης έχουμε:

$$y(0) = A \cdot 2^0 = A \cdot 1 = A$$

Επομένως ο συντελεστής είναι  $A=5$ .

Η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών γίνεται

$$y(n) = 5 \cdot 2^n, \text{ που έχει νόημα για } n \geq 0.$$

Δηλαδή η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι

$$h(n) = 5 \cdot 2^n \cdot u(n).$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η μεταβολή στην αρχική συνθήκη, δεν προκαλεί μεταβολή στη μορφή της λύσης (παραμένει εκθετική), αλλά προκαλεί μεταβολή μόνο στο πλάτος.

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η εξίσωση διαφορών

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{9} y(n-2)$$

με αρχικές συνθήκες:  $y(-1) = 0, y(-2) = 0$ .

Πρόκειται για IIR-ARφίλτρο τάξης  $N=2$ .

Να υπολογίσετε τη βηματική απόκριση  $s(n)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο

$$x(n) = u(n).$$

Η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών είναι:

$$y(n) = y_p(n) + y_h(n)$$

Από τον Πίνακα 3.1, η μερική λύση είναι:

$$y_p(n) = c$$

γιατί η είσοδος είναι σταθερή:  $x(n) = u(n)$ .

Αντικαθιστώντας τη μερική λύση στην εξίσωση διαφορών έχουμε:

$$y_p(n) = x(n) + \frac{1}{9} y_p(n-2) \Rightarrow c = 1 + \frac{1}{9} \cdot c \Rightarrow c = \frac{9}{8}$$

δηλαδή, η μερική λύση είναι:

$$y_p(n) = \frac{9}{8}$$

Ομογενής λύση έχει τη μορφή

$$y_h(n) = z^n$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$z^2 - \frac{1}{9} = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $f(z) = z^2 - \frac{1}{9}$  είναι δεύτερου βαθμού και έχει 2 διακεκριμένες ρίζες

$z_1 = \frac{1}{3}, z_2 = -\frac{1}{3}$ , οπότε η ομογενής λύση γράφεται

$$y_h(n) = A_1 \cdot z_1^n + A_2 \cdot z_2^n = A_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + A_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Συνεπώς, η γενική λύση γράφεται:

$$y(n) = \frac{9}{8} + A_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + A_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Για  $n=0$ , από την εξίσωση διαφορών, τη γενική λύση της και τις αρχικές συνθήκες, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = x(0) + \frac{1}{9} y(-2) = u(0) + \frac{1}{9} \cdot 0 = 1 \\ y(0) = \frac{9}{8} + A_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 + A_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{9}{8} + A_1 + A_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{9}{8} + A_1 + A_2 = 1 \Rightarrow A_1 + A_2 = -\frac{1}{8}$$

Για  $n=1$ , από την εξίσωση διαφορών, τη γενική λύση της και τις αρχικές συνθήκες, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(1) = x(1) + \frac{1}{9} y(-1) = u(1) + \frac{1}{9} \cdot 0 = 1 \\ y(1) = \frac{9}{8} + A_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + A_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{9}{8} + \frac{1}{3} A_1 - \frac{1}{3} A_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{9}{8} + \frac{1}{3} A_1 - \frac{1}{3} A_2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} A_1 - \frac{1}{3} A_2 = -\frac{1}{8}$$

Έτσι προκύπτει το σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τους συντελεστές  $A_1, A_2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 = -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} A_1 - \frac{1}{3} A_2 = -\frac{1}{8} \end{array} \right\}$$

με λύση:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = -\frac{1}{4} \\ A_2 = \frac{1}{8} \end{array} \right\}$$

Συνεπώς έχουμε:

$$y(n) = \frac{9}{8} + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \text{ που έχει νόημα για } n \geq 0.$$

Άρα, η γενική λύση είναι:

$$y(n) = \left(\frac{9}{8} + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \cdot u(n)$$

Αξιίζει να σημειωθεί ότι ρίζες  $z_1 = \frac{1}{3}, z_2 = -\frac{1}{3}$  του χαρακτηριστικού πολυωνύμου εμφανίζονται στη λύση.

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η εξίσωση διαφορών

$$y(n) = x(n) - x(n-1) + \frac{3}{4} y(n-1) - \frac{1}{8} y(n-2)$$

με αρχικές συνθήκες:  $y(-1) = 0, y(-2) = 0$ .

Πρόκειται για IIR-ARMA φίλτρο τάξης  $(N, M) = (2, 1)$ .

Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση  $h(n)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο

$$x(n) = \delta(n).$$

Η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών είναι:

$$y(n) = y_p(n) + y_h(n)$$

Επειδή η είσοδος είναι  $x(n) = \delta(n)$ , σύμφωνα με τον Πίνακα 3.1, η μερική λύση είναι:

$$y_p(n) = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$z^2 - \frac{3}{4} z + \frac{1}{8} = 0$$



Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $f(z) = z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}$  είναι δεύτερου βαθμού και έχει δύο διακεκριμένες ρίζες  $z_1 = \frac{1}{2}, z_2 = \frac{1}{4}$ , οπότε η ομογενής λύση γράφεται:

$$y_h(n) = A_1 \cdot z_1^n + A_2 \cdot z_2^n = A_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Συνεπώς, η γενική λύση γράφεται:

$$y(n) = A_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Για  $n=0$ , από την εξίσωση διαφορών, τη γενική λύση της και τις αρχικές συνθήκες, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = x(0) - x(-1) + \frac{3}{4}y(-1) - \frac{1}{8}y(-2) = \delta(0) - \delta(-1) + \frac{3}{4} \cdot 0 - \frac{1}{8} \cdot 0 = 1 \\ y(0) = A_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + A_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 = A_1 + A_2 \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 + A_2 = 1$$

Για  $n=1$ , από την εξίσωση διαφορών, τη γενική λύση της και τις αρχικές συνθήκες, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(1) = x(1) - x(0) + \frac{3}{4}y(0) - \frac{1}{8}y(-1) = \delta(1) - \delta(0) + \frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{1}{8} \cdot 0 = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \\ y(1) = A_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + A_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{4}A_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{4}A_2 = -\frac{1}{4}$$

Έτσι προκύπτει το σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τους συντελεστές  $A_1, A_2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 = 1 \\ \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{4}A_2 = -\frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

με λύση:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = -2 \\ A_2 = 3 \end{array} \right\}$$

Συνεπώς, η γενική λύση γράφεται:

$$y(n) = (-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n, \text{ που έχει νόημα για } n \geq 0.$$

Άρα η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι

$$h(n) = \left( (-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) \cdot u(n)$$

Παράδειγμα 4.

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = x(n) - c \cdot y(n-1)$$

με  $y(n) = 0, n < 0$

που περιγράφει ένα IIR-AR φίλτρο με  $N=1$  και σταθερό συντελεστή:  $a(1) = c$ .

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι η έξοδος  $y(n) = h(n)$  του φίλτρου για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$  και υπολογίζεται ως εξής:

$$y(0) = \delta(0) - c \cdot y(-1) = 1 - c \cdot 0 = 1$$

$$y(1) = \delta(1) - c \cdot y(0) = 0 - c \cdot 1 = -c$$

$$y(2) = \delta(2) - c \cdot y(1) = 0 - c \cdot (-c) = c^2$$

$$y(3) = \delta(3) - c \cdot y(2) = 0 - c \cdot c^2 = -c^3$$

...

$$y(n) = (-1)^n \cdot c^n = (-c)^n$$

Επομένως, έχουμε:

$$y(n) = (-c)^n, n \geq 0$$

Άρα, η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(n) = (-c)^n \cdot u(n)$$

Είναι προφανές ότι η κρουστική απόκριση είναι άπειρης διάρκειας.

### 3.1.4.5. Φίλτρο μέσης τιμής

Η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y_M(n) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} x(n-k) \quad (3.29)$$

περιγράφει ένα FIR φίλτρο τάξης  $M-1$  με ίσους συντελεστές  $b_0 = b_1 = \dots = b_{M-1} = \frac{1}{M}$ .

Το φίλτρο αυτό παράγει στην έξοδο το μέσο όρο των  $M$  προηγούμενων εισόδων και ονομάζεται φίλτρο μέσης τιμής τάξης  $M$ . Τα φίλτρα μέσης τιμής είναι χρήσιμα στην Επεξεργασία Σημάτων.

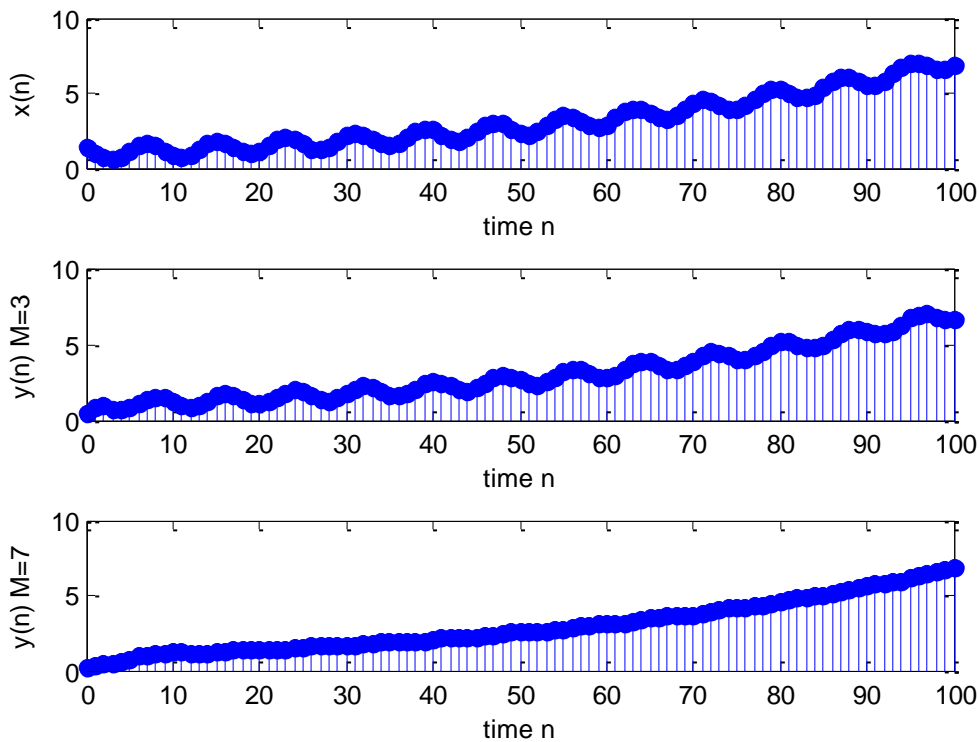
Εφαρμογή. Απομάκρυνση ημιτονοειδούς θορύβου

Τα φίλτρα μέσης τιμής μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απομάκρυνση ανεπιθύμητου ημιτονοειδούς θορύβου. Για παράδειγμα, αν ένα σήμα αποτελείται από ένα χρήσιμο περίπου σταθερό τμήμα  $x_1(n) = (1.02)^n$

και από έναν ανεπιθύμητο ημιτονοειδή θόρυβο  $x_2(n) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n + \frac{\pi}{4}\right)$ , τότε το συνολικό σήμα είναι:

$$x(n) = (1.02)^n + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n + \frac{\pi}{4}\right)$$

Αν το σήμα  $x(n)$  είναι είσοδος σε ένα φίλτρο μέσης τιμής τάξης  $M$ , τότε η έξοδος του φίλτρου υπολογίζει στην έξοδο το μέσο όρο των  $M$  προηγούμενων εισόδων και έτσι απαλείφει τον ανεπιθύμητο θόρυβο, αφού η έξοδος του φίλτρου μέσης τιμής προσεγγίζει τον χρήσιμο σήμα. Στο Σχήμα 3.9 παρουσιάζεται η είσοδος  $x(n)$  του φίλτρου μέσης τιμής και οι έξοδοι  $y_3(n)$  του φίλτρου μέσης τιμής τάξης  $M=2$  και  $y_7(n)$  του φίλτρου μέσης τιμής τάξης  $M=6$ . Είναι φανερό ότι όσο η τάξη του φίλτρου αυξάνει, τόσο καλύτερα γίνεται η απομάκρυνση του θορύβου. Το τίμημα είναι ότι το φίλτρο αργεί να παράγει αποτέλεσμα, γιατί όσο η τάξη του φίλτρου αυξάνει, τόσο η παραγωγή αποτελέσματος αργεί, επειδή ο υπολογισμός της εξόδου απαιτεί προηγούμενες εισόδους. Αυτό αντιμετωπίζεται με τον υπολογισμό του μέσου όρου των διαθέσιμων εισόδων, μέχρι να είναι όλες (και οι  $M$ ) διαθέσιμες.



Σχήμα 3.9 FIR φίλτρο μέσης τιμής.

### 3.1.5. Συστήματα διακριτού χρόνου σε προγραμματιστικό περιβάλλον

#### 1-0-3-0-0-0

Χρήσιμη βιβλιογραφία για Matlab είναι το βιβλίο TheMathWorksInc., 2005. Χρήσιμη ξενόγλωσση βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι τα βιβλία IngleandProakis, 2003 και Leis, 2011. Χρήσιμη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι τα βιβλία Ασημάκης, 2008 (για σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου) και Παρασκευάς, 2014 (για σήματα και συστήματα συνεχούς χρόνου). Χρήσιμη βιβλιογραφία για Octave είναι τα βιβλία Eaton, Bateman, Hauberg, Wehbring, 2011 και Hansen, 2011.

Η συνάρτηση  $[y]=\text{filter}(b,a,x)$  χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της απόκρισης ενός LTI συστήματος διακριτού χρόνου. Η συνάρτηση έχει εισόδους τους συντελεστές  $b$  και της εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει το LTI σύστημα και την είσοδο  $x$  του συστήματος. Η συνάρτηση έχει έξοδο την έξοδο  $y$  του συστήματος. Για παράδειγμα, για να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) - 4y(n-2)$$

δηλαδή η έξοδος του συστήματος για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$

απαιτείται η παραγωγή της εισόδου  $d$  και στη συνέχεια απαιτείται η κλήση

$$b=[2, 3]; a=[1, 0, 4]; [y]=\text{filter}(b,a,d)$$

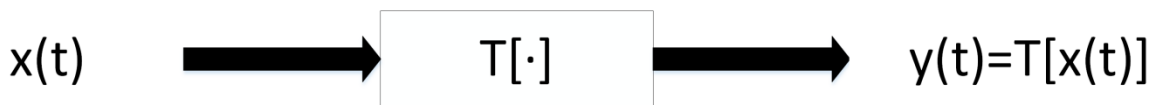
## 3.2. Συστήματα συνεχούς χρόνου

#### 1-2-0-0-5-6

### 3.2.1. Ορισμός

Ένα **σύστημα συνεχούς χρόνου** (φίλτρο) είναι ένας μετασχηματισμός (transform) του σήματος εισόδου σε ένα σήμα εξόδου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.10. Το σύστημα συνεχούς χρόνου έχει είσοδο ένα σήμα

συνεχούς χρόνου  $x(t)$  και έξοδο ένα άλλο σήμα συνεχούς χρόνου  $y(t)=T[x(t)]$ , όπου ο μετασχηματισμός συμβολίζεται με  $T[\cdot]$ . Η έξοδος του συστήματος ονομάζεται **απόκριση** του συστήματος.



**Σχήμα 3.10** Σύστημα συνεχούς χρόνου.

Χρήσιμη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία είναι τα βιβλία Θεοδωρίδης, Μπερμπερίδης, Κοφίδης, 2003, Καλουπτσίδης, 1994, Καραγιάννης & Μαραγκός, 2010, Καραγιάννης & Τζιτζιράχου, 2003, Καραμπογιάς, 2009, Μάργαρης, 2014, Μουστακίδης, 2004, Παρασκευάς, 2014, Σκόδρας & Αναστασόπουλος, 2003, Φωτόπουλος & Βελώνη, 2008.

### 3.2.2. Ιδιότητες συστημάτων συνεχούς χρόνου

#### 3.2.2.1. Αρχή της επαλληλίας ή αρχή της υπέρθεσης

Η **αρχή της επαλληλίας** ή **αρχή της υπέρθεσης** εκφράζεται με τον τύπο:

$$T\left[\sum_{i=1}^N x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^N T[x_i(t)] \quad (3.30)$$

Η σημασία της αρχής της επαλληλίας είναι ότι αν στο σύστημα τεθεί ως είσοδος το άθροισμα επιμέρους εισόδων, τότε το σύστημα παράγει μία απόκριση, που είναι το άθροισμα των επί μέρους αποκρίσεων. Σε ένα σύστημα που υπακούει στην αρχή της επαλληλίας, η συνολική επίδραση στο σύστημα λόγω επί μέρους εισόδων που αθροίζονται είναι ίση με το άθροισμα των επιδράσεων στο σύστημα των επί μέρους εισόδων.

#### 3.2.2.2. Ομογένεια

Η **ομογένεια** εκφράζεται με τον τύπο:

$$T[c \cdot x(t)] = c \cdot T[x(t)] \quad (3.31)$$

όπου  $c$  είναι πραγματικός αριθμός.

Η σημασία της ομογένειας είναι ότι αν στο σύστημα τεθεί ως είσοδος ένα πολλαπλάσιο ενός αρχικού σήματος, τότε το σύστημα παράγει μία απόκριση, που είναι το ίδιο πολλαπλάσιο της απόκρισης του συστήματος στην είσοδο του αρχικού σήματος.

#### 3.2.2.3. Γραμμικότητα

Η **γραμμικότητα** εκφράζεται με τον τύπο:

$$T\left[\sum_{i=1}^N c_i \cdot x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^N c_i \cdot T[x_i(t)] \quad (3.32)$$

για οποιεσδήποτε σταθερές  $c_i, i=1,2,\dots,N$ .

Αν ένα σύστημα υπακούει στην αρχή της επαλληλίας και είναι ομογενές, τότε το σύστημα είναι **γραμμικό (linear)**. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα γραμμικό σύστημα, αν η είσοδος ενός συστήματος είναι ο γραμμικός συνδυασμός σημάτων, τότε η έξοδος του συστήματος είναι ίση με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων του συστήματος στις εισόδους.

#### 3.2.2.4. Χρονική Αμεταβλητότητα

Η **χρονική αμεταβλητότητα** εκφράζεται με τον τύπο:

$$y(t) = T[x(t)] \Rightarrow y(t - t_0) = T[x(t - t_0)] \quad (3.33)$$

Η σημασία της χρονικής αμεταβλητότητας είναι ότι αν στο σύστημα τεθεί ως είσοδος ένα σήμα μετατοπισμένο στον χρόνο (καθυστέρηση ή πρωτοπορία), τότε το σύστημα παράγει μία νέα απόκριση, που είναι η απόκριση του συστήματος στο αρχικό (μη μετατοπισμένο σήμα), το ίδιο μετατοπισμένη στον χρόνο. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα είναι **χρονικά αμετάβλητο (time invariant)**.

### 3.2.2.5. Γραμμικότητα και Χρονική Αμεταβλητότητα

Ένα σύστημα που συνδυάζει την ιδιότητα της γραμμικότητας και της χρονικής αμεταβλητότητας ονομάζεται **γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (Linear Time Invariant – LTI)** σύστημα.

### 3.2.2.6. Αιτιότητα

Η **αιτιότητα** εκφράζεται με τον τύπο:

$$y(t = t_0) = f(x(t \leq t_0)) \quad (3.34)$$

που σημαίνει ότι η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από εισόδους της ίδιας χρονικής στιγμής ή προηγούμενων χρονικών στιγμών. Επομένως, οι μεταβολές στην έξοδο του συστήματος, ποτέ δεν προηγούνται των μεταβολών στην είσοδο του συστήματος, δηλαδή η είσοδος αποτελεί την αιτία των μεταβολών στην έξοδο. Όταν δεν συμβαίνει αυτό, τότε το σύστημα είναι μη **αιτιατό** ή **αναιτιατό**.

### 3.2.2.7. Ευστάθεια

Η ευστάθεια ενός συστήματος δίνει πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο που ανταποκρίνεται η απόκριση του συστήματος σε μία διαταραχή πεπερασμένου πλάτους. Ένα σύστημα είναι **ευσταθές (stable)**, όταν **κάθε φραγμένη είσοδος παράγει επίσης φραγμένη έξοδο**. Η ευστάθεια (stability) εκφράζεται με τον τύπο:

$$|x(t)| = L_x < +\infty \Rightarrow |y(t)| = L_y < +\infty \quad (3.35)$$

(όπου  $L_x$  και  $L_y$  θετικοί αριθμοί), που σημαίνει ότι όταν η είσοδος είναι φραγμένη, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη. Όταν συμβαίνει αυτό, τότε το σύστημα είναι ευσταθές (stable), ενώ όταν δεν συμβαίνει, τότε το σύστημα είναι ασταθές. Αυτού του είδους η ευστάθεια ονομάζεται **BIBOευστάθεια (BoundedInputBoundedOutput)**.

### 3.2.2.8. Αντιστρεψιμότητα

Η **αντιστρεψιμότητα** εκφράζεται με τον τύπο:

$$x_1(t) \neq x_2(t) \Rightarrow y_1(t) = T[x_1(t)] \neq y_2(t) = T[x_2(t)] \quad (3.36)$$

Ένα σύστημα είναι αντιστρέψιμο, όταν η είσοδος μπορεί να προσδιοριστεί από την έξοδο με μοναδικό τρόπο. Το αντιστρέψιμο σύστημα παράγει διαφορετικές εξόδους για διαφορετικές εισόδους.

Αν ένα σύστημα είναι αντιστρέψιμο (δηλαδή υπάρχει το αντίστροφο σύστημα) και συνδέσουμε σε σειρά το σύστημα και το αντίστροφο σύστημα, τότε η είσοδος του συστήματος είναι ίση με την έξοδο του αντίστροφου συστήματος.

## 3.2.3. Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα – LTI Συστήματα

### 3.2.3.1. Απόκριση μοναδιαίου παλμού

**Απόκριση μοναδιαίου παλμού**,  $h(t)$ , ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος ονομάζεται η έξοδος (απόκριση)  $y(t) = h(t)$  του συστήματος στην είσοδο μοναδιαίου παλμού  $x(t) = \delta(t)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.11. Η απόκριση μοναδιαίου παλμού ενός LTI συστήματος εκφράζει τη συμπεριφορά του συστήματος όταν στην είσοδο συμβεί ένα μεμονωμένο ξαφνικό γεγονός (μοναδιαίος παλμός).



Σχήμα 3.11 Απόκριση μοναδιαίου παλμού.

Από το Σχήμα 3.11 είναι φανερό ότι θεωρώντας το σήμα μοναδιαίου παλμού  $\delta(t)$ , ως είσοδο του LTI συστήματος, δηλαδή  $x(t) = \delta(t)$ , τότε η απόκριση  $y(t)$  του συστήματος είναι ίση με την απόκριση μοναδιαίου παλμού του συστήματος, δηλαδή  $y(t) = h(t)$  και ταυτίζεται με τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση, δηλαδή ισχύει:

$$y(t) = h(t) = h(t) * \delta(t) \quad (3.37)$$

ως άμεση συνέπεια της ιδιότητας του ταυτοτικού στοιχείου της γραμμικής συνέλιξης του προηγούμενου κεφαλαίου.

Γενικεύοντας, σε ένα **γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (Linear Time Invariant – LTI)** με γνωστή απόκριση μοναδιαίου παλμού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.12, η είσοδος  $x(t)$  και η έξοδος (απόκριση)  $y(t)$  συνδέονται με τη σχέση:

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (3.38)$$

δηλαδή η απόκριση  $y(n)$  ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος είναι ίση με τη συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$  με την είσοδο  $x(n)$ .



Σχήμα 3.12 LTI σύστημα συνεχούς χρόνου.

### Απόδειξη.

Σύμφωνα με τον τύπο της ανάλυσης σημάτων συνεχούς χρόνου του προηγούμενου κεφαλαίου, η είσοδος του LTI συστήματος προσεγγίζεται με το κλιμακωτό σήμα:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \cdot \Delta$$

και τότε η έξοδος (απόκριση) του LTI συστήματος είναι:

$$\tilde{y}(t) = T[\tilde{x}(t)]$$

Η έξοδος γράφεται:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= T[\tilde{x}(t)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \cdot \Delta\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T[x(k\Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \cdot \Delta] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot T[\delta_{\Delta}(t - k\Delta) \cdot \Delta] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \tilde{h}(t - k\Delta) \cdot \Delta \end{aligned}$$

επειδή

- το LTI σύστημα είναι γραμμικό οπότε ισχύει η αρχή της επαλληλίας, με αποτέλεσμα ο μετασχηματισμός και το άθροισμα να μπορούν να αντιμετατεθούν

- το LTI σύστημα είναι γραμμικό οπότε είναι ομογενές, με αποτέλεσμα οι συντελεστές  $x(k\Delta)$  που δεν εξαρτώνται από τον χρόνο  $t$  να μπορούν πολλαπλασιαστούν με τον μετασχηματισμό.

- το LTI σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, γεγονός που σημαίνει ότι  $y(t - k\Delta) = T[x(t - k\Delta)]$ , οπότε και  $\tilde{h}(t - k\Delta) = T[\delta_{\Delta}(t - k\Delta)]$  για είσοδο  $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$ .

Όταν  $\Delta \rightarrow 0$ , τότε  $\delta_\Delta(t) \rightarrow \delta(t)$ ,  $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$ ,  $\tilde{y}(t) \rightarrow y(t)$ ,  $\tilde{h}(t) \rightarrow h(t)$

Οπότε

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \tilde{y}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \tilde{h}(t - k\Delta) \cdot \Delta$$

Όταν  $\Delta \rightarrow 0$ , τότε  $\Delta \rightarrow d\tau$ ,  $k\Delta \rightarrow \tau$  και το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα:

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \tilde{h}(t - k\Delta) \cdot \Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

Άρα

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (3.39)$$

γιατί

- ισχύει ο ορισμός της συνέλιξης σημάτων συνεχούς χρόνου του προηγούμενου κεφαλαίου,
- ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα της συνέλιξης. ■

Επομένως, η σημασία της απόκρισης μοναδιαίου παλμού είναι τεράστια: Αν η απόκριση μοναδιαίου παλμού είναι γνωστή, τότε για κάθε είσοδο στο LTI σύστημα είναι δυνατή η γνώση της εξόδου (με συνέλιξη της απόκρισης μοναδιαίου παλμού και της εισόδου). Άρα η απόκριση μοναδιαίου παλμού χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά του συστήματος και για το λόγο αυτό η γνώση της αρκεί για την περιγραφή του LTI συστήματος.

Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (LTI) σύστημα είναι αιτιατό, όταν

$$h(t) = 0, t < 0 \quad (3.40)$$

δηλαδή όταν η απόκριση μοναδιαίου παλμού είναι ένα σήμα που αρχίζει τη χρονική στιγμή  $t = 0$ .

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ευσταθές ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (LTI) σύστημα είναι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = L < +\infty \quad (3.41)$$

(όπου  $L$  θετικός αριθμός), που σημαίνει η απόκριση μοναδιαίου παλμού είναι απολύτως ολοκληρώσιμη.

### 3.2.3.2. Σύνδεση συστημάτων σε σειρά

Αν ένα LTI σύστημα με απόκριση μοναδιαίου παλμού  $h_1(t)$  συνδεθεί σε σειρά με ένα LTI σύστημα με απόκριση μοναδιαίου παλμού  $h_2(t)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.13, δηλαδή αν

$$y(t) = h_2(t) * w(t)$$

$$w(t) = h_1(t) * x(t)$$

τότε το συνολικό σύστημα έχει είσοδο  $x(t)$ , έξοδο  $y(t)$  και απόκριση μοναδιαίου παλμού:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \quad (3.42)$$

**Απόδειξη.**

Από τα δύο συστήματα που είναι συνδεδεμένα σε σειρά ισχύει:

$$y(t) = h_2(t) * w(t) = h_2(t) * [h_1(t) * x(t)] = [h_2(t) * h_1(t)] * x(t)$$

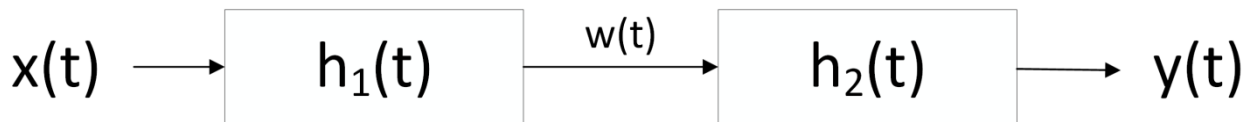
επειδή η προσεταιριστική ιδιότητα της γραμμικής συνέλιξης (όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο).

Όμως, το σύστημα είναι LTI, οπότε από την (3.38) για την έξοδο έχουμε:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Επομένως, επειδή ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα της συνέλιξης, έχουμε:

$$h(t) = h_2(t) * h_1(t) = h_1(t) * h_2(t) \quad \blacksquare$$



**Σχήμα 3.13** Σύνδεση συστημάτων συνεχούς χρόνου σε σειρά.

Γενικεύοντας, αν συνδεθούν σε σειρά  $N$  συστήματα συνεχούς χρόνου, όπου  $N$  ακέραιος με  $N \geq 2$ , τότε η συνολική απόκριση μοναδιαίου παλμού είναι:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * \dots * h_N(t),$$

δηλαδή η συνολική απόκριση μοναδιαίου παλμού ενός LTI συστήματος, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα **σε σειρά**, είναι η **συνέλιξη** των αποκρίσεων μοναδιαίου παλμού των επί μέρους συστημάτων.

### 3.2.3.3. Σύνδεση συστημάτων παράλληλα

Αν ένα LTI σύστημα με απόκριση μοναδιαίου παλμού  $h_1(t)$  συνδεθεί παράλληλα με ένα LTI σύστημα με απόκριση μοναδιαίου παλμού  $h_2(t)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.14, δηλαδή αν

$$y(t) = v(t) + w(t)$$

με

$$v(t) = h_2(t) * x(t)$$

$$w(t) = h_1(t) * x(t)$$

τότε το συνολικό σύστημα έχει είσοδο  $x(t)$ , έξοδο  $y(t)$  και απόκριση μοναδιαίου παλμού:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (3.43)$$

#### Απόδειξη.

Από τα δύο συστήματα που είναι συνδεδεμένα παράλληλα ισχύει:

$$y(t) = v(t) + w(t) = h_2(t) * x(t) + h_1(t) * x(t) = [h_2(t) + h_1(t)] * x(t)$$

επειδή ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα της γραμμικής συνέλιξης (όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο).

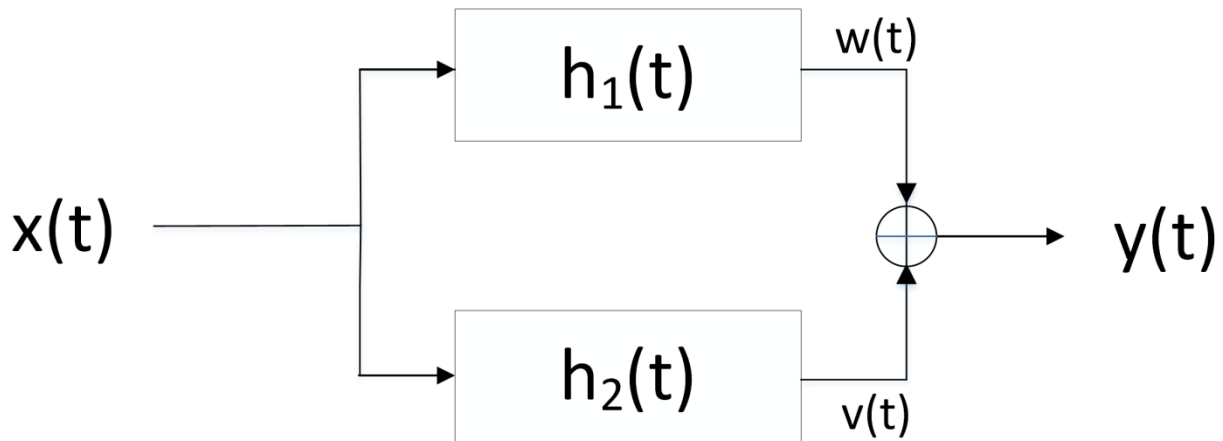
Όμως, το σύστημα είναι LTI, οπότε από την (3.38) για την έξοδο έχουμε:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις καταλήγουμε:

$$h(t) = h_2(t) + h_1(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad \blacksquare$$





Σχήμα 3.14 Σύνδεση συστημάτων διακριτού χρόνου παράλληλα.

Γενικεύοντας, αν συνδεθούν παράλληλα  $N$  συστήματα συνεχούς χρόνου, όπου  $N$  ακέραιος με  $N \geq 2$ , τότε η συνολική απόκριση μοναδιαίου παλμού είναι:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) + \dots + h_N(t),$$

δηλαδή η συνολική απόκριση μοναδιαίου παλμού ενός LTI συστήματος, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα **παράλληλα**, είναι το **άθροισμα** των αποκρίσεων μοναδιαίου παλμού των επί μέρους συστημάτων.

### 3.2.4. Αναπαράσταση LTI συστημάτων με διαφορικές εξισώσεις

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται με μία **διαφορική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές**:

$$\sum_{k=0}^M b_k \cdot \frac{d^k x(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N a_k \cdot \frac{d^k y(t)}{dt^k} \quad (3.44)$$

και αρχικές συνθήκες

$$y^{(k)}(0), k = 0, 1, \dots, N$$

όπου  $y^{(k)}(t)$  συμβολίζει την  $k$  τάξης παράγωγο του σήματος συνεχούς χρόνου  $y(t)$ .

Οι σταθεροί (ανεξάρτητοι του χρόνου) συντελεστές είναι:  $a_k, k = 0, 1, \dots, N$  και  $b_k, k = 0, 1, \dots, M$ .

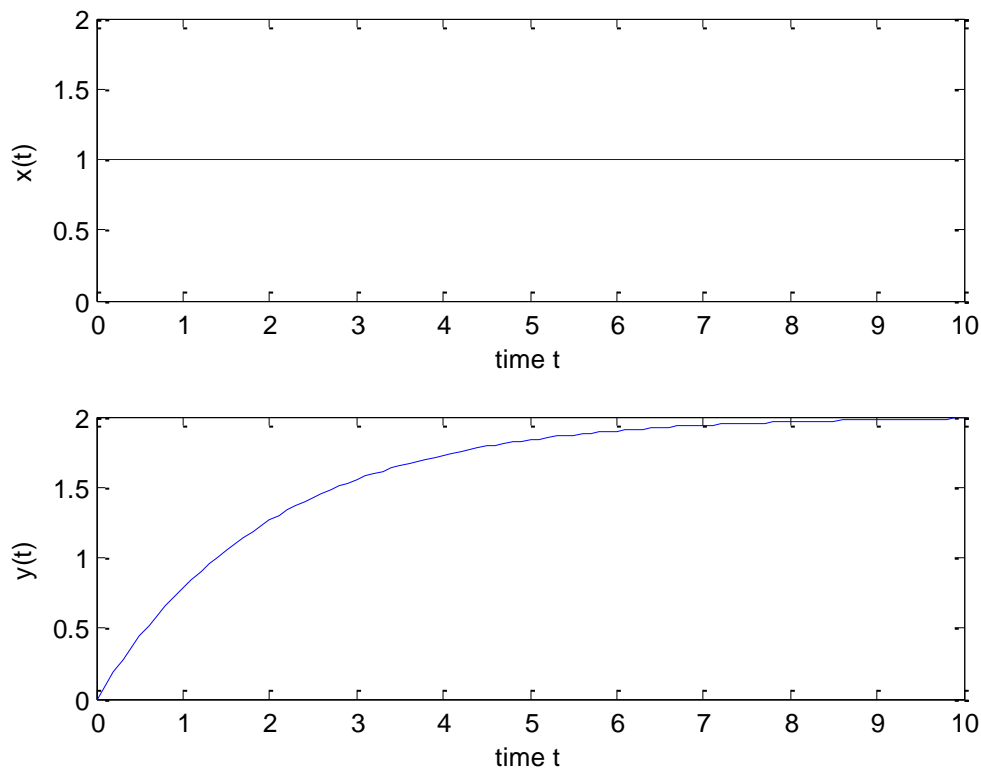
Για παράδειγμα, η διαφορική εξίσωση

$$y'(t) + \frac{1}{2} y(t) = x(t)$$

Περιγράφει ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου.

Αν η είσοδος είναι  $x(t) = u(t)$ , τότε η έξοδος είναι  $y(t) = 2 - 2e^{-\frac{t}{2}}$ .

Στο Σχήμα 3.15 παρουσιάζεται η είσοδος και η απόκριση του LTI συστήματος συνεχούς χρόνου.



Σχήμα 3.15 Είσοδος και απόκριση LTI συστήματος συνεχούς χρόνου.

### 3.2.5. Συστήματα συνεχούς χρόνου σε προγραμματιστικό περιβάλλον

1-0-0-0-5-0

Η συνάρτηση  $[y]=lsim(b, a, x, t)$  χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της απόκρισης ενός LTI συστήματος συνεχούς χρόνου. Η συνάρτηση έχει εισόδους τους συντελεστές  $b$  και της διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει το LTI σύστημα, την είσοδο  $x$  του συστήματος και τον χρόνο  $t$ . Η συνάρτηση έχει έξοδο την έξοδο  $y$  του συστήματος. Για παράδειγμα, για να υπολογιστεί η απόκριση του συστήματος

$$y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = x(t)$$

για είσοδο  $x(t) = u(t)$

απαιτείται η παραγωγή της εισόδου και στη συνέχεια απαιτείται η κλήση

```
b=[1]; a=[1, 1/2]; t=[0:0.1:10]; x=ones(1,length(t)); [y]=lsim(b,a,x,t)
```

Παρατήρηση.

Για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων χρησιμοποιείται η συνάρτηση `dsolve`. Η συνάρτηση `dsolve` μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της απόκρισης ενός LTI συστήματος συνεχούς χρόνου, που περιγράφεται από μία διαφορική εξίσωση. Για παράδειγμα, η απόκριση που υπολογίστηκε με τη συνάρτηση `lsim` μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της συνάρτησης `dsolve` με την κλήση `dsolve('Dy=-0.5*y+1','y(0)=0')`

Η απόκριση είναι:

$$2 - 2/\exp(t/2)$$

Η συνάρτηση `dsolve` είναι διαθέσιμη σε Matlab και σε Octave (symbolic package).

### 3.3. Λυμένες Ασκήσεις

#### Συστήματα διακριτού χρόνου

##### 1-2-3-4-0-0

1. Να εξετάσετε ως προς την ευστάθεια τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα(LTI)συστήματα με κρουστική απόκριση

α.  $h(n) = \left(\frac{1}{8}\right)^n u(n)$

β.  $h(n) = 2^n u(n)$

Λύση.

α. Το LTIσύστημα είναι ευσταθές γιατί

$$\begin{aligned} h(n) = \left(\frac{1}{8}\right)^n u(n) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \left(\frac{1}{8}\right)^n u(n) \right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n u(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{8}\right)^n u(n) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n u(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7} \end{aligned}$$

β. Το LTIσύστημα είναι ασταθές γιατί

$$\begin{aligned} h(n) = 2^n u(n) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |2^n u(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n u(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n u(n) + \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n u(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n \cdot 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \cdot 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = +\infty \end{aligned}$$

2. Ένα LTI σύστημα με κρουστική απόκριση  $h_1(n)$  συνδέεται σε σειρά με ένα LTI σύστημα με κρουστική απόκριση  $h_2(n)$ . Το σύστημα που προκύπτει συνδέεται παράλληλα με ένα LTI σύστημα με κρουστική απόκριση  $h_3(n)$ . Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος.

Λύση.

Η κρουστική απόκριση του συστήματος που προκύπτει από σύνδεση συστημάτων σε σειρά είναι η συνέλιξη των επί μέρους κρουστικών αποκρίσεων. Έτσι, η κρουστική απόκριση του συστήματος που προκύπτει από σύνδεση σε σειρά είναι:

$$h_{12}(n) = h_2(n) * h_1(n)$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος που προκύπτει από παράλληλη σύνδεση συστημάτων είναι το άθροισμα των επί μέρους κρουστικών αποκρίσεων. Έτσι, η κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος είναι:

$$h(n) = h_{12}(n) + h_3(n)$$

Οπότε:

$$h(n) = [h_2(n) * h_1(n)] + h_3(n)$$

3. Δίνεται ότι ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο(LTI)σύστημα έχει βηματική απόκριση

$$s(n) = n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n)$$

Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση  $h(n)$ .

Λύση.

Η είσοδος  $x(n)$  και η έξοδος  $y(n)$  κάθε LTIσυστήματος με κρουστική απόκριση  $h(n)$  συνδέονται με τη σχέση  $y(n) = h(n) * x(n)$ .

Η κρουστική απόκριση  $h(n)$  του φίλτρου είναι η έξοδος για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$ .

Επομένως, έχουμε:  $h(n) = h(n) * \delta(n)$ .

Η βηματική απόκριση  $s(n)$  του φίλτρου είναι η έξοδος για είσοδο  $x(n) = u(n)$ .

Επομένως, έχουμε:  $s(n) = h(n) * u(n)$

Επειδή το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο (αφού είναι LTI), έχουμε:  $s(n-1) = h(n) * u(n-1)$ .

Επίσης ισχύει:  $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$ , όπως είδαμε στο κεφάλαιο 1.

Άρα

$$h(n) = h(n) * \delta(n) = h(n) * [u(n) - u(n-1)] = h(n) * u(n) - h(n) * u(n-1) = s(n) - s(n-1)$$

Επομένως

$$h(n) = s(n) - s(n-1) = n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n) - (n-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot u(n-1)$$

4. Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

Να υπολογίσετε

α. την κρουστική απόκριση  $h(n)$  για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$

β. την απόκριση  $y(n)$  για είσοδο  $x(n) = n \cdot u(n)$

Λύση.

α. Πρόκειται για FIR φίλτρο με  $M = 1$  και σταθερούς συντελεστές:

$$b_0 = 1, b_1 = -1$$

Είναι γνωστό ότι η κρουστική απόκριση ενός φίλτρου πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης  $h(n)$  δίνεται από τη σχέση:

$$h(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot \delta(n-k)$$

οπότε η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

β. Η απόκριση  $y(n)$  για είσοδο  $x(n) = n \cdot u(n)$  είναι:

$$y(n) = h(n) * x(n) = [\delta(n) - \delta(n-1)] * x(n) = \delta(n) * x(n) - \delta(n-1) * x(n) = x(n) - x(n-1)$$

επειδή ισχύει  $x(n) * \delta(n-n_0) = x(n-n_0)$ , όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2.

Οπότε

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = x(n) - x(n-1) = n \cdot u(n) - (n-1) \cdot u(n-1) \\ &= n \cdot u(n) - n \cdot u(n-1) + u(n-1) = n \cdot [u(n) - u(n-1)] + u(n-1) = n \cdot \delta(n) + u(n-1) \end{aligned}$$

5. Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = x(n) - \frac{1}{4}x(n-1) + y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-2)$$

με αρχικές συνθήκες:  $y(-1) = 0, y(-2) = 0$ .

Να υπολογίσετε την απόκριση  $y(n)$  για είσοδο  $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n)$

Λύση.

Πρόκειται για IIR-ARMA φίλτρο τάξης  $(N, M) = (2, 1)$  και σταθερούς συντελεστές:

$$b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{4}, a_1 = -1, a_2 = \frac{1}{4}$$

Η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών είναι:

$$y(n) = y_p(n) + y_h(n)$$

Επειδή η είσοδος είναι  $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n)$ , από τον Πίνακα 3.1, η μερική λύση είναι:

$$y_p(n) = c \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Τότε

$$c \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + c \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - c \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \Rightarrow c \cdot \left[ \left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \right] = \left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

δηλαδή  $c = 0$ , επομένως  $y_p(n) = 0$ .

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$z^2 - z + \frac{1}{4} = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολώνυμο  $f(z) = z^2 - z + \frac{1}{4}$  είναι δεύτερου βαθμού και μία διπλή ρίζα  $z_1 = z_2 = \frac{1}{2}$ .

Τότε η ομογενής λύση γράφεται

$$y_h(n) = (A_1 + A_2 \cdot n) \cdot z_1^n = (A_1 + A_2 \cdot n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Έτσι, η λύση δίνεται από τον τύπο:

$$y(n) = y_p(n) + y_h(n) = 0 + (A_1 + A_2 \cdot n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = (A_1 + A_2 \cdot n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Για  $n=0$ , από την εξίσωση διαφορών, τη γενική λύση της και τις αρχικές συνθήκες, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = x(0) - \frac{1}{4}x(-1) + y(-1) - \frac{1}{4}y(-2) = \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot u(0) + 0 - \frac{1}{4} \cdot 0 = 1 \\ y(0) = (A_1 + A_2 \cdot 0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = A_1 \end{array} \right\}$$

Για  $n=1$ , από την εξίσωση διαφορών, τη γενική λύση της και τις αρχικές συνθήκες, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(1) = x(1) - \frac{1}{4}x(0) + y(0) - \frac{1}{4}y(-1) = \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot u(1) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot u(0) + 1 - \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 - 0 = 1 \\ y(1) = (A_1 + A_2 \cdot 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} \cdot (A_1 + A_2) \end{array} \right\}$$

Οπότε

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = 1 \\ \frac{1}{2} \cdot (A_1 + A_2) = 1 \end{array} \right\}$$

δηλαδή

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = 1 \\ A_2 = 1 \end{array} \right\}$$

και  $y(n) = (A_1 + A_2 \cdot n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = (1 + n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , που έχει νόημα για  $n \geq 0$ .

Άρα η λύση γίνεται

$$y(n) = (1 + n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$$

6. Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = x(n) + c \cdot y(n-1)$$

Να υπολογίσετε το συντελεστή  $c$  και την αρχική συνθήκη  $y(-1)$ , ώστε η κρουστική απόκριση να είναι

$$h(n) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$$

Λύση.

Η κρουστική απόκριση  $h(n)$  είναι η έξοδος για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$ .

Η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών είναι:

$$y(n) = y_p(n) + y_h(n)$$

Επειδή η είσοδος είναι  $x(n) = \delta(n)$ , από τον Πίνακα 3.1, η μερική λύση είναι:

$$y_p(n) = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$z - c = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $f(z) = z - c$  είναι πρώτου βαθμού και μία ρίζα  $z_1 = c$ .

Τότε η ομογενής λύση γράφεται

$$y_h(n) = A \cdot z_1^n = A \cdot c^n$$

Έτσι, η λύση δίνεται από τον τύπο:

$$h(n) = y(n) = y_p(n) + y_h(n) = 0 + A \cdot c^n = A \cdot c^n$$

Αλλά είναι δεδομένο ότι

$$h(n) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$$

Οπότε

$$A=3 \text{ και } c=\frac{1}{2}.$$

Για  $n=0$

από την αρχική εξίσωση διαφορών έχουμε:

$$h(0) = x(0) + c \cdot y(-1) = \delta(0) + \frac{1}{2} \cdot y(-1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot y(-1)$$

και από τον τύπο της λύσης έχουμε:

$$h(0) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot u(0) = 3$$

Οπότε

$$1 + \frac{1}{2} \cdot y(-1) = 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot y(-1) = 2 \Rightarrow y(-1) = 4$$

Επομένως η αρχική συνθήκη είναι  $y(-1) = 4$ .

### Συστήματα συνεχούς χρόνου

#### 1-2-0-0-5-6

1. Το σύστημα πλήρους ανόρθωσης είναι το σύστημα συνεχούς χρόνου με είσοδο  $x(t)$  και έξοδο  $y(t) = T[x(t)] = |x(t)|$ . Να εξετάσετε αν το σύστημα πλήρους ανόρθωσης είναι γραμμικόσύστημα.

Λύση.

Για οποιεσδήποτε σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  έχουμε:

$$T[c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)] = |c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)| \leq |c_1 \cdot x_1(t)| + |c_2 \cdot x_2(t)| = |c_1| \cdot |x_1(t)| + |c_2| \cdot |x_2(t)|$$

και

$$c_1 \cdot T[x_1(t)] + c_2 \cdot T[x_2(t)] = c_1 \cdot |x_1(t)| + c_2 \cdot |x_2(t)|$$

Επομένως

$$T[c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)] \neq c_1 \cdot T[x_1(t)] + c_2 \cdot T[x_2(t)]$$

Άρα το σύστημα πλήρους ανόρθωσης δεν είναι γραμμικόσύστημα.

2. Το σύστημα μέσης τιμής είναι το LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με είσοδο  $x(t)$  και έξοδο

$$y(t) = T[x(t)] = \frac{1}{T} \cdot \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau. \text{ Να υπολογίσετε την απόκριση μοναδιαίου παλμού } h(t) \text{ του συστήματος}$$

μέσης τιμής.

Λύση.

Η απόκριση μοναδιαίου παλμού  $h(t)$  του συστήματος μέσης τιμής είναι η έξοδος του συστήματος για είσοδο  $x(t) = \delta(t)$ . Τότε

$$y(t) = \frac{1}{T} \cdot \int_{t-T}^t \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \cdot \int_{t-T}^t \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{1}{T} \cdot [u(t) - u(t-T)].$$

### 3.4. Ασκήσεις

#### Συστήματα διακριτού χρόνου

##### 1-2-3-4-0-0

1. Να εξετάσετε ως προς την ευστάθεια το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (LTI) σύστημα με κρουστική απόκριση:

$$h(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot u(n) + \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot u(n)$$

2. Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = x(n) - x(n-2)$$

Να υπολογίσετε

α. την κρουστική απόκριση  $h(n)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$ .

β. την απόκριση  $y(n)$  για είσοδο  $x(n) = n \cdot u(n)$ .

3. Δίνεται η εξίσωση διαφορών

$$y(n) = x(n) + \frac{5}{6} \cdot y(n-1)$$

με αρχική συνθήκη είναι:  $y(-1) = 0$

α. Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση  $h(n)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$ .

β. Να υπολογίσετε τη βηματική απόκριση  $s(n)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(n) = u(n)$ .

4. Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = x(n) + c \cdot y(n-1)$$

Να υπολογίσετε το συντελεστή  $c$  και την αρχική συνθήκη  $y(-1)$ , ώστε η κρουστική απόκριση να είναι

$$h(n) = 4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot u(n).$$

### Συστήματα συνεχούς χρόνου

#### 1-2-0-0-5-6

1. Να εξετάσετε ως προς τη γραμμικότητα το σύστημα συνεχούς χρόνου, που έχει είσοδο  $x(t)$  και έξοδο  $y(t) = T[x(t)] = 2x^2(t)$ .

2. Ο ολοκληρωτής είναι το LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με είσοδο  $x(t)$  και έξοδο  $y(t) = T[x(t)] = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ .

Να εξετάσετε αν ο ολοκληρωτής είναι LTI σύστημα.

3. Ο διαμορφωτής είναι το σύστημα συνεχούς χρόνου με είσοδο  $x(t)$  και έξοδο  $y(t) = T[x(t)] = x(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ . Να εξετάσετε αν ο διαμορφωτής είναι LTI σύστημα.

4. Το σύστημα μέσης τιμής είναι το σύστημα συνεχούς χρόνου με είσοδο  $x(t)$  και έξοδο  $y_T(t) = T[x(t)] = \frac{1}{T} \cdot \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$ . Να εξετάσετε αν το σύστημα μέσης τιμής είναι LTI σύστημα.

5. Να εξετάσετε ως προς την ευστάθεια το LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με απόκριση μοναδιαίου παλμού  $h(t) = e^{-2t} \cdot u(t)$ .

6. Ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου έχει απόκριση μοναδιαίου παλμού  $h(t) = u(t) - u(t-2)$ . Να υπολογίσετε την απόκριση  $y(t)$  του συστήματος για είσοδο  $x(t) = \cos(t), 0 \leq t \leq 2$ .

### 3.5. Εργαστηριακές Ασκήσεις

#### Εργαστηριακή Άσκηση 7 LTI συστήματα διακριτού χρόνου

##### 1-0-3-0-0-0

1. Φίλτρο πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης: FIR - MA

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει ένα FIR φίλτρο:

$$y(n) = x(n) - x(n-1) - x(n-2)$$

Να βρεθεί η τάξη του φίλτρου και οι συντελεστές.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση *filter*.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *filter* να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε:

- την κρουστική απόκριση  $h(n)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$

- τη βηματική απόκριση  $s(n)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(n) = u(n)$
- την απόκριση  $y(n)$  του φίλτρου για είσοδο  $x(n) = n \cdot u(n)$

## 2. Φίλτρο άπειρης κρουστικής απόκρισης: IIR-AR

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει ένα IIR-AR φίλτρο:

$$y(n) = x(n) - y(n-1) - y(n-2)$$

Να βρεθεί η τάξη του φίλτρου και οι συντελεστές.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `filter` να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε:

- την κρουστική απόκριση  $h(n)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$
- τη βηματική απόκριση  $s(n)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(n) = u(n)$
- την απόκριση  $y(n)$  του φίλτρου για είσοδο  $x(n) = n \cdot u(n)$

## 3. Φίλτρο άπειρης κρουστικής απόκρισης: IIR-ARMA

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει ένα IIR-AR φίλτρο:

$$y(n) = x(n) + x(n-1) - y(n-1) - y(n-2)$$

Να βρεθεί η τάξη του φίλτρου και οι συντελεστές.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `filter` να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε:

- την κρουστική απόκριση  $h(n)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$
- τη βηματική απόκριση  $s(n)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(n) = u(n)$
- την απόκριση  $y(n)$  του φίλτρου για είσοδο  $x(n) = n \cdot u(n)$

## 4. Γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (LTI) φίλτρο: συνέλιξη

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει ένα LTI φίλτρο:

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + y(n-1) - y(n-2)$$

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε:

- την κρουστική απόκριση  $h(n)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$
- την απόκριση  $y(n)$  του φίλτρου για είσοδο  $x(n) = u(n-2)$
- τη συνέλιξη  $y(n) = h(n) * x(n)$

Τι παρατηρείτε;

## 5. Σύνδεση φίλτρων σε σειρά

Δίνονται οι εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφουν δύο LTI φίλτρα συνδεδεμένα σε σειρά:

$$y(n) = w(n) - \frac{1}{2}y(n-1)$$

$$w(n) = x(n) - \frac{1}{3}w(n-1)$$

Το συνολικό φίλτρο έχει είσοδο  $x(n)$  και έξοδο  $y(n)$ .

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε:

- την κρουστική απόκριση  $h_1(n)$  του πρώτου φίλτρου
- την κρουστική απόκριση  $h_2(n)$  του δεύτερου φίλτρου
- τη βηματική απόκριση  $s(n)$  του συνολικού φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(n) = u(n)$
- τη συνέλιξη  $y(n) = [h_1(n) * h_2(n)] * u(n)$

Τι παρατηρείτε;

## 6. Σύνδεση φίλτρων παράλληλα

Δίνονται οι εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφουν δύο LTI φίλτρα συνδεδεμένα παράλληλα:

$$v(n) = x(n) - \frac{1}{2}v(n-1)$$



$$w(n) = x(n) - \frac{1}{3}w(n-1)$$

Το συνολικό φίλτρο έχει είσοδο  $x(n)$  και έξοδο  $y(n) = v(n) + w(n)$ .

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε:

- την κρουστική απόκριση  $h_1(n)$  του πρώτου φίλτρου
- την κρουστική απόκριση  $h_2(n)$  του δεύτερου φίλτρου
- τη βηματική απόκριση  $s(n)$  του συνολικού φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(n) = u(n)$
- τη συνέλιξη  $y(n) = [h_1(n) + h_2(n)] * u(n)$

Τι παρατηρείτε;

7. Γραμμικό χρονικά αμετάβλητο φίλτρο (LTI): μετατόπιση

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει ένα IIR φίλτρο:

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 3y(n-1) - 4y(n-2)$$

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε:

- τη βηματική απόκριση  $s(n)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(n) = u(n)$
- την απόκριση  $y(n)$  του φίλτρου για είσοδο  $x(n) = u(n-2)$

Τι παρατηρείτε;

8. Φίλτρο μέσης τιμής

Να παράγετε το σήμα

$$x(n) = 1.04^n + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right)$$

που αποτελείται από το χρήσιμο τμήμα  $1.04^n$  και τον ανεπιθύμητο ημιτονοειδή θόρυβο  $\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right)$

Να θεωρήσετε το φίλτρο μέσης τιμής τάξης  $M$  που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y_M(n) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} x(n-k)$$

Να βάλετε είσοδο το σήμα  $x(n)$  σε ένα φίλτρο μέσης τιμής τάξης  $M$  με σκοπό να απομακρύνετε το θόρυβο.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `filter` να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τις εξόδους  $y_3(n)$  και  $y_7(n)$  των φίλτρων μέσης τιμής τάξης  $M=4$  και  $M=8$ , αντίστοιχα.

Πώς επιδρά η τάξη του φίλτρου  $M$  στη μορφή της εξόδου;

## Εργαστηριακή Άσκηση 8 LTI συστήματα συνεχούς χρόνου

### 1-0-0-0-5-0

1. Επίλυση διαφορικών εξισώσεων

Να μελετήσετε τη συνάρτηση `dsolve`.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `dsolve` να επιλύσετε τις διαφορικές εξισώσεις:

$$y'(t) - y(t) = \sin(t), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y'''(t) - y'(t) = \sin(t), y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 0$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `pretty` να εμφανίσετε τα αποτελέσματα. Η συνάρτηση `pretty` είναι διαθέσιμη σε Matlab και σε Octave (symbolic package).

2. LTI φίλτρο συνεχούς χρόνου

Δίνεται η διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει ένα LTI φίλτρο συνεχούς χρόνου:

$$y'(t) + 5y(t) = 3x(t)$$

Να μελετήσετε τη συνάρτηση `lsim`.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `lsim` να υπολογίσετε την απόκριση του συστήματος για είσοδο  $x(t) = u(t)$ .

3. LTI φίλτρο συνεχούς χρόνου

Δίνεται η διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει ένα LTI φίλτρο συνεχούς χρόνου:

$$y'(t) + 4y(t) = x(t)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `lsim` να υπολογίσετε

- την απόκριση μοναδιαίου παλμού  $h(t)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(t) = \delta(t)$

- την απόκριση  $y(n)$  του φίλτρου για είσοδο  $x(t) = u(t - 1)$

4. LTI φίλτρο συνεχούς χρόνου

Δίνεται η διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει ένα LTI φίλτρο συνεχούς χρόνου:

$$y''(t) + 5y'(t) = x'(t) + 2x(t)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `lsim` να υπολογίσετε την απόκριση του συστήματος για είσοδο  $x(t) = u(t - 2)$ .

5. Σύστημα μέσης τιμής

Το σύστημα μέσης τιμής είναι το σύστημα συνεχούς χρόνου με είσοδο  $x(t)$  και έξοδο  $y_T(t) = \frac{1}{T} \cdot \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$ .

Να υπολογίσετε την απόκριση  $y_s(t)$  του συστήματος για είσοδο  $x(t) = u(t - 10)$ .

### 3.6. Περίληψη (ηχογραφημένη)

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη του Κεφαλαίου 3 με τον Ήχο 3.1.



Ήχος 3.1 Περίληψη Κεφαλαίου 3.

#### Συστήματα διακριτού χρόνου

**1-2-3-4-0-0**

Η κρουστική απόκριση (impulseresponse)  $h(n)$  ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος είναι η έξοδος (απόκριση) του συστήματος στην κρουστική είσοδο  $\delta(n)$ .

Η απόκριση  $y(n)$  ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος είναι ίση με τη γραμμική συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$  με την είσοδο  $x(n)$ .

Η συνολική κρουστική απόκριση ενός LTI συστήματος, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά, είναι η συνέλιξη των κρουστικών αποκρίσεων των επί μέρους συστημάτων.

Η συνολική κρουστική απόκριση ενός LTI συστήματος, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα, είναι το άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων των επί μέρους συστημάτων.

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται με μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές.

Τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα (LTI) συστήματα (φίλτρα) διακρίνονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τη διάρκεια της κρουστικής τους απόκρισης:

- τα φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (Finite duration Impulse Response – FIR)
- τα φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (Infiniteduration Impulse Response – IIR)

#### Συστήματα συνεχούς χρόνου

**1-2-0-0-5-6**

Η απόκριση μοναδιαίου παλμού  $h(t)$  ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος είναι η έξοδος (απόκριση) του συστήματος στην είσοδο μοναδιαίου παλμού  $\delta(t)$ .

Η απόκριση  $y(t)$  ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος είναι ίση με τη συνέλιξη της απόκρισης μοναδιαίου παλμού  $h(t)$  με την είσοδο  $x(t)$ .

Η συνολική απόκριση μοναδιαίου παλμού ενός LTI συστήματος, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά, είναι η συνέλιξη των αποκρίσεων μοναδιαίου παλμού των επί μέρους συστημάτων.

Η συνολική απόκριση μοναδιαίου παλμού ενός LTI συστήματος, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα, είναι το άθροισμα των αποκρίσεων μοναδιαίου παλμού των επί μέρους συστημάτων.

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται με μία διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.

### **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

- Damper, R. I. (1995). *Introduction to Discrete-Time Signals and Systems*. Chapman & Hall.
- Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S., Wehbring R. (2011). *GNU Octave* (3rd ed.).
- Hansen J. S. (2011). *GNU Octave Beginner's Guide*. Packt Publishing.
- Hayes, M. H. (2000). *Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Ingle, V. K., & Proakis, J. G. (2003). *Digital Signal Processing using MATLAB*. Stamford, CT: Thomson Brooks Cole.
- Leis, J. W. (2011). *Digital Signal Processing using MATLAB for students and researchers*. J. Wiley and Sons.
- Lynn, P. A., & Fuerst, W. (1989). *Introductory Digital Signal Processing With Computer Applications*. J. Wiley and Sons.
- McClellan, J. H., Schafer, R. W., Yoder, M. A. (2006). *Θεμελιώδεις Έννοιες της Επεξεργασίας Σημάτων*. Φιλομάθεια. Μετάφραση – Επιστημονική Επιμέλεια: Ε. Ζ. Ψαράκης.
- Oppenheim A. V., Willsky, A. S., Nawab, S. H. (2013). *Signals & Systems* (2<sup>nd</sup> ed.), Pearson.
- Proakis, J. G., & Manolakis D. G. (2007). *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*. Prentice-Hall.
- Strum, R. D., & Kirk, D. E. (1988). *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*. Addison-Wesley Publishing Company.
- The MathWorks Inc (2005). *Signal Processing Toolbox User's Guide*.
- Ασημάκης, Ν. (2008). *Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων*. Gutenberg.
- Θεοδωρίδης, Σ., Μπερμπερίδης, Κ., Κοφίδης, Λ. (2003). *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων*. Εκδόσεις τυπωθήτω.
- Καλουπτσίδης, Ν. (1994). *Σήματα, Συστήματα και Αλγόριθμοι*. Διάυλος.
- Καραγιάννης, Γ., & Μαραγκός, Π. (2010). *Βασικές Αρχές Σημάτων και Συστημάτων*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου.
- Καραγιάννης, Γ., & Τζιτζιράχου, Κ. (2003). *Εισαγωγή στα Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου.
- Καραμπογιάς, Σ. (2009). *Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Καραμπογιά.
- Μάργαρης, Α. (2014). *Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Μουστακίδης, Γ. (2004). *Βασικές Τεχνικές Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Παρασκευάς, Μ. (2014). *Σήματα και Συστήματα Συνεχούς Χρόνου με Matlab*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Σκόδρας, Α., & Αναστασόπουλος, Β. (2003). *Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων και Σημάτων*. ΕΑΠ.
- Φωτόπουλος, Π., & Βελώνη, Α. (2008). *Σήματα και Συστήματα*. Σύγχρονη Εκδοτική.

### **Κριτήρια αξιολόγησης**

#### **Κριτήριο αξιολόγησης 1**

**1-2-3-4-0-0**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 1 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 3.3.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 3.3**Κριτήριο αξιολόγησης 1.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

**Κριτήριο αξιολόγησης 2**

**1-2-3-4-0-0**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 2 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 3.4.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 3.4**Κριτήριο αξιολόγησης 2.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

**Κριτήριο αξιολόγησης 3**

**1-2-0-0-5-6**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 3 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 3.5.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 3.5**Κριτήριο αξιολόγησης 3.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

## Κεφάλαιο 4 Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου και Απόκριση συχνότητας

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται ο ορισμός του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου και παρουσιάζονται οι ιδιότητες του μετασχηματισμού. Δίνεται ο ορισμός της απόκρισης συχνότητας και αναλύεται η περιγραφή των γραμμικών χρονικά αμετάβλητων (LinearTimeInvariant – LTI) συστημάτων μέσω της απόκρισης συχνότητας. Παρουσιάζονται τα φίλτρα επιλογής συχνότητας και τα φίλτρα γραμμικής φάσης.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Σειρές, εξισώσεις διαφορών. Κεφάλαιο 1, Κεφάλαιο 2, Κεφάλαιο 3.

## 4.1. Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

### 1-2-3-4-0-0

#### 4.1.1. Ορισμός μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

**Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DiscreteTimeFourierTransform – DTFT)** είναι ένας μετασχηματισμός, που συνδέει το πεδίο του χρόνου με το πεδίο της συχνότητας. Ο μετασχηματισμός (transform) Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  μίας ακολουθίας διακριτού χρόνου  $x(n)$ , αν υπάρχει (η ύπαρξη του μετασχηματισμού αναλύεται στη επόμενη παράγραφο), είναι η αναπαράσταση της ακολουθίας συναρτήσε μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών της μορφής  $e^{-j\omega n}$ , όπου  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα.

Ο **ευθύς** (direct) μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DiscreteTimeFourierTransform – DTFT) μίας ακολουθίας διακριτού χρόνου ορίζεται ως ακολούθως:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad (4.1)$$

και, αν υπάρχει, είναι μοναδικός (unique).

**Ο αντίστροφος** (inverse) μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (Inverse Discrete Time Fourier Transform – IDTFT) ορίζεται ως ακολούθως:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega \quad (4.2)$$

και, αν υπάρχει, είναι μοναδικός (unique).

Ο ευθύς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου αποτελούν ένα μοναδικό ζεύγος και χρησιμοποιείται ο συμβολισμός:

$$x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$$

Από την (4.1) και την (4.2) είναι φανερό ότι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι γραμμικός μετασχηματισμός, επειδή και η σειρά και το ολοκλήρωμα με βάση τα οποία ορίζεται ο μετασχηματισμός είναι τελεστές που πληρούν την ιδιότητα της γραμμικότητας.

Επίσης, είναι προφανές, από τον ορισμό, ότι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι μιγαδική συνάρτηση:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + j \cdot X_I(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| \cdot e^{j\cdot\phi(\omega)} \quad (4.3)$$

όπου

-  $X_R(e^{j\omega}) = \text{Re}[X(e^{j\omega})]$  είναι η πραγματική συνιστώσα του  $X(e^{j\omega})$

-  $X_I(e^{j\omega}) = \text{Im}[X(e^{j\omega})]$  είναι η φανταστική συνιστώσα του  $X(e^{j\omega})$

-  $|X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}$  είναι το μέτρο του  $X(e^{j\omega})$

$$- \varphi(\omega) = \arg\left(X(e^{j\omega})\right) = \arctan \frac{\operatorname{Im}\left(X(e^{j\omega})\right)}{\operatorname{Re}\left(X(e^{j\omega})\right)} = \arctan \frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})} \text{ είναι η φάση του } X(e^{j\omega})$$

Για το μέτρο ισχύει:

$$\left|X(e^{j\omega})\right|^2 = X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot X^*(e^{j\omega})$$

**Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι περιοδικός με περίοδο  $2\pi$** , δηλαδή ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)}) \quad (4.4)$$

Χρήσιμη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία είναι τα βιβλία Hayes, 2000, McClellan, Schafer & Yoder, 2006, Ασημάκης, 2008, Θεοδωρίδης, Μπερμπερίδης, Κοφίδης, 2003, Καραγιάννης & Μαραγκός, 2010, Καραγιάννης & Τζίτζιράχου, 2003, Καραμπογιάς, 2009, Μάργαρης, 2014, Σκόδρας & Αναστασόπουλος, 2003.

#### 4.1.2. Ύπαρξη μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου μίας ακολουθίας διακριτού χρόνου  $x(n)$  σχετίζεται με το μέτρο των πλατών της ακολουθίας και διατυπώνεται ως ακολούθως:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| = L < \infty \quad (4.5)$$

όπου  $L$  ένας θετικός αριθμός. Από την (4.5) συμπεραίνουμε ότι το άπειρο άθροισμα των πλατών της ακολουθίας δεν είναι άπειρο, αλλά είναι πεπερασμένο, που σημαίνει ότι η ακολουθία είναι «παρατηρήσιμη», αφού οι τιμές της δεν απειρίζονται.

Για παράδειγμα, ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος  $x(n) = \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot u(n)$  υπάρχει, επειδή μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot u(n) \right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot u(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot u(n) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot u(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7} \end{aligned}$$

Αντίθετα, ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος  $x(n) = 8^n \cdot u(n)$  δεν υπάρχει, επειδή

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |8^n \cdot u(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 8^n \cdot u(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} 8^n \cdot u(n) + \sum_{n=0}^{+\infty} 8^n \cdot u(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} 8^n \cdot 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} 8^n \cdot 1 = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} 8^n = 0 + \infty = \infty$$

#### 4.1.3. Υπολογισμός μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Για να γίνει υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου ενός σήματος, αρχικά γίνεται έλεγχος της ύπαρξης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, επαληθεύοντας την (4.5) και στην περίπτωση που υπάρχει, τότε υπολογίζεται ο τύπος του μετασχηματισμού χρησιμοποιώντας αθροίσματα.

Παράδειγμα

$$x(n) = a^n \cdot u(n), 0 < a < 1$$

Αρχικά γίνεται έλεγχος της ύπαρξης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n \cdot u(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot u(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot u(n) + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot u(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot 1 = \frac{1}{1-a} < \infty$$

επειδή  $0 < a < 1$ .

Επομένως ικανοποιείται η (4.5), άρα υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος. Στη συνέχεια γίνεται ο υπολογισμός:

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot u(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot u(n) \cdot e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot u(n) \cdot e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot 0 \cdot e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot 1 \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a \cdot e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}
\end{aligned}$$

επειδή από  $0 < a < 1$  και από τις ιδιότητες του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού μπορούμε να γράψουμε:

$$|a \cdot e^{-j\omega}| = |a| \cdot |e^{-j\omega}| = |a| \cdot |\cos(-\omega) + j \cdot \sin(-\omega)| = |a| \cdot \sqrt{\cos^2(-\omega) + \sin^2(-\omega)} = |a| \cdot 1 = |a| = a < 1$$

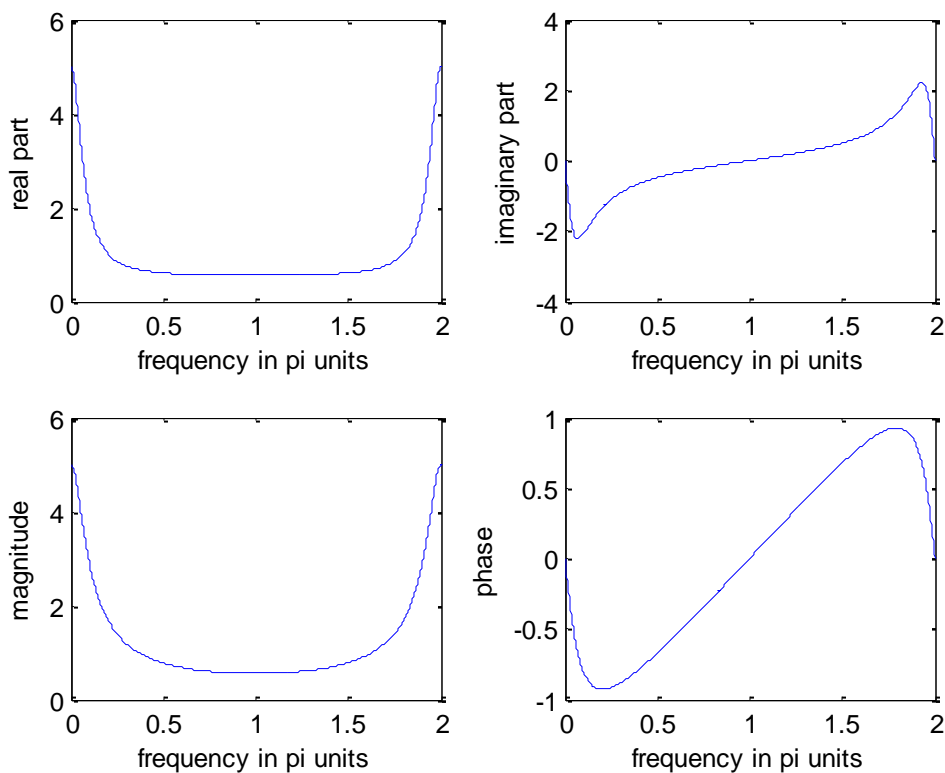
Άρα

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$$

Είναι προφανές, από τον ορισμό, ότι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι μιγαδική συνάρτηση. Για παράδειγμα, θέτοντας  $a = \frac{4}{5}$  στο προηγούμενο παράδειγμα, ο μετασχηματισμός Fourier

διακριτού χρόνου του σήματος  $x(n) = \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot u(n)$  είναι  $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{4}{5} \cdot e^{-j\omega}}$ . Στο Σχήμα 4.1 φαίνεται η

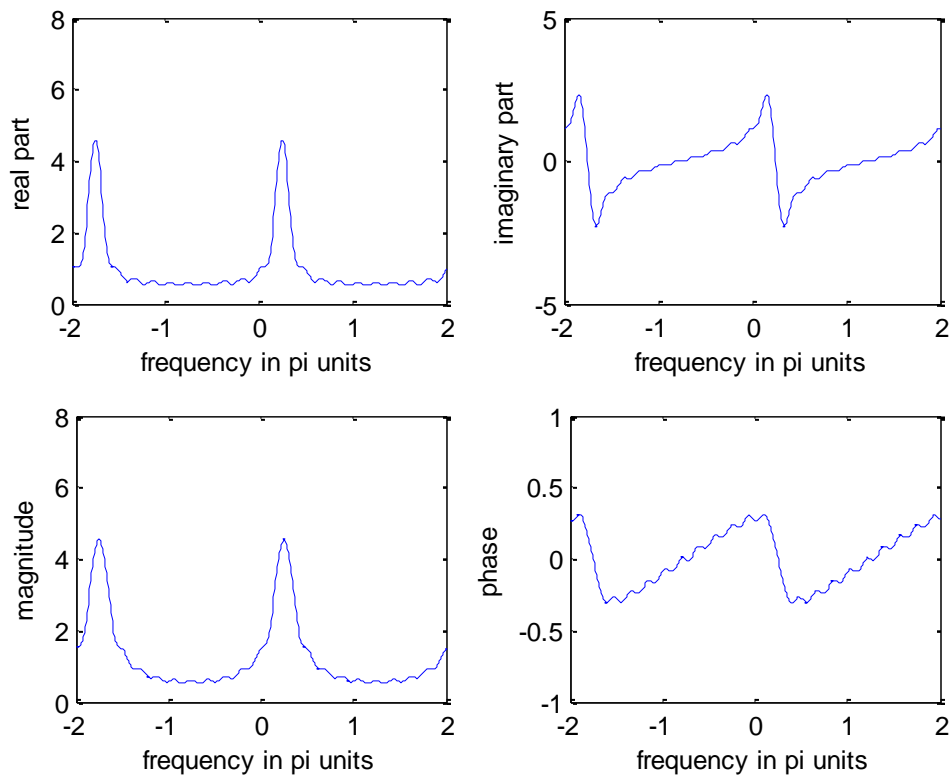
πραγματική συνιστώσα, η φανταστική συνιστώσα, το μέτρο και τη φάση του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου του σήματος.



**Σχήμα 4.1** Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου.

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι περιοδικός με περίοδο  $2\pi$ . Για παράδειγμα, στο Σχήμα 4.2 φαίνεται η πραγματική συνιστώσα, η φανταστική συνιστώσα, το μέτρο και τη φάση του

μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου του σήματος  $x(n) = \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot e^{j\pi n/4} \cdot u(n)$ , όπου είναι φανερή η περιοδικότητα.



Σχήμα 4.2 Περιοδικότητα μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

#### 4.1.4. Ζεύγη μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζονται μερικοί τυπικοί μετασχηματισμοί Fourier διακριτού χρόνου (DTFT).

Ακολουθία διακριτού χρόνου	Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT)
$\delta(n)$	1
$\delta(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$2\pi \cdot \delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$
$a^n \cdot u(n),  a  < 1$	$\frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$
$-a^n \cdot u(-n - 1),  a  > 1$	$\frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$
$(n + 1) \cdot a^n \cdot u(n),  a  < 1$	$\frac{1}{(1 - a \cdot e^{-j\omega})^2}$
$\sin(\omega_0 \cdot n)$	$-j \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$\cos(\omega_0 \cdot n)$	$\pi \cdot [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

Πίνακας 4.1 Ζεύγη μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT).

#### 4.1.5. Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου



Οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου είναι:

#### 4.1.5.1. Γραμμικότητα

Αν  $x_1(n) \xrightarrow{DFT} X_1(e^{j\omega})$  και  $x_2(n) \xrightarrow{DFT} X_2(e^{j\omega})$ , τότε

$$c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n) \xrightarrow{DFT} c_1 \cdot X_1(e^{j\omega}) + c_2 \cdot X_2(e^{j\omega}) \quad (4.6)$$

για οποιεσδήποτε σταθερές  $c_1, c_2$ .

#### Απόδειξη.

Αν  $y(n) = c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου στην (4.1) έχουμε:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_1 \cdot x_1(n) \cdot e^{-j\omega n} + c_2 \cdot x_2(n) \cdot e^{-j\omega n}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_1 \cdot x_1(n) \cdot e^{-j\omega n}] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_2 \cdot x_2(n) \cdot e^{-j\omega n}] = c_1 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) \cdot e^{-j\omega n} + c_2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n) \cdot e^{-j\omega n} \\ &= c_1 \cdot X_1(e^{j\omega}) + c_2 \cdot X_2(e^{j\omega}) \end{aligned}$$



#### 4.1.5.2. Μετατόπιση στον χρόνο

Αν  $x(n) \xrightarrow{DFT} X(e^{j\omega})$ , τότε

$$x(n - n_0) \xrightarrow{DFT} e^{-j\omega n_0} \cdot X(e^{j\omega}) \quad (4.7)$$

#### Απόδειξη.

Αν  $y(n) = x(n - n_0)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου στην (4.1) έχουμε:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - n_0) \cdot e^{-j\omega n}$$

Θέτοντας  $m = n - n_0$ , έχουμε:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - n_0) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot e^{-j\omega(m+n_0)} = e^{-j\omega n_0} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot e^{-j\omega m} = e^{-j\omega n_0} \cdot X(e^{j\omega}) \quad \blacksquare$$

#### 4.1.5.3. Αναδίπλωση

Αν  $x(n) \xrightarrow{DFT} X(e^{j\omega})$ , τότε

$$x(-n) \xrightarrow{DFT} X(e^{-j\omega}) \quad (4.8)$$

#### Απόδειξη.

Αν  $y(n) = x(-n)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου στην (4.1) έχουμε:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n) \cdot e^{-j\omega n}$$

Θέτοντας  $m = -n$ , έχουμε:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot e^{-j\omega(-m)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot e^{-j(-\omega)m} = X(e^{-j\omega}) \quad \blacksquare$$

#### 4.1.5.4. Μετατόπιση στη συχνότητα

Αν  $x(n) \xrightarrow{DFT} X(e^{j\omega})$ , τότε

$$e^{j\omega_0 n} \cdot x(n) \xrightarrow{DFT} X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad (4.9)$$

#### Απόδειξη.

Αν  $y(n) = e^{j\omega_0 n} \cdot x(n)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου στην (4.1) έχουμε:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 n} \cdot x(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 n - j\omega n} \cdot x(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0)n}$$

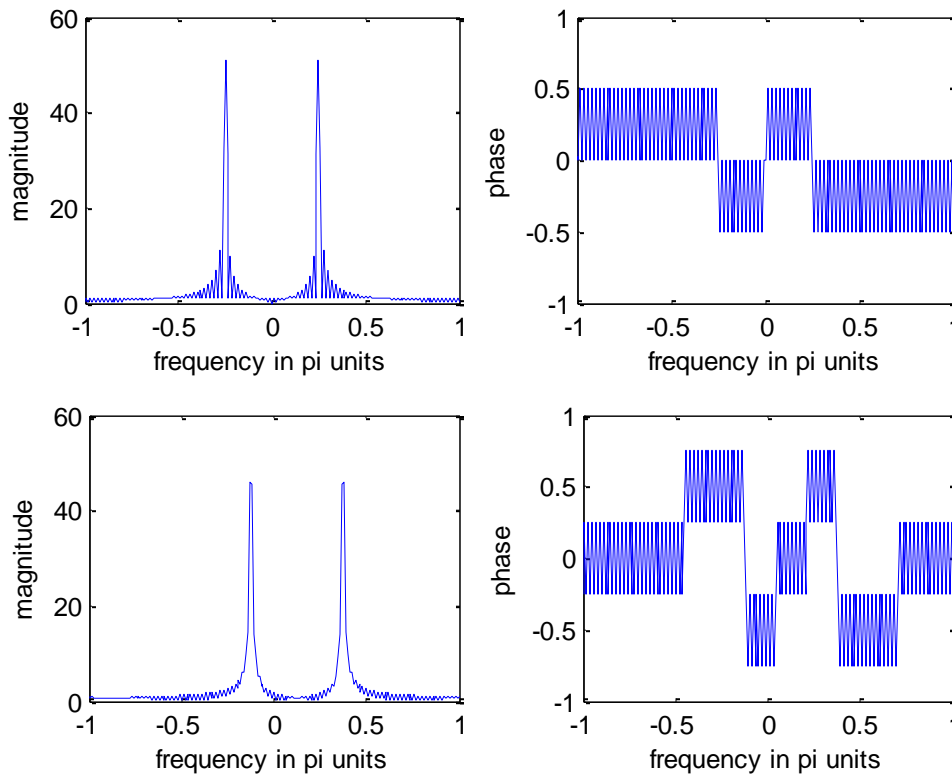
Θέτοντας  $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$ , έχουμε:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0)n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\tilde{\omega}n} = X(e^{j\tilde{\omega}}) = X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \blacksquare$$

Παράδειγμα.

Δίνονται τα σήματα  $x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right)$  και  $y(n) = e^{j\pi \cdot n/8} \cdot x(n)$  με μετασχηματισμούς Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  και  $Y(e^{j\omega})$ .

Στο Σχήμα 4.3 φαίνεται το μέτρο και τη φάση των μετασχηματισμών Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  και  $Y(e^{j\omega})$ . Είναι φανερό ότι ισχύει η ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα:  $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega - \frac{\pi}{8})})$



Σχήμα 4.3 Μετατόπιση στη συχνότητα.

#### 4.1.5.5. Συνέλιξη

Αν  $x_1(n) \xrightarrow{DFT} X_1(e^{j\omega})$  και  $x_2(n) \xrightarrow{DFT} X_2(e^{j\omega})$ , τότε

$$x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{DFT} X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega}) \quad (4.10)$$

**Απόδειξη.**

Αν  $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου στην (4.1) έχουμε:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x_1(n) * x_2(n)] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \cdot x_2(n-m) \right] \cdot e^{-j\omega n}$$

Θέτοντας  $n-m=k$  και αλλάζοντας τη σειρά των αθροισμάτων, έχουμε:

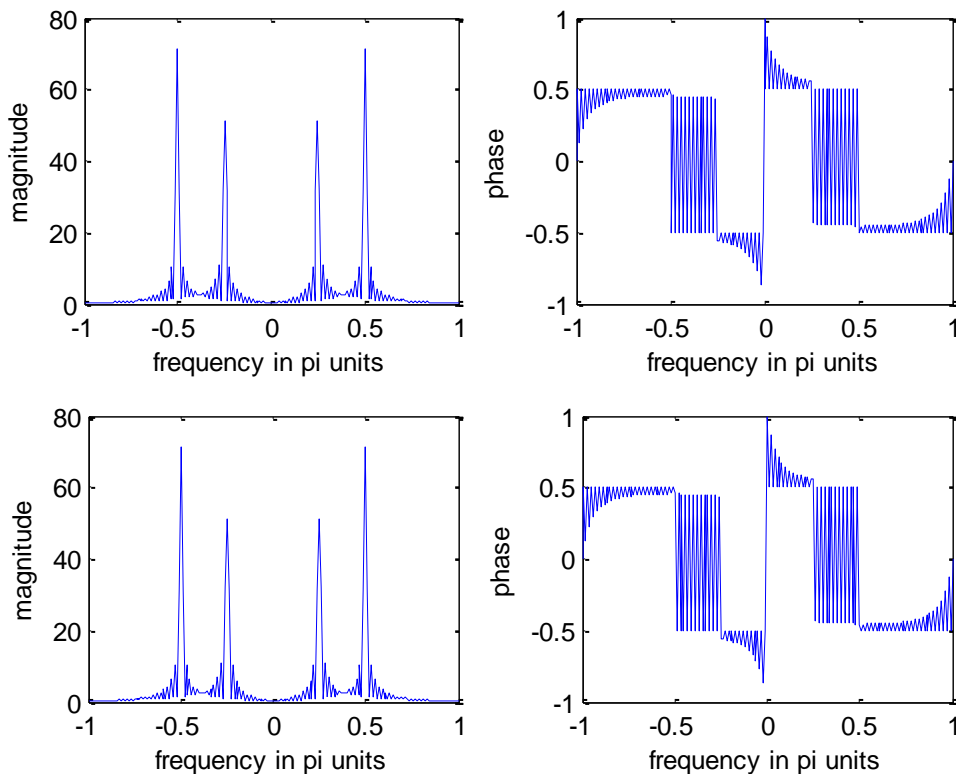
$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \cdot x_2(n-m) \right] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \cdot \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n-m) \cdot e^{-j\omega n} \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \cdot \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2(k) \cdot e^{-j\omega(m+k)} \right] = \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \cdot e^{-j\omega m} \right] \cdot \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2(k) \cdot e^{-j\omega k} \right] = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Παράδειγμα.

Δίνονται τα σήματα  $x_1(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$  και  $x_2(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n + 0.2\right)$  με μετασχηματισμούς Fourier διακριτού χρόνου  $X_1(e^{j\omega})$  και  $X_2(e^{j\omega})$ .

Η συνέλιξη των σημάτων  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$  έχει μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$ .

Στο Σχήμα 4.4 φαίνεται το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμών Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  και του γινομένου  $X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$ . Είναι φανερό ότι ισχύει η ιδιότητα της συνέλιξης:  $X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$ .



Σχήμα 4.4 Συνέλιξη.

#### 4.1.5.6. Μιγαδική συζυγία

Αν  $x(n) \xrightarrow{DFT} X(e^{j\omega})$ , τότε

$$x^*(n) \xrightarrow{DFT} X^*(e^{-j\omega}) \quad (4.11)$$

**Απόδειξη.**

Αν  $y(n) = x^*(n)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου στην (4.1) έχουμε:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

Παίρνοντας το συζυγές σήμα στην παραπάνω ισότητα μπορούμε να γράψουμε

$$Y^*(e^{j\omega}) = \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n) \cdot e^{-j\omega n} \right)^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x^*(n))^* \cdot (e^{-j\omega n})^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j(-\omega)n} = X(e^{-j\omega})$$

από όπου το συζυγές σήμα του δίνει:

$$(Y^*(e^{j\omega}))^* = (X(e^{-j\omega}))^* \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

δηλαδή

$$x^*(n) \xleftarrow{DTFT} X^*(e^{-j\omega}) \blacksquare$$

**4.1.5.7. Θεώρημα Parseval (αρχή διατήρησης της ενέργειας)**

Αν  $x(n) \xleftarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$ , τότε

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \tag{4.12}$$

**Απόδειξη.**

Χρησιμοποιώντας την (4.4) και τους ορισμούς του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου ευθύ και αντίστροφο στην (4.1) και (4.2) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot X^*(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \right] \cdot X^*(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega n} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n})^* d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \left( \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega \right)^* \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \end{aligned}$$



Στον Πίνακα 4.2 παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT)

Ιδιότητα Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT)	Ακολουθία Διακριτού χρόνου	Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT)
	$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
	$x_1(n)$	$X_1(e^{j\omega})$
	$x_2(n)$	$X_2(e^{j\omega})$
Γραμμικότητα	$c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$	$c_1 \cdot X_1(e^{j\omega}) + c_2 \cdot X_2(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στον χρόνο	$x(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0} \cdot X(e^{j\omega})$
Αναδίπλωση	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$

Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega_0 n} \cdot x(n)$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Συνέλιξη	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$
Μιγαδική Συζυγία	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
Θεώρημα Parseval (Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας)	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}  x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi}  X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	

**Πίνακας 4.2** Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT).

Μπορείτε να διερευνήσετε τον μετασχηματισμό Fourier (DTFT) διακριτού χρόνου με το Διαδραστικό πρόγραμμα 4.1.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 4.1** Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT).

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

#### 4.1.6. Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Αν και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (Inverse Discrete Time Fourier Transform – IDTFT) ορίζεται μέσω ολοκληρώματος στην (4.2), ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, στηρίζεται τόσο στα ζεύγη του μετασχηματισμού που παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1, όσο και στις ιδιότητες του μετασχηματισμού.

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί το σήμα  $x(n)$  που έχει μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

Έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} = 4 \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

Στη συνέχεια το γινόμενο αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$X(e^{j\omega}) = 4 \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} = \frac{A}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

Η ανάλυση σε απλά κλάσματα μπορεί να γίνει κάνοντας πράξεις:

$$4 \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} = \frac{A}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} = \frac{A \cdot \left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right) + B \cdot \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

$$\Rightarrow A \cdot \left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right) + B \cdot \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) = 4 \Rightarrow (A + B) - \left(\frac{1}{3}A + \frac{1}{2}B\right) \cdot e^{-j\omega} = 4$$

Επομένως, καταλήγουμε σε ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους:

$$\begin{cases} A + B = 4 \\ \frac{1}{3}A + \frac{1}{2}B = 0 \end{cases}$$

με λύση

$$\begin{cases} A = 12 \\ B = -8 \end{cases}$$

Άρα

$$X(e^{j\omega}) = \frac{12}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})} + \frac{-8}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})}$$

Έτσι, ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου γράφεται:

$$X(e^{j\omega}) = 12 \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})} - 8 \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό (από τα ζεύγη του μετασχηματισμού) και την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού, έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n)$$

#### 4.1.7. Συνέλιξη μέσω μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Ο υπολογισμός της συνέλιξης μέσω μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου στηρίζεται τόσο στα ζεύγη του μετασχηματισμού (βλέπε Πίνακα 4.1) και στις ιδιότητες του μετασχηματισμού.

Η διαδικασία υπολογισμού της συνέλιξης δύο σημάτων διακριτού χρόνου μέσω μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου είναι η ακόλουθη: Δεδομένων δύο σημάτων  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ , υπολογίζουμε τους μετασχηματισμούς Fourier διακριτού χρόνου  $X_1(e^{j\omega})$  και  $X_2(e^{j\omega})$  (στην περίπτωση που υπάρχουν). Στη συνέχεια υπολογίζουμε το γινόμενο  $X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$ , αφού γνωρίζουμε ότι  $X(e^{j\omega})$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της συνέλιξης  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$  (ιδιότητα συνέλιξης του μετασχηματισμού). Στη συνέχεια, το γινόμενο αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων κάνοντας πράξεις (όπως στην προηγούμενη παράγραφο). Τέλος, χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό (από τα ζεύγη του μετασχηματισμού) και την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού, υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου της  $X(e^{j\omega})$ , που είναι η ζητούμενη συνέλιξη.

Παράδειγμα.

Δίνονται τα σήματα

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n)$$

$$x_2(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n)$$

Να υπολογιστεί η συνέλιξη  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$  μέσω του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Αρχικά, χρησιμοποιώντας την (4.5), γίνεται έλεγχος της ύπαρξης των μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_1(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n) \right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 1 = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} < \infty$$

και

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_2(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n) \right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 1 = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} < \infty$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 4.1 υπολογίζονται οι (ευθείς) μετασχηματισμοί με χρήση των ζευγών του μετασχηματισμού:

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

Μετά υπολογίζεται το γινόμενο

$$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

Στη συνέχεια το γινόμενο αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων κάνοντας πράξεις:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} = \frac{A}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} + \frac{B}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

Άρα

$$X(e^{j\omega}) = \frac{4}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} + \frac{-3}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

που γράφεται:

$$X(e^{j\omega}) = 4 \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} - 3 \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό (από τα ζεύγη του μετασχηματισμού) και την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού, έχουμε τη ζητούμενη συνέλιξη, που είναι:

$$x(n) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n) - 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n)$$

## 4.2. Απόκριση συχνότητας

1-2-3-4-0-0

### 4.2.1. Ορισμός της απόκρισης συχνότητας

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο(LTI)σύστημα με κρουστική απόκριση  $h(n)$  και είσοδο  $x(n)$  παράγει στην έξοδο την απόκριση:

$$y(n) = h(n) * x(n) \quad (4.13)$$

όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

**Ιδιοσυνάρτηση** ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου(LTI)συστήματος είναι ένα σήμα  $x(n)$ , το οποίο αν τεθεί ως είσοδος στο σύστημα, παράγει έξοδο  $y(n) = \lambda \cdot x(n)$ , που είναι η είσοδος που έχει μεταβληθεί μόνο κατά πλάτος, δηλαδή η έξοδος είναι η είσοδος πολλαπλασιασμένη επί ένα συντελεστή  $\lambda$ , που ονομάζεται **ιδιοτιμή**.

Σήματα της μορφής  $x(n) = e^{j\omega n}$  είναι ιδιοσυναρτήσεις των γραμμικών χρονικά αμετάβλητων(LTI)συστημάτων.

Πράγματι, αν  $h(n)$  είναι η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος, τότε η απόκριση είναι:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{j\omega(n-k)} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{-j\omega k} \right\} \cdot e^{j\omega n} = H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} = \lambda \cdot x(n)$$

όπου ο συντελεστής

$$\lambda = H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{-j\omega k}$$

δεν εξαρτάται από το  $n$ .

Άρα η έξοδος  $y(n) = \lambda \cdot x(n)$  είναι η είσοδος  $x(n)$  πολλαπλασιασμένη επί τον συντελεστή  $\lambda$  και επομένως το σήμα  $x(n) = e^{j\omega n}$  είναι ιδιοσυνάρτηση του LTI συστήματος.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT), είναι τώρα φανερό ότι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$  είναι η συνάρτηση  $H(e^{j\omega})$ . Συνδυάζοντας τη συνθήκη ύπαρξης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) στην (4.5) με την ικανή και αναγκαία συνθήκη της ευστάθειας του γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος στην (3.13) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση  $H(e^{j\omega})$  πάντα υπάρχει.

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT)  $H(e^{j\omega})$  της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$  ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος ονομάζεται **απόκριση συχνότητας (frequency response)**:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad (4.14)$$

Από την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, είναι προφανές ότι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT)  $X(e^{j\omega})$  της εισόδου  $x(n)$  και ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT)  $Y(e^{j\omega})$  της εξόδου  $y(n) = h(n) * x(n)$  του LTI συστήματος συνδέονται με τη σχέση:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) \quad (4.15)$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.5.



Σχήμα 4.5 Απόκριση συχνότητας LTI συστήματος.

Έτσι, στα LTI συστήματα, η συνέλιξη στον χρόνο γίνεται πολλαπλασιασμός στη συχνότητα.

Είναι προφανές, από τον ορισμό στην (4.1), ότι η απόκριση συχνότητας είναι μιγαδική συνάρτηση:

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + j \cdot H_I(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (4.16)$$

όπου

-  $H_R(e^{j\omega}) = \text{Re}[H(e^{j\omega})]$  είναι η πραγματική συνιστώσα της απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega})$

-  $H_I(e^{j\omega}) = \text{Im}[H(e^{j\omega})]$  είναι η φανταστική συνιστώσα της απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega})$

-  $|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$  είναι το μέτρο της απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega})$

-  $\varphi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega})) = \arctan \frac{\text{Im}(H(e^{j\omega}))}{\text{Re}(H(e^{j\omega}))} = \arctan \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$  είναι η φάση της απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega})$$

Για το μέτρο ισχύει

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot H^*(e^{j\omega})$$

**Η απόκριση συχνότητας είναι συμμετρική.**

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$$



$H_R(e^{j\omega}) = H_R(e^{-j\omega})$  άρτια συμμετρία

$H_I(e^{j\omega}) = -H_I(e^{-j\omega})$  περιττή συμμετρία

$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$  άρτια συμμετρία

$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$  περιττή συμμετρία

**Η απόκριση συχνότητας είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο  $2\pi$ .**

$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi)}) \quad (4.17)$$

Αυτή η ιδιότητα της απόκρισης συχνότητας είναι εξαιρετικά σημαντική, γιατί αρκεί μία περίοδος της απόκρισης συχνότητας για να περιγράψει ένα LTI σύστημα. Και μάλιστα αυτό γίνεται τόσο στην περίπτωση συστημάτων πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης, όσο και στην περίπτωση συστημάτων άπειρης κρουστικής απόκρισης.

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος

$$h(n) = \delta(n) + 5\delta(n-1) - 8\delta(n-2)$$

Τότε η απόκριση συχνότητας είναι:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\delta(n) + 5\delta(n-1) - 8\delta(n-2)] \cdot e^{-j\omega n} \\ &= 1 \cdot e^{-j\omega \cdot 0} + 5 \cdot e^{-j\omega \cdot 1} - 8 \cdot e^{-j\omega \cdot 2} = 1 + 5 \cdot e^{-j\omega} - 8 \cdot e^{-2j\omega} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος

$$h(n) = \delta(n) - 2\delta(n-1)$$

Τότε η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\delta(n) - 2\delta(n-1)] \cdot e^{-j\omega n} = 1 \cdot e^{-j\omega \cdot 0} - 2 \cdot e^{-j\omega \cdot 1} = 1 - 2 \cdot e^{-j\omega}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Euler, έχουμε

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 - 2 \cdot e^{-j\omega} = 1 - 2 \cdot (\cos(-\omega) + j \cdot \sin(-\omega)) \\ &= 1 - 2 \cdot (\cos(\omega) - j \cdot \sin(\omega)) = (1 - 2 \cdot \cos(\omega)) + j \cdot (2 \cdot \sin(\omega)) \end{aligned}$$

από όπου είναι φανερό ότι

- η πραγματική συνιστώσα είναι  $\text{Re}[H(e^{j\omega})] = H_R(e^{j\omega}) = 1 - 2 \cdot \cos(\omega)$

- η φανταστική συνιστώσα είναι  $\text{Im}[H(e^{j\omega})] = H_I(e^{j\omega}) = 2 \cdot \sin(\omega)$

- το μέτρο είναι  $|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})} = \sqrt{(1 - 2 \cdot \cos(\omega))^2 + (2 \cdot \sin(\omega))^2}$

- η φάση είναι  $\varphi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega})) = a \tan \frac{\text{Im}(H(e^{j\omega}))}{\text{Re}(H(e^{j\omega}))} = \arctan \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = \arctan \frac{2 \cdot \sin(\omega)}{1 - 2 \cdot \cos(\omega)}$

Για τον υπολογισμό του μέτρου έχουμε

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})|^2 &= H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot H^*(e^{j\omega}) \\ &= (1 - 2 \cdot \cos(\omega)) + j \cdot (2 \cdot \sin(\omega)) \cdot (1 - 2 \cdot \cos(\omega)) - j \cdot (2 \cdot \sin(\omega)) \\ &= (1 - 2 \cdot \cos(\omega))^2 - (j \cdot 2 \cdot \sin(\omega))^2 = 1 - 4 \cdot \cos(\omega) + 4 \cdot \cos^2(\omega) + 4 \cdot \sin^2(\omega) = 5 - 4 \cdot \cos(\omega) \end{aligned}$$

Άρα το μέτρο είναι

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})} = \sqrt{(1 - 2 \cdot \cos(\omega))^2 + (2 \cdot \sin(\omega))^2} = \sqrt{5 - 4 \cdot \cos(\omega)}$$

#### 4.2.2. Περιγραφή LTI συστημάτων μέσω απόκρισης συχνότητας

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται με μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) \quad (4.18)$$

Στο κεφάλαιο 3 είδαμε ότι η κρουστική απόκριση  $h(n)$  αρκεί για να περιγράψει ένα LTI σύστημα στο πεδίο του χρόνου  $n$ . Τώρα θα δούμε ότι η απόκριση συχνότητας αρκεί για να περιγράψει ένα LTI σύστημα στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$ .

Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$  είναι η απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega})$ .

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) και στα δύο μέλη της εξίσωσης διαφορών, έχουμε

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot e^{-j\omega k} \cdot X(e^{j\omega}) - \sum_{k=1}^N a_k \cdot e^{-j\omega k} \cdot Y(e^{j\omega})$$

Οπότε

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) \cdot \sum_{k=0}^M b_k \cdot e^{-j\omega k} - Y(e^{j\omega}) \cdot \sum_{k=1}^N a_k \cdot e^{-j\omega k} \\ \Rightarrow Y(e^{j\omega}) + Y(e^{j\omega}) \cdot \sum_{k=1}^N a_k \cdot e^{-j\omega k} &= X(e^{j\omega}) \cdot \sum_{k=0}^M b_k \cdot e^{-j\omega k} \\ \Rightarrow Y(e^{j\omega}) \cdot \left( 1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot e^{-j\omega k} \right) &= X(e^{j\omega}) \cdot \sum_{k=0}^M b_k \cdot e^{-j\omega k} \end{aligned}$$

Ομως, γνωρίζουμε ότι:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

οπότε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

Άρα

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot e^{-j\omega k}} \quad (4.19)$$

Παρατηρούμε ότι η απόκριση συχνότητας εξαρτάται από τους συντελεστές του LTI συστήματος. Επομένως, οι σταθεροί συντελεστές της γραμμικής εξίσωσης διαφορών αρκούν για να ορίσουν την απόκριση συχνότητας. Έτσι, η απόκριση συχνότητας αρκεί για να περιγράψει ένα LTI σύστημα στο πεδίο της συχνότητας.

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI σύστημα:

$$y(n) = x(n) + x(n-2) - 2y(n-1) + 3y(n-2)$$

Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας.

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) και στα δύο μέλη της εξίσωσης διαφορών, έχουμε

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + e^{-2j\omega} \cdot X(e^{j\omega}) - 2 \cdot e^{-j\omega} \cdot Y(e^{j\omega}) + 3 \cdot e^{-2j\omega} \cdot Y(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) \cdot (1 + 2 \cdot e^{-j\omega} - 3 \cdot e^{-2j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot (1 + e^{-2j\omega})$$

Άρα

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 + e^{-2j\omega}}{1 + 2 \cdot e^{-j\omega} - 3 \cdot e^{-2j\omega}}$$

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI σύστημα:

$$y(n) = x(n) - 3x(n-1) + x(n-2) + 5y(n-1) - 4y(n-2)$$

Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας.

Από την εξίσωση διαφορών προκύπτει ότι πρόκειται για IIR φίλτρο με  $M = 2$  και  $N = 2$  και ότι οι σταθεροί συντελεστές είναι:

$$b_0 = 1, b_1 = -3, b_2 = 1, a_1 = -5, a_2 = 4$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τον τύπο της προηγούμενης παραγράφου, η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - 3 \cdot e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}{1 - 5 \cdot e^{-j\omega} + 4 \cdot e^{-2j\omega}}$$

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4 + 5 \cdot e^{-2j\omega}}{1 - 2 \cdot e^{-j\omega} - 3 \cdot e^{-2j\omega} + 6 \cdot e^{-3j\omega}}$$

Να βρεθεί η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει το LTI σύστημα.

Από την απόκριση συχνότητας προκύπτει ότι πρόκειται για IIR φίλτρο με  $M = 2$  και  $N = 3$  και ότι οι σταθεροί συντελεστές είναι:

$$b_0 = 4, b_1 = 0, b_2 = 5, a_1 = -2, a_2 = -3, a_3 = 6$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τον τύπο της προηγούμενης παραγράφου, η εξίσωση διαφορών είναι:

$$y(n) = 4x(n) + 5x(n-2) + 2y(n-1) + 3y(n-2) - 6y(n-3)$$

### 4.2.3. Σύνδεση συστημάτων σε σειρά

Ένα LTI σύστημα με απόκριση συχνότητας  $H_1(e^{j\omega})$  συνδέεται σε σειρά με ένα LTI σύστημα με απόκριση συχνότητας  $H_2(e^{j\omega})$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.6. Το πρώτο σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$  με DTFT  $X(e^{j\omega})$  και έξοδο  $w(n)$  με DTFT  $W(e^{j\omega})$ . Το δεύτερο σύστημα έχει είσοδο, την έξοδο του πρώτου συστήματος  $w(n)$  με DTFT  $W(e^{j\omega})$  και έξοδο  $y(n)$  με DTFT  $Y(e^{j\omega})$ .

Η σύνδεση σε σειρά των δύο συστημάτων είναι ισοδύναμη με ένα LTI σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega}) \quad (4.20)$$

**Απόδειξη.**

Για τα δύο συστήματα, που είναι συνδεδεμένα σε σειρά, ισχύει:

$$Y(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega}) \cdot W(e^{j\omega})$$

$$W(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

οπότε

$$Y(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega}) \cdot W(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega}) \cdot [H_1(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})] = [H_2(e^{j\omega}) \cdot H_1(e^{j\omega})] \cdot X(e^{j\omega}),$$

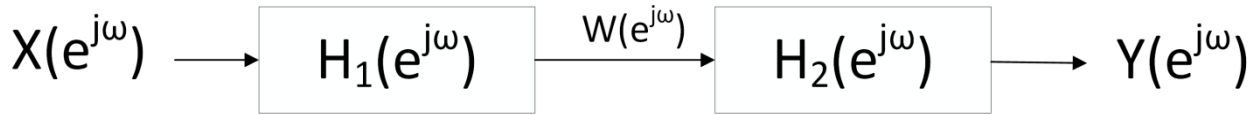
επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό.

Όμως, η έξοδος γράφεται:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

Επομένως :

$$H(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega}) \cdot H_1(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega})$$



Σχήμα 4.6 Σύνδεση συστημάτων σε σειρά.

Η συνολική απόκριση συχνότητας ενός LTI συστήματος, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα **σε σειρά**, είναι το **γινόμενο** των αποκρίσεων συχνότητας των επί μέρους συστημάτων.

#### 4.2.4. Σύνδεση συστημάτων παράλληλα

Ένα LTI σύστημα με απόκριση συχνότητας  $H_1(e^{j\omega})$  συνδέεται παράλληλα με ένα LTI σύστημα με απόκριση συχνότητας  $H_2(e^{j\omega})$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.7. Το πρώτο σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$  με DTFT  $X(e^{j\omega})$  και έξοδο  $w(n)$  με DTFT  $W(e^{j\omega})$ . Το δεύτερο σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$  με DTFT  $X(e^{j\omega})$  και έξοδο  $v(n)$  με DTFT  $V(e^{j\omega})$ . Οι έξοδοι των δύο συστημάτων αθροίζονται και δίνουν την συνολική έξοδο  $y(n)$  με DTFT  $Y(e^{j\omega})$ .

Η παράλληλη σύνδεση των δύο συστημάτων είναι ισοδύναμη με ένα LTI σύστημα με απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$  (4.21)

#### Απόδειξη.

Για τα δύο συστήματα, που είναι συνδεδεμένα παράλληλα, ισχύει:

$$V(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

$$W(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

οπότε

$$Y(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega}) + W(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) + H_1(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) = [H_2(e^{j\omega}) + H_1(e^{j\omega})] \cdot X(e^{j\omega})$$

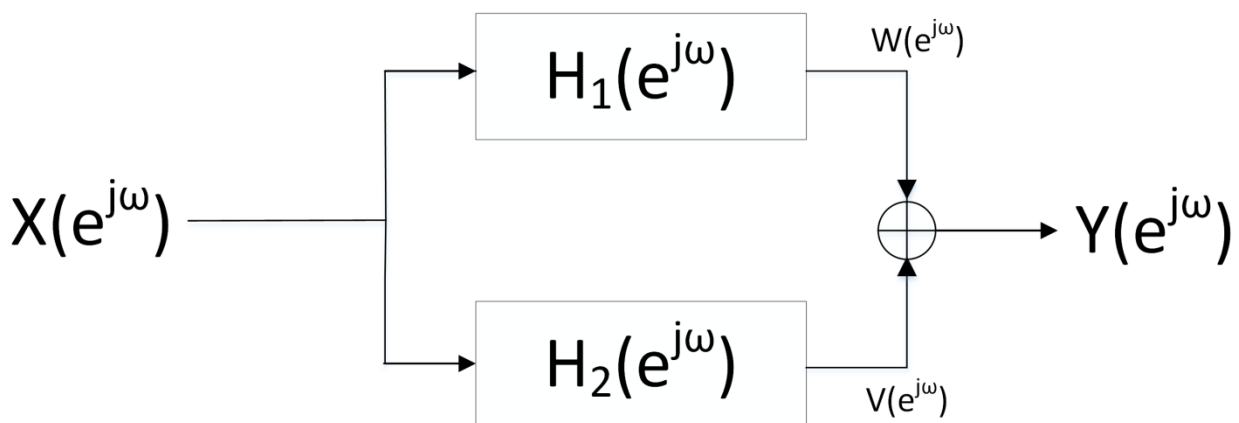
επειδή ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα.

Όμως, η έξοδος γράφεται:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

Επομένως :

$$H(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega}) + H_1(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$$



Σχήμα 4.7 Σύνδεση συστημάτων παράλληλα.

Η συνολική απόκριση συχνότητας ενός LTI συστήματος, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα **παράλληλα**, είναι το **άθροισμα** των αποκρίσεων συχνότητας των επί μέρους συστημάτων.

#### 4.2.5. Επίλυση εξισώσεων διαφορών μέσω μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Η επίλυση εξισώσεων διαφορών μέσω μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου στηρίζεται τόσο στα ζεύγη του μετασχηματισμού, όσο και στις ιδιότητες του μετασχηματισμού.

Παράδειγμα.

Δίνεται η εξίσωση διαφορών

$$y(n) = x(n) + x(n-2) + \frac{1}{3}y(n-1)$$

Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση  $h(n)$  του φίλτρου, δηλαδή την έξοδο του συστήματος για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$ .

Η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + e^{-2j\omega}}{1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega}} + e^{-2j\omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega}}$$

Από τα ζεύγη του μετασχηματισμού, έχουμε:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n) \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega}}$$

Από την ιδιότητα της μετατόπισης του μετασχηματισμού, έχουμε:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \cdot u(n-2) \xleftrightarrow{DFT} e^{-2j\omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega}}$$

Επομένως, από την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού, έχουμε:

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \cdot u(n-2)$$

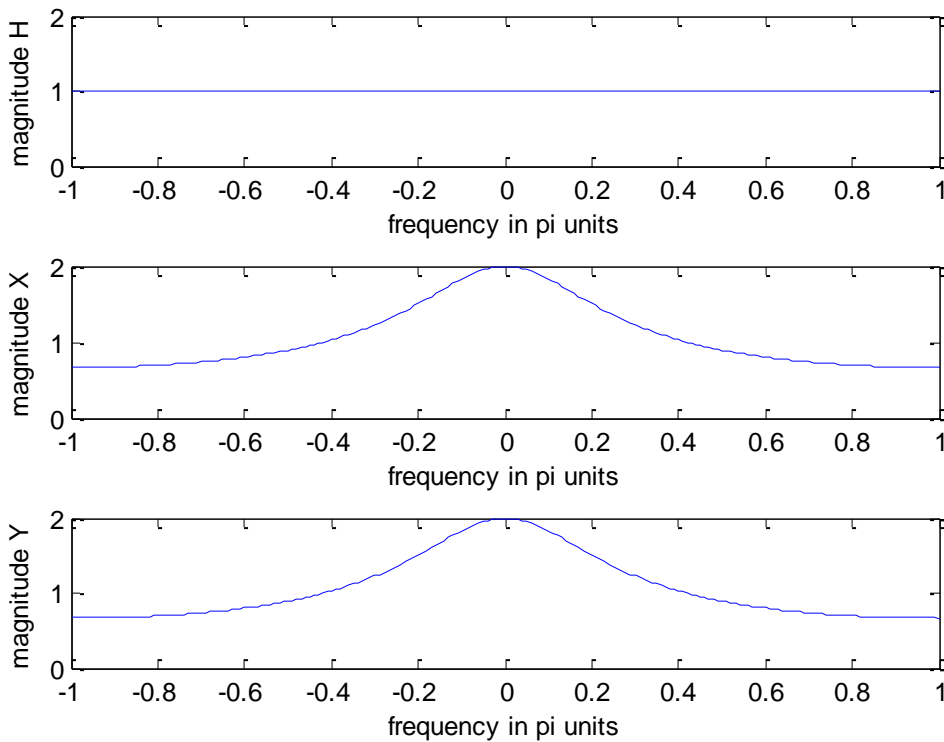
#### 4.2.6. Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

##### Ολοπερατά φίλτρα (AllPass)

Ιδανικό **ολοπερατό φίλτρο (All Pass)** ονομάζεται το φίλτρο με το μέτρο της απόκρισης συχνότητας σταθερό και ίσο με τη μονάδα, δηλαδή:

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \tag{4.22}$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.8.



Σχήμα 4.8 AllPass φίλτρο.

Η απόκριση συχνότητας του ιδεατού ολοπερατού φίλτρου είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}, |a| < 1, a \in \mathbb{R} \quad (4.23)$$

οπότε για το μέτρο της μπορούμε να γράψουμε:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega}) \cdot H^*(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a}{1 - a \cdot e^{-j\omega}} \cdot \frac{e^{j\omega} - a}{1 - a \cdot e^{j\omega}} = \frac{e^0 - a \cdot e^{-j\omega} - a \cdot e^{j\omega} + a^2}{1 - a \cdot e^{j\omega} - a \cdot e^{-j\omega} + a^2 \cdot e^0} = 1$$

Η κρουστική απόκριση του ιδεατού ολοπερατού φίλτρου είναι:

$$h(n) = -a^{n+1} \cdot \delta(n) + (1 - a^2) \cdot a^{n-1} \cdot u(n-1) \quad (4.24)$$

### Απόδειξη.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a}{1 - a \cdot e^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}} - a \cdot \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$$

Παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου, έχουμε:

$$h(n) = a^{n-1} \cdot u(n-1) - a \cdot a^n \cdot u(n)$$

Αλλά

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

οπότε

$$\begin{aligned} h(n) &= a^{n-1} \cdot u(n-1) - a \cdot a^n \cdot u(n) = a^{n-1} \cdot u(n-1) - a \cdot a^n \cdot [\delta(n) + u(n-1)] \\ &= -a \cdot a^n \cdot \delta(n) + [a^{n-1} - a \cdot a^n] \cdot u(n-1) = -a^{n+1} \cdot \delta(n) + (1 - a^2) \cdot a^{n-1} \cdot u(n-1) \end{aligned}$$



Ιδανικά **φίλτρα επιλογής συχνοτήτων** ονομάζονται τα φίλτρα με κατά τμήματα σταθερό μέτρο της απόκρισης συχνότητας και διακρίνονται σε τέσσερις κατηγορίες:

- χαμηλοπερατά ή βαθυπερατά φίλτρα (Low Pass)
- υψηλερατά φίλτρα (High Pass)
- ζωνοπερατά φίλτρα (Band Pass)
- ζωνοφρακτικά φίλτρα ή φίλτρα απόρριψης ζώνης (Band Stop)

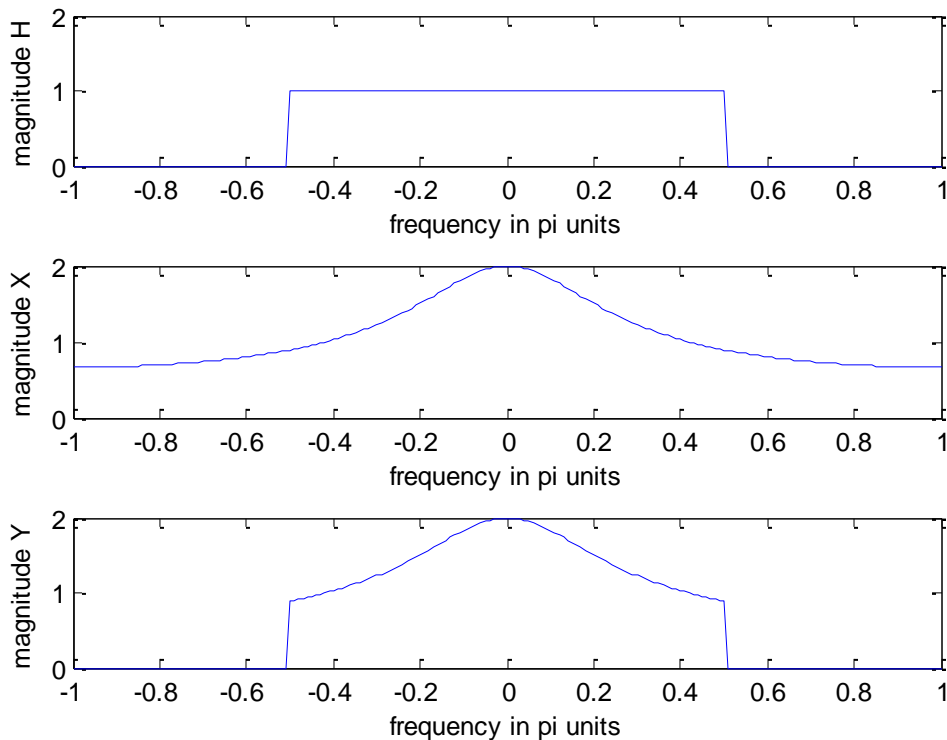
### Χαμηλοπερατό ή βαθυπερατό φίλτρο (Low Pass)

Η απόκριση συχνότητας του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου είναι:

$$H(e^{j\omega}) = 1, \omega \in [-\omega_c, \omega_c], 0 < \omega_c < \pi \quad (4.25)$$

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 4.9 φαίνεται η λειτουργία του χαμηλοπερατού φίλτρου, αφού παρουσιάζεται η απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega})$  του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου με  $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ , ο μετασχηματισμός Fourier

διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  της εισόδου  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$  του φίλτρου και ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\omega})$  της εξόδου  $y(n)$  του φίλτρου. Στο Σχήμα 4.9 φαίνεται το μέτρο των  $H(e^{j\omega})$ ,  $X(e^{j\omega})$  και  $Y(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .



Σχήμα 4.9 Low Pass φίλτρο.

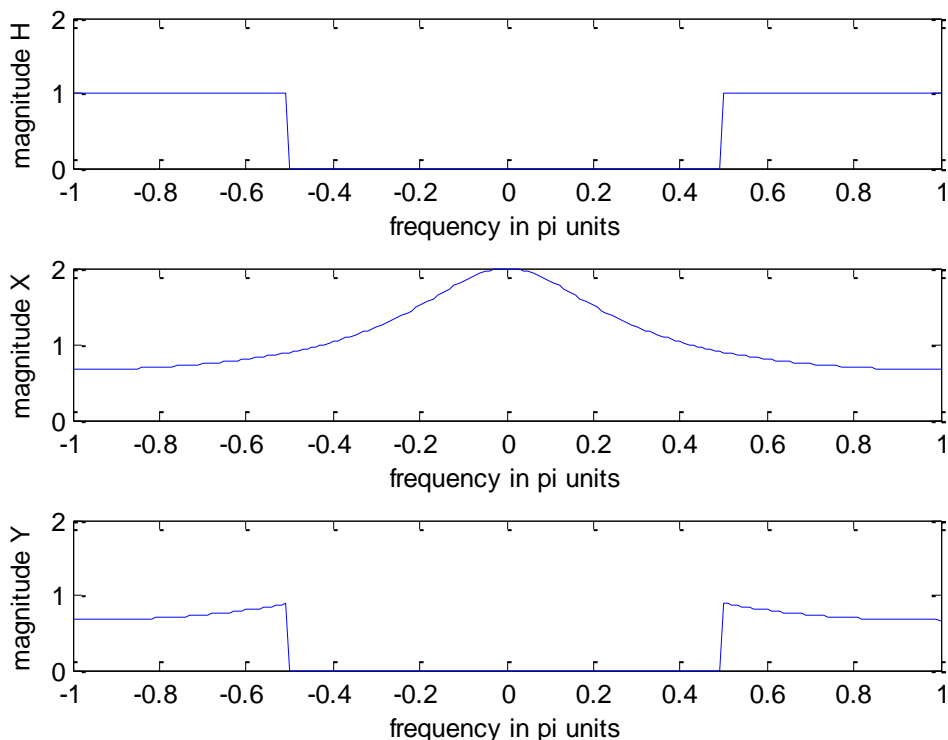
### Υψηλερατό φίλτρο (High Pass)

Η απόκριση συχνότητας του ιδανικού υψηλερατού φίλτρου είναι:

$$H(e^{j\omega}) = 1, \omega \notin [-\omega_c, \omega_c], 0 < \omega_c < \pi \quad (4.26)$$

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 4.10 φαίνεται η λειτουργία του υψηλερατού φίλτρου, αφού παρουσιάζεται η απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega})$  του ιδανικού υψηλερατού φίλτρου με  $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ , ο

μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  της εισόδου  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$  του φίλτρου και ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\omega})$  της εξόδου  $y(n)$  του φίλτρου. Στο Σχήμα 4.10 φαίνεται το μέτρο των  $H(e^{j\omega})$ ,  $X(e^{j\omega})$  και  $Y(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .



Σχήμα 4.10 High Pass φίλτρο.

### Ζωνοπερατό φίλτρο (Band Pass)

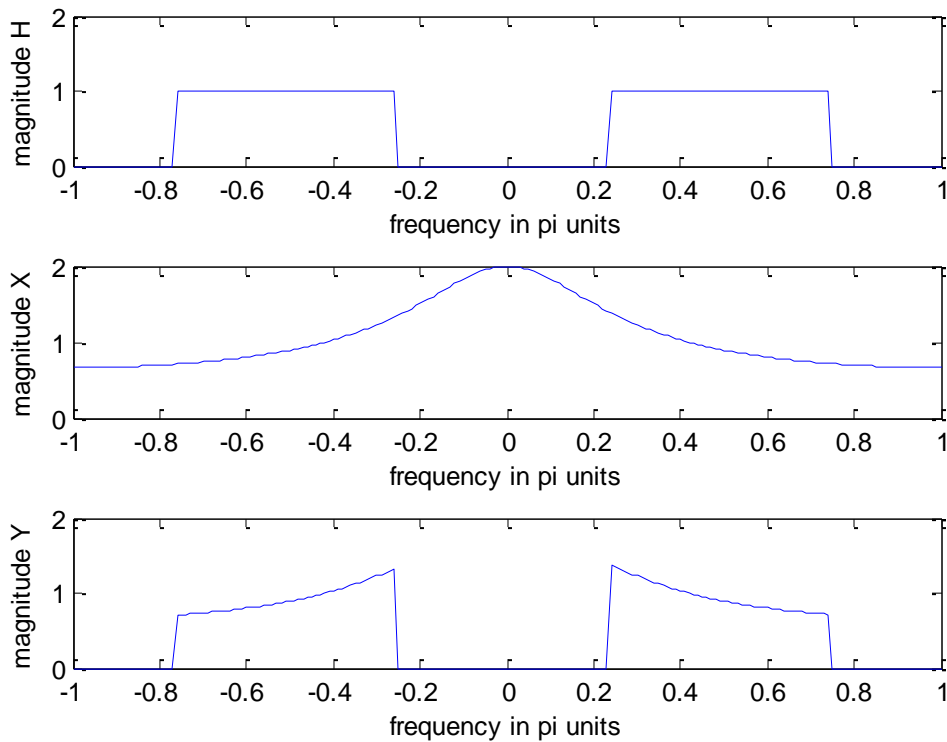
Η απόκριση συχνότητας του ιδανικού ζωνοπερατού φίλτρου είναι:

$$H(e^{j\omega}) = 1, \omega \in [-\omega_2, -\omega_1] \cup [\omega_1, \omega_2], 0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi \quad (4.27)$$

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 4.11 φαίνεται η λειτουργία του ζωνοπερατού φίλτρου, αφού παρουσιάζεται η απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega})$  του ιδανικού ζωνοπερατού φίλτρου με  $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$  και  $\omega_2 = \frac{3\pi}{4}$ , ο

μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  της εισόδου  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$  του φίλτρου και ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\omega})$  της εξόδου  $y(n)$  του φίλτρου. Στο Σχήμα 4.11 φαίνεται το μέτρο των  $H(e^{j\omega})$ ,  $X(e^{j\omega})$  και  $Y(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .





Σχήμα 4.11 Band Pass φίλτρο.

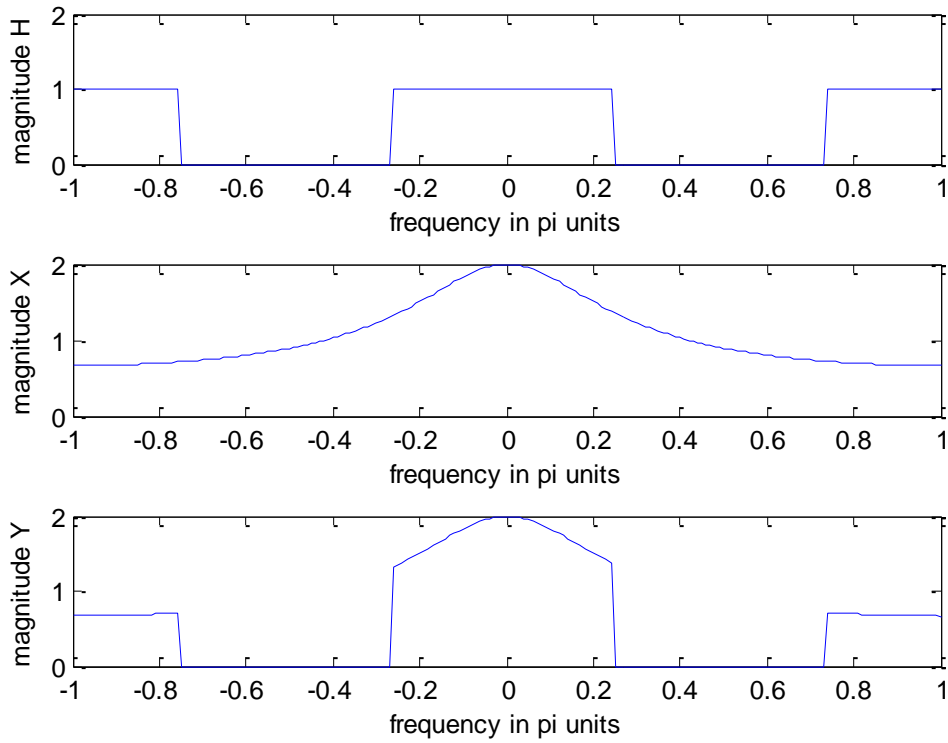
### Ζωνοφρακτικό φίλτρο ή φίλτρο απόρριψης ζώνης (Band Stop)

Η απόκριση συχνότητας του ιδανικού ζωνοφρακτικού φίλτρου είναι:

$$H(e^{j\omega}) = 1, \omega \notin [-\omega_2, -\omega_1] \cup [\omega_1, \omega_2], 0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi \quad (4.28)$$

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 4.12 φαίνεται η λειτουργία του ζωνοφρακτικού φίλτρου, αφού παρουσιάζεται η απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega})$  του ιδανικού ζωνοφρακτικού φίλτρου με  $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$  και  $\omega_2 = \frac{3\pi}{4}$ , ο

μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  της εισόδου  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$  του φίλτρου και ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\omega})$  της εξόδου  $y(n)$  του φίλτρου. Στο Σχήμα 4.12 φαίνεται το μέτρο των  $H(e^{j\omega})$ ,  $X(e^{j\omega})$  και  $Y(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .



Σχήμα 4.12 Band Stop φίλτρο.

#### 4.2.7. Φίλτρο αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας

Ένα **φίλτρο αποκοπής** ή **απόρριψης συχνότητας** (**notchfilter**) αποκόπτει μία συγκεκριμένη συχνότητα. Θεωρούμε ότι η συχνότητα, που πρέπει να απορριφθεί, είναι μία συγκεκριμένη συχνότητα  $\omega_c$ .

Η τεχνική σχεδίασης FIR φίλτρου αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας είναι η επιλογή FIR φίλτρου τάξης  $M = 2$  με απόκριση συχνότητας της μορφής:

$$H(e^{j\omega}) = b_0 + b_1 \cdot e^{-j\omega} + b_2 \cdot e^{-2j\omega}$$

Η απόκριση συχνότητας θέλουμε να γίνεται μηδέν στη συχνότητα  $\omega_c$ , οπότε επιλέγονται οι συντελεστές του φίλτρου, έτσι ώστε η απόκριση συχνότητας να γίνεται ίση με μηδέν στα συζυγή σημεία  $e^{j\omega_c}$  και  $e^{-j\omega_c}$ . Τότε

$$H(e^{j\omega}) = B \cdot (1 - e^{j\omega_c} \cdot e^{-j\omega}) \cdot (1 - e^{-j\omega_c} \cdot e^{-j\omega}) = B \cdot (1 - (e^{j\omega_c} + e^{-j\omega_c}) \cdot e^{-j\omega} + e^{-2j\omega})$$

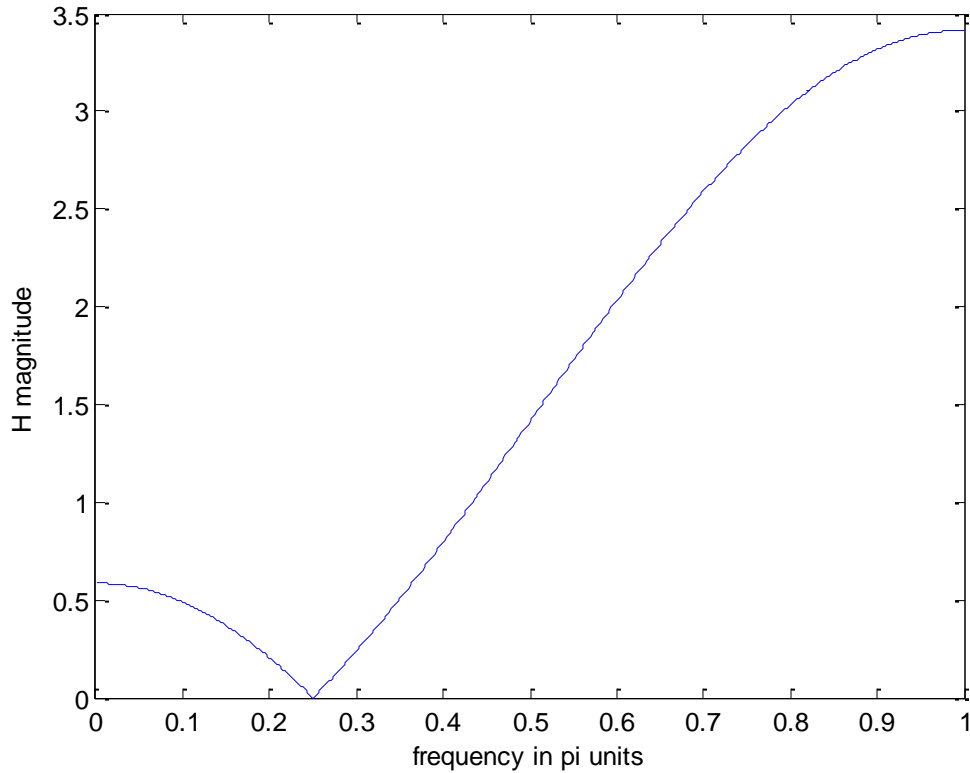
Επομένως,

$$H(e^{j\omega}) = B \cdot (1 - 2 \cdot \cos(\omega_c) \cdot e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}) \quad (4.29)$$

Για παράδειγμα, αν πρέπει να απορριφθεί η συγκεκριμένη συχνότητα  $\omega_c = \frac{\pi}{4}$ , επιλέγοντας  $B = 1$ , σχεδιάζεται το FIR φίλτρο αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας με απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = 1 - \sqrt{2} \cdot e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}$$

Στο Σχήμα 4.13 φαίνεται το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του FIR φίλτρου αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας. Παρατηρούμε ότι πράγματι το φίλτρο αποκόπτει τη συχνότητα  $\omega_c = \frac{\pi}{4}$ , αλλά ταυτόχρονα αποδυναμώνονται και οι συχνότητες στην περιοχή της συχνότητας  $\omega_c = \frac{\pi}{4}$ .



Σχήμα 4.13 FIR φίλτρο αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας.

Η τεχνική σχεδίασης ΠRφίλτρου αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας είναι η επιλογή ΠRφίλτρου τάξης  $(N, M) = (2, 2)$  με απόκριση συχνότητας της μορφής

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0 + b_1 \cdot e^{-j\omega} + b_2 \cdot e^{-2j\omega}}{1 + a_1 \cdot e^{-j\omega} + a_2 \cdot e^{-2j\omega}}$$

Οι συντελεστές του φίλτρου επιλέγονται, έτσι ώστε ο αριθμητής να μηδενίζεται στα συζυγή σημεία  $e^{j\omega_c}$  και  $e^{-j\omega_c}$  και ο παρονομαστής να μηδενίζεται στα συζυγή σημεία  $c \cdot e^{j\omega_c}$  και  $c \cdot e^{-j\omega_c}$ , όπου  $0 < c < 1$ . Τότε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{B_1 \cdot (1 - 2 \cdot \cos(\omega_c) \cdot e^{-j\omega} + e^{-2j\omega})}{B_2 \cdot (1 - 2 \cdot c \cdot \cos(\omega_c) \cdot e^{-j\omega} + c^2 \cdot e^{-2j\omega})}$$

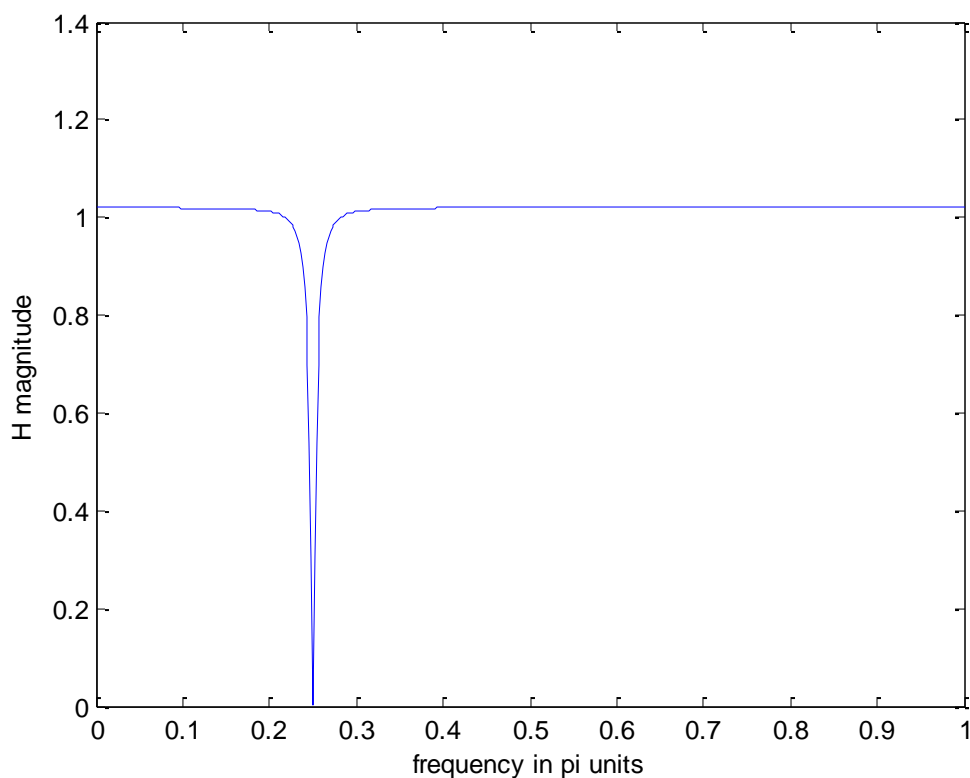
Επομένως,

$$H(e^{j\omega}) = B \cdot \frac{(1 - 2 \cdot \cos(\omega_c) \cdot e^{-j\omega} + e^{-2j\omega})}{(1 - 2 \cdot c \cdot \cos(\omega_c) \cdot e^{-j\omega} + c^2 \cdot e^{-2j\omega})} \quad (4.30)$$

Για παράδειγμα, αν πρέπει να απορριφθεί η συγκεκριμένη συχνότητα  $\omega_c = \frac{\pi}{4}$ , επιλέγοντας  $B = 1$  και  $c = 0.98$ , σχεδιάζεται το ΠRφίλτρο αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας με απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \frac{(1 - \sqrt{2} \cdot e^{-j\omega} + e^{-2j\omega})}{(1 - 0.98 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-j\omega} + 0.98^2 \cdot e^{-2j\omega})}$$

Στο Σχήμα 4.14 φαίνεται το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του IIR φίλτρου αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας. Παρατηρούμε ότι πράγματι το φίλτρο αποκόπτει τη συχνότητα  $\omega_c = \frac{\pi}{4}$  και ελαττώνεται το εύρος των συχνοτήτων στην περιοχή της συχνότητας  $\omega_c = \frac{\pi}{4}$  που επηρεάζονται. Μάλιστα, όσο η παράμετρος  $c$  πλησιάζει την τιμή 1, τόσο περισσότερο ελαττώνεται μικραίνει το εύρος των συχνοτήτων στην περιοχή της συχνότητας  $\omega_c = \frac{\pi}{4}$ , που επηρεάζονται.



Σχήμα 4.14 IIR φίλτρο αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας.

#### 4.2.8. Φίλτρα γραμμικής φάσης

Τα **φίλτρα γραμμικής φάσης** είναι αυτά που έχουν γραμμική φάση. Τα φίλτρα γραμμικής φάσης έχουν απόκριση συχνότητας της μορφής

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\omega c}, c \in \mathbb{R} \quad (4.31)$$

οπότε η φάση είναι γραμμική:

$$\arg(H(e^{j\omega})) = \varphi(\omega) = \omega \cdot c \quad (4.32)$$

και η καθυστέρηση ομάδας είναι σταθερή

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -c \quad (4.33)$$

Τα FIR φίλτρα μπορεί να έχουν γραμμική φάση τύπου I, τύπου II, τύπου III, τύπου IV και έχουν κρουστική απόκριση  $h(n), n \in [0:N]$  μήκους  $N+1$ . Ο τύπος της γραμμικής φάσης εξαρτάται από το αν ο αριθμός  $N$  είναι άρτιος ή περιττός και από το αν η κρουστική συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.3. Τα IIR φίλτρα δεν έχουν γραμμική φάση.

$N$	Συμμετρία $h(n)$	Τύπος
άρτιος	άρτια	Τύπου I
περιττός	άρτια	Τύπου II
άρτιος	περιττή	Τύπου III
περιττός	περιττή	Τύπου IV

Πίνακας 4.3 Τύποι φίλτρων γραμμικής φάσης.

### Φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου I.

Η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(n) = h(N - n), n \in [0 : N] \quad (4.34)$$

Ο αριθμός  $N$  είναι *άρτιος* και η κρουστική απόκριση είναι *άρτια* συνάρτηση με άξονα συμμετρίας στο  $n = \frac{N}{2}$ .

Η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(e^{j\omega}) = e^{jN\omega/2} \cdot \sum_{k=0}^{N/2} a_k \cdot \cos(\omega \cdot k) \quad (4.35)$$

με συντελεστές

$$a_k = 2 \cdot h\left(\frac{N}{2} - k\right), k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (4.36)$$

$$a_0 = h\left(\frac{N}{2}\right) \quad (4.37)$$

### Φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου II.

Η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(n) = h(N - n), n \in [0 : N] \quad (4.38)$$

Ο αριθμός  $N$  είναι *περιττός* και η κρουστική απόκριση είναι *άρτια* συνάρτηση με άξονα συμμετρίας στο  $n = \frac{N}{2}$ .

Η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(e^{j\omega}) = e^{jN\omega/2} \cdot \sum_{k=1}^{(N+1)/2} b_k \cdot \cos\left(\omega \cdot k - \frac{\omega}{2}\right) \quad (4.39)$$

με συντελεστές

$$b_k = 2 \cdot h\left(\frac{N+1}{2} - k\right), k = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2} \quad (4.40)$$

### Φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου III.

Η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(n) = -h(N - n), n \in [0 : N] \quad (4.41)$$

Ο αριθμός  $N$  είναι *άρτιος* και η κρουστική απόκριση είναι *περιττή* συνάρτηση με κέντρο συμμετρίας το  $\left(\frac{N}{2}, 0\right)$ .

Η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(e^{j\omega}) = j \cdot e^{jN\omega/2} \cdot \sum_{k=1}^{N/2} c_k \cdot \sin\left(\omega \cdot k - \frac{\omega}{2}\right) \quad (4.42)$$

με συντελεστές

$$c_k = 2 \cdot h\left(\frac{N}{2} - k\right), k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (4.43)$$

### Φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου IV.

Η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(n) = -h(N-n), n \in [0:N] \quad (4.44)$$

Ο αριθμός  $N$  είναι περιττός και η κρουστική απόκριση είναι περιττή συνάρτηση με κέντρο συμμετρίας το

$$\left(\frac{N}{2}, 0\right).$$

Η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(e^{j\omega}) = j \cdot e^{jN\omega/2} \cdot \sum_{k=1}^{(N+1)/2} d_k \cdot \sin\left(\omega \cdot k - \frac{\omega}{2}\right) \quad (4.45)$$

με συντελεστές

$$d_k = 2 \cdot h\left(\frac{N+1}{2} - k\right), k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (4.46)$$

Παρατήρηση.

Για τα φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου I και τύπου III ισχύει:

$$\left[H(e^{j\omega})\right]_{\omega=\pi} = 0 \quad (4.47)$$

Για τα φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου II και τύπου IV ισχύει:

$$\left[H(e^{j\omega})\right]_{\omega=0} = 0 \quad (4.48)$$

Μπορείτε να διερευνήσετε τα φίλτρα γραμμικής φάσης με το Διαδραστικό πρόγραμμα 4.2.



#### Διαδραστικό πρόγραμμα 4.2 Φίλτρα γραμμικής φάσης.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

### 4.3. Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου σε προγραμματιστικό περιβάλλον 1-0-3-0-0-0

Χρήσιμη βιβλιογραφία για Matlab είναι το βιβλίο TheMathWorksInc., 2005. Χρήσιμη ξενόγλωσση βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι τα βιβλία IngleandProakis, 2003 και Leis, 2011. Χρήσιμη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι το βιβλίο Ασημάκης, 2008. Χρήσιμη βιβλιογραφία για Octave είναι τα βιβλία Eaton, Bateman, Hauberg, Wehbring, 2011 και Hansen, 2011.

Όταν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT), τότε είναι δυνατό να υπολογιστεί το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος, το μέτρο και η φάση. Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) είναι συνάρτησης μεταβλητής  $\omega$ . Πρώτα δηλώνεται το πεδίο τιμών της μεταβλητής  $\omega$ . Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται ώστε το πεδίο τιμών της μεταβλητής  $\omega$  να είναι διάνυσμα. Χρήσιμο είναι το πεδίο τιμών της μεταβλητής  $\omega$  να περιλαμβάνει τουλάχιστον μία περίοδο  $2\pi$  (συνήθως δίνονται πεδία τιμών  $[0, 2\pi]$  ή  $[-\pi, \pi]$ ). Μετά δίνεται ο τύπος υπολογισμού του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου. Προσοχή στη χρήση της τελείας στους τελεστές των πράξεων, ώστε οι πράξεις να γίνονται με κάθε τιμή του διάνυσματος, που αντιστοιχεί στη μεταβλητή  $\omega$ . Χρήσιμο είναι να υπολογίζεται το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος, το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT). Για τον υπολογισμό του πραγματικού μέρους χρησιμοποιείται η συνάρτηση `real`. Για τον υπολογισμό του φανταστικού μέρους χρησιμοποιείται η συνάρτηση `imag`. Για τον υπολογισμό του μέτρου χρησιμοποιείται η συνάρτηση `abs`. Για τον υπολογισμό της φάσης χρησιμοποιείται η συνάρτηση `angle`. Είναι δυνατή η ταυτόχρονη σχεδίαση του πραγματικού μέρους, του φανταστικού μέρους, του μέτρου και της φάσης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) σε ένα Σχήμα με τη χρήση της συνάρτησης `subplot`.

Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$  έχει

μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT)

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}}.$$

Για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) και τη σχεδίαση του πραγματικού μέρους, του φανταστικού μέρους, του μέτρου και της φάσης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) απαιτείται η κλήση

```
w=[0:0.1:20];
X=1 ./ (1-0.5.*exp(-j*w));
realX=real(X);
imagX=imag(X);
absX=abs(X);
angleX=angle(X);
figure(1);
subplot(2,2,1); plot(w,realX);
subplot(2,2,2); plot(w,imagX);
subplot(2,2,3); plot(w,absX);
subplot(2,2,4); plot(w,angleX);
```

Επίσης, συνηθίζεται η σχεδίαση του πραγματικού μέρους, του φανταστικού μέρους, του μέτρου και της φάσης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) σε μονάδες  $\pi$ . Σε αυτήν την περίπτωση απαιτείται η κλήση (τροποποίηση της παραπάνω κλήσης)

```
w=[0:1:1000]*(4*pi)/1000;
X=1 ./ (1-0.5.*exp(-j*w));
realX=real(X);
imagX=imag(X);
absX=abs(X);
angleX=angle(X);
p=w/pi;
figure(1);
subplot(2,2,1); plot(p,realX);
subplot(2,2,2); plot(p,imagX);
subplot(2,2,3); plot(p,absX);
subplot(2,2,4); plot(p,angleX);
```

#### 4.4. Λυμένες Ασκήσεις

##### 1-2-3-4-0-0

1. Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου του σήματος

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n+3)$$

Λύση.

Αρχικά γίνεται έλεγχος της ύπαρξης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n+3) \right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n+3) = \sum_{n=-\infty}^{-4} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n+3) + \sum_{n=-3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n+3) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-4} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 0 + \sum_{n=-3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1 = 0 + \sum_{n=-3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 8 + 4 + 2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 16 < \infty \end{aligned}$$

Επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος.

Στη συνέχεια γίνεται ο υπολογισμός.

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n+3) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-4} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n+3) \cdot e^{-j\omega n} + \sum_{n=-3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n+3) \cdot e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-4} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 0 \cdot e^{-j\omega n} + \sum_{n=-3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1 \cdot e^{-j\omega n} = 0 + \sum_{n=-3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}\right)^n \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$a = \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}$$

έχουμε

$$\sum_{n=-3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}\right)^n = \sum_{n=-3}^{+\infty} a^n = a^{-3} + a^{-2} + a^{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = a^{-3} + a^{-2} + a^{-1} + a^0 + a^1 + a^2 + \dots$$

$$\Rightarrow a^3 \cdot \sum_{n=-3}^{+\infty} a^n = a^0 + a^1 + a^2 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}\right)^n = a^{-3} \cdot \frac{1}{1-a}$$

επειδή

$$|a| = \left| \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega} \right| = \left| \frac{1}{2} \right| \cdot |e^{-j\omega}| = \frac{1}{2} \cdot |\cos(-\omega) + j \cdot \sin(-\omega)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\cos^2(-\omega) + \sin^2(-\omega)} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < \infty$$

Άρα

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}\right)^n = a^{-3} \cdot \frac{1}{1-a} = \frac{8 \cdot e^{3j\omega}}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}}$$

Μία άλλη λύση είναι να χρησιμοποιηθούν οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Το σήμα  $x(n)$  γράφεται:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n+3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \cdot u(n+3) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \cdot u(n+3) = 8 \cdot y(n+3)$$

όπου θέσαμε

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$$

Από τα ζεύγη των μετασχηματισμών Fourier διακριτού χρόνου γνωρίζουμε ότι:

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) \xrightarrow{DTFT} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}}$$

Επίσης, από την ιδιότητα της μετατόπισης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου γνωρίζουμε ότι:

$$y(n+3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \cdot u(n+3) \xrightarrow{DTFT} e^{3j\omega} \cdot Y(e^{j\omega}) = \frac{e^{3j\omega}}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}}$$

και από την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου γνωρίζουμε ότι:

$$x(n) = 8 \cdot y(n+3) \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) = 8 \cdot \frac{e^{3j\omega}}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}}$$

Άρα

$$X(e^{j\omega}) = \frac{8 \cdot e^{3j\omega}}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}}$$

2. Να υπολογίσετε την έξοδο  $y(n)$  ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος με κρουστική απόκριση



$$h(n) = a^n \cdot u(n), |a| < 1$$

και είσοδο

$$x(n) = b^n \cdot u(n), |b| < 1$$

Λύση.

Αρχικά γίνεται έλεγχος της ύπαρξης των μετασχηματισμών Fourier διακριτού χρόνου

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a|^n \cdot u(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} |a|^n \cdot u(n) + \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n \cdot u(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} |a|^n \cdot 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n \cdot 1 = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

και

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b|^n \cdot u(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} |b|^n \cdot u(n) + \sum_{n=0}^{+\infty} |b|^n \cdot u(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} |b|^n \cdot 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} |b|^n \cdot 1 = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} |b|^n = \frac{1}{1-|b|} < \infty .$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι (ευθείς) μετασχηματισμοί με χρήση των ζευγών του μετασχηματισμού:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-a \cdot e^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-b \cdot e^{-j\omega}}$$

Μετά υπολογίζεται το γινόμενο

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-a \cdot e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-b \cdot e^{-j\omega}}$$

Στη συνέχεια το γινόμενο αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων κάνοντας πράξεις:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-a \cdot e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-b \cdot e^{-j\omega}} = \frac{A}{1-a \cdot e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-b \cdot e^{-j\omega}}$$

Τότε

$$A = \frac{a}{a-b}$$

$$B = -\frac{b}{a-b}$$

όπου

$$a \neq b$$

Άρα

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{a}{a-b} \cdot \frac{1}{1-a \cdot e^{-j\omega}} - \frac{b}{a-b} \cdot \frac{1}{1-b \cdot e^{-j\omega}}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό (από τα ζεύγη του μετασχηματισμού) και την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού, έχουμε:

$$y(n) = \frac{a}{a-b} a^n \cdot u(n) - \frac{b}{a-b} b^n \cdot u(n)$$

Στην περίπτωση όπου  $a = b$  έχουμε

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-a \cdot e^{-j\omega})^2}$$

και χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό (από τα ζεύγη του μετασχηματισμού) καταλήγουμε:

$$y(n) = (n+1) \cdot a^n \cdot u(n) .$$

3. Δίνεται η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος

$$h(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$$

Να υπολογίσετε την απόκριση συχνότητας.

Λύση.

Η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{\delta(n) + \delta(n-1)\} \cdot e^{-j\omega n} = 1 \cdot e^{-j\omega \cdot 0} + 1 \cdot e^{-j\omega \cdot 1} = 1 + e^{-j\omega}$$

$$= 1 + (\cos(-\omega) + j \cdot \sin(-\omega)) = (1 + \cos(\omega)) + j \cdot (-\sin(\omega))$$

όπου

- η πραγματική συνιστώσα είναι  $\operatorname{Re}[H(e^{j\omega})] = H_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos(\omega)$

- η φανταστική συνιστώσα είναι  $\operatorname{Im}[H(e^{j\omega})] = H_I(e^{j\omega}) = -\sin(\omega)$

- το μέτρο είναι

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})} = \sqrt{(1 + \cos(\omega))^2 + (-\sin(\omega))^2} = \sqrt{2 + 2 \cdot \cos(\omega)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \cos(\omega)}$$

- η φάση είναι  $\varphi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega})) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(H(e^{j\omega}))}{\operatorname{Re}(H(e^{j\omega}))} = \arctan \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = \arctan \frac{-\sin(\omega)}{1 + \cos(\omega)}$

4. Δίνεται η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος

$$h(n) = \delta(n) + a \cdot \delta(n-1), a \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε την απόκριση συχνότητας.

Λύση.

Η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{\delta(n) + a \cdot \delta(n-1)\} \cdot e^{-j\omega n} = 1 \cdot e^{-j\omega \cdot 0} + a \cdot e^{-j\omega \cdot 1} = 1 + a \cdot e^{-j\omega}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Euler, έχουμε

$$H(e^{j\omega}) = 1 + a \cdot e^{-j\omega} = 1 + a \cdot (\cos(-\omega) + j \cdot \sin(-\omega))$$

$$= 1 + a \cdot (\cos(\omega) - j \cdot \sin(\omega)) = (1 + a \cdot \cos(\omega)) + j \cdot (a \cdot \sin(\omega))$$

όπου

- η πραγματική συνιστώσα είναι  $\operatorname{Re}[H(e^{j\omega})] = H_R(e^{j\omega}) = 1 + a \cdot \cos(\omega)$

- η φανταστική συνιστώσα είναι  $\operatorname{Im}[H(e^{j\omega})] = H_I(e^{j\omega}) = a \cdot \sin(\omega)$

- το μέτρο είναι  $|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})} = \sqrt{(1 + a \cdot \cos(\omega))^2 + (a \cdot \sin(\omega))^2} = \sqrt{1 + 2 \cdot a \cdot \cos(\omega) + a^2}$

- η φάση είναι  $\varphi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega})) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(H(e^{j\omega}))}{\operatorname{Re}(H(e^{j\omega}))} = \arctan \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = \arctan \frac{a \cdot \sin(\omega)}{1 + a \cdot \cos(\omega)}$

## 4.5. Ασκήσεις

### 1-2-3-4-0-0

1. Να υπολογίσετε τους μετασχηματισμούς Fourier διακριτού χρόνου των σημάτων

α.  $x(n) = u(n)$

β.  $x(n) = a^n \cdot u(n), |a| < 1$

γ.  $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n)$

δ.  $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n) + 2$

2. Δίνεται η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος

$$h(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-3)$$

Να υπολογίσετε την απόκριση συχνότητας.

3. Δίνεται η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος  
 $h(n) = \delta(n) - 3\delta(n-1)$

Να υπολογίσετε την απόκριση συχνότητας.

4. Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI σύστημα:

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + 5y(n-1) - 4y(n-3)$$

Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας.

5. Δίνεται η απόκριση συχνότητας ενός LTI συστήματος:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - 3 \cdot e^{-j\omega} + 5 \cdot e^{-4j\omega}}{1 + 5 \cdot e^{-j\omega} - 4 \cdot e^{-3j\omega}}$$

Να υπολογιστεί η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει το σύστημα.

6. Να δείξετε ότι τα φίλτρα μέσης τιμής είναι φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου I ή τύπου II.

## 4.6. Εργαστηριακές Ασκήσεις

### Εργαστηριακή Άσκηση 9      Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου και Απόκριση συχνότητας 1-0-3-0-0-0

1. Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Δίνεται το σήμα

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n)$$

με μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega}}$$

Να σχεδιάσετε την πραγματική συνιστώσα, τη φανταστική συνιστώσα, το μέτρο και τη φάση του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  του σήματος  $x(n)$  για  $\omega \in [0, 2\pi]$ .

2. Περιοδικότητα μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Δίνεται το σήμα

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot e^{j\pi n/8} \cdot u(n)$$

Να σχεδιάσετε την πραγματική συνιστώσα, τη φανταστική συνιστώσα, το μέτρο και τη φάση του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  του σήματος  $x(n)$  για  $\omega \in [-2\pi, 2\pi]$ .

Να επιβεβαιώσετε ότι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι περιοδικός με θεμελιώδη περίοδο  $2\pi$ .

3. Γραμμικότητα

Να γράψετε πρόγραμμα για την επιβεβαίωση της ιδιότητας της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση randna παράγετε δύο σήματα διακριτού χρόνου  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$  για  $n \in [0:10]$ .

Στη συνέχεια, να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n) = 2 \cdot x_1(n) + 3 \cdot x_2(n)$ .

Να υπολογίσετε τους μετασχηματισμούς Fourier διακριτού χρόνου  $X_1(e^{j\omega})$  και  $X_2(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [0, 2\pi]$  και να υπολογίσετε την ποσότητα  $Y(e^{j\omega}) = 2 \cdot X_1(e^{j\omega}) + 3 \cdot X_2(e^{j\omega})$ .

Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [0, 2\pi]$ .

Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του πλάτους της διαφοράς  $X(e^{j\omega}) - Y(e^{j\omega})$  και να εμφανίσετε το αποτέλεσμα. Ενδεικτικά, το αποτέλεσμα είναι της τάξης του  $10^{-15}$ .

#### 4. Μετατόπιση στον χρόνο

Να γράψετε πρόγραμμα για την επιβεβαίωση της ιδιότητας της μετατόπισης στον χρόνο του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `randn` παράγετε το σήματα διακριτού χρόνου  $x(n)$  για  $n \in [0:10]$ .

Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [0, 2\pi]$ .

Να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $y(n) = x(n-2)$ .

Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [0, 2\pi]$ .

Στη συνέχεια, να υπολογίσετε την ποσότητα  $Z(e^{j\omega}) = e^{-2j\omega} \cdot X(e^{j\omega})$ .

Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του πλάτους της διαφοράς  $Z(e^{j\omega}) - Y(e^{j\omega})$  και να εμφανίσετε το αποτέλεσμα. Ενδεικτικά, το αποτέλεσμα είναι της τάξης του  $10^{-15}$ .

#### 5. Αντιστροφή στον χρόνο

Να γράψετε πρόγραμμα για την επιβεβαίωση της ιδιότητας της αντιστροφής στον χρόνο του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `randn` παράγετε το σήματα διακριτού χρόνου  $x(n)$  για  $n \in [0:10]$ .

Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [0, 2\pi]$ .

Να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $y(n) = x(-n)$ .

Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [0, 2\pi]$ .

Στη συνέχεια, να υπολογίσετε την ποσότητα  $Z(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$ .

Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του πλάτους της διαφοράς  $Z(e^{j\omega}) - Y(e^{j\omega})$  και να εμφανίσετε το αποτέλεσμα. Ενδεικτικά, το αποτέλεσμα είναι της τάξης του  $10^{-15}$ .

#### 6. Μετατόπιση στη συχνότητα

Να γράψετε πρόγραμμα για την επιβεβαίωση της ιδιότητας της μετατόπισης στη συχνότητα του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `randn` παράγετε το σήματα διακριτού χρόνου  $x(n)$  για  $n \in [0:100]$ .

Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $y(n) = e^{j\pi n/4} \cdot x(n)$ .

Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Στη συνέχεια, να υπολογίσετε  $X(e^{-j(\omega-\frac{\pi}{4})})$ .

Να σχεδιάσετε το μέτρο και τη φάση των μετασχηματισμών Fourier διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\omega})$  και  $X(e^{-j(\omega-\frac{\pi}{4})})$  και να διαπιστώσετε ότι  $Y(e^{j\omega}) = X(e^{-j(\omega-\frac{\pi}{4})})$ .

#### 7. Συνέλιξη στον χρόνο

Να γράψετε πρόγραμμα για την επιβεβαίωση της ιδιότητας της συνέλιξης στον χρόνο του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `randn` παράγετε δύο σήματα διακριτού χρόνου  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$  για  $n \in [0:100]$ .

Να υπολογίσετε τους μετασχηματισμούς Fourier διακριτού χρόνου  $X_1(e^{j\omega})$  και  $X_2(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [-\pi, \pi]$  και να υπολογίσετε την ποσότητα  $X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$ .

Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Στη συνέχεια, να παράγετε τη συνέλιξη  $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$  και να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Να σχεδιάσετε το μέτρο και τη φάση των μετασχηματισμών Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  και  $Y(e^{j\omega})$  και να διαπιστώσετε ότι είναι ίσοι.

### 8. Μιγαδική συζυγία

Να γράψετε πρόγραμμα για την επιβεβαίωση της ιδιότητας της μιγαδικής συζυγίας του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `randn` παράγετε το σήματα διακριτού χρόνου  $x(n)$  για  $n \in [0:20]$ .

Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `conj` να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $y(n) = x^*(n)$  που είναι το συζυγές σήμα του  $x(n)$ .

Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `conj` να υπολογίσετε την ποσότητα  $Z(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ .

Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του πλάτους της διαφοράς  $Z(e^{j\omega}) - Y(e^{j\omega})$  και να εμφανίσετε το αποτέλεσμα. Ενδεικτικά, το αποτέλεσμα είναι της τάξης του  $10^{-15}$ .

### 9. Χαμηλοπερατό ή βαθυπερατό φίλτρο (LowPass)

Να γράψετε πρόγραμμα για τον έλεγχο της λειτουργίας του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου (LowPass).

Να παράγετε την απόκριση συχνότητας του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου:

$$H(e^{j\omega}) = 1, \omega \in [-\omega_c, \omega_c], 0 < \omega_c < \pi$$

$$\text{με } \omega_c = \frac{\pi}{2}.$$

Να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n)$  για  $n \in [0:100]$ .

Να σχεδιάσετε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας  $H(e^{j\omega})$ , του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  της εισόδου  $x(n)$  και του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\omega})$  της εξόδου  $y(n)$  του φίλτρου για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

### 10. Υψηπερατό φίλτρο (HighPass)

Να γράψετε πρόγραμμα για τον έλεγχο της λειτουργίας του ιδανικού υψηπερατού φίλτρου (LowPass).

Να παράγετε την απόκριση συχνότητας του ιδανικού υψηπερατού φίλτρου:

$$H(e^{j\omega}) = 1, \omega \in [-\omega_c, \omega_c], 0 < \omega_c < \pi$$

$$\text{με } \omega_c = \frac{\pi}{4}.$$

Να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n)$  για  $n \in [0:100]$ .

Να σχεδιάσετε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας  $H(e^{j\omega})$ , του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  της εισόδου  $x(n)$  και του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\omega})$  της εξόδου  $y(n)$  του φίλτρου για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

#### 11. Ζωνοπερατό φίλτρο (BandPass)

Να γράψετε πρόγραμμα για τον έλεγχο της λειτουργίας του ιδανικού ζωνοπερατού φίλτρου (BandPass).

Να παράγετε την απόκριση συχνότητας του ιδανικού ζωνοπερατού φίλτρου:

$$H(e^{j\omega}) = 1, \omega \in [-\omega_2, -\omega_1] \cup [\omega_1, \omega_2], 0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi$$

$$\text{με } \omega_1 = \frac{\pi}{3} \text{ και } \omega_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

Να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n)$  για  $n \in [0:100]$ .

Να σχεδιάσετε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας  $H(e^{j\omega})$ , του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  της εισόδου  $x(n)$  και του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\omega})$  της εξόδου  $y(n)$  του φίλτρου για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

#### 12. Ζωνοφρακτικό φίλτρο ή φίλτρο απόρριψης ζώνης (BandStop)

Να γράψετε πρόγραμμα για τον έλεγχο της λειτουργίας του ιδανικού ζωνοφρακτικού φίλτρου (BandStop).

Να παράγετε την απόκριση συχνότητας του ιδανικού ζωνοφρακτικού φίλτρου:

$$H(e^{j\omega}) = 1, \omega \notin [-\omega_2, -\omega_1] \cup [\omega_1, \omega_2], 0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi$$

$$\text{με } \omega_1 = \frac{\pi}{3} \text{ και } \omega_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

Να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n)$  για  $n \in [0:100]$ .

Να σχεδιάσετε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας  $H(e^{j\omega})$ , του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  της εισόδου  $x(n)$  και του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\omega})$  της εξόδου  $y(n)$  του φίλτρου για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

#### 13. Απόκριση συχνότητας LTI συστήματος – FIR φίλτρου

Δίνεται η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος

$$h(n) = \delta(n) - 3\delta(n-1)$$

Να σχεδιάσετε το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος, το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) \text{ του φίλτρου για } \omega \in [-\pi, \pi].$$

#### 14. Απόκριση συχνότητας LTI συστήματος – IIR φίλτρου

Δίνεται η εξίσωση διαφορών ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος

$$y(n) = x(n) + x(n-2) + \frac{1}{3}y(n-1)$$

Να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n)$  για  $n \in [0:100]$ .

Να σχεδιάσετε το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος, το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας  $H(e^{j\omega})$  του φίλτρου για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Να σχεδιάσετε το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος, το μέτρο και τη φάση του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  της εισόδου  $x(n)$  του φίλτρου για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Να σχεδιάσετε το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος, το μέτρο και τη φάση του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\omega})$  της εξόδου  $y(n)$  του φίλτρου για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

#### 15. Απόκριση συχνότητας συνδεδεμένων LTI συστημάτων

Ένα LTI σύστημα με κρουστική απόκριση  $h_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$  συνδέεται σε σειρά με ένα LTI σύστημα με

κρουστική απόκριση  $h_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n)$ . Το σύστημα που προκύπτει συνδέεται παράλληλα με ένα LTI

σύστημα με κρουστική απόκριση  $h_3(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n)$ .

Να αποδείξετε θεωρητικά ότι η απόκριση συχνότητας του συνολικού φίλτρου είναι:

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega}),$$

όπου  $H_1(e^{j\omega})$ ,  $H_2(e^{j\omega})$ ,  $H_3(e^{j\omega})$  είναι οι επί μέρους κρουστικές αποκρίσεις.

Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος. Να σχεδιάσετε την πραγματική συνιστώσα, τη φανταστική συνιστώσα, το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας του συνολικού φίλτρου.

#### 16. ΠΡχαμηλοπερατό ή βαθυπερατό φίλτρο (LowPass)

Ένα χαμηλοπερατό ή βαθυπερατό φίλτρο (LowPass) μπορεί να υλοποιηθεί με ένα ΠΡφίλτρο τάξης  $(N, M) = (2, 2)$  με απόκριση συχνότητας της μορφής:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - 2 \cdot \cos(\omega_1) \cdot e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}{1 - 2 \cdot c \cdot \cos(\omega_2) \cdot e^{-j\omega} + c^2 \cdot e^{-2j\omega}}$$

Οι συντελεστές του φίλτρου επιλέγονται, έτσι ώστε ο αριθμητής να μηδενίζεται στα δύο συζυγή σημεία  $e^{\pm j\omega_1}$  που βρίσκονται **πάνω** στο μοναδιαίο κύκλο και ο παρονομαστής να μηδενίζεται στα δύο συζυγή σημεία  $c \cdot e^{\pm j\omega_2}$  με  $0 < c < 1$ , που βρίσκονται **μέσα** στο μοναδιαίο κύκλο.

Για  $\omega_1 = \pi/2$ ,  $\omega_2 = \pi/4$  και  $c = 0.8$ , να σχεδιάσετε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας  $H(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Ποιοι είναι οι συντελεστές του ΠΡφίλτρου που υλοποιεί το LowPass φίλτρο;

#### 17. ΠΡζωνοπερατό φίλτρο (BandPass)

Ένα ζωνοπερατό φίλτρο (BandPass) μπορεί να υλοποιηθεί με ένα ΠΡφίλτρο τάξης  $(N, M) = (2, 2)$  με απόκριση συχνότητας της μορφής

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-2j\omega}}{1 - 2 \cdot c \cdot \cos(\omega_0) \cdot e^{-j\omega} + c^2 \cdot e^{-2j\omega}}$$

Οι συντελεστές του φίλτρου επιλέγονται, έτσι ώστε ο αριθμητής να μηδενίζεται στα δύο σημεία **1 και -1** και ο παρονομαστής να μηδενίζεται στα συζυγή σημεία  $c \cdot e^{\pm j\omega_0}$  με  $0 < c < 1$ , που βρίσκονται **μέσα** στο μοναδιαίο κύκλο.

Για  $\omega_0 = \pi/2$  και  $c = 0.8$ , να σχεδιάσετε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας  $H(e^{j\omega})$  για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Ποιοι είναι οι συντελεστές του ΠΡφίλτρου που υλοποιεί το BandPass φίλτρο;

### 4.7. Περίληψη (ηχογραφημένη)

### 1-2-3-4-0-0

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη του Κεφαλαίου 4 με τον Ήχο 4.1.



#### Ήχος 4.1 Περίληψη Κεφαλαίου 4.

### Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου και Απόκριση συχνότητας

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DiscreteTimeFourierTransform – DTFT) είναι ένας μετασχηματισμός, που συνδέει το πεδίο του χρόνου με το πεδίο της συχνότητας. Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  ενός σήματος διακριτού χρόνου  $x(n)$ , αν υπάρχει, είναι η αναπαράσταση του σήματος συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών σημάτων της μορφής  $e^{-j\omega n}$ , όπου  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα.

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT)  $H(e^{j\omega})$  της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$  ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος ονομάζεται απόκριση συχνότητας (frequency response).

Η απόκριση συχνότητας είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο  $2\pi$ .

Η συνολική απόκριση συχνότητας ενός LTI συστήματος που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά είναι το γινόμενο των αποκρίσεων συχνότητας των επί μέρους συστημάτων.

Η συνολική απόκριση συχνότητας ενός LTI συστήματος που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα είναι το άθροισμα των αποκρίσεων συχνότητας των επί μέρους συστημάτων.

Η απόκριση συχνότητας εξαρτάται από τους συντελεστές του LTI συστήματος. Επομένως, οι σταθεροί συντελεστές της γραμμικής εξίσωσης διαφορών αρκούν για να ορίσουν την απόκριση συχνότητας. Έτσι, η απόκριση συχνότητας αρκεί για να περιγράψει ένα LTI σύστημα στο πεδίο της συχνότητας.

Τα φίλτρα με κατά τμήματα σταθερόμετρο της απόκρισης συχνότητας ονομάζονται φίλτρα επιλογής συχνοτήτων και διακρίνονται σε τέσσερις κατηγορίες: χαμηλοπερατά ή βαθυπερατά φίλτρα (Low Pass), υψηλοπερατά φίλτρα (High Pass), ζωνοπερατά φίλτρα (Band Pass), ζωνοφρακτικά φίλτρα ή φίλτρα απόρριψης ζώνης (Band Stop).

Τα φίλτρα γραμμικής φάσης είναι FIR φίλτρα με γραμμική φάση και διακρίνονται σε τύπου I, II, III και IV.

### Βιβλιογραφία/Αναφορές

Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S., Wehbring R. (2011). *GNU Octave* (3rd ed.).

Hansen J. S. (2011). *GNU Octave Beginner's Guide*. Packt Publishing.

Hayes, M. H. (2000). *Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος*. Εκδόσεις Τζιόλα.

Ingle, V. K., & Proakis, J. G. (2003). *Digital Signal Processing using MATLAB*. Stamford, CT: Thomson Brooks Cole.

Leis, J. W. (2011). *Digital Signal Processing using MATLAB for students and researchers*. J. Wiley and Sons.

McClellan, J. H., Schafer, R. W., Yoder, M. A. (2006). *Θεμελιώδεις Έννοιες της Επεξεργασίας Σημάτων*. Φιλομάθεια. Μετάφραση – Επιστημονική Επιμέλεια: Ε. Ζ. Ψαράκης.

TheMathWorksInc (2005). *Signal Processing Toolbox User's Guide*.

Ασημάκης, Ν. (2008). *Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων*. Gutenberg.



- Θεοδωρίδης, Σ., Μπερμπερίδης, Κ., Κοφίδης, Λ. (2003). *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων*. Εκδόσεις τυπωθήτω.
- Καραγιάννης, Γ., & Μαραγκός, Π. (2010). *Βασικές Αρχές Σημάτων και Συστημάτων*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου.
- Καραγιάννης, Γ., & Τζίτζιράχου, Κ. (2003). *Εισαγωγή στα Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου.
- Καραμπογιάς, Σ. (2009). *Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Καραμπογιά.
- Μάργαρης, Α. (2014). *Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Σκόδρας, Α., & Αναστασόπουλος, Β. (2003). *Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων και Σημάτων*. ΕΑΠ.

## **Κριτήρια αξιολόγησης**

### **Κριτήριο αξιολόγησης 1**

**1-2-3-4-0-0**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 1 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 4.3.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 4.3** Κριτήριο αξιολόγησης 1.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

### **Κριτήριο αξιολόγησης 2**

**1-2-3-4-0-0**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 2 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 4.4.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 4.4** Κριτήριο αξιολόγησης 2.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

## Κεφάλαιο 5 Μετασχηματισμός $z$ και Συνάρτηση μεταφοράς

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται ο ορισμός του μετασχηματισμού  $z$  και παρουσιάζονται οι ιδιότητες του μετασχηματισμού. Δίνεται ο ορισμός της συνάρτησης μεταφοράς και αναλύεται η περιγραφή των γραμμικών χρονικά αμετάβλητων (LinearTimeInvariant – LTI) συστημάτων μέσω της συνάρτησης μεταφοράς. Παρουσιάζεται η σχέση της ακολουθίας Fibonacci με τη συνάρτηση μεταφοράς.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Σειρές, εξισώσεις διαφορών. Κεφάλαιο 1, Κεφάλαιο 2, Κεφάλαιο 3.

## 5.1. Μετασχηματισμός $z$

1-2-3-4-0-0

### 5.1.1. Ορισμός μετασχηματισμού $z$

Ο ευθύς **αμφίπλευρος μετασχηματισμός  $z$  (bilateral  $z$ -transform)** μίας ακολουθίας διακριτού χρόνου  $x(n)$  ορίζεται ως ακολούθως:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} \quad (5.1)$$

όπου η μιγαδική μεταβλητή  $z$  ονομάζεται *μιγαδική συχνότητα* και μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση πολικών συντεταγμένων, ως  $z = r \cdot e^{j\omega}$ , όπου  $r$  είναι το μέτρο του  $z$  και  $\omega$  είναι η γωνία του  $z$ .

Ο μετασχηματισμός  $z$  μίας ακολουθίας διακριτού χρόνου είναι, σύμφωνα με τον ορισμό, ένα άθροισμα απείρων όρων, το οποίο μπορεί να συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό για κάποιες τιμές της μιγαδικής μεταβλητής  $z$  και μπορεί να μην συγκλίνει για κάποιες άλλες τιμές της μιγαδικής μεταβλητής  $z$ . Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής  $z$  για τις οποίες λέμε ότι υπάρχει ο μετασχηματισμός  $z$ , δηλαδή για τις οποίες το άθροισμα του μετασχηματισμού συσγκλίνει, ονομάζεται **Περιοχή Σύγκλισης (ΠΣ) (Region Of Convergence – ROC)**.

Ο **αντίστροφος μετασχηματισμός  $z$**  ορίζεται ως συνάρτηση του ακόλουθου επικαμπύλιου ολοκληρώματος:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C X(z) \cdot z^{n-1} dz \quad (5.2)$$

όπου  $C$  είναι μία αριστερόστροφη κλειστή καμπύλη ολοκλήρωσης γύρω από την αρχή των αξόνων και εντός της Περιοχής Σύγκλισης.

Ο ευθύς μετασχηματισμός  $z$  είναι μοναδικός (unique), αν είναι γνωστή η Περιοχή Σύγκλισης. Επίσης, ο αντίστροφος μετασχηματισμός  $z$  είναι μοναδικός (unique), αν είναι γνωστή η Περιοχή Σύγκλισης. Αν λοιπόν είναι γνωστή η Περιοχή Σύγκλισης, τότε ο ευθύς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός  $z$  αποτελούν ένα μοναδικό ζεύγος και χρησιμοποιείται ο συμβολισμός:

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

### Σχέση μετασχηματισμού $z$ και μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Αντικαθιστώντας  $z = r \cdot e^{j\omega}$  στον ορισμό (5.1), προκύπτει

$$X(r \cdot e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot (r \cdot e^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x(n) \cdot r^{-n}) \cdot e^{-j\omega n}$$

που σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός  $z$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της ακολουθίας  $x(n) \cdot r^{-n}$  στο σημείο  $z = r \cdot e^{j\omega}$

δηλαδή

$$[X(z)]_{z=r \cdot e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) \quad (5.3)$$

και ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT)  $X(e^{j\omega})$  αποτελεί ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού  $X(z)$ .

Παρατήρηση.

Η σχέση  $|z|=1$  ορίζει το **Μοναδιαίο Κύκλο (Unit Circle)** στο μιγαδικό επίπεδο.

Χρήσιμη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία είναι τα βιβλία Hayes, 2000, McClellan, Schafer & Yoder, 2006, Ασημάκης, 2008, Θεοδωρίδης, Μπερμπερίδης, Κοφίδης, 2003, Καραγιάννης & Μαραγκός, 2010, Καραγιάννης & Τζιτζιράχου, 2003, Καραμπογιάς, 2009, Μάργαρης, 2014, Σκόδρας & Αναστασόπουλος, 2003.

### 5.1.2. Περιοχή Σύγκλισης

Ο μετασχηματισμός  $z$  μίας ακολουθίας διακριτού χρόνου πρέπει να συνοδεύεται από την Περιοχή Σύγκλισης, δηλαδή από την περιοχή του μιγαδικού επιπέδου, για την οποία υπάρχει ο μετασχηματισμός  $z$ .

#### Ιδιότητες της Περιοχής Σύγκλισης

- Αν το σήμα  $x(n)$  είναι ακολουθία δεξιάς πλευράς, δηλαδή  $x(n)=0, n < n_0$ , τότε η Περιοχή Σύγκλισης είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου, δηλαδή είναι της μορφής  $|z| > a$ .

Παρατήρηση: Αν  $n_0 \geq 0$ , τότε το σήμα  $x(n)$  είναι αιτιατό. Οπότε τα αιτιατά σήματα έχουν μετασχηματισμό  $z$  με Περιοχή Σύγκλισης την εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου.

- Αν το σήμα  $x(n)$  είναι ακολουθία αριστερής πλευράς, δηλαδή  $x(n)=0, n > n_0$ , τότε η Περιοχή Σύγκλισης είναι η εσωτερική επιφάνεια ενός κύκλου, δηλαδή είναι της μορφής  $|z| < b$ .

Παρατήρηση: Αν  $n_0 \leq 0$ , τότε το σήμα  $x(n)$  είναι αναίτιατο. Οπότε τα αναίτιατα σήματα έχουν μετασχηματισμό  $z$  με Περιοχή Σύγκλισης την εσωτερική επιφάνεια ενός κύκλου.

- Αν το σήμα  $x(n)$  είναι αμφίπλευρη ακολουθία, τότε η Περιοχή Σύγκλισης είναι δακτυλιοειδής επιφάνεια της μορφής  $a < |z| < b$ , όπου μπορεί να είναι  $a=0$  ή  $b=+\infty$ .

- Αν το σήμα  $x(n)$  είναι ακολουθία πεπερασμένης διάρκειας, δηλαδή  $x(n) \neq 0, n \in [n_1 : n_2]$ , τότε η Περιοχή Σύγκλισης είναι ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, εκτός ίσως από τα σημεία  $z=0$  ή  $z=+\infty$ . Αν  $n_2 > 0$ , τότε το σημείο  $z=0$  δεν ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης. Αν  $n_1 < 0$ , τότε το σημείο  $z=+\infty$  δεν ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης.

#### Πόλοι και Μηδενικά

Αν ο μετασχηματισμός  $z$  μίας ακολουθίας είναι ρητή συνάρτηση του  $z$  της μορφής:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

τότε οι ρίζες του αριθμητή  $B(z)$  καλούνται **μηδενικά (zeros)** της  $X(z)$  και οι ρίζες του παρονομαστή  $A(z)$  καλούνται **πόλοι (poles)** της  $X(z)$ .

Προφανώς, στην περίπτωση αυτή, **η Περιοχή Σύγκλισης δεν περιλαμβάνει τους πόλους.**

Παράδειγμα.

Δίνεται ο μετασχηματισμός  $z$ :

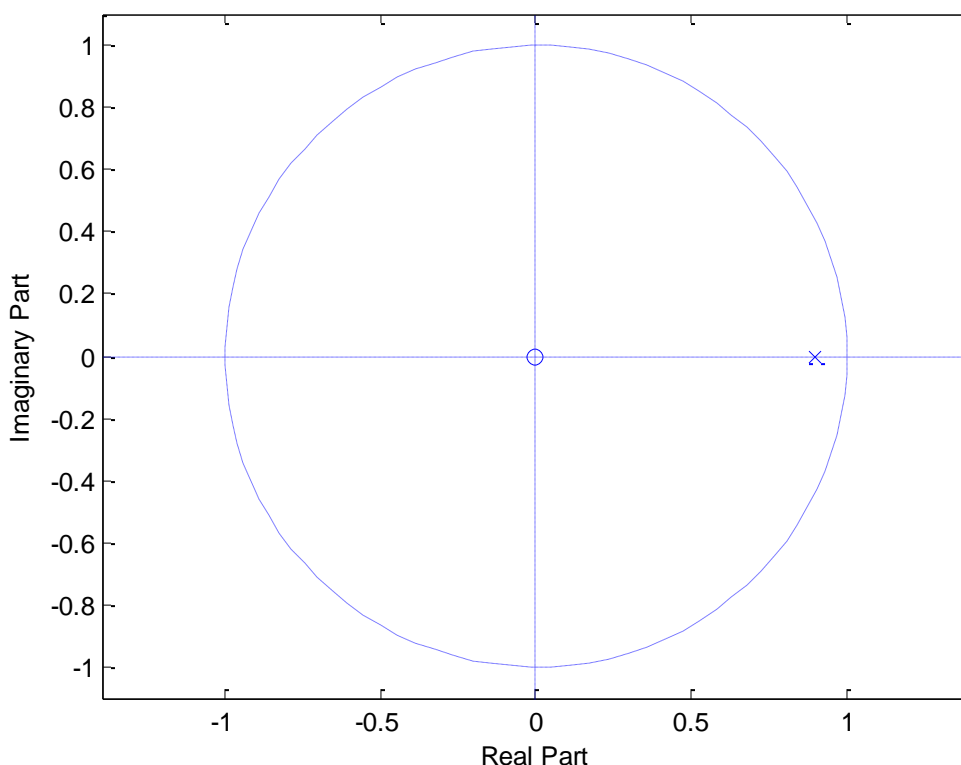
$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{9}{10}z^{-1}}, |z| > \frac{9}{10}$$

Ο μετασχηματισμός  $z$  γράφεται:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{1 - \frac{9}{10}z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{9}{10}}$$

Επομένως, υπάρχει ένα μηδενικό στο σημείο  $z=0$  και ένας πόλος στο σημείο  $z = \frac{9}{10}$ .

Στο Σχήμα 5.1 φαίνεται το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο, όπου τα μηδενικά συμβολίζονται με το σύμβολο «ο» και οι πόλοι με το σύμβολο «x».



Σχήμα 5.1 Πόλοι και Μηδενικά μετασχηματισμού  $z$ .

Παρατήρηση: Συνήθως ο μετασχηματισμός παρουσιάζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής  $z^{-1}$ . Αν παρουσιαστεί ως συνάρτηση της μεταβλητής  $z$ , τότε μπορεί να μετατραπεί σε συνάρτηση της μεταβλητής  $z^{-1}$  διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με την μεγαλύτερη δύναμη, που υπάρχει σε αυτούς.

Παράδειγμα.

$$X(z) = \frac{z-3}{z \cdot (z-1) \cdot (z-2)}, |z| > 2$$

Ο μετασχηματισμός  $z$  γράφεται:

$$X(z) = \frac{z-3}{z \cdot (z-1) \cdot (z-2)} = \frac{z-3}{z^3 - 3z^2 + 2z} = \frac{\frac{z-3}{z^3}}{\frac{z^3 - 3z^2 + 2z}{z^3}} = \frac{z^{-2} - 3z^{-3}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

### 5.1.3. Υπολογισμός μετασχηματισμού $z$

#### Σήματα πεπερασμένης διάρκειας

Ο μετασχηματισμός  $z$  των σημάτων πεπερασμένης διάρκειας υπολογίζεται με χρήση του ορισμού.

Παράδειγμα.

Δίνεται το σήμα διακριτού χρόνου πεπερασμένης διάρκειας:

$$x(n) = \delta(n) + 4\delta(n-1) - 2\delta(n-3)$$

Ο μετασχηματισμός  $z$  είναι

$$X(z) = 1 + 4z^{-1} - 2z^{-3}$$

με Περιοχή Σύγκλισης ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από το σημείο  $z = 0$ .

#### Σήματα άπειρης διάρκειας

Ο μετασχηματισμός  $z$  των σημάτων πεπερασμένης διάρκειας υπολογίζεται με χρήση αθροισμάτων και απαιτεί τον καθορισμό της Περιοχής Σύγκλισης.

Παράδειγμα.

Δίνεται το σήμα διακριτού χρόνου άπειρης διάρκειας:

$$x(n) = a^n \cdot u(n)$$

Ο μετασχηματισμός  $z$  είναι

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot u(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot u(n) \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot u(n) \cdot z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot 0 \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot 1 \cdot z^{-n} = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a \cdot z^{-1})^n = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} \end{aligned}$$

$$\text{αν } |a \cdot z^{-1}| < 1 \text{ ή } |z| > |a|,$$

δηλαδή η Περιοχή Σύγκλισης είναι:  $|z| > |a|$ .

Επίσης, δίνεται το σήμα διακριτού χρόνου άπειρης διάρκειας:

$$x(n) = -a^n \cdot u(-n-1)$$

Ο μετασχηματισμός  $z$  είναι

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^n \cdot u(-n-1) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n \cdot u(-n-1) \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} -a^n \cdot u(-n-1) \cdot z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n \cdot 1 \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} -a^n \cdot 0 \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n \cdot z^{-n} + 0 = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (a \cdot z^{-1})^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (a^{-1} \cdot z)^{-n} \\ &= -\left\{ (a^{-1} \cdot z)^1 + (a^{-1} \cdot z)^2 + \dots \right\} = -(a^{-1} \cdot z) \cdot \left\{ (a^{-1} \cdot z)^0 + (a^{-1} \cdot z)^1 + \dots \right\} = -(a^{-1} \cdot z) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1} \cdot z)^n \\ &= -(a^{-1} \cdot z) \cdot \frac{1}{1 - a^{-1} \cdot z} = -\frac{a^{-1} \cdot z}{1 - a^{-1} \cdot z} = -\frac{\frac{a^{-1} \cdot z}{z}}{\frac{1 - a^{-1} \cdot z}{z}} = -\frac{a^{-1}}{\frac{1}{z} - a^{-1}} = -\frac{a^{-1}}{z^{-1} - a^{-1}} = -\frac{1}{a \cdot z^{-1} - 1} = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} \end{aligned}$$

$$\text{αν } |a^{-1} \cdot z| < 1 \text{ ή } |z| < |a|,$$

δηλαδή η Περιοχή Σύγκλισης είναι:  $|z| < |a|$ .

Παρατηρούμε ότι τόσο το σήμα  $x(n) = a^n \cdot u(n)$ , όσο και το σήμα  $x(n) = -a^n \cdot u(-n-1)$  έχουν την ίδια συνάρτηση ως μετασχηματισμό  $z$ , αλλά έχουν διαφορετική Περιοχή Σύγκλισης. Μάλιστα, οι Περιοχές Σύγκλισης είναι συμπληρωματικές, αφού η ένωσή τους είναι ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο χωρίς τα σημεία του κύκλου  $|z| = |a|$ . Αυτό συμβαίνει γιατί ο μετασχηματισμός  $z$  έχει έναν πόλο, τον πόλο  $z = a$ , αφού γράφεται:

$$X(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Το σήμα  $x(n) = a^n \cdot u(n)$  είναι αιτιατό (ακολουθία δεξιάς πλευράς) και το σήμα  $x(n) = -a^n \cdot u(-n-1)$  είναι αναιτιατό (ακολουθία αριστερής πλευράς).

Εδώ αξίζει να παρατηρήσουμε ότι διαφορετικά σήματα μπορούν να έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό  $z$ , αλλά με διαφορετική Περιοχή Σύγκλισης. Συγκεκριμένα, αν ο μετασχηματισμός  $z$  έχει δύο πόλους, τότε υπάρχουν τρία σήματα με τον ίδιο μετασχηματισμό  $z$ , με διαφορετικές Περιοχές Σύγκλισης. Το ένα είναι ακολουθία δεξιάς πλευράς, το άλλο ακολουθία αριστερής πλευράς και το τρίτο είναι αμφίπλευρη ακολουθία. Γενικεύοντας, αν ο μετασχηματισμός  $z$  έχει  $N$  πόλους, τότε υπάρχουν  $N+1$  σήματα με τον ίδιο μετασχηματισμό  $z$ .

Παράδειγμα.

Ο μετασχηματισμός  $z$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2 \cdot z^{-1}} = \frac{2 - \frac{5}{2} \cdot z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right) \cdot \left(1 - 2 \cdot z^{-1}\right)}$$

έχει δύο πόλους:  $z = \frac{1}{2}$  και  $z = 2$ . Οπότε υπάρχουν τρεις πιθανές Περιοχές Σύγκλισης:

(α)  $|z| > 2$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε  $|z| > 2$  οπότε και  $|z| > \frac{1}{2}$

Άρα

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) + 2^n \cdot u(n)$$

που είναι αιτιατό σήμα (ακολουθία δεξιάς πλευράς σήμα).

(β)  $\frac{1}{2} < |z| < 2$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε  $|z| > \frac{1}{2}$  και  $|z| < 2$

Άρα

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) - 2^n \cdot u(-n-1)$$

που είναι αμφίπλευρη ακολουθία.

(γ)  $|z| < \frac{1}{2}$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε  $|z| < \frac{1}{2}$  και  $|z| < 2$

Άρα

$$x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(-n-1) - 2^n \cdot u(-n-1)$$

που είναι αναίτιατο σήμα (ακολουθία αριστερής πλευράς).

#### 5.1.4. Ζεύγη μετασχηματισμού z

Στον Πίνακα 5.1 παρουσιάζονται μερικοί τυπικοί μετασχηματισμοί z.

Ακολουθία διακριτούχρονου	Μετασχηματισμός z	Περιοχή Σύγκλισης
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$\delta(n-n_0)$	$z^{-n_0}$	$\forall z$ εκτός $z=0, n_0 > 0$ ή $z=\infty, n_0 < 0$
$a^n \cdot u(n)$	$\frac{1}{1-a \cdot z^{-1}}$	$ z  >  a $
$-a^n \cdot u(-n-1)$	$\frac{1}{1-a \cdot z^{-1}}$	$ z  <  a $
$n \cdot a^n \cdot u(n)$	$\frac{a \cdot z^{-1}}{(1-a \cdot z^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$-n \cdot a^n \cdot u(-n-1)$	$\frac{a \cdot z^{-1}}{(1-a \cdot z^{-1})^2}$	$ z  <  a $
$(n+1) \cdot a^{n+1} \cdot u(n)$	$\frac{a}{(1-a \cdot z^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$\sin(\omega_0 \cdot n) \cdot u(n)$	$\frac{\sin(\omega_0) \cdot z^{-1}}{1-2 \cdot \cos(\omega_0) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\cos(\omega_0 \cdot n) \cdot u(n)$	$\frac{1-\cos(\omega_0) \cdot z^{-1}}{1-2 \cdot \cos(\omega_0) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  < 1$

$a^n \cdot \sin(\omega_0 \cdot n) \cdot u(n)$	$\frac{a \cdot \sin(\omega_0) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot a \cdot \cos(\omega_0) \cdot z^{-1} + a^2 \cdot z^{-2}}$	$ z  >  a $
$a^n \cdot \cos(\omega_0 \cdot n) \cdot u(n)$	$\frac{1 - a \cdot \cos(\omega_0) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot a \cdot \cos(\omega_0) \cdot z^{-1} + a^2 \cdot z^{-2}}$	$ z  <  a $

Πίνακας 5.1 Ζεύγη μετασχηματισμού  $z$ .

### 5.1.5. Ιδιότητες μετασχηματισμού $z$

#### 5.1.5.1. Γραμμικότητα

Αν  $x_1(n) \xrightarrow{z} X_1(z), ROC_1$  και  $x_2(n) \xrightarrow{z} X_2(z), ROC_2$ , τότε

$$c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n) \xrightarrow{z} c_1 \cdot X_1(z) + c_2 \cdot X_2(z), ROC \text{ περιέχει } ROC_1 \cap ROC_2 \quad (5.4)$$

για οποιεσδήποτε σταθερές  $c_1, c_2$ .

Παρατήρηση: Η λέξη «περιέχει» χρησιμοποιείται γιατί, στην περίπτωση όπου ο γραμμικός συνδυασμός είναι τέτοιος, που κάποια μηδενικά εξουδετερώνουν κάποιους πόλους, τότε η Περιοχή Σύγκλισης του γραμμικού συνδυασμού είναι μεγαλύτερη από την τομή των επί μέρους Περιοχών Σύγκλισης (Σκόδρας, Α., & Αναστασόπουλος, Β., 2003).

#### Απόδειξη.

Αν  $y(n) = c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού  $z$  στην (5.1) έχουμε:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_1 \cdot x_1(n) \cdot z^{-n} + c_2 \cdot x_2(n) \cdot z^{-n}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_1 \cdot x_1(n) \cdot z^{-n}] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_2 \cdot x_2(n) \cdot z^{-n}] = c_1 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) \cdot z^{-n} + c_2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n) \cdot z^{-n} \\ &= c_1 \cdot X_1(z) + c_2 \cdot X_2(z) \end{aligned}$$

■

#### 5.1.5.2. Μετατόπιση στον χρόνο

Αν  $x(n) \xrightarrow{z} X(z), ROC$ , τότε

$$x(n - n_0) \xrightarrow{z} z^{-n_0} \cdot X(z), ROC \text{ εκτός } z = 0, n_0 > 0 \text{ ή } z = \infty, n_0 < 0 \quad (5.5)$$

#### Απόδειξη.

Αν  $y(n) = x(n - n_0)$ , τότε

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - n_0) \cdot z^{-n}$$

Θέτοντας  $m = n - n_0$ , έχουμε:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - n_0) \cdot z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot z^{-(m+n_0)} = z^{-n_0} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot z^{-m} = z^{-n_0} \cdot X(z) \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα.

Αν

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n) \xrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} \cdot z^{-1}}, |z| > \frac{1}{4}$$

τότε

$$y(n) = x(n - 1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot u(n - 1) \xrightarrow{z} Y(z) = z^{-1} \cdot X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4} \cdot z^{-1}}, |z| > \frac{1}{4}$$

### 5.1.5.3. Αναδίπλωση

Αν  $x(n) \xrightarrow{z} X(z), ROC = (D_1 < |z| < D_2)$ , τότε

$$x(-n) \xrightarrow{z} X(z^{-1}), 1/ROC = (\frac{1}{D_2} < |z| < \frac{1}{D_1}) \quad (5.6)$$

**Απόδειξη.**

Αν  $y(n) = x(-n)$ , τότε

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n) \cdot z^{-n}$$

Θέτοντας  $m = -n$ , έχουμε:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n) \cdot z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot z^{-(-m)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot z^m = X(z^{-1}) \quad \blacksquare$$

### 5.1.5.4. Μετατόπιση στη συχνότητα

Αν  $x(n) \xrightarrow{z} X(z), ROC = (D_1 < |z| < D_2)$ , τότε

$$a^n \cdot x(n) \xrightarrow{z} X(a^{-1} \cdot z), |a| \cdot ROC = (|a| \cdot D_1 < |z| < |a| \cdot D_2)$$

(5.6)

**Απόδειξη.**

Αν  $y(n) = a^n \cdot x(n)$  τότε

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot x(n) \cdot z^{-n}$$

Θέτοντας  $\zeta = a^{-1} \cdot z$ , έχουμε:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot x(n) \cdot (a \cdot \zeta)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot x(n) \cdot a^{-n} \zeta^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \zeta^{-n} = X(\zeta) = X(a^{-1} \cdot z) \quad \blacksquare$$

### 5.1.5.5. Συνέλιξη

Αν  $x_1(n) \xrightarrow{z} X_1(z), ROC_1$  και  $x_2(n) \xrightarrow{z} X_2(z), ROC_2$ , τότε

$$x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{z} X_1(z) \cdot X_2(z), ROC \text{ περιέχει } ROC_1 \cap ROC_2 \quad (5.8)$$

**Απόδειξη.**

Αν  $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ , τότε

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x_1(n) * x_2(n)] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \cdot x_2(n-m) \right] \cdot z^{-n}$$

Θέτοντας  $n-m=k$  και αλλάζοντας τη σειρά των αθροισμάτων, έχουμε:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \cdot x_2(n-m) \right] \cdot z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \cdot \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n-m) \cdot z^{-n} \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \cdot \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2(k) \cdot z^{-(m+k)} \right] = \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \cdot z^{-m} \right] \cdot \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2(k) \cdot z^{-k} \right] = X_1(z) \cdot X_2(z) \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Στον Πίνακα 5.2 παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού z.

Ιδιότητα Μετασχηματισμού z	Ακολουθία διακριτού χρόνου	Μετασχηματισμός z	Περιοχή Σύγκλισης
	$x(n)$	$X(z)$	$ROC = (D_1 <  z  < D_2)$
	$x_1(n)$	$X_1(z)$	$ROC_1$
	$x_2(n)$	$X_2(z)$	$ROC_2$
Γραμμικότητα	$c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$	$c_1 \cdot X_1(z) + c_2 \cdot X_2(z)$	περιέχει $ROC_1 \cap ROC_2$
Μετατόπιση στον χρόνο	$x(n - n_0)$	$z^{-n_0} \cdot X(z)$	$ROC$ εκτός $z = 0, n_0 > 0$ ή $z = \infty, n_0 < 0$
Αναδίπλωση	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{D_2} <  z  < \frac{1}{D_1}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$a^n \cdot x(n)$	$X(a^{-1} \cdot z)$	$ a  \cdot D_1 <  z  <  a  \cdot D_2$
Συνέλιξη στον χρόνο	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$	περιέχει $ROC_1 \cap ROC_2$

**Πίνακας 5.2** Ιδιότητες του μετασχηματισμού z.

Ο μετασχηματισμός z μπορεί να υπολογιστεί με χρήση των ζευγών του μετασχηματισμού και των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού z.

Παράδειγμα.

Δίνεται το σήμα διακριτού χρόνου άπειρης διάρκειας:

$$x(n) = (n+1) \cdot a^{n+1} \cdot u(n)$$

Το σήμα γράφεται:

$$x(n) = a \cdot [n \cdot a^n \cdot u(n) + a^n \cdot u(n)]$$

Από τα ζεύγη του μετασχηματισμού z γνωρίζουμε ότι:

$$x_1(n) = n \cdot a^n \cdot u(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z) = \frac{a \cdot z^{-1}}{(1 - a \cdot z^{-1})^2}, |z| > |a|$$

$$x_2(n) = a^n \cdot u(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}, |z| > |a|$$

Από την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού z έχουμε ότι ο μετασχηματισμός του  $x(n) = a \cdot [n \cdot a^n \cdot u(n) + a^n \cdot u(n)]$  είναι:

$$X(z) = a \cdot [X_1(z) + X_2(z)] = a \cdot \left[ \frac{a \cdot z^{-1}}{(1 - a \cdot z^{-1})^2} + \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} \right], |z| > |a|$$

Άρα

$$X(z) = a \cdot \left[ \frac{a \cdot z^{-1}}{(1 - a \cdot z^{-1})^2} + \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} \right] = \frac{a^2 \cdot z^{-1}}{(1 - a \cdot z^{-1})^2} + \frac{a \cdot (1 - a \cdot z^{-1})}{(1 - a \cdot z^{-1})^2} = \frac{a}{(1 - a \cdot z^{-1})^2}$$

Μπορείτε να διερευνήσετε τον μετασχηματισμό z με το Διαδραστικό πρόγραμμα 5.1.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 5.1** Μετασχηματισμός z.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

### 5.1.6. Αντίστροφος μετασχηματισμός z

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός z ορίζεται μέσω επικαμπύλιου ολοκληρώματος, όπως στην (5.2). Στην παράγραφο αυτή θα αναλυθεί μία μεθοδολογία υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού z, χωρίς τη χρήση ολοκληρώματος.

#### Αντίστροφος μετασχηματισμός πολυωνύμου.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός z μπορεί να γίνει με βάση τον ορισμό του μετασχηματισμού z. **Τα σήματα που προκύπτουν είναι σήματα πεπερασμένης διάρκειας.**

Για παράδειγμα, ο μετασχηματισμός z

$$X(z) = 3 + 4z^2 + 5z^{-3}$$

γράφεται με βάση τον ορισμό:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} = 4 \cdot z^2 + 0 \cdot z^1 + 3 \cdot z^0 + 0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + 5 \cdot z^{-3}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός z είναι

$$x(n) = 4\delta(n+2) + 3\delta(n) + 5\delta(n-3)$$

και βέβαια πρόκειται για σήμα πεπερασμένης διάρκειας.

#### Αντίστροφος μετασχηματισμός ρητής συνάρτησης.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός z μπορεί να γίνει με τη μέθοδο της ανάλυσης της ρητής συνάρτησης σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Αν  $X(z)$  είναι ρητή συνάρτηση του z

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b(k) \cdot z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a(k) \cdot z^{-k}} \quad (5.9)$$

με **απλούς πόλους**  $p_k, k=1, 2, \dots, N$

τότε για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού z χρησιμοποιείται η μέθοδος ανάλυσης της  $X(z)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

(α) αν  $N > M$ , δηλαδή ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή, τότε

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k \cdot z^{-1}} \quad (5.10)$$

με συντελεστές

$$A_k = \left[ (1 - p_k \cdot z^{-1}) \cdot X(z) \right]_{z=p_k} \quad (5.11)$$

(β) αν  $N \leq M$ , δηλαδή ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος ή μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή, τότε

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) \quad (5.12)$$

όπου

$$X_1(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k \cdot z^{-1}} \quad (5.13)$$

με συντελεστές

$$A_k = \left[ (1 - p_k \cdot z^{-1}) \cdot X(z) \right]_{z=p_k} \quad (5.14)$$

και

$$X_2(z) = \sum_{k=0}^{M-N} C_k \cdot z^{-k} \quad (5.15)$$

με συντελεστές  $C_k$  που υπολογίζονται εκτελώντας τη διαίρεση

$$\frac{B(z)}{A(z)}$$

από όπου προκύπτει το πολυώνυμο  $X_2(z)$  βαθμού  $M - N$ .

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός επιτυγχάνεται υπολογίζοντας τους αντίστροφους μετασχηματισμούς  $z$  σε κάθε όρο του αθροίσματος χρησιμοποιώντας τα ζεύγη του μετασχηματισμού  $z$  και τελικά χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού  $z$ .

Στην περίπτωση που υπάρχει πόλος με πολλαπλότητα, οι τύποι αλλάζουν. Για παράδειγμα, αν η  $X(z)$  έχει έναν διπλό πόλο  $p$ , τότε η ανάλυση σε απλά κλάσματα είναι η ακόλουθη:

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - p \cdot z^{-1}} + \frac{A_2}{(1 - p \cdot z^{-1})^2}$$

(5.16)

με συντελεστές

$$A_1 = p \cdot \left[ \frac{d}{dz} \left\{ (1 - p \cdot z^{-1})^2 \cdot X(z) \right\} \right]_{z=p} \quad (5.17)$$

$$A_2 = \left[ (1 - p \cdot z^{-1})^2 \cdot X(z) \right]_{z=p} \quad (5.18)$$

Παράδειγμα 1.

Δίνεται ο μετασχηματισμός  $z$

$$X(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}, |z| > 2$$

και θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό  $z$ , δηλαδή το σήμα  $x(n)$  από το οποίο προέκυψε.

Η συνάρτηση  $X(z)$  είναι ρητή συνάρτηση με βαθμό του αριθμητή μικρότερο από το βαθμό του παρονομαστή  $N = 2 > M = 0$  και γράφεται

$$X(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{1}{(1 + 2z^{-1}) \cdot (1 + z^{-1})} = \frac{1}{1 + 2z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 + z^{-1}}$$

Επομένως η συνάρτηση  $X(z)$  έχει δύο απλούς πόλους:  $p_1 = -2$  και  $p_2 = -1$ .

Τότε, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ανάλυσης της  $X(z)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων, προκύπτει

$$X(z) = \frac{1}{1 + 2z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 + z^{-1}} = \frac{A_1}{1 + 2z^{-1}} + \frac{A_2}{1 + z^{-1}}$$

όπου

$$A_1 = \left[ (1 + 2 \cdot z^{-1}) \cdot X(z) \right]_{z=-2} = \left[ \frac{1}{1 + z^{-1}} \right]_{z=-2} = 2$$

$$A_2 = \left[ (1 + z^{-1}) \cdot X(z) \right]_{z=-1} = \left[ \frac{1}{1 + 2 \cdot z^{-1}} \right]_{z=-1} = -1$$

Άρα

$$X(z) = \frac{2}{1 + 2z^{-1}} - \frac{1}{1 + z^{-1}}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τα ζεύγη του μετασχηματισμού  $z$  και την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού  $z$ , προκύπτει ο αντίστροφος μετασχηματισμός  $z$ :

$$x(n) = 2 \cdot (-2)^n \cdot u(n) - (-1)^n \cdot u(n)$$

Παράδειγμα 2.

Δίνεται ο μετασχηματισμός  $z$

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}, |z| > \frac{1}{4}$$

και θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό  $z$ , δηλαδή το σήμα  $x(n)$  από το οποίο προέκυψε.

Η συνάρτηση  $X(z)$  είναι ρητή συνάρτηση με βαθμό του αριθμητή μικρότερο από το βαθμό του παρονομαστή  $N = 2 > M = 1$  και έχει έναν διπλό πόλο  $p = \frac{1}{4}$ .

Τότε, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ανάλυσης της  $X(z)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων, προκύπτει:

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}$$

όπου

$$A_1 = \frac{1}{4} \cdot \left[ \frac{d}{dz} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4} \cdot z^{-1}\right)^2 \cdot X(z) \right\} \right]_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \left[ \frac{d}{dz} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \cdot z^{-1} \right\} \right]_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \left[ -\frac{1}{4} \cdot z^{-2} \right]_{z=\frac{1}{4}} = -1$$

$$A_2 = \left[ \left(1 - \frac{1}{4} \cdot z^{-1}\right)^2 \cdot X(z) \right]_{z=\frac{1}{4}} = \left[ 1 + \frac{1}{4} \cdot z^{-1} \right]_{z=\frac{1}{4}} = 2$$

Άρα

$$X(z) = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}$$

που γράφεται:

$$X(z) = -\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + 8 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τα ζεύγη του μετασχηματισμού  $z$  και την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού  $z$ , προκύπτει ο αντίστροφος μετασχηματισμός  $z$ :

$$x(n) = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n) + 8 \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \cdot u(n)$$

Παράδειγμα 3.

Δίνεται ο μετασχηματισμός  $z$

$$X(z) = \frac{4 - \frac{7}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{2}$$

και θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό  $z$ , δηλαδή το σήμα  $x(n)$  από το οποίο προέκυψε.

Η συνάρτηση  $X(z)$  είναι ρητή συνάρτηση με βαθμό του αριθμητή ίσο με το βαθμό του παρονομαστή  $N = M = 2$ . Οπότε μετά τη διαίρεση των πολυωνύμων, η συνάρτηση  $X(z)$  γράφεται:

$$X(z) = \frac{4 - \frac{7}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{2 - \frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} + 2$$

Τότε

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z)$$

με

$$X_1(z) = \frac{2 - \frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$X_2(z) = 2$$

Η συνάρτηση  $X_1(z)$  έχει δύο απλούς πόλους:  $p_1 = \frac{1}{2}$  και  $p_2 = \frac{1}{4}$ .

Τότε, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ανάλυσης της  $X_1(z)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων, προκύπτει:

$$X_1(z) = \frac{2 - \frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

όπου

$$A_1 = \left[ \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) \cdot X_1(z) \right]_{z=\frac{1}{2}} = \left[ \frac{2 - \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right]_{z=\frac{1}{2}} = 3$$

$$A_2 = \left[ \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot X_1(z) \right]_{z=\frac{1}{4}} = \left[ \frac{2 - \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right]_{z=\frac{1}{4}} = -1$$

Άρα

$$X(z) = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + 2$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τα ζεύγη του μετασχηματισμού  $z$  και την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού  $z$ , προκύπτει ο αντίστροφος μετασχηματισμός  $z$ :

$$x(n) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) - \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n) + 2 \cdot \delta(n)$$

### 5.1.7. Συνέλιξη μέσω μετασχηματισμού $z$

Ο υπολογισμός της συνέλιξης μέσω μετασχηματισμού  $z$ , στηρίζεται τόσο στα ζεύγη του μετασχηματισμού, όσο και στις ιδιότητες του μετασχηματισμού.

Η διαδικασία υπολογισμού της συνέλιξης δύο σημάτων διακριτού χρόνου μέσω μετασχηματισμού  $z$  είναι η ακόλουθη: Δεδομένων δύο σημάτων  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ , υπολογίζουμε τους μετασχηματισμούς  $z$ ,  $X_1(z)$  και  $X_2(z)$ . Στη συνέχεια υπολογίζουμε το γινόμενο  $X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$ , αφού γνωρίζουμε ότι  $X(z)$  είναι ο μετασχηματισμός  $z$  της συνέλιξης  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$  (ιδιότητα συνέλιξης του μετασχηματισμού  $z$ ). Στη συνέχεια, το γινόμενο αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων (όπως στην προηγούμενη παράγραφο). Τέλος, χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό (από τα ζεύγη του μετασχηματισμού) και την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού, υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της  $X(z)$ , που είναι η ζητούμενη συνέλιξη.

Παράδειγμα.

Δίνονται τα σήματα

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$$

$$x_2(n) = (3)^n \cdot u(-n)$$

Να υπολογιστεί η συνέλιξη  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$  μέσω του μετασχηματισμού  $z$ .

Αρχικά υπολογίζονται οι (ευθείς) μετασχηματισμοί με χρήση των ζευγών του μετασχηματισμού και των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού:

Το σήμα  $x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$  έχει μετασχηματισμό  $z$

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

Το σήμα  $s(n) = u(n)$  έχει μετασχηματισμό  $z$

$$S(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$

Οπότε με χρήση της ιδιότητας αντιστροφής στον χρόνο το σήμα  $y(n) = s(-n) = u(-n)$  έχει μετασχηματισμό  $z$

$$Y(z) = S(z^{-1}) = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$$

Τότε, με χρήση της ιδιότητας μετατόπισης στη συχνότητα  
το σήμα  $x_2(n) = (3)^n \cdot y(n) = (3)^n \cdot u(-n)$  έχει μετασχηματισμό z

$$X_2(z) = S(3^{-1} \cdot z) = \frac{1}{1-3^{-1} \cdot z} = \frac{1}{1-\frac{1}{3} \cdot z}, |z| < 3$$

Μετά υπολογίζεται το γινόμενο

$$X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, (|z| > \frac{1}{2}) \cap (|z| < 3) = (\frac{1}{2} < |z| < 3)$$

οπότε

$$X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{-3 \cdot z^{-1}}{1-3 \cdot z^{-1}}, (\frac{1}{2} < |z| < 3)$$

Στη συνέχεια το γινόμενο αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{-3 \cdot z^{-1}}{1-3 \cdot z^{-1}} = \frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-3 \cdot z^{-1}}$$

με συντελεστές

$$A_1 = \left[ \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot X(z) \right]_{z=\frac{1}{2}} = \left[ \frac{-3z^{-1}}{1-3z^{-1}} \right]_{z=\frac{1}{2}} = \frac{6}{5}$$

$$A_2 = \left[ \left(1 - 3z^{-1}\right) \cdot X(z) \right]_{z=3} = \left[ \frac{-3z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \right]_{z=3} = -\frac{6}{5}$$

δηλαδή

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{-3 \cdot z^{-1}}{1-3 \cdot z^{-1}} = \frac{\frac{6}{5}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-\frac{6}{5}}{1-3 \cdot z^{-1}}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό (από τα ζεύγη του μετασχηματισμού) και την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού, έχουμε:

$$x(n) = \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) - \frac{6}{5} \cdot (-3)^n \cdot u(-n-1)$$

### 5.1.8. Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

#### Θεώρημα αρχικής τιμής

Αν  $x(n) = 0, n < 0$ , τότε η αρχική τιμή του σήματος  $x(n)$  είναι  $x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z)$  (5.19)

#### Απόδειξη.

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) \cdot z^{-n} + x(0) \cdot z^{-0} + \sum_{n=1}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} 0 \cdot z^{-n} + x(0) \cdot 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} = 0 + x(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} \\ &= x(0) + x(1) \cdot z^{-1} + x(2) \cdot z^{-2} + \dots \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} x(0) + 0 + 0 + \dots = x(0) \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Δίνεται ο μετασχηματισμός ζενός αιτιατού σήματος  $x(n)$

$$X(z) = \frac{2}{3-5 \cdot z^{-1}}, |z| > \frac{5}{3}$$

Τότε η αρχική τιμή του σήματος  $x(n)$  είναι:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{2}{3 - 5 \cdot z^{-1}} = \frac{2}{3}$$

### Θεώρημα τελικής τιμής

Αν  $x(n) = 0, n > 0$ , τότε η τελική τιμή του σήματος  $x(n)$  είναι  $x(0) = \lim_{z \rightarrow 0} X(z)$  (5.20)

#### Απόδειξη.

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) \cdot z^{-n} + x(0) \cdot z^{-0} + \sum_{n=1}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) \cdot z^{-n} + x(0) \cdot 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) \cdot z^{-n} + x(0) + 0 \\ &= \dots + x(-2) \cdot z^2 + x(-1) \cdot z^1 + x(0) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \dots + 0 + 0 + x(0) = x(0) \end{aligned}$$

#### Παράδειγμα

Δίνεται ο μετασχηματισμός ζενός αναιτιατού σήματος  $x(n)$

$$X(z) = \frac{2 - 3 \cdot z^{-1}}{4 - 5 \cdot z^{-1}}, |z| < \frac{5}{4}$$

Τότε η τελική τιμή του σήματος  $x(n)$  είναι:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow 0} X(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 - 3 \cdot z^{-1}}{4 - 5 \cdot z^{-1}} = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{z}{z} \cdot \frac{2 - 3 \cdot z^{-1}}{4 - 5 \cdot z^{-1}} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z - 3}{4z - 5} = \frac{3}{5}$$

### 5.1.9. Μονόπλευρος μετασχηματισμός z

Ο **μονόπλευρος μετασχηματισμός z (one-sided z-transform)** μίας ακολουθίας διακριτού χρόνου  $x(n)$  ορίζεται ως:

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} \quad (5.21)$$

Πρόκειται για το ίδιο άθροισμα με αυτό του ορισμού του αμφίπλευρου μετασχηματισμού z, με τη διαφορά ότι το άθροισμα υπολογίζεται μόνο για τις μη αρνητικές τιμές της μεταβλητής  $n$ , δηλαδή για  $n \geq 0$ . Επομένως, ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z (one-sided z-transform) μίας ακολουθίας  $x(n)$  είναι ίσος με τον μετασχηματισμό z της ακολουθίας  $x(n) \cdot u(n)$ . Προφανώς η **Περιοχή Σύγκλισης του μονόπλευρου μετασχηματισμού z μίας ακολουθίας είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου**, δηλαδή είναι της μορφής  $|z| > a$ . Για τα ζεύγη του μονόπλευρου μετασχηματισμού χρησιμοποιείται ο συμβολισμός:

$$x(n) \xrightarrow{z^+} X^+(z)$$

#### Ιδιότητα μετατόπισης στον χρόνο του μονόπλευρου μετασχηματισμού z

Οι περισσότερες ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχηματισμού z είναι ίδιες με αυτές του αμφίπλευρου μετασχηματισμού z. Μία ιδιότητα, όπου υπάρχει διαφορά, είναι η ιδιότητα της μετατόπισης στον χρόνο.

#### Μετατόπιση ή ολίσθηση προς τα δεξιά

Αν  $x(n) \xrightarrow{z^+} X^+(z)$ , τότε

$$x(n - n_0), n_0 > 0 \xrightarrow{z^+} z^{-n_0} \cdot X^+(z) + z^{-n_0} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} x(-i) \cdot z^i \quad (5.22)$$

#### Απόδειξη.

Αν  $y(n) = x(n - n_0)$ , τότε

$$Y^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} y(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n - n_0) \cdot z^{-n}$$

Θέτουμε  $m = n - n_0$

$$\begin{aligned}
 Y^+(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x(n - n_0) \cdot z^{-n} = \sum_{m=-n_0}^{+\infty} x(m) \cdot z^{-(m+n_0)} = z^{-n_0} \cdot \sum_{m=-n_0}^{+\infty} x(m) \cdot z^{-m} \\
 &= z^{-n_0} \cdot \left\{ \sum_{m=-n_0}^{-1} x(m) \cdot z^{-m} + \sum_{m=0}^{+\infty} x(m) \cdot z^{-m} \right\} \\
 &= z^{-n_0} \cdot \sum_{m=-n_0}^{-1} x(m) \cdot z^{-m} + z^{-n_0} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} x(m) \cdot z^{-m} \\
 &= z^{-n_0} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} x(-i) \cdot z^i + z^{-n_0} \cdot X^+(z)
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα.

Το σήμα

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n), x(-1) = 1$$

έχει μονόπλευρο μετασχηματισμό z

$$X^+(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

Τότε το σήμα

$$y(n) = x(n-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot u(n-1)$$

έχει μονόπλευρο μετασχηματισμό z

$$Y^+(z) = z^{-1} \cdot X^+(z) + x(-1) = z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + 1 = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

**Μετατόπιση ή ολίσθηση προς τα αριστερά**

Αν  $x(n) \xrightarrow{z^+} X^+(z)$ , τότε

$$x(n + n_0), n_0 > 0 \xrightarrow{z^+} z^{n_0} \cdot X^+(z) - z^{n_0} \cdot \sum_{i=0}^{n_0-1} x(i) \cdot z^{-i} \quad (5.23)$$

**Απόδειξη.**

Αν  $y(n) = x(n + n_0)$ , τότε

$$Y^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} y(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n + n_0) \cdot z^{-n}$$

Θέτουμε  $m = n + n_0$

$$\begin{aligned}
 Y^+(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x(n + n_0) \cdot z^{-n} = \sum_{m=n_0}^{+\infty} x(m) \cdot z^{-(m-n_0)} = z^{n_0} \cdot \sum_{m=n_0}^{+\infty} x(m) \cdot z^{-m} \\
 &= z^{n_0} \cdot \left\{ \sum_{m=0}^{+\infty} x(m) \cdot z^{-m} - \sum_{m=0}^{n_0-1} x(m) \cdot z^{-m} \right\} \\
 &= z^{n_0} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} x(m) \cdot z^{-m} - z^{n_0} \cdot \sum_{m=0}^{n_0-1} x(m) \cdot z^{-m} \\
 &= z^{n_0} \cdot X^+(z) - z^{n_0} \cdot \sum_{i=0}^{n_0-1} x(i) \cdot z^{-i}
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα.

Το σήμα

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$$



με

$$x(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot u(0) = 1$$

έχει μονόπλευρο μετασχηματισμό z

$$X^+(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

Τότε το σήμα

$$y(n) = x(n+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot u(n+1)$$

έχει μονόπλευρο μετασχηματισμό z

$$Y^+(z) = z \cdot X^+(z) - z \cdot x(0) = z \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - z \cdot 1 = \frac{z - z + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{2}$$

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z χρησιμοποιείται για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές με **μη μηδενικές αρχικές συνθήκες**.

## 5.2. Συνάρτηση μεταφοράς

1-2-3-4-0-0

### 5.2.1. Ορισμός της συνάρτησης μεταφοράς

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (LTI) σύστημα με κρουστική απόκριση  $h(n)$  και είσοδο  $x(n)$  παράγει στην έξοδο την απόκριση:

$$y(n) = h(n) * x(n) \tag{5.24}$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2.

Ο μετασχηματισμός z,  $H(z)$ , της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$  ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος ονομάζεται **συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)**:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot z^{-n} \tag{5.25}$$

Από την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού z, είναι προφανές ότι, συμβολίζοντας με  $X(z)$  τον μετασχηματισμό z της εισόδου  $x(n)$  και με  $Y(z)$  τον μετασχηματισμό z της εξόδου  $y(n) = h(n) * x(n)$  του LTI συστήματος, οι μετασχηματισμοί z της εισόδου και της εξόδου συνδέονται με τη σχέση:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) \tag{5.26}$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2 Συνάρτηση μεταφοράς LTI συστήματος.

Έτσι, στα LTI συστήματα, η συνέλιξη στον χρόνο γίνεται πολλαπλασιασμός στη μιγαδική συχνότητα.

### 5.2.2. Περιγραφή LTI συστημάτων μέσω συνάρτησης μεταφοράς

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται από μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) \quad (5.27)$$

Στο Κεφάλαιο 3 είδαμε ότι η κρουστική απόκριση  $h(n)$  αρκεί για να περιγράψει ένα LTI σύστημα στο πεδίο του χρόνου. Τώρα θα δούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  αρκεί για να περιγράψει ένα LTI σύστημα στο πεδίο της συχνότητας.

Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός  $z$  της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$  είναι η συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$ .

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό  $z$  και στα δύο μέλη της εξίσωσης διαφορών (5.28), έχουμε

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} \cdot X(z) - \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \cdot Y(z)$$

οπότε

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z) \cdot \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} - Y(z) \cdot \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \\ \Rightarrow Y(z) + Y(z) \cdot \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} &= X(z) \cdot \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} \\ \Rightarrow Y(z) \cdot \left\{ 1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \right\} &= X(z) \cdot \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} \end{aligned}$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

οπότε

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Άρα

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k}} \quad (5.28)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς εξαρτάται από τους συντελεστές του LTI συστήματος. Επομένως, οι σταθεροί συντελεστές της γραμμικής εξίσωσης διαφορών αρκούν για να ορίσουν τη συνάρτηση μεταφοράς. Έτσι, η συνάρτηση μεταφοράς αρκεί για να περιγράψει ένα LTI σύστημα στο πεδίο της συχνότητας.

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI σύστημα:

$$y(n) = 2x(n) + 3x(n-2) - 4y(n-1) + 5y(n-2)$$

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς.

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό  $z$  και στα δύο μέλη της εξίσωσης διαφορών, έχουμε

$$\begin{aligned} Y(z) &= 2 \cdot X(z) + 3 \cdot z^{-2} \cdot X(z) - 4 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + 5 \cdot z^{-2} \cdot Y(z) \\ \Rightarrow Y(z) \cdot \{ 1 + 4 \cdot z^{-1} - 5 \cdot z^{-2} \} &= X(z) \cdot \{ 2 + 3 \cdot z^{-2} \} \end{aligned}$$

Άρα

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + 3z^{-2}}{1 + 4z^{-1} - 5z^{-2}}$$

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI σύστημα:

$$y(n) = x(n) - x(n-1) + x(n-2) + 5y(n-1) - 4y(n-2)$$

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς.

Από την εξίσωση διαφορών προκύπτει ότι πρόκειται για IIR φίλτρο με  $M = 2$  και  $N = 2$  και ότι οι σταθεροί συντελεστές είναι:

$$b_0 = 1, b_1 = -1, b_2 = 1, a_1 = -5, a_2 = 4$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τον τύπο της προηγούμενης παραγράφου, η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - 5z^{-1} + 4z^{-2}}$$

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{3 - 6z^{-2}}{1 - 2z^{-1} - 5z^{-2}}$$

Να βρεθεί η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει το LTI σύστημα.

Από την εξίσωση διαφορών προκύπτει ότι πρόκειται για IIR φίλτρο με  $M = 2$  και  $N = 2$  και ότι οι σταθεροί συντελεστές είναι:

$$b_0 = 3, b_1 = 0, b_2 = -6, a_1 = -2, a_2 = -5$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τον τύπο της προηγούμενης παραγράφου, η εξίσωση διαφορών είναι:

$$y(n) = 3x(n) - 6x(n-2) + 2y(n-1) + 5y(n-2)$$

Επίσης, είναι φανερό ότι η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή συνάρτηση της μεταβλητής  $z$ , οπότε έχει μηδενικά και πόλους.

Παράδειγμα.

Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς:

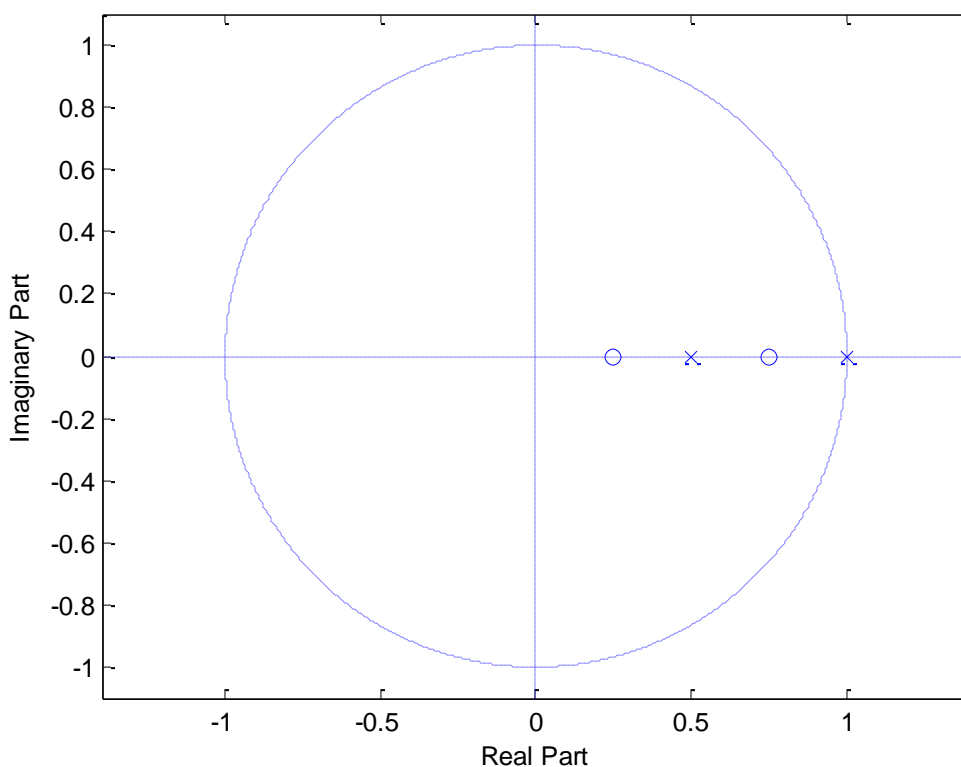
$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} + \frac{3}{16}z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Ο μετασχηματισμός  $z$  γράφεται:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} + \frac{3}{16}z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z^2 - z + \frac{3}{16}}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}} = \frac{(z - \frac{1}{4}) \cdot (z - \frac{3}{4})}{(z - \frac{1}{2}) \cdot (z - 1)}$$

Επομένως υπάρχουν δύο μηδενικά στα σημεία  $z = \frac{1}{4}$  και  $z = \frac{3}{4}$  και δύο πόλοι στα σημεία  $z = \frac{1}{2}$  και  $z = 1$ .

Στο Σχήμα 5.3 φαίνεται το διάγραμμα πόλων-μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς, όπου τα μηδενικά συμβολίζονται με το σύμβολο «ο» και οι πόλοι με το σύμβολο «x».



Σχήμα 5.3 Πόλοι και Μηδενικά συνάρτησης μεταφοράς.

### 5.2.3. Σύνδεση συστημάτων σε σειρά

Ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $H_1(z)$  συνδέεται σε σειρά με ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $H_2(z)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4. Το πρώτο σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$  με μετασχηματισμό  $X(z)$  και έξοδο  $w(n)$  με μετασχηματισμό  $W(z)$ . Το δεύτερο σύστημα έχει είσοδο, την έξοδο του πρώτου συστήματος και έξοδο  $y(n)$  με μετασχηματισμό  $Y(z)$ .

Η σύνδεση σε σειρά των δύο συστημάτων είναι ισοδύναμη με ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$ , που εξαρτάται από τις συναρτήσεις μεταφοράς των συστημάτων και δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \quad (5.29)$$

#### Απόδειξη.

Για τα δύο συστήματα, που είναι συνδεδεμένα σε σειρά, ισχύει:

$$Y(z) = H_2(z) \cdot W(z)$$

$$W(z) = H_1(z) \cdot X(z)$$

οπότε

$$Y(z) = H_2(z) \cdot W(z) = H_2(z) \cdot [H_1(z) \cdot X(z)] = [H_2(z) \cdot H_1(z)] \cdot X(z)$$

επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό.

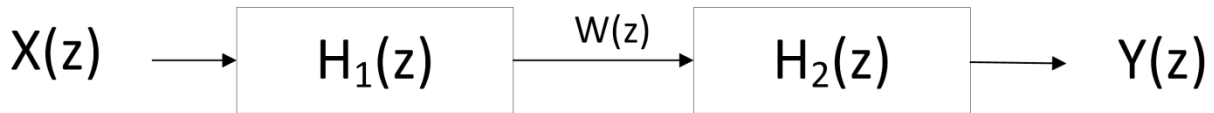
Όμως, η έξοδος γράφεται:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

Επομένως,

$$H(z) = H_2(z) \cdot H_1(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$$





Σχήμα 5.4 Σύνδεση συστημάτων σε σειρά.

Η συνολική συνάρτηση μεταφοράς ενός LTI συστήματος, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα **σε σειρά**, είναι το **γινόμενο** των συναρτήσεων μεταφοράς των επί μέρους συστημάτων.

#### 5.2.4. Σύνδεση συστημάτων παράλληλα

Ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $H_1(z)$  συνδέεται παράλληλα με ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $H_2(z)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.5. Το πρώτο σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$  με μετασχηματισμό  $z X(z)$  και έξοδο  $w(n)$  με μετασχηματισμό  $z W(z)$ . Το δεύτερο σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$  με μετασχηματισμό  $z X(z)$  και έξοδο  $v(n)$  με μετασχηματισμό  $z V(z)$ . Οι έξοδοι των δύο συστημάτων αθροίζονται και δίνουν την συνολική έξοδο  $y(n)$  με μετασχηματισμό  $z Y(z)$ .

Η παράλληλη σύνδεση των δύο συστημάτων είναι ισοδύναμη με ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$ , που εξαρτάται από τις συναρτήσεις μεταφοράς των συστημάτων και δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) \quad (5.30)$$

#### Απόδειξη.

Για τα δύο συστήματα, που είναι συνδεδεμένα παράλληλα, ισχύει:

$$V(z) = H_2(z) \cdot X(z)$$

$$W(z) = H_1(z) \cdot X(z)$$

οπότε

$$Y(z) = V(z) + W(z) = H_2(z) \cdot X(z) + H_1(z) \cdot X(z) = [H_2(z) + H_1(z)] \cdot X(z)$$

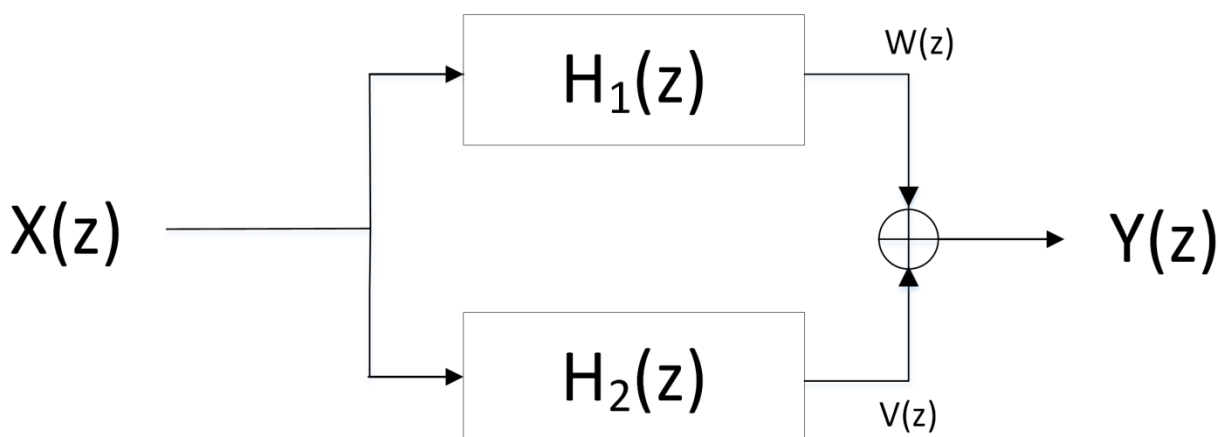
επειδή ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα.

Όμως, η έξοδος γράφεται:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

Επομένως :

$$H(z) = H_2(z) + H_1(z) = H_1(z) + H_2(z) \quad \blacksquare$$



Σχήμα 5.5 Σύνδεση συστημάτων παράλληλα.

Η συνολική συνάρτηση μεταφοράς ενός LTI συστήματος, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα **παράλληλα**, είναι το **άθροισμα** των συναρτήσεων μεταφοράς των επί μέρους συστημάτων.

### 5.2.5. Επίλυση εξισώσεων διαφορών μέσω μετασχηματισμού z

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται από μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) \quad (5.31)$$

και αρχικές συνθήκες εξόδου  $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$  και αρχικές συνθήκες εισόδου  $x(-1), x(-2), \dots, x(-M)$ .

Η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές είναι ένας ανοικτός τύπος υπολογισμού της απόκρισης του συστήματος, δεδομένων βέβαια των σταθερών συντελεστών. Επομένως συνιστά έναν επαναληπτικό τρόπο υπολογισμού της εξόδου. Για να υπολογιστεί η έξοδος  $y(0)$  απαιτούνται οι αρχικές συνθήκες εξόδου  $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$  και οι αρχικές συνθήκες εισόδου  $x(-1), x(-2), \dots, x(-M)$ . Η επίλυση των εξισώσεων διαφορών μπορεί να γίνει μέσω του μετασχηματισμού z. Μάλιστα η ύπαρξη αρχικών συνθηκών υπαγορεύει τη χρήση του μονόπλευρου μετασχηματισμού z.

Παίρνοντας μονόπλευρο μετασχηματισμό z και στα δύο μέλη της εξίσωσης διαφορών, έχουμε:

$$\begin{aligned} Y^+(z) &= \sum_{k=0}^M b_k \cdot \left[ z^{-k} \cdot X^+(z) + z^{-k} \cdot \sum_{i=1}^k x(-i)z^i \right] - \sum_{k=1}^N a_k \cdot \left[ z^{-k} \cdot Y^+(z) + z^{-k} \cdot \sum_{i=1}^k y(-i)z^i \right] \\ \Rightarrow Y^+(z) + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \cdot Y^+(z) + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \cdot \sum_{i=1}^k y(-i)z^i &= \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} \cdot X^+(z) + \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} \cdot \sum_{i=1}^k x(-i)z^i \\ \Rightarrow Y^+(z) \cdot \left[ 1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \right] + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \cdot \sum_{i=1}^k y(-i)z^i &= X^+(z) \cdot \left[ \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} \right] + \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} \cdot \sum_{i=1}^k x(-i)z^i \\ \Rightarrow Y^+(z) \cdot \left[ 1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \right] + \sum_{k=1}^N \left[ \sum_{i=1}^N a_i \cdot z^{k-i} \right] \cdot y(-k) &= X^+(z) \cdot \left[ \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} \right] + \sum_{k=1}^M \left[ \sum_{i=1}^M b_i \cdot z^{k-i} \right] \cdot x(-k) \\ \Rightarrow Y^+(z) &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{\left[ 1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \right]} \cdot X^+(z) + \frac{\sum_{k=1}^M \left[ \sum_{i=1}^M b_i \cdot z^{k-i} \right] \cdot x(-k)}{\left[ 1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \right]} - \frac{\sum_{k=1}^N \left[ \sum_{i=1}^N a_i \cdot z^{k-i} \right] \cdot y(-k)}{\left[ 1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \right]} \end{aligned}$$

Θέτοντας:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{\left[ 1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \right]} \quad (5.32)$$

$$H_x(z) = \frac{\sum_{k=1}^M \left[ \sum_{i=1}^M b_i \cdot z^{k-i} \right] \cdot x(-k)}{\left[ 1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \right]} \quad (5.33)$$

$$H_y(z) = - \frac{\sum_{k=1}^N \left[ \sum_{i=1}^N a_i \cdot z^{k-i} \right] \cdot y(-k)}{\left[ 1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \right]} \quad (5.34)$$

προκύπτει:

$$Y^+(z) = H(z) \cdot X^+(z) + H_x(z) + H_y(z) \quad (5.35)$$

Ο πρώτος όρος εξαρτάται από τη συνάρτηση μεταφοράς, που αποτυπώνει τη συμπεριφορά του συστήματος για μηδενικές αρχικές συνθήκες εισόδου και εξόδου.

Ο δεύτερος όρος εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες εισόδου. Αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε οι αρχικές συνθήκες εισόδου είναι μηδενικές και ο όρος αυτός μηδενίζεται.

Ο τρίτος όρος εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες εξόδου και αντιστοιχεί στην απόκριση του συστήματος για μηδενική είσοδο.

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό προκύπτει η απόκριση του συστήματος.

Παράδειγμα.

Δίνεται ένα αιτιατό σύστημα με γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2} y(n-1)$$

με αρχική συνθήκη

$$y(-1) = \frac{1}{4}$$

Υπολογισμός κρουστικής απόκρισης.

Η κρουστική απόκριση  $h(n)$  είναι η έξοδος του φίλτρου με είσοδο  $x(n) = \delta(n)$  και μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Χρησιμοποιώντας τον *αμφίπλευρο* μετασχηματισμό  $z$  έχουμε:

$$X(z) = 1$$

γιατί  $x(n) = \delta(n)$ .

Από την εξίσωση διαφορών έχουμε:

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{2} \cdot z^{-1} \cdot Y(z) \Rightarrow Y(z) \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right] = X(z)$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

και η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι:

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$$

Υπολογισμός της βηματικής απόκρισης.

Η βηματική απόκριση είναι η απόκριση του φίλτρου  $s(n)$  στην είσοδο  $x(n) = u(n)$ .

Χρησιμοποιώντας το *μονόπλευρο* μετασχηματισμό  $z$  έχουμε:

$$X^+(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$

γιατί  $x(n) = u(n)$ .

Από την εξίσωση διαφορών έχουμε:

$$Y^+(z) = X^+(z) + \frac{1}{2} \cdot \left[z^{-1} \cdot Y^+(z) + y(-1)\right] \Rightarrow Y^+(z) \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right] = \frac{1}{2} \cdot y(-1) + X^+(z)$$

$$\Rightarrow Y^+(z) \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{\frac{9}{8} - \frac{1}{8} z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Επομένως:

$$Y^+(z) = \frac{\frac{9}{8} - \frac{1}{8} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right) \cdot \left(1 - z^{-1}\right)}, |z| > 1$$

που αναλύεται σε:

$$Y^+(z) = \left(-\frac{7}{8}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}} + 2 \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Οπότε η βηματική απόκριση του φίλτρου είναι:

$$s(n) = \left(-\frac{7}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) + 2 \cdot u(n)$$

Αξίζει να παρατηρήσετε ότι:

$$Y^+(z) \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{1-z^{-1}} \Rightarrow Y^+(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{4}$$

Θέτοντας:

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H_y(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{4}$$

προκύπτει:

$$Y^+(z) = H(z) \cdot X^+(z) + H_y(z)$$

Ο πρώτος όρος εξαρτάται από την συνάρτηση μεταφοράς που αποτυπώνει την συμπεριφορά του συστήματος για μηδενικές αρχικές συνθήκες εισόδου και εξόδου.

Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, δεν υπάρχει ο όρος που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες εισόδου.

Ο δεύτερος όρος εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες εξόδου και αντιστοιχεί στην απόκριση του συστήματος για μηδενική είσοδο.

Έχουμε:

$$Y^+(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1-z^{-1}} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Οπότε η απόκριση είναι:

$$y(n) = \left[(-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) + 2 \cdot u(n)\right] + \left[\left(\frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)\right]$$

που βέβαια είναι ίση με τη βηματική απόκριση  $s(n)$  που υπολογίστηκε προηγουμένως.

Ο πρώτος όρος της απόκρισης αντιστοιχεί στην απόκριση του συστήματος για μηδενικές αρχικές συνθήκες εισόδου και εξόδου (**zerostateresponse**) και ο δεύτερος όρος της απόκρισης αντιστοιχεί στην απόκριση του συστήματος για μηδενική είσοδο (**zeroinputresponse**).

Πράγματι, για  $x(n) = 0$ , έχουμε  $y(n) = \frac{1}{2} y(n-1)$ , οπότε

$$Y^+(z) = \frac{1}{2} \cdot \left[z^{-1} \cdot Y^+(z) + y(-1)\right] \Rightarrow Y^+(z) \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right] = \frac{1}{2} \cdot y(-1)$$

$$\Rightarrow Y^+(z) \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow Y^+(z) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

που αντιστοιχεί στον όρο  $\left(\frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$  της απόκρισης.

## 5.2.6. Ευστάθεια σημάτων διακριτού χρόνου

### Ευστάθεια σημάτων διακριτού χρόνου και μετασχηματισμός z

#### Ευσταθές σήμα

Ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι **ευσταθές**, όταν **όλοι οι πόλοι** του μετασχηματισμού z βρίσκονται **εντός** του μοναδιαίου κύκλου. Αν το σήμα είναι πραγματικό και ο πόλος  $p$  είναι θετικός, δηλαδή  $0 < p < 1$ , τότε το σήμα είναι φθίνουσα συνάρτηση, ενώ αν ο πόλος είναι αρνητικός, δηλαδή  $-1 < p < 0$ , τότε το σήμα είναι απόλυτα φθίνουσα συνάρτηση. Αν οι πόλοι είναι μιγαδικοί (υπάρχουν σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών), δηλαδή  $|p| = |p^*| < 1$ , τότε το σήμα είναι φθίνον ημιτονοειδές σήμα (φθίνουσα ταλάντωση).

#### Ασταθές σήμα

Ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι **ασταθές**, όταν **ένας τουλάχιστον πόλος** του μετασχηματισμού z βρίσκεται **εκτός** του μοναδιαίου κύκλου. Αν το σήμα είναι πραγματικό και ο πόλος  $p$  είναι θετικός, δηλαδή  $p > 1$ , τότε το σήμα είναι αύξουσα συνάρτηση, ενώ αν ο πόλος είναι αρνητικός, δηλαδή  $p < -1$ , τότε το



σήμα είναι απόλυτα αύξουσα συνάρτηση. Αν οι πόλοι είναι μιγαδικοί (υπάρχουν σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών), δηλαδή  $|p| = |p^*| > 1$ , τότε το σήμα είναι αύξον ημιτονοειδές σήμα (αύξουσα ταλάντωση).

### Οριακά ευσταθές σήμα

Ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι **οριακά ευσταθές**, όταν **όλοι οι πόλοι** του μετασχηματισμού ζβρίσκονται **πάνω** στο μοναδιαίο κύκλο ή **εντός** του μοναδιαίου κύκλου και **ένας τουλάχιστον πόλος** του μετασχηματισμού ζβρίσκεται **πάνω** στο μοναδιαίο κύκλο. Αν το σήμα είναι πραγματικό και ο πόλος  $p$  είναι θετικός, δηλαδή  $p = 1$ , τότε το σήμα είναι σταθερό (ίσο με 1), ενώ αν ο πόλος είναι αρνητικός, δηλαδή  $p = -1$ , τότε το σήμα παλινδρομεί ανάμεσα στις τιμές 1 και  $-1$ . Αν οι πόλοι είναι μιγαδικοί (υπάρχουν σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών), δηλαδή  $|p| = |p^*| = 1$ , τότε το σήμα είναι ημιτονοειδές.

Μπορείτε να διερευνήσετε την ευστάθεια σημάτων διακριτού χρόνου με το Διαδραστικό πρόγραμμα 5.2.



### Διαδραστικό πρόγραμμα 5.2 Ευστάθεια σημάτων διακριτού χρόνου.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

## 5.2.7. Ευστάθεια συστημάτων διακριτού χρόνου και μετασχηματισμός $z$

### Ευσταθές σύστημα

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 3, ένα LTI σύστημα είναι ευσταθές, όταν η κρουστική απόκριση ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = L < +\infty \quad (5.36)$$

Αυτή η σχέση αφορά στο πεδίο του χρόνου. Στο πεδίο των συχνοτήτων, ένα LTI σύστημα είναι **ευσταθές**, όταν **ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος**.

### Αιτιατό σύστημα

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 3, ένα LTI σύστημα είναι αιτιατό, όταν η κρουστική απόκριση ικανοποιεί τη σχέση:

$$h(n) = 0, n < 0 \quad (5.37)$$

Αυτή η σχέση αφορά στο πεδίο του χρόνου. Στο πεδίο των συχνοτήτων, ένα LTI σύστημα είναι **αιτιατό**, όταν **η Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου**, δηλαδή είναι της μορφής  $|z| > a$ . Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι πόλοι ανήκουν σε περιοχή της μορφής  $|z| \leq a$ , αφού οι πόλοι δεν ανήκουν στην Περιοχή Σύγκλισης.

### Πραγματοποιήσιμο σύστημα

Ένα LTI σύστημα είναι **πραγματοποιήσιμο**, όταν είναι **ευσταθές και αιτιατό**. Αυτό σημαίνει ότι ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος και ταυτόχρονα ότι όλοι οι πόλοι ανήκουν σε περιοχή μορφής  $|z| \leq a$ . Άρα,  $0 \leq a < 1$ , που σημαίνει ότι **όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου**.

Παράδειγμα.

Το LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{c}{1 + \frac{1}{8}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{8}$$

έχει έναν πόλο στο σημείο  $z = -\frac{1}{8}$  αφού η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται:

$$H(z) = \frac{c}{1 + \frac{1}{8}z^{-1}} = \frac{c \cdot z}{z + \frac{1}{8}}$$

Υπάρχουν δύο πιθανές Περιοχές Σύγκλισης, η Περιοχή Σύγκλισης  $|z| < \frac{1}{8}$  και η Περιοχή Σύγκλισης  $|z| > \frac{1}{8}$ . Το σύστημα είναι αιτιατό, αν η Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου, δηλαδή, αν η Περιοχή Σύγκλισης είναι της μορφής  $|z| > a$ . Επομένως, αφού η συνάρτηση μεταφοράς έχει Περιοχή Σύγκλισης  $|z| > \frac{1}{8}$ , τότε το σύστημα είναι αιτιατό.

Επιπλέον, για να είναι το σύστημα ευσταθές, πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος. Αυτό συμβαίνει, αφού η Περιοχή Σύγκλισης είναι  $|z| > \frac{1}{8}$ .

Επομένως, το σύστημα είναι πραγματοποιήσιμο. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο πόλος  $z = -\frac{1}{8}$  βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

### Ευστάθεια αιτιατών LTI συστημάτων διακριτού χρόνου και συνάρτηση μεταφοράς

#### Ευσταθές αιτιατό LTI σύστημα

Ένα αιτιατό LTI σύστημα διακριτού χρόνου είναι **ευσταθές**, όταν **όλοι οι πόλοι** της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος βρίσκονται **εντός** του μοναδιαίου κύκλου.

#### Ασταθές αιτιατό LTI σύστημα

Ένα αιτιατό LTI σύστημα διακριτού χρόνου είναι **ασταθές**, όταν **ένας τουλάχιστον πόλος** της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος βρίσκεται **εκτός** του μοναδιαίου κύκλου.

#### Οριακά ευσταθές αιτιατό LTI σύστημα

Ένα αιτιατό LTI σύστημα διακριτού χρόνου είναι **οριακά ευσταθές**, όταν **όλοι οι πόλοι** της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος βρίσκονται **πάνω** στο μοναδιαίο κύκλο ή **εντός** του μοναδιαίου κύκλου και **ένας τουλάχιστον πόλος** της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος βρίσκεται **πάνω** στο μοναδιαίο κύκλο.

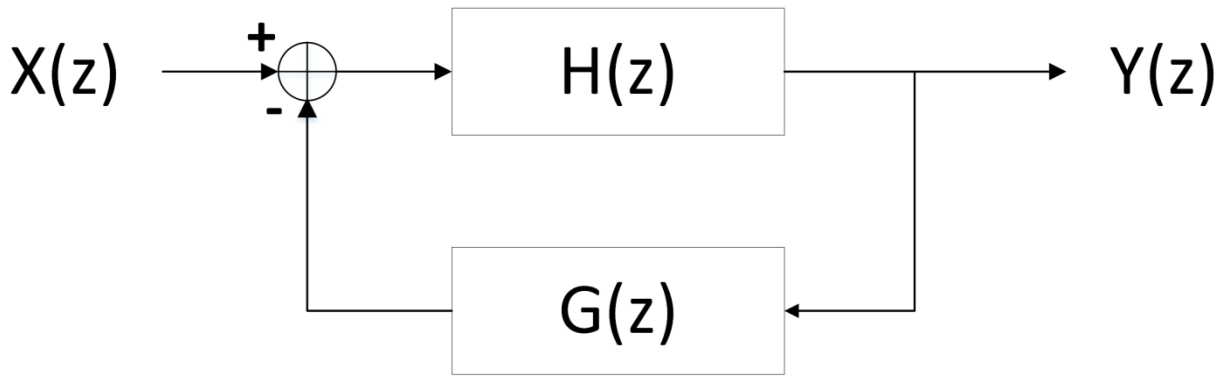
Μπορείτε να διερευνήσετε την ευστάθεια LTI συστημάτων διακριτού χρόνου σε σχέση με τον μετασχηματισμό  $z$  (συνάρτηση μεταφοράς) με το Διαδραστικό πρόγραμμα 5.3.



Διαδραστικό πρόγραμμα 5.3 Ευστάθεια LTI συστημάτων διακριτού χρόνου.

### 5.2.8. Σύστημα ανάδρασης

Στο Σχήμα 5.6 φαίνεται ένα τυπικό σύστημα ανάδρασης. Το σύστημα έχει είσοδο με μετασχηματισμό  $zX(z)$  και έξοδο με μετασχηματισμό  $zY(z)$ . Το σύστημα αποτελείται από δύο LTI συστήματα. Το **σύστημα του ευθέως κλάδου** με συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  και το **σύστημα κλάδου ανάδρασης** με συνάρτηση μεταφοράς  $G(z)$ .



Σχήμα 5.6 Σύστημα ανάδρασης.

Από το Σχήμα είναι φανερό ότι:

$$Y(z) = H(z) \cdot [X(z) - G(z) \cdot Y(z)] \Rightarrow Y(z) \cdot [1 + H(z) \cdot G(z)] = H(z) \cdot X(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + H(z) \cdot G(z)}$$

Το συνολικό **σύστημα ανάδρασης** έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$Q(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Άρα

$$Q(z) = \frac{H(z)}{1 + H(z) \cdot G(z)} \quad (5.38)$$

Μία εφαρμογή των συστημάτων ανάδρασης είναι η χρήση τους, ώστε να σταθεροποιηθούν ασταθή συστήματα.

Παράδειγμα.

Δίνεται ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}}, |z| > \frac{2}{5}$$

Το σύστημα είναι αιτιατό, γιατί η Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς είναι  $|z| > \frac{2}{5}$ .

Όμως ο μοναδιαίος κύκλος δεν ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος, οπότε το σύστημα είναι ασταθές. Ο λόγος που γίνεται αυτό είναι ότι η συνάρτηση μεταφοράς έχει έναν πόλο  $p = \frac{2}{5}$  στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, αφού  $p = \frac{2}{5} > 1$ .

Θεωρούμε τώρα ένα *αιτιατό* σύστημα ανάδρασης, όπου το σύστημα του ευθέως κλάδου έχει συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  και το σύστημα κλάδου ανάδρασης έχει συνάρτηση μεταφοράς  $G(z) = C > 0$ .

Τότε, το συνολικό σύστημα ανάδρασης έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$Q(z) = \frac{H(z)}{1 + H(z) \cdot G(z)}$$

οπότε

$$Q(z) = \frac{H(z)}{1 + H(z) \cdot G(z)} = \frac{\frac{1}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}}}{1 + \frac{1}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}} \cdot C} = \frac{\frac{1}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}}}{\frac{1 - \frac{2}{5}z^{-1} + C}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}}} = \frac{\frac{1}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}}}{\frac{1 + C - \frac{2}{5}z^{-1}}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}}} = \frac{1}{(1 + C) - \frac{2}{5}z^{-1}}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος ανάδρασης έχει έναν πόλο

$$p' = \frac{\frac{2}{5}}{1 + C}$$

Επειδή το σύστημα ανάδρασης είναι αιτιατό, η Περιοχή Σύγκλισης είναι:

$$|z| > p' = \frac{\frac{9}{5}}{1+C}$$

Για να είναι το σύστημα ανάδρασης ευσταθές, πρέπει όταν ο μοναδιαίος κύκλος να ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος. Επομένως, πρέπει:

$$p' = \frac{\frac{9}{5}}{1+C} < 1$$

Άρα, πρέπει:

$$C > \frac{4}{5}$$

Αξιίζει να σημειωθεί ότι ο πόλος  $p'$  του συστήματος ανάδρασης είναι μία συνάρτηση της παραμέτρου  $C$ .

Όταν  $C$  τείνει στο μηδέν, τότε  $\lim_{C \rightarrow 0} p' = \lim_{C \rightarrow 0} \frac{\frac{9}{5}}{1+C} = \frac{9}{5} = p$ , που σημαίνει ότι ο πόλος τείνει στον πόλο της συνάρτησης μεταφοράς  $H(z)$  του ευθέως κλάδου.

Όταν  $C$  τείνει στο άπειρο, τότε  $\lim_{C \rightarrow +\infty} p' = \lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{\frac{9}{5}}{1+C} = 0$ , που σημαίνει ότι ο πόλος τείνει στο μηδέν.

Επίσης, η συνάρτηση

$$p' = \frac{\frac{9}{5}}{1+C}$$

είναι μία φθίνουσα συνάρτηση ως προς την παράμετρο  $C$ . Οπότε όσο  $C$  αυξάνει, τόσο η τιμή του πόλου  $p'$  ελαττώνεται. Αυτό σημαίνει ότι, όσο αυξάνει η τιμή του  $C$ , τόσο ο πόλος «σπρώχνεται» προς το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Μάλιστα, ο πόλος μπαίνει στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, όταν  $C > \frac{4}{5}$ .

### 5.2.9. Ακολουθία Fibonacci και συνάρτηση μεταφοράς

Η ακολουθία Fibonacci  $\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,\dots\}$  είναι μία πολύ γνωστή ακολουθία αριθμών, όπου κάθε αριθμός είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων:

$$x(n+2) = x(n+1) + x(n) \quad (5.39)$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(0) = 0, x(1) = 1$$

Γίνεται η αντιστοίχιση της ακολουθίας Fibonacci με την παρακάτω γραμμική εξίσωση διαφορών που περιγράφει ένα LTI σύστημα:

$$x(n) - x(n-1) - x(n-2) = \delta(n-1) \quad (5.40)$$

Πράγματι,

για  $n=1$

$$x(1) - x(0) - x(-1) = \delta(0) \Rightarrow 1 - 0 - x(-1) = 1 \Rightarrow x(-1) = 0$$

για  $n=0$

$$x(0) - x(-1) - x(-2) = \delta(-1) \Rightarrow 0 - 0 - x(-2) = 0 \Rightarrow x(-2) = 0$$

οπότε εξασφαλίζονται μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Παίρνοντας μετασχηματισμό z στην εξίσωση διαφορών προκύπτει:

$$X(z) - z^{-1} \cdot X(z) - z^{-2} \cdot X(z) = z^{-1} \Rightarrow X(z) \cdot [1 - z^{-1} - z^{-2}] = z^{-1}$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται:

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot z^{-1}\right)}$$

και έχει δύο πόλους:  $p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  και  $p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

Στη συνέχεια το γινόμενο αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot z^{-1}\right)} = \frac{A_1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot z^{-1}}$$

με συντελεστές

$$A_1 = \left[ \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot z^{-1}\right) \cdot X(z) \right]_{z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \left[ \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot z^{-1}} \right]_{z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$A_2 = \left[ \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot z^{-1}\right) \cdot X(z) \right]_{z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \left[ \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot z^{-1}} \right]_{z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

δηλαδή

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot z^{-1}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot z^{-1}} \quad (5.41)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό (από τα ζεύγη του μετασχηματισμού) και την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού, έχουμε:

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot u(n) - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot u(n) \quad (5.42)$$

Η ακολουθία Fibonacci έχει την παρακάτω ιδιότητα:

**Ιδιότητα.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x(n+1)}{x(n)} \right) = r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (5.43)$$

**Απόδειξη.**

Έστω ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x(n+1)}{x(n)} \right) = r.$$

Τότε,  $r > 0$ , αφού η ακολουθία Fibonacci αποτελείται από θετικούς αριθμούς, οπότε και το όριο είναι θετικός αριθμός ως πηλίκο θετικών αριθμών.

Για τους ίδιους λόγους έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x(n+2)}{x(n+1)} \right) = r$$

Αλλά

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x(n+2)}{x(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x(n+1) + x(n)}{x(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{x(n)}{x(n+1)} \right) = 1 + \frac{1}{r}$$

Επομένως:

$$r = 1 + \frac{1}{r}$$

Τότε

$$r^2 - r - 1 = 0$$

που έχει δύο λύσεις

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Αλλά  $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$  και  $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$

Οπότε το όριο είναι:

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



### Παρατήρηση.

Το όριο της ιδιότητας συνδέεται με τον αριθμό  $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618033988\dots$ , που είναι γνωστός με το όνομα

**χρυσή τομή**. Η σχέση που συνδέει την οριακή τιμή της (5.43) με τη χρυσή τομή είναι:

$$a = \frac{1}{r} \quad (5.44)$$

Πράγματι,

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = a$$

### 5.3. Μετασχηματισμός z σε προγραμματιστικό περιβάλλον

#### 1-0-3-0-0-0

Χρήσιμη βιβλιογραφία για Matlab είναι το βιβλίο TheMathWorksInc., 2005. Χρήσιμη ξενόγλωσση βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι τα βιβλία IngleandProakis, 2003 και Leis, 2011. Χρήσιμη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι το βιβλίο Ασημάκης, 2008. Χρήσιμη βιβλιογραφία για Octave είναι τα βιβλία Eaton, Bateman, Hauberg, Wehbring, 2011 και Hansen, 2011.

Η συνάρτηση `zplane(b, a)` υπολογίζει τους πόλους και τα μηδενικά μίας ρητής συνάρτησης και σχεδιάζει το διάγραμμα πόλων-μηδενικών. Τα μηδενικά συμβολίζονται με το σύμβολο «ο» και οι πόλοι με το σύμβολο «x». Σε περίπτωση πολλαπλότητας πόλων ή μηδενικών, η πολλαπλότητα εμφανίζεται ως εκθέτης. Η συνάρτηση έχει εισόδους τους συντελεστές του αριθμητή `b` και τους συντελεστές `a` του παρονομαστή και σχεδιάζει το διάγραμμα πόλων-μηδενικών. Για παράδειγμα, για τη σχεδίαση του διαγράμματος πόλων-μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

απαιτείται η κλήση

```
b=[1]; a=[1,-1.4]; zplane(b,a);
```

Η συνάρτηση `[R,P,K]=residuez(b,a)` χρησιμοποιείται για την υλοποίηση του αντίστροφου μετασχηματισμού z. Η συνάρτηση υλοποιεί την ανάλυση μίας ρητής συνάρτησης σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Η συνάρτηση έχει εισόδους τους συντελεστές `b` του αριθμητή και τους συντελεστές `a` του παρονομαστή και εξόδους τους πόλους `P`, τους συντελεστές `R` των κλασμάτων και τους συντελεστές `K` του πολυωνύμου, που προκύπτει από τη διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή (όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος ή μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή). Για παράδειγμα, η ανάλυση σε απλά κλάσματα της συνάρτησης μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+3z^{-1}}$$

απαιτεί την κλήση

```
b=[1,2]; a=[1,3]; [R,P,K]=residuez(b,a);
```

Τότε, η συνάρτηση επιστρέφει

```
R=0.3333
```

```
P=-3
```

```
K=0.6667
```

που σημαίνει

$$H(z) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+3z^{-1}}.$$

Η συνάρτηση `[H,W]=freqz(b,a)` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό και τη σχεδίαση της απόκρισης συχνότητας ενός LTI συστήματος διακριτού χρόνου. Η συνάρτηση έχει εισόδους τους συντελεστές `b` και `a` της ρητής απόκρισης συχνότητας, που περιγράφει το LTI σύστημα και εξόδους το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας.

Η συνάρτηση `filtic` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της απόκρισης ενός LTI συστήματος, όταν δίνονται αρχικές συνθήκες. Η συνάρτηση `filter` δημιουργεί αρχικές συνθήκες για τη συνάρτηση `filter`. Η συνάρτηση `xic=filtic(b,a,Y)` έχει εισόδους τους συντελεστές `b` και `a` της εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει το LTI σύστημα και τις αρχικές συνθήκες `Y`. Η έξοδος της συνάρτησης χρησιμοποιείται ως είσοδος στη συνάρτηση `filter`. Για παράδειγμα, για να υπολογιστεί η βηματική απόκριση του LTI συστήματος

$$y(n) = x(n) + 2y(n-1) + 3y(n-2)$$

με αρχικές συνθήκες

$$y(-2) = 10, y(-1) = 5$$

δηλαδή, η έξοδος του συστήματος για είσοδο  $x(n) = u(n)$

απαιτείται η παραγωγή της εισόδου `u` και στη συνέχεια απαιτείται η κλήση

```
b=[1]; a=[1, -2, -3]; Y=[5,10]; xic=filtic(b,a,Y); y=filter(b,a,u,xic);
```

## 5.4. Αυμένες Ασκήσεις

### 1-2-3-4-0-0

1. Δίνεται ο μετασχηματισμός ζενός αιτιατού σήματος  $x(n)$

$$X(z) = \frac{8}{3 - 2z^{-1} + 5z^{-2}}$$

Να υπολογίσετε την τιμή  $x(0)$ .

Λύση.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα της αρχικής τιμής

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{8}{3 - 2z^{-1} + 5z^{-2}} = \frac{8}{3}$$

2. Δίνεται ο μετασχηματισμός ζενός αναιτιατού σήματος  $x(n)$

$$X(z) = \frac{2z^{-1} + 3z^{-3} + 4z^{-4}}{2z^{-1} + 5z^{-2} + 9z^{-4}}$$

Να υπολογίσετε την τιμή  $x(0)$ .

Λύση.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα της τελικής τιμής

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow 0} X(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z^{-1} + 3z^{-3} + 4z^{-4}}{2z^{-1} + 5z^{-2} + 9z^{-4}} = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{z^4}{z^4} \cdot \frac{2z^{-1} + 3z^{-3} + 4z^{-4}}{2z^{-1} + 5z^{-2} + 9z^{-4}} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z^3 + 3z + 4}{2z^3 + 5z^2 + 9} = \frac{4}{9}$$

3. Ένα LTI σύστημα έχει είσοδο

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) - (2)^n \cdot u(n)$$

και έξοδο

$$y(n) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) - 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot u(n)$$

Να υπολογίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς.

Λύση.

Από τα ζεύγη του μετασχηματισμού  $z$  και από το γεγονός ότι η είσοδος  $x(n)$  είναι αιτιατό σήμα, γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός  $z$  της εισόδου είναι:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, ROC_X = \left( (|z| > \frac{1}{2}) \cap (|z| > 2) \right) = (|z| > 2)$$

Από τα ζεύγη του μετασχηματισμού  $z$  και από το γεγονός ότι η έξοδος  $y(n)$  είναι αιτιατό σήμα, γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός  $z$  της εξόδου είναι:

$$Y(z) = 6 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - 6 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}, ROC_Y = \left( (|z| > \frac{1}{2}) \cap (|z| > \frac{3}{4}) \right) = (|z| > \frac{3}{4})$$

Επομένως,

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - 2z^{-1}} = \frac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot \left(1 - 2z^{-1}\right)}$$

$$Y(z) = 6 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - 6 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

Τότε, από την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού  $z$  έχουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}$$

όπου η Περιοχή Σύγκλισης του μετασχηματισμού της εξόδου  $ROC_Y$  περιέχει την τομή της Περιοχής Σύγκλισης του μετασχηματισμού της εισόδου  $ROC_X$  και της Περιοχής Σύγκλισης του μετασχηματισμού της συνάρτησης μεταφοράς  $ROC_H$

Η συνάρτηση μεταφοράς έχει έναν πόλο  $z = \frac{3}{4}$ , οπότε υπάρχουν δύο πιθανές Περιοχές Σύγκλισης:

$$(α) \quad ROC_H = \left(|z| < \frac{3}{4}\right)$$

Στην περίπτωση αυτή  $ROC_X \cap ROC_H = \left(\left(|z| > 2\right) \cap \left(|z| < \frac{3}{4}\right)\right) = \emptyset$  και  $ROC_Y = \left(|z| > \frac{3}{4}\right)$

$$(β) \quad ROC_H = \left(|z| > \frac{3}{4}\right)$$

Στην περίπτωση αυτή  $ROC_X \cap ROC_H = \left(\left(|z| > 2\right) \cap \left(|z| > \frac{3}{4}\right)\right) = \left(|z| > 2\right)$  και  $ROC_Y = \left(|z| > \frac{3}{4}\right)$ , οπότε  $ROC_X \cap ROC_H \subseteq ROC_Y$ .

Άρα η Περιοχή Σύγκλισης είναι:  $ROC_H = \left(|z| > \frac{3}{4}\right)$

που σημαίνει ότι το σύστημα είναι αιτιατό.

4. Δίνεται η γραμμική εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = x(n) + \frac{3}{2}y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2)$$

με αρχικές συνθήκες

$$y(-2) = 10, y(-1) = 4.$$

α. Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση του φίλτρου.

β. Να υπολογίσετε την απόκριση του φίλτρου στην είσοδο  $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n)$

Λύση.

α. Η κρουστική απόκριση  $h(n)$  είναι η έξοδος του φίλτρου με είσοδο  $x(n) = \delta(n)$  και μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Χρησιμοποιώντας τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό  $z$  έχουμε:

$$X(z) = 1$$

γιατί  $x(n) = \delta(n)$

Από την εξίσωση διαφορών έχουμε:

$$Y(z) = X(z) + \frac{3}{2}z^{-1} \cdot Y(z) - \frac{1}{2}z^{-2} \cdot Y(z) \Rightarrow Y(z) \cdot \left[1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right] = X(z)$$

Άρα, η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot \left(1 - z^{-1}\right)} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$

και η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι:

$$h(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) + 2 \cdot u(n)$$

β. Χρησιμοποιώντας το μονόπλευρο μετασχηματισμό  $z$  έχουμε:

$$X^+(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{4}$$



γιατί

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n)$$

Από την εξίσωση διαφορών έχουμε:

$$Y^+(z) = X^+(z) + \frac{3}{2} \cdot [z^{-1} \cdot Y^+(z) + y(-1)] - \frac{1}{2} \cdot [z^{-2} \cdot Y^+(z) + z^{-1} \cdot y(-1) + y(-2)]$$

$$\Rightarrow Y^+(z) \cdot \left[1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right] = X^+(z) + \frac{3}{2} \cdot y(-1) - \frac{1}{2} \cdot [z^{-1} \cdot y(-1) + y(-2)]$$

$$\Rightarrow Y^+(z) \cdot \left[1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right] = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot [z^{-1} \cdot 4 + 10] = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + 6 - 2 \cdot z^{-1} - 5 = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + 1 - 2 \cdot z^{-1}$$

$$\Rightarrow Y^+(z) \cdot \left[1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right] = \frac{2 - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Επομένως:

$$Y^+(z) = \frac{2 - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{2 - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{\left(1 - z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}, |z| > 1$$

που αναλύεται σε:

$$Y^+(z) = \frac{2 - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{\left(1 - z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Οπότε και η απόκριση  $y(n)$  του φίλτρου στην είσοδο  $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n)$  είναι:

$$y(n) = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n)$$

5. Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση  $h(n)$  ενός LTI συστήματος

με είσοδο

$$x(n) = u(n)$$

και έξοδο

$$y(n) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n).$$

Λύση.

Ο μετασχηματισμός z της εισόδου είναι:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$

Ο μετασχηματισμός z της εξόδου είναι:

$$Y(z) = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{3}$$

Από την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού z, προκύπτει ότι το σήμα

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

έχει μετασχηματισμό z

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

με Περιοχή Σύγκλισης

$$\left(\left(|z| > \frac{1}{3}\right) \cap \left(|z| > 1\right)\right) = \left(|z| > 1\right)$$

Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 2 \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > 1$$

Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται:

$$H(z) = 2 \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + 2 \cdot z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό  $z$  (από τα ζεύγη του μετασχηματισμού) και τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της μετατόπισης του μετασχηματισμού  $z$ , υπολογίζεται η κρουστική απόκριση του συστήματος:

$$h(n) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n) - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot u(n-1)$$

6. Να εξετάσετε ως προς την ευστάθεια το αιτιατό LTI σύστημα, που περιγράφεται από τη γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = x(n) + 7y(n-1) - 12y(n-2)$$

Λύση.

Η συνάρτηση μεταφοράς του LTI συστήματος είναι:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}} = \frac{1}{(1 - 3z^{-1}) \cdot (1 - 4z^{-1})}$$

με πόλους  $p_1 = 3$  και  $p_2 = 4$ .

Επειδή δίνεται ότι το σύστημα είναι αιτιατό, η Περιοχή Σύγκλισης είναι:  $|z| > 4$ . Προφανώς, ο μοναδιαίος κύκλος δεν ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος. Άρα το σύστημα είναι ασταθές.

## 5.5. Ασκήσεις

### 1-2-3-4-0-0

1. Γραμμική συνέλιξη μέσω μετασχηματισμού  $z$

Να υπολογίσετε τη γραμμική συνέλιξη

$$x(n) = a^n \cdot u(n) * u(n), 0 < a < 1$$

μέσω μετασχηματισμού  $z$ .

2. Αντίστροφος μετασχηματισμός  $z$

Να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμός  $z$  της συνάρτησης μεταφοράς

$$H(z) = \frac{z-1}{(z+1) \cdot z \cdot (z-2)}, |z| > 2.$$

3. Επίλυση γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες με χρήση του μονόπλευρου μετασχηματισμού  $z$

Δίνεται η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = x(n) + 3y(n-1)$$

με αρχική συνθήκη

$$y(-1) = 1.$$

Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση  $h(n)$ , δηλαδή την έξοδο του φίλτρου με είσοδο  $x(n) = \delta(n)$  και μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Να υπολογίσετε τη βηματική απόκριση  $s(n)$ , δηλαδή την έξοδο του φίλτρου με είσοδο  $x(n) = u(n)$ .

4. Επίλυση γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες με χρήση του μονόπλευρου μετασχηματισμού  $z$

Δίνεται η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{4}y(n-2)$$

με αρχικές συνθήκες

$$y(-1) = 1, y(-2) = 1.$$

Να υπολογίσετε την απόκριση  $y(n)$  του συστήματος όταν η είσοδος είναι  $x(n) = \delta(n-1)$ .

5. Δίνεται ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, |z| > 2.$$

Να δείξετε ότι το σύστημα δεν είναι ευσταθές.

Να θεωρήσετε σύστημα ανάδρασης, όπου το σύστημα του ευθέως κλάδου έχει συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  και το σύστημα κλάδου ανάδρασης έχει συνάρτηση μεταφοράς  $G(z) = C > 0$ . Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $C$ , ώστε το σύστημα ανάδρασης να είναι ευσταθές.

## 5.6. Εργαστηριακές Ασκήσεις

### Εργαστηριακή Άσκηση 10 Μετασχηματισμός $z$ και Συνάρτηση μεταφοράς 1-0-3-0-0-0

1. Μετασχηματισμός  $z$  σήματος πεπερασμένης διάρκειας

Να μελετήσετε τη συνάρτηση *filter*.

Δίνεται το σήμα πεπερασμένης διάρκειας  $x(n) = \delta(n) + 8\delta(n-1) + 9\delta(n-3)$ .

Να υπολογίσετε θεωρητικά τον μετασχηματισμό  $z$  του σήματος:

$$X(z) = 1 + 8z^{-1} + 9z^{-3}$$

Να παράγετε το σήμα  $x(n)$ .

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *filter* να παράγετε το σήμα  $y(n)$ , δηλαδή τον αντίστροφο μετασχηματισμό  $z$  της  $X(z)$ .

Να σχεδιάσετε τα σήματα  $x(n)$  και  $y(n)$  και να επιβεβαιώσετε ότι  $x(n) = y(n)$ .

2. Μετασχηματισμός  $z$  εκθετικού σήματος

Δίνεται το σήμα διάρκειας

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n)$$

Να υπολογίσετε θεωρητικά τον μετασχηματισμό  $z$  του σήματος:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *filter* να παράγετε το σήμα  $y(n)$ , δηλαδή τον αντίστροφο μετασχηματισμό  $z$  της  $X(z)$ .

Να σχεδιάσετε τα σήματα  $x(n)$  και  $y(n)$  και να επιβεβαιώσετε ότι  $x(n) = y(n)$ .

3. Ιδιότητα συνέλιξης του μετασχηματισμού  $z$

Δίνονται τα σήματα:

$$x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$$

$$x_2(n) = 2\delta(n) + 3\delta(n-1) + 4\delta(n-2) + 5\delta(n-3)$$

Να υπολογίσετε θεωρητικά τους μετασχηματισμούς  $z$  των σημάτων  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ :

$$X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

$$X_2(z) = 2 + 3z^{-1} + 4z^{-2} + 5z^{-3}$$

Να υπολογίσετε θεωρητικά τον μετασχηματισμό  $z$  της συνέλιξης των σημάτων  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ :

$$X(z) = 2 + 7z^{-1} + 16z^{-2} + 22z^{-3} + 22z^{-4} + 15z^{-5}$$

Να παράγετε τα σήματα  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ .

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *conv* να παράγετε το σήμα  $x(n)$  και να διαπιστώσετε ότι είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός  $z$  της  $X(z)$ .

Να μελετήσετε τη συνάρτηση *deconv*. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *deconv* με εισόδους τα σήματα  $x(n)$  και  $x_1(n)$  και να παράγετε το σήμα  $y(n)$ . Να διαπιστώσετε ότι  $y(n) = x_2(n)$ .

4. Διάγραμμα πόλων-μηδενικών μετασχηματισμού  $z$   
 Δίνεται ο μετασχηματισμός  $z$

$$X(z) = \frac{5}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{5}z^{-1}\right)}$$

Να υπολογίσετε θεωρητικά τα μηδενικά και τους πόλους του μετασχηματισμού  $z$ :

Να μελετήσετε τη συνάρτηση `zplane`.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `zplane` να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

5. Μετατόπιση στον χρόνο

Να γράψετε πρόγραμμα για την επιβεβαίωση της ιδιότητας της μετατόπισης στον χρόνο του μετασχηματισμού  $z$ .

Ένα σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)$  έχει μετασχηματισμό  $z$ :

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}$$

Στη συνέχεια, να υπολογίσετε την ποσότητα  $Y(z) = z^{-1} \cdot X(z)$ .

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `filter` να παράγετε το σήμα  $x(n)$ , δηλαδή τον αντίστροφο μετασχηματισμό  $z$  της  $X(z)$  και το σήμα  $y(n)$ , δηλαδή τον αντίστροφο μετασχηματισμό  $z$  της  $Y(z)$ .

Να σχεδιάσετε τα σήματα και να επιβεβαιώσετε ότι  $y(n) = x(n-1)$ .

6. Αντίστροφος μετασχηματισμός  $z$ :  $N > M$  και απλοί πόλοι

Δίνεται ο μετασχηματισμός  $z$

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{2}$$

Να υπολογίσετε θεωρητικά τον αντίστροφο μετασχηματισμό  $z$ :

$$x(n) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) - 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n)$$

Να μελετήσετε τη συνάρτηση `residuez`.

Να γράψετε πρόγραμμα για την επιβεβαίωση του παραπάνω αποτελέσματος.

Να αναλύσετε την  $X(z)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων τη χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `residuez` με κλήση:

$$b = [0, 1]; \quad a = [1, -0.75, 0.125]; \quad [R, p, C] = \text{residuez}(b, a);$$

και να εμφανίσετε τα αποτελέσματα.

Στη συνέχεια, να παράγετε το σήμα  $x(n)$ . Να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση `residuez` και τη συνάρτηση `filter` για να παράγετε το σήμα  $y(n)$  δηλαδή τον αντίστροφο μετασχηματισμό  $z$  της  $X(z)$ .

Να σχεδιάσετε τα σήματα  $x(n)$  και  $y(n)$  και να επιβεβαιώσετε ότι  $x(n) = y(n)$ .

7. Αντίστροφος μετασχηματισμός  $z$ :  $N > M$  και πολλαπλός πόλος

Δίνεται ο μετασχηματισμός  $z$

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{4}{5}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{4}{5}z^{-1}\right)^2}, |z| > \frac{4}{5}$$

Να αναλύσετε την  $X(z)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `residuez` και να εμφανίσετε τα αποτελέσματα.

8. Αντίστροφος μετασχηματισμός  $z$ :  $N = M$

Δίνεται ο μετασχηματισμός  $z$

$$X(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}}, |z| > 2$$

Να αναλύσετε την  $X(z)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *residuez* και να εμφανίσετε τα αποτελέσματα.

9. Αντίστροφος μετασχηματισμός  $z$ :  $N < M$

Δίνεται ο μετασχηματισμός  $z$

$$X(z) = \frac{z^{-2} - z^{-3}}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}}, |z| > 2.$$

Να αναλύσετε την  $X(z)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *residuez* και να εμφανίσετε τα αποτελέσματα.

10. Επίλυση γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες με χρήση του μονόπλευρου μετασχηματισμού  $z$

Να μελετήσετε τις συναρτήσεις *filter* και *filtic*.

Δίνεται η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}y(n-1)$$

με αρχική συνθήκη

$$y(-1) = \frac{1}{4}.$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *filter* να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση  $h(n)$ , δηλαδή την έξοδο του φίλτρου με είσοδο  $x(n) = \delta(n)$  και μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις *filter* και *filtic* να υπολογίσετε τη βηματική απόκριση  $s(n)$ , δηλαδή την έξοδο του φίλτρου με είσοδο  $x(n) = u(n)$ .

11. Γραμμικό αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση (LTI) φίλτρο και μονόπλευρος μετασχηματισμός  $z$

Δίνεται η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = x(n) + 3y(n-1) - 4y(n-2)$$

με αρχικές συνθήκες

$$y(-2) = 1, y(-1) = 2.$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *filter* να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση  $h(n)$ , δηλαδή την έξοδο του φίλτρου με είσοδο  $x(n) = \delta(n)$  και μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις *filter* και *filtic* να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την απόκριση του φίλτρου  $y(n)$  στην είσοδο  $x(n) = \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot u(n)$

12. Γραμμικό αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση (LTI) φίλτρο

Δίνεται η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = 2x(n) + \frac{1}{2}y(n-1)$$

με αρχική συνθήκη

$$y(-1) = 2.$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *zplane* να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

Το φίλτρο είναι ευσταθές ή ασταθές;

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *filter* να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση  $h(n)$ , δηλαδή την έξοδο του φίλτρου με είσοδο  $x(n) = \delta(n)$  και μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις *filter* και *filtic* να υπολογίσετε τη βηματική απόκριση  $s(n)$ , δηλαδή την έξοδο του φίλτρου με είσοδο  $x(n) = u(n)$ .

## 5.7. Περίληψη (ηχογραφημένη)

1-2-3-4-0-0

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη του Κεφαλαίου 5 με τον Ήχο 5.1.



## Ήχος 5.1 Περίληψη Κεφαλαίου 5.

### Μετασχηματισμός $z$ και Συνάρτηση μεταφοράς

Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής  $z$  για τις οποίες υπάρχει ο μετασχηματισμός  $z$ , δηλαδή για τις οποίες το άθροισμα του μετασχηματισμού  $z$  συγκλίνει, ονομάζεται Περιοχή Σύγκλισης (ΠΣ) (Region Of Convergence – ROC).

Αν μετασχηματισμός  $z$  μίας ακολουθίας είναι ρητή συνάρτηση του  $z$ , τότε οι ρίζες του αριθμητή καλούνται μηδενικά (zeros) και οι ρίζες του παρονομαστή καλούνται πόλοι (poles).

Η Περιοχή Σύγκλισης δεν περιλαμβάνει τους πόλους.

Ο μετασχηματισμός  $z$  της κρουστικής απόκρισης ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς (transfer function).

Η συνολική συνάρτηση μεταφοράς ενός LTI συστήματος, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά είναι το γινόμενο των συναρτήσεων μεταφοράς των επί μέρους συστημάτων.

Η συνολική συνάρτηση μεταφοράς ενός LTI συστήματος, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα είναι το άθροισμα των συναρτήσεων μεταφοράς των επί μέρους συστημάτων.

Ένα LTI σύστημα είναι ευσταθές, όταν ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

Ένα LTI σύστημα είναι αιτιατό, όταν η Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου.

Ένα LTI σύστημα είναι πραγματοποιήσιμο, όταν είναι ευσταθές και αιτιατό. Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

Η σχέση  $|z|=1$  ορίζει το Μοναδιαίο Κύκλο (Unit Circle) στο μιγαδικό επίπεδο.

### Βιβλιογραφία/Αναφορές

Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S., Wehbring R. (2011). *GNU Octave* (3rd ed.).

Hansen J. S. (2011). *GNU Octave Beginner's Guide*. Packt Publishing.

Hayes, M. H. (2000). *Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος*. Εκδόσεις Τζιόλα.

Ingle, V. K., & Proakis, J. G. (2003). *Digital Signal Processing using MATLAB*. Stamford, CT: Thomson Brooks Cole.

Leis, J. W. (2011). *Digital Signal Processing using MATLAB for students and researchers*. J. Wiley and Sons.

McClellan, J. H., Schafer, R. W., Yoder, M. A. (2006). *Θεμελιώδεις Έννοιες της Επεξεργασίας Σημάτων*. Φιλομάθεια. Μετάφραση – Επιστημονική Επιμέλεια: Ε. Ζ. Ψαράκης.

TheMathWorksInc (2005). *Signal Processing Toolbox User's Guide*.

Ασημάκης, Ν. (2008). *Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων*. Gutenberg.

Θεοδωρίδης, Σ., Μπερμπερίδης, Κ., Κοφίδης, Λ. (2003). *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων*. Εκδόσεις τυπωθήτω.

Καραγιάννης, Γ., & Μαραγκός, Π. (2010). *Βασικές Αρχές Σημάτων και Συστημάτων*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου.

Καραγιάννης, Γ., & Τζιτζιράχου, Κ. (2003). *Εισαγωγή στα Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου.

Καραμπογιάς, Σ. (2009). *Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Καραμπογιά.

Μάργαρης, Α. (2014). *Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Τζιόλα.

Σκόδρας, Α., & Αναστασόπουλος, Β. (2003). *Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων και Σημάτων*. ΕΑΠ.

## **Κριτήρια αξιολόγησης**

### **Κριτήριο αξιολόγησης 1**

**1-2-3-4-0-0**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 1 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 5.4.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 5.4** Κριτήριο αξιολόγησης 1.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

### **Κριτήριο αξιολόγησης 2**

**1-2-3-4-0-0**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 2 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 5.5.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 5.5** Κριτήριο αξιολόγησης 2.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

### **Κριτήριο αξιολόγησης 3**

**1-2-3-4-0-0**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 3 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 5.6.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 5.6** Κριτήριο αξιολόγησης 3.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

# Κεφάλαιο 6 Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου και Απόκριση συχνοτήτων

## Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται ο ορισμός του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου και παρουσιάζονται οι ιδιότητες του μετασχηματισμού. Δίνεται ο ορισμός της απόκρισης συχνοτήτων και αναλύεται η περιγραφή των χρονικά αμετάβλητων (LinearTimeInvariant – LTI) συστημάτων μέσω της απόκρισης συχνοτήτων.

## Προαπαιτούμενη γνώση

Ολοκληρώματα, Διαφορικές εξισώσεις, Κεφάλαιο 1, Κεφάλαιο 2, Κεφάλαιο 3.

## 6.1. Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου

1-2-0-0-5-6

### 6.1.1. Ορισμός μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου

Ο **μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου** (ContinuousTimeFourierTransform – CTFT) είναι ένας μετασχηματισμός, που συνδέει το πεδίο του χρόνου με το πεδίο της συχνότητας. Ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου  $X(\omega)$  μίας συνάρτησης  $x(t)$ , αν υπάρχει, είναι η αναπαράσταση της συνάρτησης συναρτήσεως μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων της μορφής  $e^{-j\omega t}$ , όπου  $\omega$  είναι η συχνότητα. Ο ευθύς (direct) μετασχηματισμός ενός σήματος από το πεδίο του χρόνου  $x(t)$  στο πεδίο της συχνότητας  $X(\omega)$  ορίζεται από ένα γενικευμένο ως ολοκλήρωμα. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός (inversetransform) από το πεδίο της συχνότητας στο πεδίο του χρόνου ορίζεται επίσης ως ολοκλήρωμα.

Ο **ευθύς** μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (ContinuousTime Fourier Transform – CTFT) μίας συνάρτησης ορίζεται από το ακόλουθο γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (6.1)$$

Ο **αντίστροφος** μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (InverseContinuousTimeFourierTransform – ICTFT) ορίζεται από το ακόλουθο γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (6.2)$$

### Υπαρξη μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου

Τα ολοκληρώματα του ευθέως και του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου δεν υπάρχουν πάντα. Επίσης είναι δυνατόν να υπάρχει μόνο το ένα από τα δύο.

Ο ευθύς μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου μίας συνάρτησης  $x(t)$  υπάρχει, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός  $L$ , τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = L < \infty \quad (6.3)$$

Αν υπάρχουν ο ευθύς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου, αποτελούν ένα μοναδικό ζεύγος και χρησιμοποιείται ο συμβολισμός:

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} X(\omega)$$

Είναι προφανές, από τον ορισμό, ότι ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου είναι μιγαδική συνάρτηση:

$$X(\omega) = X_R(\omega) + j \cdot X_I(\omega) = |X(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (6.4)$$

όπου

-  $X_R(\omega) = \text{Re}[X(\omega)]$  είναι η πραγματική συνιστώσα του  $X(\omega)$

-  $X_I(\omega) = \text{Im}[X(\omega)]$  είναι η φανταστική συνιστώσα του  $X(\omega)$



- $|X(\omega)| = \sqrt{X_R^2(\omega) + X_I^2(\omega)}$  είναι το μέτρο του  $X(\omega)$
- $\varphi(\omega) = \arg(X(\omega)) = \arctan \frac{\text{Im}(X(\omega))}{\text{Re}(X(\omega))} = \arctan \frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)}$  είναι η φάση του  $X(\omega)$

Αν η συνάρτηση  $x(t)$  είναι ένα πραγματικό σήμα συνεχούς χρόνου, τότε

- $X_R(\omega)$  είναι άρτια συνάρτηση:  $X_R(\omega) = X_R(-\omega)$
- $X_I(\omega)$  είναι περιττή συνάρτηση:  $X_I(\omega) = -X_I(-\omega)$
- $|X(\omega)|$  είναι άρτια συνάρτηση:  $|X(\omega)| = |X(-\omega)|$
- $\varphi(\omega)$  είναι περιττή συνάρτηση:  $\varphi(\omega) = \varphi(-\omega)$

Επίσης, ισχύει

$$X^*(\omega) = X(-\omega)$$

Χρήσιμη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία είναι τα βιβλία McClellan, Schafer & Yoder, 2006, Θεοδωρίδης, Μπερμπερίδης, Κοφίδης, 2003, Καραγιάννης & Μαραγκός, 2010, Καραγιάννης & Τζιτζιράχου, 2003, Καραμπογιάς, 2009, Μάργαρης, 2014, Παρασκευάς, 2014, Σκόδρας & Αναστασόπουλος, 2003, Φωτόπουλος & Βελώνη, 2008.

### 6.1.2. Υπολογισμός μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT)

Ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου μίας συνάρτησης  $x(t)$  γίνεται από το ολοκλήρωμα του ορισμού του.

Παράδειγμα 1.

Για κάθε θετικό αριθμό  $T$  ορίζεται το σήμα συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Έλεγχος ύπαρξης μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου με εφαρμογή της (6.3):

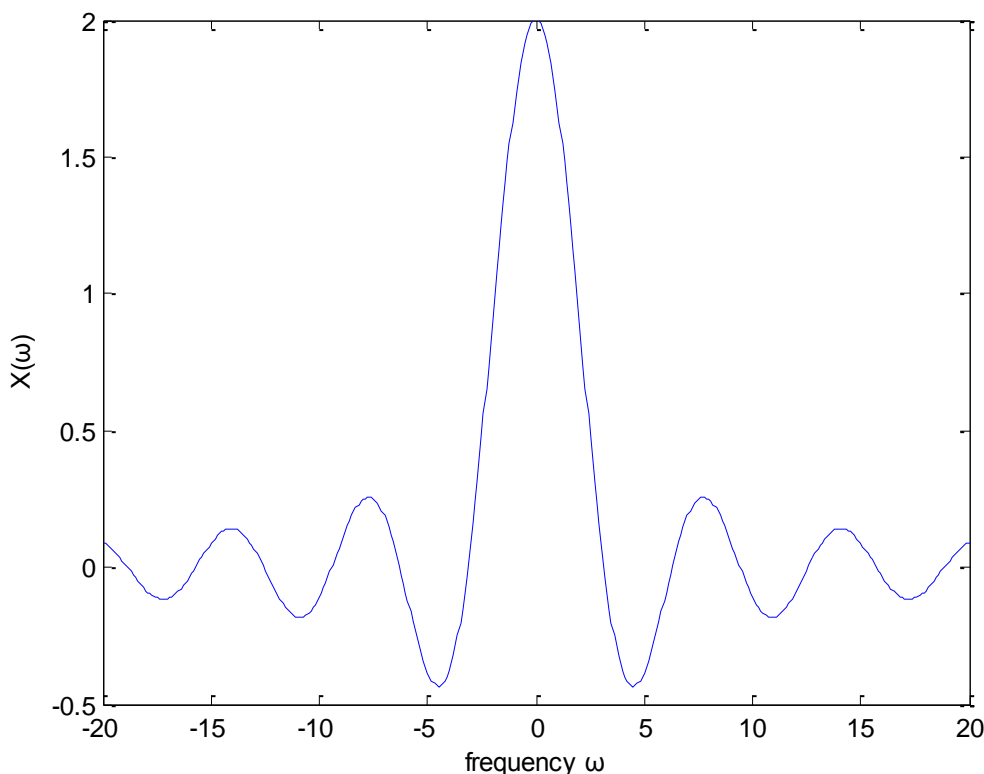
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \int_{-T/2}^{+T/2} 1 dt = [t]_{-T/2}^{+T/2} = \left(+\frac{T}{2}\right) - \left(-\frac{T}{2}\right) = T < \infty$$

Άρα, υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} \left[ e^{-j\omega t} \right]_{-T/2}^{+T/2} \\ &= -\frac{1}{j\omega} \left[ \cos(-\omega t) + j \sin(-\omega t) \right]_{-T/2}^{+T/2} = -\frac{1}{j\omega} \left[ \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) \right]_{-T/2}^{+T/2} \\ &= -\frac{1}{j\omega} \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right] - \left[ \cos\left(-\frac{\omega T}{2}\right) - j \sin\left(-\frac{\omega T}{2}\right) \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{j\omega} \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right] - \left[ \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{j\omega} \left\{ \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) - \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right\} \\ &= -\frac{1}{j\omega} \left\{ -2j \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right\} = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \end{aligned}$$

Στο Σχήμα 6.1 παρουσιάζεται ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου  $X(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega)$  του σήματος

$$\text{συνεχούς χρόνου } x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$



**Σχήμα 6.1** Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου ως πραγματική συνάρτηση.

Παράδειγμα 2.

Για κάθε θετικό αριθμό  $a$  ορίζεται το σήμα συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = e^{-at} u(t)$$

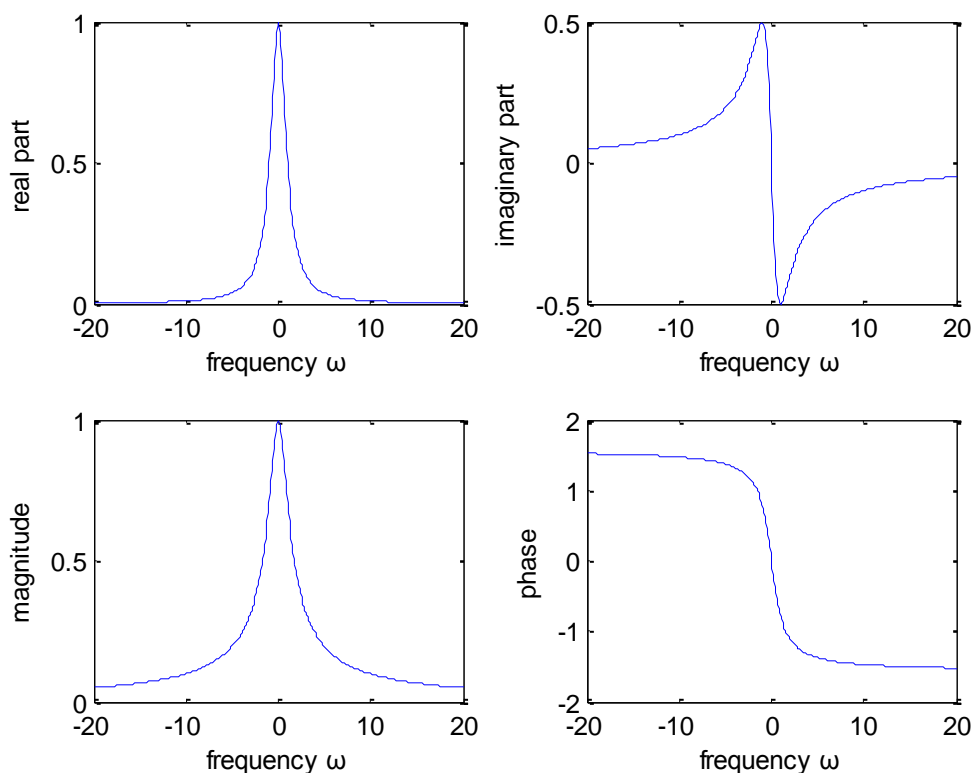
Έλεγχος ύπαρξης μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου με εφαρμογή της (6.3):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-at} u(t)| dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} dt \\ &= 0 - \frac{1}{a} [e^{-at}]_0^{+\infty} = -\frac{1}{a} [e^{-\infty} - e^0] = -\frac{1}{a} (0 - 1) = \frac{1}{a} < \infty \end{aligned}$$

Άρα, υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} \cdot u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+j\omega} [e^{-(a+j\omega)t}]_0^{+\infty} = -\frac{1}{a+j\omega} [e^{-\infty} - e^0] = -\frac{1}{a+j\omega} [0 - 1] = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

Στο Σχήμα 6.2 παρουσιάζονται η πραγματική συνιστώσα, η φανταστική συνιστώσα, το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου  $X(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$  του σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t) = e^{-t} u(t)$



Σχήμα 6.2 Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου ως μιγαδική συνάρτηση.

Παράδειγμα 3.

$$x(t) = \delta(t)$$

Χρησιμοποιώντας την (1.47):  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ , το σήμα μοναδιαίου παλμού  $x(t) = \delta(t)$  επαληθεύει την (6.3),

δηλαδή,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 < \infty.$$

Άρα, το σήμα  $x(t) = \delta(t)$  έχει μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου, που υπολογίζεται από τον ορισμό

$$(6.1) \text{ και την ιδιότητα του μοναδιαίου παλμού στην (1.46): } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0), \text{ με } f(t) = e^{-j\omega t},$$

οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \cdot \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0) = e^0 = 1.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας την (6.1) και το παραπάνω αποτέλεσμα, έχουμε:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \cdot \delta(t) dt = 1.$$

Άρα, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου του  $X(\omega) = 1$  είναι το σήμα μοναδιαίου παλμού  $x(t) = \delta(t)$ . Επομένως, από τον ορισμό (6.2) έχουμε:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

Αντιμεταθέτοντας  $t$  και  $\omega$ , παίρνουμε:

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dt$$

δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dt = 2\pi \cdot \delta(\omega).$$

Παράδειγμα 4.

$$x(t) = 1$$

Έλεγχος ύπαρξης μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου με την εφαρμογή της (6.3) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 dt = [t]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

Παρατηρούμε ότι δεν ισχύει το κριτήριο ύπαρξης του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου. Αυτό συμβαίνει γιατί το σήμα  $x(t) = 1$  είναι σήμα ισχύος. Τα σήματα ισχύος δεν έχουν πάντα μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου. Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι τα σήματα ενέργειας έχουν πάντα μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου.

Ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου του σήματος  $x(t) = 1$  υπάρχει και μπορεί να υπολογιστεί,

εφαρμόζοντας την (6.1), χρησιμοποιώντας την ισότητα  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dt = 2\pi \cdot \delta(\omega)$  από το παραπάνω Παράδειγμα 3

και την ιδιότητα 4 της αρτιότητας του μοναδιαίου παλμού,  $\delta(\omega) = \delta(-\omega)$  από την (1.52), ως ακολούθως:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(-\omega)t} dt = 2\pi \cdot \delta(-\omega) = 2\pi \cdot \delta(\omega).$$

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου του σήματος  $x(t) = 1$ , είναι αυτός με χρήση ορίων:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = \lim_{t' \rightarrow \infty} \int_{-t'}^{t'} e^{-j\omega t} dt \\ &= \lim_{t' \rightarrow \infty} \int_{-t'}^{t'} \{ \cos(-\omega t) + j \sin(-\omega t) \} dt = \lim_{t' \rightarrow \infty} \int_{-t'}^{t'} \{ \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) \} dt \\ &= \lim_{t' \rightarrow \infty} \int_{-t'}^{t'} \cos(\omega t) dt - j \lim_{t' \rightarrow \infty} \int_{-t'}^{t'} \sin(\omega t) dt = \lim_{t' \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right]_{-t'}^{t'} - j \lim_{t' \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \right]_{-t'}^{t'} \\ &= \frac{1}{\omega} \lim_{t' \rightarrow \infty} \{ \sin(\omega t') - \sin(-\omega t') \} + j \frac{1}{\omega} \lim_{t' \rightarrow \infty} \{ \cos(\omega t') - \cos(-\omega t') \} \\ &= \frac{1}{\omega} \lim_{t' \rightarrow \infty} \{ \sin(\omega t') + \sin(\omega t') \} + j \frac{1}{\omega} \lim_{t' \rightarrow \infty} \{ \cos(\omega t') - \cos(\omega t') \} \\ &= \frac{1}{\omega} \lim_{t' \rightarrow \infty} \{ 2 \cdot \sin(\omega t') \} + j \frac{1}{\omega} \lim_{t' \rightarrow \infty} \{ 0 \} = 2\pi \cdot \lim_{t' \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sin(\omega t')}{\omega\pi} \right\} + 0 = 2\pi \cdot \delta(\omega) \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Το τελευταίο όριο προκύπτει θέτοντας  $\alpha = t'$  και  $t = \omega$  στη σχέση  $\lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sin(\alpha t)}{\pi t} \right\} = \delta(t)$ , που αναφέρεται στο βιβλίο (Papoulis, 1985, σελ. 100).

### 6.1.3. Ζεύγη μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου

Στον Πίνακα 6.1 παρουσιάζονται μερικοί τυπικοί μετασχηματισμοί Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT).

Συνάρτηση συνεχούς χρόνου $x(t)$	Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) $X(\omega)$
1	$2\pi \cdot \delta(\omega)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-a \cdot t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$
$t \cdot e^{-a \cdot t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$\sin(\omega_0 \cdot t)$	$j \cdot \pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$\cos(\omega_0 \cdot t)$	$\pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

Πίνακας 6.1 Ζεύγη μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT).

### 6.1.4. Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου

Οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου είναι:

#### 6.1.4.1. Γραμμικότητα

Αν  $x_1(t) \xrightarrow{CTFT} X_1(\omega)$  και  $x_2(t) \xrightarrow{CTFT} X_2(\omega)$ , τότε

$$c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t) \xrightarrow{CTFT} c_1 \cdot X_1(\omega) + c_2 \cdot X_2(\omega) \quad (6.5)$$

για οποιεσδήποτε σταθερές  $c_1, c_2$ .

#### Απόδειξη.

Αν  $y(t) = c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου στην (6.1) έχουμε:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)] \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [c_1 \cdot x_1(t) \cdot e^{-j\omega t} + c_2 \cdot x_2(t) \cdot e^{-j\omega t}] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} c_1 \cdot x_1(t) \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} c_2 \cdot x_2(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= c_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \cdot e^{-j\omega t} dt + c_2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = c_1 \cdot X_1(\omega) + c_2 \cdot X_2(\omega) \end{aligned}$$



#### 6.1.4.2. Μετατόπιση στον χρόνο

Αν  $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ , τότε

$$x(t-t_0) \xrightarrow{CTFT} e^{-j\omega t_0} X(\omega) \quad (6.6)$$

#### Απόδειξη.

Αν  $y(t) = x(t-t_0)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου στην (6.1) έχουμε:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Θέτοντας  $\tau = t - t_0$ , έχουμε:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} \cdot X(\omega) \blacksquare$$

### 6.1.4.3. Αναδίπλωση

Αν  $x(t) \xleftrightarrow{CTFT} X(\omega)$ , τότε

$$x(-t) \xleftrightarrow{CTFT} X(-\omega) \quad (6.7)$$

#### Απόδειξη.

Αν  $y(t) = x(-t)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου στην (6.1) έχουμε:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Θέτοντας  $\tau = -t$ , έχουμε:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau) \cdot e^{-j\omega(-\tau)} (-d\tau) = - \int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau) \cdot e^{-j\omega(-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j(-\omega)\tau} d\tau = X(-\omega) \blacksquare$$

### 6.1.4.4. Μετατόπιση στη συχνότητα

Αν  $x(t) \xleftrightarrow{CTFT} X(\omega)$ , τότε

$$e^{j\omega_0 t} \cdot x(t) \xleftrightarrow{CTFT} X(\omega - \omega_0) \quad (6.8)$$

#### Απόδειξη.

Αν  $y(t) = e^{j\omega_0 t} \cdot x(t)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου στην (6.1) έχουμε:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} \cdot x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{j\omega_0 t - j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt$$

Θέτοντας  $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$ , έχουμε:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\tilde{\omega}t} dt = X(\tilde{\omega}) = X(\omega - \omega_0) \blacksquare$$

### 6.1.4.5. Συνέλιξη

Αν  $x_1(t) \xleftrightarrow{CTFT} X_1(\omega)$  και  $x_2(t) \xleftrightarrow{CTFT} X_2(\omega)$ , τότε

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{CTFT} X_1(\omega) \cdot X_2(\omega) \quad (6.9)$$

#### Απόδειξη.

Αν  $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου στην (6.1) έχουμε:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) * x_2(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) d\tau \right] \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Θέτοντας  $t - \tau = \tilde{t}$  θεωρώντας μεταβλητή  $\tau$ , αλλάζοντας τη σειρά των ολοκληρωμάτων και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στον χρόνο από την (6.6), έχουμε:

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) d\tau \right] \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{-\infty} x_1(t-\tilde{t}) \cdot x_2(\tilde{t})(-d\tilde{t}) \right] \cdot e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ - \int_{+\infty}^{-\infty} x_1(t-\tilde{t}) \cdot x_2(\tilde{t}) d\tilde{t} \right] \cdot e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tilde{t}) \cdot x_1(t-\tilde{t}) d\tilde{t} \right] \cdot e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tilde{t}) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tilde{t}) \cdot e^{-j\omega t} dt \right] d\tilde{t} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tilde{t}) \cdot \left[ e^{-j\omega \tilde{t}} \cdot X_1(\omega) \right] d\tilde{t} \\
&= X_1(\omega) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tilde{t}) \cdot e^{-j\omega \tilde{t}} d\tilde{t} \\
&= X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)
\end{aligned}$$



#### 6.1.4.6. Κλιμάκωση στον χρόνο

Αν  $x(t) \stackrel{CTFT}{\leftrightarrow} X(\omega)$ , τότε

$$x(a \cdot t) \stackrel{CTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (6.10)$$

#### Απόδειξη.

Αν  $y(t) = x(a \cdot t)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου στην (6.1) έχουμε:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(a \cdot t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Αν  $a > 0$ , τότε θέτοντας  $\tau = a \cdot t$ , έχουμε:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(a \cdot t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Αν  $a < 0$ , τότε θέτοντας  $\tau = a \cdot t$ , έχουμε:

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(a \cdot t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\
&= \frac{1}{a} \cdot \int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau) \cdot e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau \\
&= -\frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau \\
&= \frac{1}{|a|} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j(\omega/a)t} dt \\
&= \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{\omega}{a}\right)
\end{aligned}$$



Παρατηρήσεις:

α. Αν μία συνάρτηση διασταλεί στο πεδίο του χρόνου, τότε συστέλλεται στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα.

β. Αν  $a = -1$ , τότε  $x(-t) \stackrel{CTFT}{\leftrightarrow} X(-\omega)$ , δηλαδή, η (6.7) είναι ειδική περίπτωση της (6.10).

#### 6.1.4.7. Παραγωγή

Αν  $x(t) \stackrel{CTFT}{\leftrightarrow} X(\omega)$ , τότε

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \stackrel{CTFT}{\leftrightarrow} (j\omega)^k \cdot X(\omega), \text{ για κάθε φυσικό αριθμό } k \quad (6.11)$$

#### Απόδειξη.

Η απόδειξη στηρίζεται στη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής και στην κατά παράγοντες ιδιότητα των ολοκληρωμάτων.

Θεωρούμε ότι  $k = 1$  και  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ . Οπότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου στην (6.1) έχουμε:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot e^{-j\omega t} dt = x(t) \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Επειδή  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$ , και η εκθετική  $e^{-j\omega t}$  είναι φραγμένη συνάρτηση, προκύπτει  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} = 0$ .

Επομένως, από την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot e^{-j\omega t} dt = j\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = j\omega \cdot X(\omega).$$

Συνεπώς, για  $k = 1$  η (6.12) ισχύει. Θεωρούμε ότι για κάποιο τυχαίο  $\hat{k}$  ισχύει  $\frac{d^{\hat{k}} x(t)}{dt^{\hat{k}}} \stackrel{CTFT}{\leftrightarrow} (j\omega)^{\hat{k}} \cdot X(\omega)$  και

επαναλαμβάνοντας ακριβώς την ίδια διαδικασία αποδεικνύεται ότι η (6.12) ισχύει και για  $\hat{k} + 1$ , η ολοκλήρωση της απόδειξης αφήνεται ως άσκηση. Άρα, η (6.12) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό  $k$ . ■

#### 6.1.4.8. Θεώρημα Parseval (αρχή διατήρησης της ενέργειας)

Αν  $x(t) \stackrel{CTFT}{\leftrightarrow} X(\omega)$ , τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (6.12)$$

#### Απόδειξη.

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου ευθύ και αντίστροφο στην (6.1) και (6.2) και αλλάζοντας τη σειρά των ολοκληρωμάτων μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \cdot X^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right] \cdot X^*(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \left( \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega) \cdot e^{-j\omega t} d\omega \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \left( \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \right)^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot (x(t))^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \end{aligned}$$

■



Στον Πίνακα 6.2 παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT).

Ιδιότητα μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT)	Συνάρτηση συνεχούς χρόνου $x(t)$	Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) $X(\omega)$
	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Γραμμικότητα	$c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)$	$c_1 \cdot X_1(\omega) + c_2 \cdot X_2(\omega)$
Μετατόπιση στον χρόνο	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} \cdot X(\omega)$
Αναδίπλωση	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega t} \cdot x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Συνέλιξη στον χρόνο	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$
Κλιμάκωση στον χρόνο	$x(a \cdot t)$	$\frac{1}{ a } \cdot X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Παραγωγή	$\frac{d^k x(t)}{dt^k}$	$(j\omega)^k \cdot X(\omega)$
Θεώρημα Parseval (Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας)	$\int_{-\infty}^{+\infty}  x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi}  X(\omega) ^2 d\omega$	

**Πίνακας 6.2** Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT).

Μπορείτε να διερευνήσετε τον μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) με το Διαδραστικό πρόγραμμα 6.1.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 6.1** Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT).

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

### 6.1.5. Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου

Ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (Inverse Continuous Time Fourier Transform – ICTFT)** ορίζεται από ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα. Για να αποφευχθεί η χρήση του ολοκληρώματος στον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου, ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου, στηρίζεται τόσο στα ζεύγη του μετασχηματισμού, όσο και στις ιδιότητες του μετασχηματισμού.

Παράδειγμα 1.

$$X(\omega) = \cos(2\omega) - j\sin(2\omega)$$

Από την **ταυτότητα του Euler** έχουμε:

$$X(\omega) = \cos(2\omega) - j\sin(2\omega) = \cos(-2\omega) + j\sin(-2\omega) = e^{-2j\omega}$$

Άρα από τα ζεύγη του μετασχηματισμού προκύπτει:

$$x(t) = \delta(t - 2)$$

Παράδειγμα 2.

$$X(\omega) = \frac{3 + j\omega}{(2 + j\omega)^2}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου γράφεται

$$X(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega} + \frac{1}{(2 + j\omega)^2}$$

Άρα από τα ζεύγη του μετασχηματισμού και από την ιδιότητα της γραμμικότητας προκύπτει:

$$x(t) = e^{-2t} \cdot u(t) + t \cdot e^{-2t} \cdot u(t)$$

### 6.1.6. Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου σε προγραμματιστικό περιβάλλον

1-0-0-0-5-0

Χρήσιμη βιβλιογραφία για Matlab είναι το βιβλίο TheMathWorksInc., 2005. Χρήσιμη ξενόγλωσσα βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι τα βιβλία IngleandProakis, 2003 και Leis, 2011. Χρήσιμη ελληνόγλωσσα βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι το βιβλίο Παρασκευάς, 2014. Χρήσιμη βιβλιογραφία για Octave είναι τα βιβλία Eaton, Bateman, Hauberg, Wehbring, 2011 και Hansen, 2011.

Η συνάρτηση `[F]=fourier(f)` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ευθέως μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT). Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο τη συνάρτηση `f` και παράγει στην έξοδο τον μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου `F`. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) του σήματος  $x(t) = e^{-2t}$  απαιτείται η κλήση:

```
syms t; fourier(exp(-t^2)+sin(t));
```

Το αποτέλεσμα είναι:

```
pi^(1/2)/exp(w^2/4) - pi*(dirac(w - 1) - dirac(w + 1))*i
```

Η συνάρτηση `[f]=ifourier(F)` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT). Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο τον μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου `F` και παράγει στην έξοδο τη συνάρτηση `f`. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) του σήματος  $x(t) = \cos(t)$  απαιτείται η κλήση:

```
syms x t; X=fourier(cos(t));
```

και για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) απαιτείται η κλήση:

```
x=ifourier(X,t);
```

Το αποτέλεσμα είναι:

```
1/(2*exp(t*i)) + exp(t*i)/2
```

που σημαίνει

$$\frac{1}{2e^{jt}} + \frac{e^{jt}}{2} = \frac{1}{2}e^{-jt} + \frac{1}{2}e^{jt} = \frac{1}{2}(e^{-jt} + e^{jt}) = \cos(t).$$

Παρατήρηση: Οι συναρτήσεις `syms`, `fourier` και `ifourier` είναι διαθέσιμες σε Matlab και σε Octave (symbolic package).

Όταν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT), τότε είναι δυνατό να υπολογιστεί το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος, το μέτρο και η φάση. Ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) είναι συνάρτηση του  $\omega$ . Πρώτα δηλώνεται το πεδίο τιμών της μεταβλητής  $\omega$ . Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται ώστε το πεδίο τιμών της μεταβλητής  $\omega$  να είναι διάνυσμα. Μετά δίνεται ο τύπος υπολογισμού του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου. Προσοχή στη χρήση της τελείας στους τελεστές των πράξεων, ώστε οι πράξεις να γίνονται με κάθε τιμή του διανύσματος που αντιστοιχεί στη μεταβλητή  $\omega$ . Χρήσιμο είναι να υπολογίζεται το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος, το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT). Για τον υπολογισμό του πραγματικού μέρους χρησιμοποιείται η συνάρτηση `real`. Για τον υπολογισμό του φανταστικού μέρους χρησιμοποιείται η

συνάρτηση `imag`. Για τον υπολογισμό του μέτρου χρησιμοποιείται η συνάρτηση `abs`. Για τον υπολογισμό της φάσης χρησιμοποιείται η συνάρτηση `angle`. Είναι δυνατή η ταυτόχρονη σχεδίαση του πραγματικού μέρους, του φανταστικού μέρους, του μέτρου και της φάσης του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) σε ένα Σχήμα με τη χρήση της συνάρτησης `subplot`.

Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι το σήμα διακριτού χρόνου  $x(t) = e^{-t}u(t)$  έχει μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (CTFT)

$$X(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

Για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) και τη σχεδίαση του πραγματικού μέρους, του φανταστικού μέρους, του μέτρου και της φάσης του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) απαιτείται η κλήση

```
w = [-10:0.1:10];
X = 1 ./ (1 + j*w);
realX = real(X);
imagX = imag(X);
absX = abs(X);
angleX = angle(X);
figure(1);
subplot(2,2,1); plot(w, realX);
subplot(2,2,2); plot(w, imagX);
subplot(2,2,3); plot(w, absX);
subplot(2,2,4); plot(w, angleX);
```

## 6.2. Απόκριση συχνοτήτων

1-2-0-0-5-6

### 6.2.1. Ορισμός της απόκρισης συχνοτήτων

Ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT)  $H(\omega)$  της απόκρισης μοναδιαίου παλμού  $h(t)$  ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος συνεχούς χρόνου ονομάζεται **απόκριση συχνοτήτων**:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (6.13)$$

Από την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου, είναι προφανές ότι ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT)  $X(\omega)$  της εισόδου  $x(t)$  και ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT)  $Y(\omega)$  της εξόδου  $y(t) = h(t) * x(t)$  του LTI συστήματος συνδέονται με τη σχέση:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

Είναι προφανές, από τον ορισμό, ότι η απόκριση συχνοτήτων είναι μιγαδική συνάρτηση και γράφεται:

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Αν σε ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου έχουμε είσοδο το φανταστικό εκθετικό σήμα με συχνότητα  $\omega_0$   $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ , τότε η έξοδος είναι επίσης φανταστικό εκθετικό σήμα με την ίδια συχνότητα:

$$y(t) = H(\omega_0) \cdot e^{j\omega_0 t} = H(\omega_0) \cdot x(t)$$

δηλαδή το LTI σύστημα διατηρεί τη συχνότητα του σήματος εισόδου.

**Απόδειξη.**

$$\begin{aligned} y(t) = h(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{j\omega_0(t - \tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = e^{j\omega_0 t} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = e^{j\omega_0 t} \cdot H(\omega_0) \end{aligned}$$



Παράδειγμα.

Δίνεται ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με απόκριση συχνοτήτων  $H(\omega) = 1 - 3j\omega$ .

Αν στο σύστημα τεθεί είσοδος  $x(t) = e^{2jt}$  με συχνότητα  $\omega_0 = 2$ , τότε η έξοδος του συστήματος είναι  $y(t) = H(\omega_0) \cdot x(t) = (1 - 3j\omega) \cdot e^{2jt}$ , που έχει την ίδια συχνότητα με τη συχνότητα του σήματος εισόδου.

Γενικά, ένα LTI σύστημα μεταβάλλει το μέτρο και τη φάση του σήματος εισόδου, όχι όμως τη συχνότητα του σήματος εισόδου. Επομένως, λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας των LTI συστημάτων, αν στην είσοδο ενός LTI συστήματος τεθεί ένα σήμα, που αποτελείται από άθροισμα σημάτων απλών συχνοτήτων, τότε και η έξοδος του LTI συστήματος αποτελείται από άθροισμα σημάτων με ίδιες συχνότητες και με διαφορετικό πλάτος και φάση. Έτσι δικαιολογείται η ονομασία «απόκριση συχνοτήτων».

### 6.2.2. Περιγραφή LTI συστημάτων μέσω απόκρισης συχνοτήτων

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται από μία **διαφορική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές**:

$$\sum_{k=0}^M b_k \cdot \frac{d^k x(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N a_k \cdot \frac{d^k y(t)}{dt^k} \quad (6.14)$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης και αξιοποιώντας τις ιδιότητες της γραμμικότητας και παραγωγίσης του μετασχηματισμού, έχουμε:

$$\sum_{k=0}^M b_k \cdot (j\omega)^k \cdot X(\omega) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot (j\omega)^k \cdot Y(\omega) \Rightarrow X(\omega) \cdot \sum_{k=0}^M b_k \cdot (j\omega)^k = Y(\omega) \cdot \sum_{k=0}^N a_k \cdot (j\omega)^k$$

Αλλά

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Οπότε

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot (j\omega)^k} \quad (6.15)$$

Παρατηρούμε ότι η απόκριση συχνοτήτων εξαρτάται από τους συντελεστές του LTI συστήματος συνεχούς χρόνου. Επομένως, οι σταθεροί συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης αρκούν για να ορίσουν την απόκριση συχνοτήτων. Έτσι, η απόκριση συχνοτήτων αρκεί για να περιγράψει ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου.

### Επίλυση διαφορικής εξίσωσης με μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT)

Παράδειγμα.

Σε ένα RLC κύκλωμα υπάρχει μία αντίσταση  $R$ , ένα πηνίο  $L$  και ένας πυκνωτής  $C$  σε σειρά. Το κύκλωμα έχει τάση  $v(t)$  και ρεύμα  $i(t)$ . Τότε το κύκλωμα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$v(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dv(t)}{dt} = R \cdot \frac{di(t)}{dt} + L \cdot \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης έχουμε:

$$(j\omega) \cdot V(\omega) = R \cdot (j\omega) \cdot I(\omega) + L \cdot (j\omega)^2 \cdot I(\omega) + \frac{1}{C} \cdot I(\omega) = \left[ R \cdot (j\omega) + L \cdot (j\omega)^2 + \frac{1}{C} \right] \cdot I(\omega)$$

Επομένως, η απόκριση συχνοτήτων του κυκλώματος είναι:

$$H(\omega) = \frac{I(\omega)}{V(\omega)} = \frac{j\omega}{R \cdot (j\omega) + L \cdot (j\omega)^2 + \frac{1}{C}} = \frac{1}{R + j\omega \cdot L + \frac{1}{j\omega \cdot C}}$$

### 6.2.3. Σύνδεση συστημάτων σε σειρά

Ένα LTI σύστημα με απόκριση συχνοτήτων  $H_1(\omega)$  συνδέεται σε σειρά με ένα LTI σύστημα με απόκριση συχνοτήτων  $H_2(\omega)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.3. Το πρώτο σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$  με CTFT  $X(\omega)$  και έξοδο  $w(n)$  με CTFT  $W(\omega)$ . Το δεύτερο σύστημα έχει είσοδο, την έξοδο  $w(n)$  του πρώτου συστήματος με CTFT  $W(\omega)$  και έξοδο  $y(n)$  με CTFT  $Y(\omega)$ .

Η σύνδεση σε σειρά των δύο συστημάτων είναι ισοδύναμη με ένα LTI σύστημα με απόκριση συχνοτήτων  $H(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$  (6.16)

#### Απόδειξη.

Για τα δύο συστήματα, που είναι συνδεδεμένα σε σειρά, ισχύει:

$$Y(\omega) = H_2(\omega) \cdot W(\omega)$$

$$W(\omega) = H_1(\omega) \cdot X(\omega)$$

οπότε

$$Y(\omega) = H_2(\omega) \cdot W(\omega) = H_2(\omega) \cdot [H_1(\omega) \cdot X(\omega)] = [H_2(\omega) \cdot H_1(\omega)] \cdot X(\omega)$$

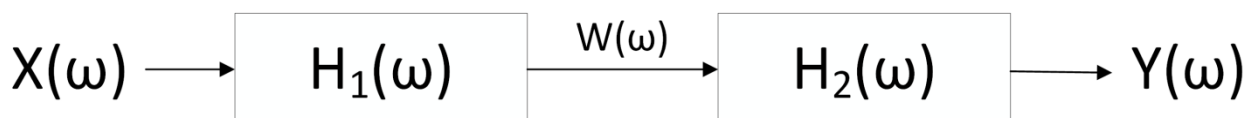
επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό.

Όμως, η έξοδος γράφεται:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

Επομένως,

$$H(\omega) = H_2(\omega) \cdot H_1(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$$



Σχήμα 6.3 Σύνδεση συστημάτων σε σειρά.

Η συνολική απόκριση συχνοτήτων ενός LTI συστήματος συνεχούς χρόνου, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα **σε σειρά**, είναι το **γινόμενο** των αποκρίσεων συχνοτήτων επί μέρους συστημάτων.

### 6.2.4. Σύνδεση συστημάτων παράλληλα

Ένα LTI σύστημα με απόκριση συχνοτήτων  $H_1(\omega)$  συνδέεται παράλληλα με ένα LTI σύστημα με απόκριση συχνοτήτων  $H_2(\omega)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.4. Το πρώτο σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$  με CTFT  $X(\omega)$  και έξοδο  $w(n)$  με CTFT  $W(\omega)$ . Το δεύτερο σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$  με CTFT  $X(\omega)$  και έξοδο  $v(n)$  με CTFT  $V(\omega)$ . Οι έξοδοι των δύο συστημάτων αθροίζονται και δίνουν τη συνολική έξοδο  $y(n)$  με CTFT  $Y(\omega)$ .

Η παράλληλη σύνδεση των δύο συστημάτων είναι ισοδύναμη με ένα LTI σύστημα με απόκριση συχνοτήτων

$$H(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega)$$

(6.17)

**Απόδειξη.**

Για τα δύο συστήματα που είναι συνδεδεμένα παράλληλα ισχύει:

$$V(\omega) = H_2(\omega) \cdot X(\omega)$$

$$W(\omega) = H_1(\omega) \cdot X(\omega)$$

οπότε

$$Y(\omega) = V(\omega) + W(\omega) = H_2(\omega) \cdot X(\omega) + H_1(\omega) \cdot X(\omega) = [H_2(\omega) + H_1(\omega)] \cdot X(\omega),$$

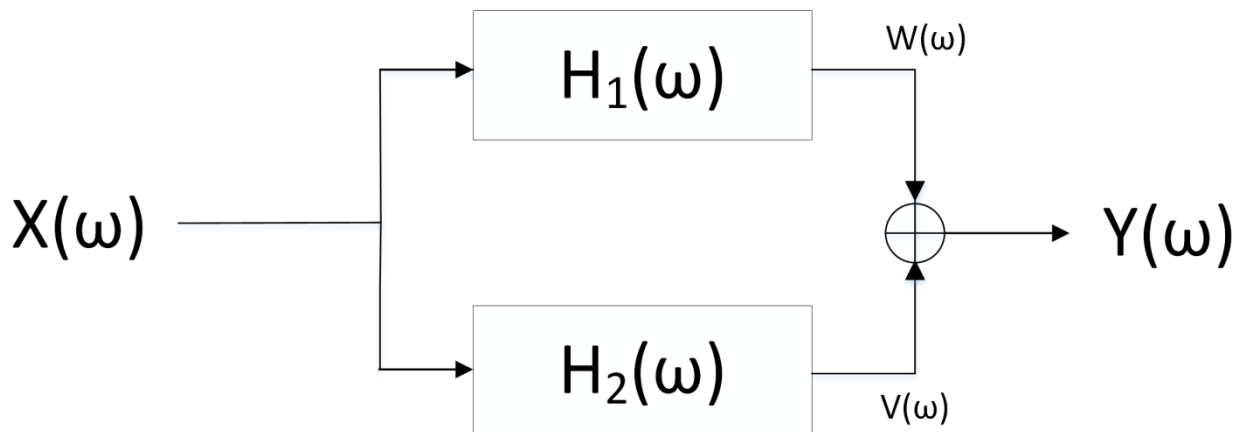
επειδή ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα.

Όμως, η έξοδος γράφεται:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

Επομένως,

$$H(\omega) = H_2(\omega) + H_1(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega)$$



Σχήμα 6.4 Σύνδεση συστημάτων παράλληλα.

Η συνολική απόκριση συχνοτήτων ενός LTI συστήματος συνεχούς χρόνου, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα **παράλληλα**, είναι το **άθροισμα** των αποκρίσεων συχνοτήτων επί μέρους συστημάτων.

### 6.3. Λυμένες Ασκήσεις

1-2-0-0-5-6

1. Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT) του σήματος συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & 0 \leq |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Λύση.

Έλεγχος ύπαρξης μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου:

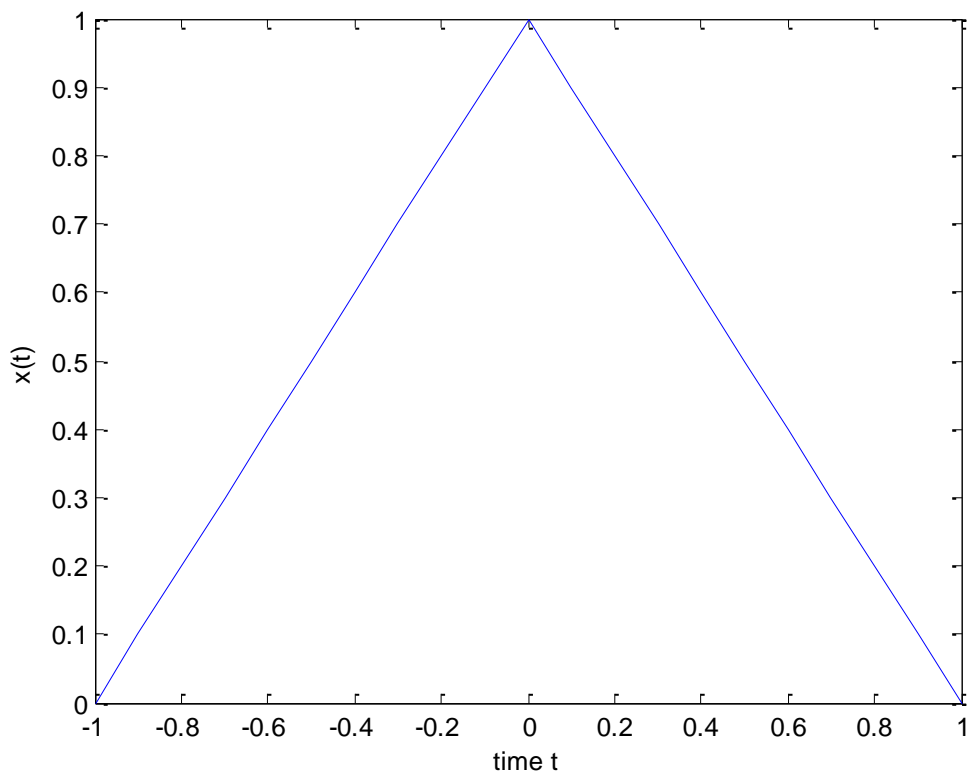
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt &= \int_{-1}^{+1} |1-|t|| dt = \int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^1 (1-t) dt \\
&= \left[ t + \frac{1}{2} \cdot t^2 \right]_{-1}^0 + \left[ t - \frac{1}{2} \cdot t^2 \right]_0^1 \\
&= \left[ \left( 0 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 \right) - \left( -1 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 \right) \right] + \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right) - \left( 0 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \right) \right] \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 < \infty
\end{aligned}$$

Άρα, υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου.

Παρατήρηση

Στο Σχήμα 6.5 φαίνεται το τριγωνικό σήμα  $x(t) = 1 - |t|$ ,  $0 \leq |t| \leq 1$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι το ολοκλήρωμα

$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$  είναι το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζεται από το σήμα και τον άξονα του χρόνου. Το εμβαδόν είναι προφανώς ίσο με 1.



Σχήμα 6.5 Τριγωνικό σήμα συνεχούς χρόνου.

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^{+1} (1-|t|) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^0 (1+t) \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^1 (1-t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-1}^0 e^{-j\omega t} dt + \int_{-1}^0 t \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^1 e^{-j\omega t} dt - \int_0^1 t \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^0 e^{-j\omega t} dt + \int_0^1 e^{-j\omega t} dt + \int_{-1}^0 t \cdot e^{-j\omega t} dt - \int_0^1 t \cdot e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-1}^1 e^{-j\omega t} dt + \int_{-1}^0 t \cdot e^{-j\omega t} dt - \int_0^1 t \cdot e^{-j\omega t} dt
\end{aligned}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 e^{-j\omega t} dt &= \left[ -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right]_{-1}^1 = \left[ -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega} \right] - \left[ -\frac{1}{j\omega} e^{j\omega} \right] = -\frac{1}{j\omega} [e^{-j\omega} - e^{j\omega}] \\ &= -\frac{1}{j\omega} [(\cos(-\omega) + j \sin(-\omega)) - (\cos \omega + j \sin \omega)] \\ &= -\frac{1}{j\omega} [\cos \omega - j \sin \omega - \cos \omega - j \sin \omega] = -\frac{1}{j\omega} [-2j \sin \omega] = \frac{2}{\omega} \sin \omega\end{aligned}$$

Επίσης, έχουμε:

$$\begin{aligned}\int t \cdot e^{-j\omega t} dt &= \int t \cdot \left( -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right)' dt = t \left( -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right) - \int (t)' \cdot \left( -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right) dt = -\frac{1}{j\omega} \cdot t \cdot e^{-j\omega t} - \int -\frac{1}{j\omega} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{j\omega} \cdot t \cdot e^{-j\omega t} + \frac{1}{j\omega} \cdot \int e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} \cdot t \cdot e^{-j\omega t} + \frac{1}{j\omega} \cdot \left( -\frac{1}{j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \right) = -\frac{1}{j\omega} \cdot t \cdot e^{-j\omega t} + \frac{1}{\omega^2} \cdot e^{-j\omega t}\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 t \cdot e^{-j\omega t} dt &= \left[ -\frac{1}{j\omega} \cdot t \cdot e^{-j\omega t} + \frac{1}{\omega^2} \cdot e^{-j\omega t} \right]_{-1}^0 = \left[ 0 + \frac{1}{\omega^2} \right] - \left[ \frac{1}{j\omega} \cdot e^{j\omega} + \frac{1}{\omega^2} \cdot e^{j\omega} \right] \\ &= \frac{1}{\omega^2} - \left[ \frac{1}{j\omega} \cdot (\cos \omega + j \cdot \sin \omega) + \frac{1}{\omega^2} \cdot (\cos \omega + j \cdot \sin \omega) \right] \\ &= \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{j\omega} \cdot \cos \omega - \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega - \frac{1}{\omega^2} \cdot \cos \omega - \frac{1}{\omega^2} \cdot j \cdot \sin \omega\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_0^1 t \cdot e^{-j\omega t} dt &= \left[ -\frac{1}{j\omega} \cdot t \cdot e^{-j\omega t} + \frac{1}{\omega^2} \cdot e^{-j\omega t} \right]_0^1 = \left[ -\frac{1}{j\omega} \cdot e^{-j\omega} + \frac{1}{\omega^2} \cdot e^{-j\omega} \right] - \left[ 0 + \frac{1}{\omega^2} \right] \\ &= \left[ -\frac{1}{j\omega} \cdot (\cos(-\omega) + j \cdot \sin(-\omega)) + \frac{1}{\omega^2} \cdot (\cos(-\omega) + j \cdot \sin(-\omega)) \right] - \frac{1}{\omega^2} \\ &= \left[ -\frac{1}{j\omega} \cdot (\cos \omega - j \cdot \sin \omega) + \frac{1}{\omega^2} \cdot (\cos \omega - j \cdot \sin \omega) \right] - \frac{1}{\omega^2} \\ &= -\frac{1}{j\omega} \cdot \cos \omega + \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega + \frac{1}{\omega^2} \cdot \cos \omega - \frac{1}{\omega^2} \cdot j \cdot \sin \omega - \frac{1}{\omega^2}\end{aligned}$$

Άρα



$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-1}^1 e^{-j\omega t} dt + \int_{-1}^0 t \cdot e^{-j\omega t} dt - \int_0^1 t \cdot e^{-j\omega t} dt \\
&= \frac{2}{\omega} \cdot \sin \omega + \left[ \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{j\omega} \cdot \cos \omega - \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega - \frac{1}{\omega^2} \cdot \cos \omega - \frac{1}{\omega^2} \cdot j \cdot \sin \omega \right] \\
&\quad - \left[ -\frac{1}{j\omega} \cdot \cos \omega + \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega + \frac{1}{\omega^2} \cdot \cos \omega - \frac{1}{\omega^2} \cdot j \cdot \sin \omega - \frac{1}{\omega^2} \right] \\
&= \frac{2}{\omega} \cdot \sin \omega + 2 \cdot \left[ \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega - \frac{1}{\omega^2} \cdot \cos \omega \right] \\
&= \frac{2}{\omega} \cdot \sin \omega + \frac{2}{\omega^2} - \frac{2}{\omega} \cdot \sin \omega - \frac{2}{\omega^2} \cdot \cos \omega \\
&= \frac{2}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2} \cdot \cos \omega = \frac{2}{\omega^2} \cdot (1 - \cos \omega)
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$X(\omega) = \frac{2}{\omega^2} \cdot (1 - \cos \omega)$$

Παρατηρήσεις.

α.  $X(\omega) \geq 0$

Πράγματι:

$$-1 \leq \cos \omega \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos \omega \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \cos \omega \leq 2$$

δηλαδή

$$0 \leq 1 - \cos \omega \leq 2.$$

Επειδή  $\frac{2}{\omega^2} > 0$ , έχουμε:  $X(\omega) = \frac{2}{\omega^2} \cdot (1 - \cos \omega) \geq 0$

β.  $X(\omega) = 0$ , όταν  $\omega = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Πράγματι:

$$X(\omega) = \frac{2}{\omega^2} \cdot (1 - \cos \omega) = 0 \Rightarrow 1 - \cos \omega = 0 \Rightarrow \cos \omega = 1.$$

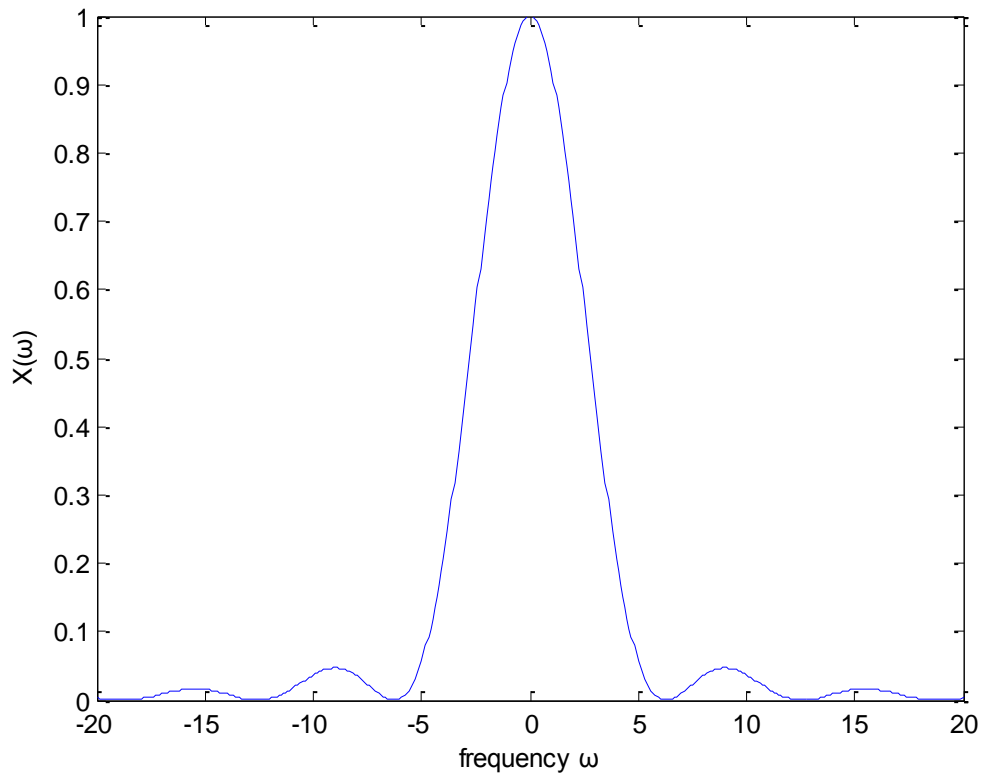
Η τελευταία τριγωνομετρική εξίσωση έχει λύση  $\omega = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

γ.  $X(\omega=0) = 1$

Πράγματι:

$$\begin{aligned}
X(\omega=0) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} X(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\omega^2} \cdot (1 - \cos \omega) \right) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{2 - 2 \cdot \cos \omega}{\omega^2} \right) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{(2 - 2 \cdot \cos \omega)'}{(\omega^2)'} \right) \\
&= \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{(0 - 2 \cdot (-\sin \omega))}{(2 \cdot \omega)} \right) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{2 \cdot \sin \omega}{2 \cdot \omega} \right) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \omega}{\omega} \right) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{(\sin \omega)'}{(\omega)'} \right) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{\cos \omega}{1} \right) \\
&= \lim_{\omega \rightarrow 0} (\cos \omega) = \cos 0 = 1
\end{aligned}$$

Στο Σχήμα 6.6 φαίνεται ο μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT) του τριγωνικού σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t) = 1 - |t|$ ,  $0 \leq |t| \leq 1$ . Είναι φανερό ότι ισχύουν οι παραπάνω παρατηρήσεις.



**Σχήμα 6.60** μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT) του τριγωνικού σήματος συνεχούς χρόνου.

2. Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT) του σήματος συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq |t| \leq \frac{c}{2} \\ 0, |t| > \frac{c}{2} \end{cases}$$

Έλεγχος ύπαρξης μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \int_{-c/2}^{+c/2} 1 dt = \frac{1}{2} [t]_{-c/2}^{c/2} = \left[ \left( \frac{c}{2} \right) - \left( \frac{-c}{2} \right) \right] = c < \infty$$

Άρα, υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-c/2}^{c/2} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} \cdot [e^{-j\omega t}]_{-c/2}^{c/2} = -\frac{1}{j\omega} \cdot [e^{-j\omega c/2} - e^{j\omega c/2}] \\ &= \frac{1}{j\omega} \cdot [e^{j\omega c/2} - e^{-j\omega c/2}] = \frac{1}{j\omega} \cdot \left[ \left\{ \cos\left(\frac{\omega c}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\omega c}{2}\right) \right\} - \left\{ \cos\left(-\frac{\omega c}{2}\right) + j \cdot \sin\left(-\frac{\omega c}{2}\right) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{j\omega} \cdot \left[ \left\{ \cos\left(\frac{\omega c}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\omega c}{2}\right) \right\} - \left\{ \cos\left(\frac{\omega c}{2}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{\omega c}{2}\right) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{j\omega} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\omega c}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\omega c}{2}\right) - \cos\left(\frac{\omega c}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\omega c}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{j\omega} \cdot \left[ 2 \cdot j \cdot \sin\left(\frac{\omega c}{2}\right) \right] = \frac{2}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega c}{2}\right) = c \cdot \frac{\sin(\omega c / 2)}{\omega c / 2} \end{aligned}$$

3. Αν το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$  έχει μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT)  $X(\omega)$  και το σήμα συνεχούς χρόνου  $y(t)$  έχει μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT)  $Y(\omega)$ , να αποδείξετε την εξίσωση του Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot Y(\omega) dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot X(\omega) dt$$

Λύση.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot Y(\omega) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot X(\omega) dt$$

4. Αν σε ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με απόκριση συχνοτήτων  $H(\omega)$  τεθεί είσοδος  $x(t) = c \cdot e^{j(\omega_0 t + \phi)}$ , τότε η έξοδος του συστήματος είναι  $y(t) = H(\omega_0) \cdot x(t)$ .

Λύση.

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot c \cdot e^{j(\omega_0(t - \tau) + \phi)} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot c \cdot e^{j(\omega_0 t + \phi)} \cdot e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \\ &= c \cdot e^{j(\omega_0 t + \phi)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = c \cdot e^{j(\omega_0 t + \phi)} \cdot H(\omega_0) \end{aligned}$$

5. Δίνεται η διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει ένα LTI φίλτρο συνεχούς χρόνου:  
 $y''(t) + 5y'(t) = x'(t) + 2x(t)$

Να υπολογίσετε την απόκριση συχνοτήτων.

Λύση.

Παίρνοντας μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης έχουμε:

$$(j\omega)^2 \cdot Y(\omega) + 5 \cdot Y(\omega) = (j\omega) \cdot X(\omega) + 2 \cdot X(\omega) \Rightarrow [(j\omega)^2 + 5] \cdot Y(\omega) = [(j\omega) + 2] \cdot X(\omega)$$

Αλλά

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

οπότε

$$H(\omega) = \frac{(j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 5} = \frac{2 + j\omega}{5 - \omega^2}$$

6. Σε ένα RC κύκλωμα υπάρχει μία αντίσταση  $R$  και ένας πυκνωτής  $C$  σε σειρά. Η τάση εισόδου του κυκλώματος είναι  $vin(t)$  και η τάση εξόδου του κυκλώματος στα άκρα του πυκνωτή είναι  $vout(t)$ .

Να βρείτε τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα.

Να υπολογίσετε την απόκριση συχνοτήτων του κυκλώματος.

Να υπολογίσετε την απόκριση μοναδιαίου παλμού του κυκλώματος.

Λύση.

$$vin(t) = R \cdot i(t) + vout(t)$$

όπου  $i(t)$  είναι το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.

Επίσης,

$$vout(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

οπότε

$$C \cdot \frac{dvout(t)}{dt} = i(t)$$

Άρα, παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$R \cdot C \cdot \frac{dv_{out}(t)}{dt} + v_{out}(t) = v_{in}(t)$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης έχουμε:

$$R \cdot C \cdot (j\omega) \cdot V_{out}(\omega) + V_{out}(\omega) = V_{in}(\omega)$$

ή

$$[R \cdot C \cdot (j\omega) + 1] \cdot V_{out}(\omega) = V_{in}(\omega)$$

Επομένως, η απόκριση συχνοτήτων του κυκλώματος είναι:

$$H(\omega) = \frac{V_{out}(\omega)}{V_{in}(\omega)} = \frac{1}{R \cdot C \cdot (j\omega) + 1}$$

Η απόκριση συχνοτήτων του κυκλώματος γράφεται:

$$H(\omega) = \frac{1}{R \cdot C \cdot (j\omega) + 1} = \frac{(1/R \cdot C)}{(j\omega) + (1/R \cdot C)} = \frac{1}{R \cdot C} \frac{1}{(1/R \cdot C) + j\omega}$$

Επομένως, η απόκριση μοναδιαίου παλμού του κυκλώματος είναι:

$$h(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-t/R \cdot C} \cdot u(t)$$

## 6.4. Ασκήσεις

### 1-2-0-0-5-6

1. Αν το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$  έχει μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT)  $X(\omega)$ , τότε να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT) του σήματος συνεχούς χρόνου  $x(-t)$ .

2. Αν το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$  έχει μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT)  $X(\omega)$ , τότε να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT) του σήματος συνεχούς χρόνου:  
 $y(t) = x(t) \cdot \cos(4 \cdot t)$

3. Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT) του σήματος συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{c}, & |t| < c \\ 0, & |t| > c \end{cases}$$

4. Αν το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$  έχει μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT)  $X(\omega)$  και το σήμα συνεχούς χρόνου  $y(t)$  έχει μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT)  $Y(\omega)$ , τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \cdot Y(-t) dt$$

5. Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT) του σήματος συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-c \cdot t}, & t > 0 \\ e^{c \cdot t}, & t < 0 \end{cases}$$

με  $c > 0$ .

6. Αν σε ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με απόκριση συχνοτήτων  $H(\omega)$  τεθεί είσοδος  $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$ , τότε η έξοδος του συστήματος είναι  $y(t) = H(\omega_0) \cdot x(t)$ .

7. Δίνεται η διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI φίλτρο συνεχούς χρόνου:

$$y''(t) + 2 \cdot y(t) = x'(t) + x(t)$$

Να υπολογίσετε την απόκριση συχνοτήτων.

Να υπολογίσετε το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος, το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνοτήτων.

8. Δίνεται η διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI φίλτρο συνεχούς χρόνου:

$$y'(t) + y(t) = x''(t) + x(t)$$

Να υπολογίσετε την απόκριση συχνοτήτων.

Να υπολογίσετε την απόκριση μοναδιαίου παλμού.

## 6.5. Εργαστηριακές Ασκήσεις

### Εργαστηριακή Άσκηση 11 Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου και Απόκριση συχνοτήτων 1-0-0-5-0

1. Υπολογισμός μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου

Να μελετήσετε τη συνάρτηση fourier.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση fourier να υπολογίσετε τους μετασχηματισμούς Fourier συνεχούς χρόνου των σημάτων

$$x_1(t) = \exp(-t^2)$$

$$x_2(t) = \exp(-(-t)^2)$$

$$x_3(t) = \exp(-(t-1)^2)$$

$$x_4(t) = \exp(-(2 \cdot t)^2)$$

και να εμφανίσετε τα αποτελέσματα.

2. Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου

Να μελετήσετε τη συνάρτηση ifourier.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση fourier να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου του σήματος

$$x(t) = \cos(t)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ifourier να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου του σήματος.

Να εμφανίσετε τα αποτελέσματα.

3. Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου: πραγματική συνάρτηση

Δίνεται το σήμα συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 4 \\ 0, & |t| > 4 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τον μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT)  $X(\omega)$ .

4. Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου: μιγαδική συνάρτηση

Δίνεται το σήμα συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = e^{-4t} \cdot u(t)$$

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τον μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT)  $X(\omega)$ .

5. LTI σύστημα συνεχούς χρόνου

Αν σε ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με απόκριση συχνοτήτων  $H(\omega)$  τεθεί είσοδος  $x(t) = c \cdot e^{j\omega_0 t}$ ,

τότε η έξοδος του συστήματος είναι  $y(t) = H(\omega_0) \cdot x(t)$ .

Δίνεται ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με απόκριση συχνοτήτων  $H(\omega) = 1 - 3 \cdot j\omega$ .

Αν στο σύστημα τεθεί είσοδος  $x(t) = e^{2-jt}$  με συχνότητα  $\omega_0 = 2$ , τότε η έξοδος του συστήματος είναι  $y(t) = H(\omega_0) \cdot x(t) = (1-6j) \cdot e^{2-jt}$ , που έχει την ίδια συχνότητα με τη συχνότητα του σήματος εισόδου.

Να σχεδιάσετε την απόκριση συχνοτήτων  $H(\omega) = 1-3 \cdot j\omega$ .

Να σχεδιάσετε τα σήματα εισόδου και εξόδου.

#### 6. LTI σύστημα συνεχούς χρόνου

Αν σε ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με απόκριση συχνοτήτων  $H(\omega)$  τεθεί είσοδος  $x(t) = c \cdot e^{j(\omega_0 t + \phi)}$ , τότε η έξοδος του συστήματος είναι  $y(t) = H(\omega_0) \cdot x(t)$ .

Δίνεται ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με απόκριση συχνοτήτων  $H(\omega) = 1-3 \cdot j\omega$ .

Η είσοδος είναι  $x(t) = 4 \cdot e^{j(2t + \frac{\pi}{2})}$ .

Να σχεδιάσετε τα σήματα εισόδου και εξόδου.

#### 7. LTI σύστημα συνεχούς χρόνου

Αν σε ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με απόκριση συχνοτήτων  $H(\omega)$  τεθεί είσοδος  $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi)$ , τότε η έξοδος του συστήματος είναι  $y(t) = H(\omega_0) \cdot x(t)$ .

Δίνεται ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με απόκριση συχνοτήτων  $H(\omega) = 1-3 \cdot j\omega$ .

Η είσοδος είναι  $x(t) = 2 \cdot \cos(2 \cdot t + \frac{\pi}{2})$ .

Να σχεδιάσετε τα σήματα εισόδου και εξόδου.

#### 8. LTI σύστημα συνεχούς χρόνου

Δίνεται ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με απόκριση συχνοτήτων  $H(\omega) = 1-3 \cdot j\omega$ .

Η είσοδος είναι  $x(t) = 2 \cdot \cos\left(3 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) + 4 \cdot e^{j(2t + \frac{\pi}{2})}$ .

Να σχεδιάσετε τα σήματα εισόδου και εξόδου.

### 6.6. Περίληψη (ηχογραφημένη)

1-2-0-0-5-6

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη του Κεφαλαίου 6 με τον Ήχο 6.1.



#### Ήχος 6.1 Περίληψη Κεφαλαίου 6.

#### Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου και Απόκριση συχνοτήτων

Ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (ContinuousTimeFourierTransform – CTFT) είναι ένας μετασχηματισμός, που συνδέει το πεδίο του χρόνου με το πεδίο της συχνότητας. Ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου  $X(\omega)$  μίας συνάρτησης  $x(t)$ , αν υπάρχει, είναι η αναπαράσταση της συνάρτησης συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων της μορφής  $e^{-j\omega t}$ , όπου  $\omega$  είναι η συχνότητα.

Ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) της απόκρισης μοναδιαίου παλμού ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος συνεχούς χρόνου ονομάζεται απόκριση συχνοτήτων.

Η απόκριση συχνοτήτων εξαρτάται από τους συντελεστές του LTI συστήματος συνεχούς χρόνου. Επομένως, οι σταθεροί συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης αρκούν για να ορίσουν την απόκριση συχνοτήτων. Έτσι, η απόκριση συχνοτήτων αρκεί για να περιγράψει ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου.

Η συνολική απόκριση συχνοτήτων ενός LTI συστήματος συνεχούς χρόνου, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά, είναι το γινόμενο των αποκρίσεων συχνοτήτων των επί μέρους συστημάτων.

Η συνολική απόκριση συχνοτήτων ενός LTI συστήματος συνεχούς χρόνου, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα, είναι το άθροισμα των αποκρίσεων συχνοτήτων των επί μέρους συστημάτων.

### **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S., Wehbring R. (2011). *GNU Octave* (3rd ed.).

Hansen J. S. (2011). *GNU Octave Beginner's Guide*. Packt Publishing.

Ingle, V. K., & Proakis, J. G. (2003). *Digital Signal Processing using MATLAB*. Stamford, CT: Thomson Brooks Cole.

Leis, J. W. (2011). *Digital Signal Processing using MATLAB for students and researchers*. J. Wiley and Sons.

McClellan, J. H., Schafer, R. W., Yoder, M. A. (2006). *Θεμελιώδεις Έννοιες της Επεξεργασίας Σημάτων*. Φιλομάθεια. Μετάφραση – Επιστημονική Επιμέλεια: Ε. Ζ. Ψαράκης.

Papoulis A. (1985). *Signal Analysis*. McGraw Hill.

The MathWorks Inc (2005). *Signal Processing Toolbox User's Guide*.

Θεοδωρίδης, Σ., Μπερμπερίδης, Κ., Κοφίδης, Λ. (2003). *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων*. Εκδόσεις τυπωθήτω.

Καραγιάννης, Γ., & Μαραγκός, Π. (2010). *Βασικές Αρχές Σημάτων και Συστημάτων*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου.

Καραγιάννης, Γ., & Τζίτζιράχου, Κ. (2003). *Εισαγωγή στα Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου.

Καραμπογιάς, Σ. (2009). *Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Καραμπογιά.

Μάργαρης, Α. (2014). *Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Τζιόλα.

Παρασκευάς, Μ. (2014). *Σήματα και Συστήματα Συνεχούς Χρόνου με Matlab*. Εκδόσεις Τζιόλα.

Σκόδρας, Α., & Αναστασόπουλος, Β. (2003). *Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων και Σημάτων*. ΕΑΠ.

Φωτόπουλος, Π., & Βελώνη, Α. (2008). *Σήματα και Συστήματα*. Σύγχρονη Εκδοτική.

### **Κριτήρια αξιολόγησης**

#### **Κριτήριο αξιολόγησης 1**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 1 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 6.2.



#### **Διαδραστικό πρόγραμμα 6.2 Κριτήριο αξιολόγησης 1.**

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

#### **Κριτήριο αξιολόγησης 2**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 2 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 6.3.



#### **Διαδραστικό πρόγραμμα 6.3 Κριτήριο αξιολόγησης 2.**

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.



# Κεφάλαιο 7 Μετασχηματισμός Laplace και Συνάρτηση μεταφοράς

## Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται ο ορισμός του μετασχηματισμού Laplace και παρουσιάζονται οι ιδιότητες του μετασχηματισμού. Δίνεται ο ορισμός της συνάρτησης μεταφοράς και αναλύεται η περιγραφή των χρονικά αμετάβλητων (Linear Time Invariant – LTI) συστημάτων μέσω της συνάρτησης μεταφοράς.

## Προαπαιτούμενη γνώση

Ολοκληρώματα, Διαφορικές εξισώσεις, Κεφάλαιο 1, Κεφάλαιο 2, Κεφάλαιο 3.

## 7.1. Μετασχηματισμός Laplace

1-2-0-0-5-6

### 7.1.1. Ορισμός μετασχηματισμού Laplace

Ο ευθύς αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace (Laplace transform) μίας συνάρτησης  $x(t)$  ορίζεται από το ακόλουθο γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \quad (7.1)$$

και είναι μιγαδική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής  $s = \sigma + j\omega$ .

Ο μετασχηματισμός Laplace μίας συνάρτησης είναι, σύμφωνα με τον ορισμό, ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα, το οποίο μπορεί να συγκλίνει για κάποιες τιμές της μιγαδικής μεταβλητής  $s$  και μπορεί να μην συγκλίνει για κάποιες άλλες τιμές της μιγαδικής μεταβλητής  $s$ . Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής  $s$  για τις οποίες υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace, δηλαδή για τις οποίες το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού Laplace συγκλίνει, ονομάζεται **Περιοχή Σύγκλισης (ΠΣ) (Region Of Convergence – ROC)**.

**Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace** ορίζεται από το ακόλουθο γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) \cdot e^{st} ds \quad (7.2)$$

Ο ευθύς μετασχηματισμός Laplace είναι μοναδικός (unique), αν είναι γνωστή η Περιοχή Σύγκλισης. Επίσης, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι μοναδικός (unique), αν είναι γνωστή η Περιοχή Σύγκλισης. Αν λοιπόν είναι γνωστή η Περιοχή Σύγκλισης, τότε ο ευθύς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace αποτελούν ένα μοναδικό ζεύγος και χρησιμοποιείται ο συμβολισμός:

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$$

### Σχέση μετασχηματισμού Laplace και μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου

Αντικαθιστώντας  $s = \sigma + j\omega$  στον ορισμό, προκύπτει

$$X(s = \sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) \cdot e^{-\sigma t}) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

που σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου της συνάρτησης  $x(t) \cdot e^{-\sigma t}$  στο σημείο  $s = \sigma + j\omega$

δηλαδή

$$[X(s)]_{s=\sigma+j\omega} = X(\omega). \quad (7.3)$$

Χρήσιμη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία είναι τα βιβλία McClellan, Schafer & Yoder, 2006, Θεοδωρίδης, Μπερμπερίδης, Κοφίδης, 2003, Καραγιάννης & Μαραγκός, 2010, Καραγιάννης & Τζιτζιράχου, 2003, Καραμπογιάς, 2009, Μάργαρης, 2014, Παρασκευάς, 2014, Σκόδρας & Αναστασόπουλος, 2003, Φωτόπουλος & Βελώνη, 2008.

### 7.1.2. Περιοχή Σύγκλισης

Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής  $s$  για τις οποίες υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace, δηλαδή για αυτές που το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού Laplace συγκλίνει, ονομάζεται **Περιοχή Σύγκλισης (ΠΣ) (Region Of Convergence – ROC)** και είναι της μορφής:

$$\sigma_1 < \operatorname{Re}(s) = \sigma < \sigma_2$$

#### Πόλοι και Μηδενικά

Αν ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης είναι ρητή συνάρτηση του  $s$ :

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

τότε οι ρίζες του αριθμητή καλούνται **μηδενικά (zeros)** της  $X(s)$  και οι ρίζες του παρονομαστή καλούνται **πόλοι (poles)** της  $X(s)$ .

Προφανώς, στην περίπτωση αυτή, **η Περιοχή Σύγκλισης δεν περιλαμβάνει τους πόλους.**

#### Σχέση πόλων μετασχηματισμού Laplace με μορφή συνάρτησης

##### Απλός πραγματικός πόλος

Αν ο πόλος είναι αρνητικός, τότε η συνάρτηση είναι φθίνουσα εκθετική. Αν ο πόλος είναι θετικός, τότε η συνάρτηση είναι αύξουσα εκθετική.

##### Απλός φανταστικός πόλος

Αν ο πόλος έχει αρνητικό φανταστικό μέρος, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή θετική. Αν ο πόλος έχει θετικό φανταστικό μέρος, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή αρνητική.

##### Συζυγείς μιγαδικοί πόλοι

Αν οι πόλοι έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, τότε η συνάρτηση είναι φθίνουσα ημιτονοειδής συνάρτηση (φθίνουσα ταλάντωση). Αν οι πόλοι έχουν θετικό πραγματικό μέρος, τότε η συνάρτηση είναι αύξουσα ημιτονοειδής συνάρτηση (αύξουσα ταλάντωση).

##### Συζυγείς φανταστικοί πόλοι

Αν οι πόλοι είναι συζυγείς φανταστικοί, τότε η συνάρτηση είναι ημιτονοειδής συνάρτηση.

### 7.1.3. Ζεύγη μετασχηματισμού Laplace

Στον Πίνακα 7.1 παρουσιάζονται μερικοί τυπικοί μετασχηματισμοί Laplace.

Συνάρτηση συνεχούς χρόνου $x(t)$	Μετασχηματισμός Laplace $X(s)$	Περιοχή Σύγκλισης
$\delta(t)$	1	$\operatorname{Re}(s) > -\infty$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}(s) < 0$
$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$
$-e^{-at} \cdot u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\operatorname{Re}(s) < -\operatorname{Re}(a)$
$e^{-at} \cdot t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$
$-e^{-at} \cdot t^n \cdot u(-t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re}(s) < -\operatorname{Re}(a)$
$\cos(\omega_0 \cdot t) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$

$\sin(\omega_0 \cdot t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$(e^{-at} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \cdot u(t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)$
$(e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)) \cdot u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)$

Πίνακας 7.1 Ζεύγη μετασχηματισμού Laplace.

### 7.1.4. Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace

#### 7.1.4.1. Γραμμικότητα

Αν  $x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s), ROC_1$  και  $x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s), ROC_2$

τότε

$$c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t) \xleftrightarrow{L} c_1 \cdot X_1(s) + c_2 \cdot X_2(s), ROC \text{ περιέχει } ROC_1 \cap ROC_2 \quad (7.4)$$

για οποιεσδήποτε σταθερές  $c_1, c_2$ .

Γενικά, η Περιοχή Σύγκλισης είναι η τομή των επί μέρους Περιοχών Σύγκλισης, αλλά μπορεί να είναι μεγαλύτερη όταν υπάρχουν μηδενικά του ενός επί μέρους μετασχηματισμού που ακυρώνουν τους πόλους του άλλου.

#### Απόδειξη.

Αν  $y(t) = c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace στην (7.1) έχουμε:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)] \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [c_1 \cdot x_1(t) \cdot e^{-st} + c_2 \cdot x_2(t) \cdot e^{-st}] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} c_1 \cdot x_1(t) \cdot e^{-st} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} c_2 \cdot x_2(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= c_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \cdot e^{-st} dt + c_2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) \cdot e^{-st} dt = c_1 \cdot X_1(s) + c_2 \cdot X_2(s) \end{aligned}$$



#### 7.1.4.2. Μετατόπιση στον χρόνο

Αν  $x(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s), ROC$

τότε

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0} \cdot X(s), ROC \quad (7.5)$$

#### Απόδειξη.

Αν  $y(t) = x(t - t_0)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace στην (7.1) έχουμε:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) \cdot e^{-st} dt$$

Θέτοντας  $\tau = t - t_0$ , έχουμε:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-s(\tau + t_0)} d\tau = e^{-st_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} \cdot X(s) \blacksquare$$

#### 7.1.4.3. Κλιμάκωση στον χρόνο

Αν  $x(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s), ROC = (\sigma_1 < \text{Re}(s) < \sigma_2)$

τότε

$$x(a \cdot t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{s}{a}\right), \text{ROC} = \left(\frac{\sigma_1}{a} < \text{Re}(s) < \frac{\sigma_2}{a}\right) \quad (7.6)$$

#### Απόδειξη.

Αν  $y(t) = x(a \cdot t)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace στην (7.1) έχουμε:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(a \cdot t) \cdot e^{-st} dt$$

Αν  $a > 0$ , τότε θέτοντας  $\tau = a \cdot t$ , έχουμε:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(a \cdot t) \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-(s/a)\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{s}{a}\right)$$

Αν  $a < 0$ , τότε θέτοντας  $\tau = a \cdot t$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(a \cdot t) \cdot e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{a} \cdot \int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau) \cdot e^{-(s/a)\tau} d\tau \\ &= -\frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-(s/a)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{|a|} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-(s/a)\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$



#### 7.1.4.4. Μετατόπιση στη συχνότητα

$$\text{Αν } x(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} X(s), \text{ROC} = (\sigma_1 < \text{Re}(s) < \sigma_2)$$

τότε

$$e^{s_0 t} \cdot x(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} X(s - s_0), \text{ROC} = (\sigma_1 + \text{Re}(s_0) < \text{Re}(s) < \sigma_2 + \text{Re}(s_0)) \quad (7.7)$$

#### Απόδειξη.

Αν  $y(t) = e^{s_0 t} \cdot x(t)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace στην (7.1) έχουμε:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s_0 t} \cdot x(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{s_0 t - st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-(s-s_0)t} dt$$

Θέτοντας  $\tilde{s} = s - s_0$ , έχουμε:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-(s-s_0)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-\tilde{s}t} dt = X(\tilde{s}) = X(s - s_0) \blacksquare$$

#### 7.1.4.5. Συνέλιξη

$$\text{Αν } x_1(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} X_1(s), \text{ROC}_1 \text{ και } x_2(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} X_2(s), \text{ROC}_2$$

τότε

$$x_1(t) * x_2(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} X_1(s) \cdot X_2(s), \text{ROC περιέχει } \text{ROC}_1 \cap \text{ROC}_2 \quad (7.8)$$

#### Απόδειξη.

Αν  $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$ , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace στην (7.1) έχουμε:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) * x_2(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau \right] \cdot e^{-st} dt$$

Θέτοντας  $t - \tau = \tilde{t}$ , θεωρώντας μεταβλητή  $\tau$ , αλλάζοντας τη σειρά των ολοκληρωμάτων και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στον χρόνο από την (7.5), έχουμε:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) d\tau \right] \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tilde{t}) \cdot x_2(\tilde{t})(-d\tilde{t}) \right] \cdot e^{-st} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ - \int_{+\infty}^{-\infty} x_1(t-\tilde{t}) \cdot x_2(\tilde{t}) d\tilde{t} \right] \cdot e^{-st} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tilde{t}) \cdot x_1(t-\tilde{t}) d\tilde{t} \right] \cdot e^{-st} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tilde{t}) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tilde{t}) \cdot e^{-st} dt \right] d\tilde{t} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tilde{t}) \cdot \left[ e^{-s\tilde{t}} \cdot X_1(s) \right] d\tilde{t} \\
&= X_1(s) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tilde{t}) \cdot e^{-s\tilde{t}} d\tilde{t} \\
&= X_1(s) \cdot X_2(s)
\end{aligned}$$

■

#### 7.1.4.6. Παραγωγή

Αν  $x(n) \leftrightarrow X(s)$ , ROC

τότε

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \overset{L}{\leftrightarrow} s^k \cdot X(s), \text{ περιέχει ROC, για κάθε φυσικό αριθμό } k \quad (7.9)$$

Η Περιοχή Σύγκλισης μπορεί να είναι μεγαλύτερη από  $R$ , αν  $X(s)$  έχει πόλο στο  $s=0$ , ο οποίος ακυρώνεται με τον πολλαπλασιασμό επί  $s^k$ .

#### Απόδειξη.

Η απόδειξη στηρίζεται στη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής και στην κατά παράγοντες ιδιότητα των ολοκληρωμάτων.

Θεωρούμε ότι  $k=1$  και  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ . Οπότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace στην (7.1)

έχουμε:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt = x(t) \cdot e^{-st} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + s \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

Επειδή  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$ , προκύπτει  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) \cdot e^{-st} = 0$ . Επομένως, από την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt = s \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt = s \cdot X(s)$$

Συνεπώς, για  $k=1$  η (7.9) ισχύει. Θεωρούμε ότι για κάποιο τυχαίο  $\hat{k}$  ισχύει  $\frac{d^{\hat{k}} x(t)}{dt^{\hat{k}}} \overset{L}{\leftrightarrow} s^{\hat{k}} \cdot X(s)$  και

επαναλαμβάνοντας ακριβώς την ίδια διαδικασία αποδεικνύεται ότι η (7.9) ισχύει και για  $\hat{k}+1$ , η ολοκλήρωση της απόδειξης αφήνεται ως άσκηση. Άρα, η (7.9) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό  $k$ . ■

Στον Πίνακα 7.2 παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.

Ιδιότητα μετασχηματισμού Laplace	Συνάρτηση συνεχούς χρόνου $x(t)$	Μετασχηματισμός Laplace $X(s)$	Περιοχή Σύγκλισης
	$x(t)$	$X(s)$	$ROC = (\sigma_1 < Re(s) < \sigma_2)$
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	$ROC_1$
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	$ROC_2$
Γραμμικότητα	$c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)$	$c_1 \cdot X_1(s) + c_2 \cdot X_2(s)$	περιέχει $ROC_1 \cap ROC_2$
Μετατόπιση στον χρόνο	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} \cdot X(s)$	$ROC$
Κλιμάκωση στον χρόνο	$x(a \cdot t)$	$\frac{1}{ a } \cdot X\left(\frac{s}{a}\right)$	$ROC = \left(\frac{\sigma_1}{a} < Re(s) < \frac{\sigma_2}{a}\right)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{s_0 t} \cdot x(t)$	$X(s - s_0)$	$ROC = (\sigma_1 + Re(s_0) < Re(s) < \sigma_2 + Re(s_0))$
Συνέλιξη στον χρόνο	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s) \cdot X_2(s)$	περιέχει $ROC_1 \cap ROC_2$
Παραγωγήιση	$\frac{d^k x(t)}{dt^k}$	$s^k \cdot X(s)$	περιέχει $ROC$

Πίνακας 7.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.

### 7.1.5. Υπολογισμός μετασχηματισμού Laplace

Ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace μίας συνάρτησης  $x(t)$  γίνεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα του ορισμού του.

Παράδειγμα 1.

$$x(t) = e^{-ct} \cdot u(t), c \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ct} \cdot u(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{ct} \cdot 0 \cdot e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} e^{-ct} \cdot 1 \cdot e^{-st} dt \\ &= 0 + \int_0^{+\infty} e^{-(c+s)t} dt = -\frac{1}{c+s} \left[ e^{-(c+s)t} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{c+s} [0 - 1] = \frac{1}{s+c} \end{aligned}$$

Στην πραγματικότητα, κατά τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, χρησιμοποιείται το όριο:

$$\int_0^{+\infty} e^{-(c+s)t} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-(c+s)t} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{c+s} \cdot \left[ e^{-(c+s)t} \right]_0^{\tau} \right\} = -\frac{1}{c+s} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ e^{-(c+s)\tau} - 1 \right\} = -\frac{1}{c+s} \cdot [0 - 1] = \frac{1}{c+s}$$

που υπάρχει αν  $Re(c+s) > 0$

Έτσι καθορίζεται η Περιοχή Σύγκλισης  $Re(s) > -Re(c)$ , που είναι το μέρος του μιγαδικού επιπέδου δεξιά από την κάθετη στον πραγματικό άξονα στο σημείο  $-Re(c)$ .

Αξίζει να αναφερθεί ότι αν  $-Re(c) < 0$ , τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT)

$$X(\omega) = [X(s)]_{s=\sigma+j\omega} = [X(s)]_{s=j\omega} = \frac{1}{c+j\omega}$$

ενώ αν  $-Re(c) \geq 0$ , τότε δεν υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT).

Παράδειγμα 2.

$$x(t) = u(t)$$

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\
&= \left[ -\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{s} \cdot [e^{-st}]_0^{+\infty} = -\frac{1}{s} \cdot [e^{-\infty} - e^0] = -\frac{1}{s} \cdot [0 - 1] = \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

με Περιοχή Σύγκλισης  $Re(s) > 0$ .

Παράδειγμα 3.

$$x(t) = \begin{cases} e^{at}, & t < 0, a \in R \\ e^{-bt}, & t > 0, b \in R \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} \cdot e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} e^{-bt} \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(a-s)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(b+s)t} dt \\
&= \frac{1}{a-s} \cdot [e^{(a-s)t}]_{-\infty}^0 - \frac{1}{b+s} \cdot [e^{-(b+s)t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{a-s} \cdot [1-0] - \frac{1}{b+s} \cdot [0-1] = -\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+b}
\end{aligned}$$

όπου  $Re(s) < a$  και  $Re(s) > -b$ , δηλαδή η Περιοχή Σύγκλισης είναι:  $-b < Re(s) < a$ .

Ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace μίας συνάρτησης  $x(t)$  γίνεται χρησιμοποιώντας τα ζεύγη και τις ιδιότητες του μετασχηματισμού.

Παράδειγμα 1.

$$x(t) = e^{-4t} \cdot u(t) + e^{2t} \cdot u(-t)$$

Η συνάρτηση γράφεται

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

με

$$x_1(t) = e^{-4t} \cdot u(t)$$

$$x_2(t) = e^{2t} \cdot u(-t) = x_3(-t)$$

όπου

$$x_3(t) = e^{-2t} \cdot u(t)$$

Από τα ζεύγη του μετασχηματισμού Laplace έχουμε:

$$x_1(t) = e^{-4t} \cdot u(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} X_1(s) = \frac{1}{s+4}, Re(s) > -4$$

$$x_3(t) = e^{-2t} \cdot u(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} X_3(s) = \frac{1}{s+2}, Re(s) > -2$$

Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace έχουμε:

$$x(-t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} X(-s)$$

οπότε

$$x_2(t) = e^{2t} \cdot u(-t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} X_2(s) = X_3(-s) = \frac{1}{-s+2}, Re(s) < 2$$

Τέλος από την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Laplace έχουμε:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} X(s) = X_1(s) + X_2(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{1}{-s+2}, -4 < Re(s) < 2$$

Παράδειγμα 2.

Τα σήματα  $x_1(t) = e^{at} \cdot u(t)$  και  $x_2(t) = -e^{at} \cdot u(-t)$  έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό Laplace με διαφορετική Περιοχή Σύγκλισης.

Πράγματι, από τα ζεύγη του μετασχηματισμού Laplace έχουμε:

$$x_1(t) = e^{at} \cdot u(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} X_1(s) = \frac{1}{s-a}, \operatorname{Re}(s) > a$$

Το σήμα  $x_2(t) = -e^{at} \cdot u(-t)$

γράφεται:

$$x_2(t) = -x_3(-t)$$

όπου

$$x_3(t) = e^{-at} \cdot u(t)$$

Τότε, από τα ζεύγη του μετασχηματισμού Laplace έχουμε:

$$x_3(t) = e^{-at} \cdot u(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} X_3(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}(s) > a$$

και από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace έχουμε:

$$x(-t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} X(-s)$$

οπότε

$$x_2(t) = -e^{at} \cdot u(-t) = -x_3(-t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} X_2(s) = -X_3(-s) = -\frac{1}{-s+a} = \frac{1}{s-a}, \operatorname{Re}(s) < a.$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο σήματα έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό Laplace, αλλά με διαφορετική Περιοχή Σύγκλισης.

Γενικεύοντας, ο μετασχηματισμός Laplace είναι μοναδικός (unique), αν είναι γνωστή η Περιοχή Σύγκλισης. Επίσης, διαφορετικά σήματα μπορούν να έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό Laplace, αλλά με διαφορετική Περιοχή Σύγκλισης. Αν ο μετασχηματισμός Laplace έχει δύο πόλους, τότε υπάρχουν τρία σήματα με τον ίδιο μετασχηματισμό Laplace, με διαφορετικές Περιοχές Σύγκλισης. Αν ο μετασχηματισμός Laplace έχει  $N$  πόλους, τότε υπάρχουν  $N+1$  Περιοχές Σύγκλισης και  $N+1$  σήματα με τον ίδιο μετασχηματισμό Laplace.

### 7.1.6. Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Αν η  $X(s)$  είναι ρητή συνάρτηση του  $s$

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b(k) \cdot s^k}{\sum_{k=0}^N a(k) \cdot s^k} \quad (7.10)$$

με πόλους  $p_k, k=1, 2, \dots, N$ ,

τότε για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace χρησιμοποιείται η μέθοδος ανάπτυξης της  $X(s)$  σε άθροισμα μερικών κλασμάτων.

(α) Αν  $N > M$

- με απλούς πόλους (δηλαδή δεν επαναλαμβάνονται), τότε:

$$X(s) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{s - p_k} \quad (7.11)$$

με συντελεστές

$$C_k = \lim_{s \rightarrow p_k} [(s - p_k) \cdot X(s)] \quad (7.12)$$

οπότε

$$x(t) = \sum_{k=1}^N C_k \cdot e^{p_k \cdot t} \cdot u(t). \quad (7.13)$$

Παρατήρηση: αν υπάρχουν μιγαδικοί πόλοι, τότε οι πόλοι υπάρχουν ανά δύο σε συζυγία και οι συντελεστές είναι επίσης συζυγείς.

- αν υπάρχει πολλαπλός πόλος  $p$  με πολλαπλότητα  $R$ , τότε:



$$X(s) = \sum_{k=1}^R \frac{C_k}{(s-p)^k} + \sum_{k=R+1}^N \frac{C_k}{s-p_k} \quad (7.14)$$

με συντελεστές

$$C_k = \lim_{s \rightarrow p_k} [(s-p_k) \cdot X(s)], k = R+1, \dots, N \quad (7.15)$$

$$C_k = \lim_{s \rightarrow p} \frac{1}{(R-k)!} \cdot \frac{d^{R-k}}{ds^{R-k}} [(s-p)^R \cdot X(s)], k = 1, \dots, R \quad (7.16)$$

οπότε

$$x(t) = \sum_{k=1}^R C_k \cdot \frac{t^{R-1}}{(R-1)!} e^{p \cdot t} \cdot u(t) + \sum_{k=R+1}^N C_k \cdot e^{p_k \cdot t} \cdot u(t) . \quad (7.17)$$

(β) Αν  $N \leq M$ , τότε εκτελείται η διαίρεση  $\frac{B(s)}{A(s)}$  και

$$X(s) = \Pi(s) + \frac{Y(s)}{A(s)},$$

όπου  $\Pi(s)$  είναι πολώνυμο  $M-N$  βαθμού. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace επιτυγχάνεται υπολογίζοντας τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace σε κάθε όρο του παραπάνω αθροίσματος.

Παράδειγμα 1.

$$X(s) = \frac{1}{(s-1) \cdot (s-2)} = \frac{C_1}{s-1} + \frac{C_2}{s-2}$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 1} [(s-1)^2 \cdot X(s)] = \lim_{s \rightarrow 1} \left( \frac{1}{s-2} \right) = -1$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow 2} [(s-2) \cdot X(s)] = \lim_{s \rightarrow 2} \left( \frac{1}{s-1} \right) = 1$$

$$X(s) = \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s-2}$$

Άρα,

$$x(t) = (-e^t + e^{2t}) \cdot u(t) .$$

Παράδειγμα 2.

$$X(s) = \frac{s}{(s-1)^2 \cdot (s-2)} = \frac{C_1}{s-1} + \frac{C_2}{(s-1)^2} + \frac{C_3}{s-2}$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 1} \left( \frac{d}{ds} \left( \frac{s}{s-2} \right) \right) = -2$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow 1} [(s-1)^2 \cdot X(s)] = \lim_{s \rightarrow 1} \left( \frac{s}{s-2} \right) = -1$$

$$C_3 = \lim_{s \rightarrow 2} [(s-2) \cdot X(s)] = \lim_{s \rightarrow 2} \left( \frac{s}{(s-1)^2} \right) = 2$$

$$X(s) = \frac{-2}{s-1} + \frac{-1}{(s-1)^2} + \frac{2}{s-2}$$

Άρα,

$$x(t) = (-2 \cdot e^{-t} - t \cdot e^{-t} + 2 \cdot e^{-2t}) \cdot u(t) .$$

Παράδειγμα 3.

$$X(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 12}{s \cdot (s + 4)} = \frac{s^3 + 3s^2 + 12}{s^2 + 4s} = (s - 1) + \frac{4s + 12}{s^2 + 4s} = (s - 1) + \frac{4s + 12}{s(s + 4)} = (s - 1) + \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s + 4}$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{4s + 12}{s \cdot (s + 4)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{4s + 12}{s + 4} \right) = 3$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow -4} \left[ (s + 4) \cdot \frac{4s + 12}{s(s + 4)} \right] = \lim_{s \rightarrow -4} \left( \frac{4s + 12}{s} \right) = 1$$

$$X(s) = (s - 1) + \frac{3}{s} + \frac{1}{s + 4}$$

Άρα,

$$x(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) - \delta(t) + (3 + e^{-4t}) \cdot u(t).$$

### 7.1.7. Μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace

Ο **μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace** ενός σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t)$  ορίζεται από το ακόλουθο γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$X^+(s) = \int_0^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \quad (7.18)$$

και υπάρχει όταν  $x(t)$  είναι εκθετικής τάξης, δηλαδή αν υπάρχουν αριθμοί  $a, M, t_0$  και ισχύει:

$$|e^{-at} \cdot x(t)| < M, t \geq t_0 \quad (7.19)$$

Αν ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης είναι ρητή συνάρτηση του  $s$ , τότε η Περιοχή Σύγκλισης είναι η περιοχή δεξιά του πόλου με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος (μέχρι το συν άπειρο).

Για τα ζεύγη του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace χρησιμοποιείται ο συμβολισμός:

$$x(t) \stackrel{L^+}{\leftrightarrow} X^+(s)$$

### Ιδιότητα παραγωγίσης του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace

$$\text{Αν } x(t) \stackrel{L^+}{\leftrightarrow} X^+(s)$$

τότε

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \stackrel{L^+}{\leftrightarrow} s^k \cdot X^+(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^i \cdot \frac{d^i x(0)}{dt^i} \quad (7.20)$$

#### Απόδειξη.

Η απόδειξη γίνεται όπως και στη γενικότερη περίπτωση της παραγωγίσης του μετασχηματισμού στην απόδειξη του (7.9) της παραγράφου 7.1.4.6, δηλαδή, στηρίζεται στη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής και στην κατά παράγοντες ιδιότητα των ολοκληρωμάτων.

Θεωρούμε ότι  $k=1$  και  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ . Οπότε από τον ορισμό του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace στην (7.18) και από την οριακή τιμή  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \cdot e^{-st} = 0$ , έχουμε:

$$Y^+(s) = \int_0^{+\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt = x(t) \cdot e^{-st} \Big|_0^{+\infty} + s \cdot \int_0^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt = -x(0) + s \cdot X^+(s)$$

Συνεπώς, για  $k=1$  η (7.20) ισχύει. Θεωρούμε ότι για κάποιο τυχαίο  $\hat{k}$  ισχύει  $\frac{d^{\hat{k}}x(t)}{dt^{\hat{k}}} \xleftrightarrow{L^+} s^{\hat{k}} \cdot X^+(s) - \sum_{i=0}^{\hat{k}-1} s^i \cdot \frac{d^i x(0)}{dt^i}$  και επαναλαμβάνοντας ακριβώς την ίδια διαδικασία αποδεικνύεται ότι η (7.9) ισχύει και για  $\hat{k}+1$ , η ολοκλήρωση της απόδειξης αφήνεται ως άσκηση. Άρα, η (7.20) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό  $k$ . ■

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace δίνει τη δυνατότητα επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με αρχικές συνθήκες.

### 7.1.8. Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

#### Θεώρημα αρχικής τιμής

$$\lim_{t \rightarrow 0} [x(t)] = \lim_{s \rightarrow +\infty} [s \cdot X(s)] \quad (7.21)$$

Παράδειγμα

$$x(t) = \cos(3 \cdot t) \cdot u(t)$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 3^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} [x(t)] = \lim_{s \rightarrow +\infty} [s \cdot X(s)] = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left[ s \cdot \frac{s}{s^2 + 3^2} \right] = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left[ \frac{s^2}{s^2 + 3^2} \right] = 1$$

#### Θεώρημα τελικής τιμής

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot X(s)] \quad (7.22)$$

Παράδειγμα

$$x(t) = (1 - e^{-t}) \cdot u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s \cdot (s+1)}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot X(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{1}{s(s+1)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{s+1} \right] = 1$$

### 7.1.9. Μετασχηματισμός Laplace σε προγραμματιστικό περιβάλλον

#### 1-0-0-0-5-0

Χρήσιμη βιβλιογραφία για Matlab είναι το βιβλίο TheMathWorksInc., 2005. Χρήσιμη ξενόγλωσση βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι τα βιβλία IngleandProakis, 2003 και Leis, 2011. Χρήσιμη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι το βιβλίο Παρασκευάς, 2014. Χρήσιμη βιβλιογραφία για Octave είναι τα βιβλία Eaton, Bateman, Hauberg, Wehbring, 2011 και Hansen, 2011.

Η συνάρτηση `[L]=laplace(f)` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ευθέως μετασχηματισμού Laplace. Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο τη συνάρτηση `f` και παράγει στην έξοδο τον μετασχηματισμό Laplace `L`. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace του σήματος  $x(t) = e^{-2t} + t^3$  απαιτείται η κλήση:

```
syms t; laplace(exp(2*t)+t^3);
```

Η συνάρτηση `syms` είναι διαθέσιμη σε Matlab και σε Octave (symbolic package).

Το αποτέλεσμα είναι:

$$1/(s - 2) + 6/s^4$$

Η συνάρτηση `[f]=ilaplace (L)` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace. Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο τον μετασχηματισμό Laplace `L` και παράγει στην έξοδο τη συνάρτηση `f`. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace του σήματος  $x(t) = \cos(t) + 3 \cdot t^2$  απαιτείται η κλήση:

```
syms x t; X= laplace(cos(t)+3*t^2);
```

και για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace συνεχούς χρόνου (CTFT) απαιτείται η κλήση:

```
x= ilaplace (X,t);
```

Το αποτέλεσμα είναι:

```
cos(t) + 3*t^2
```

Παρατήρηση: Οι συναρτήσεις `syms`, `laplace` και `ilaplace` είναι διαθέσιμες σε Matlab και σε Octave (symbolicpackage).

Η συνάρτηση `[R,P,K]=residue(b,a)` χρησιμοποιείται για την υλοποίηση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace. Η συνάρτηση υλοποιεί την ανάλυση μίας ρητής συνάρτησης σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Η συνάρτηση έχει εισόδους τους συντελεστές `b` του αριθμητή και τους συντελεστές `a` του παρονομαστή και εξόδους τους πόλους `P`, τους συντελεστές `R` των κλασμάτων και τους συντελεστές `K` του πολωνύμου, που προκύπτει από τη διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή (όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος ή μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή). Για παράδειγμα, η ανάλυση σε απλά κλάσματα της συνάρτησης μεταφοράς

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 7s + 12}$$

απαιτεί την κλήση

```
b=[1]; a=[1,-7,12]; [R,P,K]=residue(b,a);
```

Τότε, η συνάρτηση επιστρέφει

```
R=[1  
-1]
```

```
P=[4  
3]
```

```
K=[]
```

που σημαίνει

$$H(s) = \frac{1}{s-4} + \frac{-1}{s-3}.$$

## 7.2. Συνάρτηση μεταφοράς

1-2-0-0-5-6

### 7.2.1. Ορισμός της συνάρτησης μεταφοράς

Ο μετασχηματισμός Laplace  $H(s)$  της απόκρισης μοναδιαίου παλμού  $h(t)$  ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος συνεχούς χρόνου ονομάζεται **συνάρτηση μεταφοράς**:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (7.23)$$

Από την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Laplace, είναι προφανές ότι ο μετασχηματισμός Laplace  $X(s)$  της εισόδου  $x(t)$  και ο μετασχηματισμός Laplace  $Y(s)$  της εξόδου  $y(t) = h(t) * x(t)$  του LTI συστήματος συνδέονται με τη σχέση:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) \quad (7.24)$$

Αν σε ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου έχουμε είσοδο το μιγαδικό εκθετικό σήμα  $x(t) = e^{at}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , τότε η έξοδος είναι:

$$y(t) = H(a) \cdot e^{at} = H(a) \cdot x(t)$$

**Απόδειξη.**

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{a(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{at} \cdot e^{-a\tau} d\tau = e^{at} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-a\tau} d\tau = e^{at} \cdot H(a) \end{aligned}$$



### 7.2.2. Περιγραφή LTI συστημάτων μέσω συνάρτησης μεταφοράς

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται από μία **διαφορική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές**:

$$\sum_{k=0}^M b_k \cdot \frac{d^k x(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N a_k \cdot \frac{d^k y(t)}{dt^k} \quad (7.25)$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης και αξιοποιώντας τις ιδιότητες της γραμμικότητας και παραγώγισης του μετασχηματισμού, έχουμε:

$$\sum_{k=0}^M b_k \cdot s^k \cdot X(s) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot s^k \cdot Y(s) \Rightarrow X(s) \cdot \sum_{k=0}^M b_k \cdot s^k = Y(s) \cdot \sum_{k=0}^N a_k \cdot s^k$$

Αλλά

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

οπότε

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot s^k}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot s^k} \quad (7.26)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς εξαρτάται από τους συντελεστές του LTI συστήματος. Επομένως, οι σταθεροί συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης αρκούν για να ορίσουν τη συνάρτηση μεταφοράς. Έτσι, η συνάρτηση μεταφοράς αρκεί για να περιγράψει ένα LTI σύστημα.

### Επίλυση διαφορικής εξίσωσης με μετασχηματισμό Laplace

Παράδειγμα 1.

Υπολογισμός απόκρισης μοναδιαίου παλμού του LTI συστήματος συνεχούς χρόνου, που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 5 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 5 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t) = \delta(t)$$

$$s^2 Y(s) - 5sY(s) + 4Y(s) = 1$$

$$(s^2 - 5s + 4) \cdot Y(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 5s + 4}$$

Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 5s + 4}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 5s + 4} = \frac{1}{(s-1) \cdot (s-4)} = \frac{C_1}{s-1} + \frac{C_2}{s-4}$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 1} ((s-1) \cdot H(s)) = \lim_{s \rightarrow 1} \left( \frac{1}{s-4} \right) = -\frac{1}{3}$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow 4} ((s-4) \cdot H(s)) = \lim_{s \rightarrow 4} \left( \frac{1}{s-1} \right) = \frac{1}{3}$$

Άρα η απόκριση μοναδιαίου παλμού του LTI συστήματος είναι:

$$h(t) = \left[ -\frac{1}{3} e^t + \frac{1}{3} e^{4t} \right] \cdot u(t).$$

Παράδειγμα 2.

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} - \frac{dy(t)}{dt} = \sin(t), y(0) = 2, y'(0) = 0, y''(0) = 1$$

$$[s^3 \cdot Y(s) - s^2 \cdot y(0) - s \cdot y'(0) - y''(0)] - [s \cdot Y(s) - y(0)] = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$s^3 Y(s) - 2s^2 - 1 - s \cdot Y(s) + 2 = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s}{(s^2 + 1) \cdot (s^2 - 1)} = \frac{3}{4} \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$y(t) = \left[ \frac{3}{4} e^t + \frac{3}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} \cos(t) \right] \cdot u(t)$$

### 7.2.3. Σύνδεση συστημάτων σε σειρά

Ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $H_1(s)$  συνδέεται σε σειρά με ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $H_2(s)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.1. Το πρώτο σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$  με μετασχηματισμό Laplace  $X(s)$  και έξοδο  $w(n)$  με μετασχηματισμό Laplace  $W(s)$ . Το δεύτερο σύστημα έχει είσοδο, την έξοδο του πρώτου συστήματος και έξοδο  $y(n)$  με μετασχηματισμό Laplace  $Y(s)$ .

Η σύνδεση σε σειρά των δύο συστημάτων είναι ισοδύναμη με ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \quad (7.27)$$

**Απόδειξη.**

Για τα δύο συστήματα, που είναι συνδεδεμένα σε σειρά, ισχύει:

$$Y(s) = H_2(s) \cdot W(s)$$

$$W(s) = H_1(s) \cdot X(s)$$

οπότε

$$Y(s) = H_2(s) \cdot W(s) = H_2(s) \cdot [H_1(s) \cdot X(s)] = [H_2(s) \cdot H_1(s)] \cdot X(s)$$

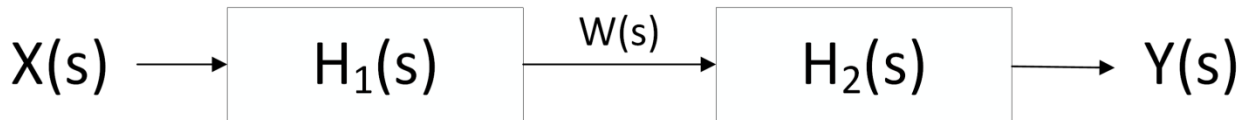
επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό.

Όμως, η έξοδος γράφεται:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

Επομένως,

$$H(s) = H_2(s) \cdot H_1(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$$



Σχήμα 7.1 Σύνδεση συστημάτων σε σειρά.

Η συνολική συνάρτηση μεταφοράς ενός LTI συστήματος συνεχούς χρόνου που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα **σε σειρά**, είναι το **γινόμενο** των συναρτήσεων μεταφοράς των επί μέρους συστημάτων.

#### 7.2.4. Σύνδεση συστημάτων παράλληλα

Ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $H_1(s)$  συνδέεται παράλληλα με ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $H_2(s)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.2. Το πρώτο σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$  με μετασχηματισμό Laplace  $X(s)$  και έξοδο  $w(n)$  με μετασχηματισμό Laplace  $W(s)$ . Το δεύτερο σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$  με μετασχηματισμό Laplace  $X(s)$  και έξοδο  $v(n)$  με μετασχηματισμό Laplace  $V(s)$ . Οι έξοδοι των δύο συστημάτων αθροίζονται και δίνουν τη συνολική έξοδο  $y(n)$  με μετασχηματισμό Laplace  $Y(s)$ .

Η παράλληλη σύνδεση των δύο συστημάτων είναι ισοδύναμη με ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) \tag{7.28}$$

#### Απόδειξη.

Για τα δύο συστήματα που είναι συνδεδεμένα παράλληλα ισχύει:

$$V(s) = H_2(s) \cdot X(s)$$

$$W(s) = H_1(s) \cdot X(s)$$

οπότε

$$Y(s) = V(s) + W(s) = H_2(s) \cdot X(s) + H_1(s) \cdot X(s) = [H_2(s) + H_1(s)] \cdot X(s),$$

επειδή ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα.

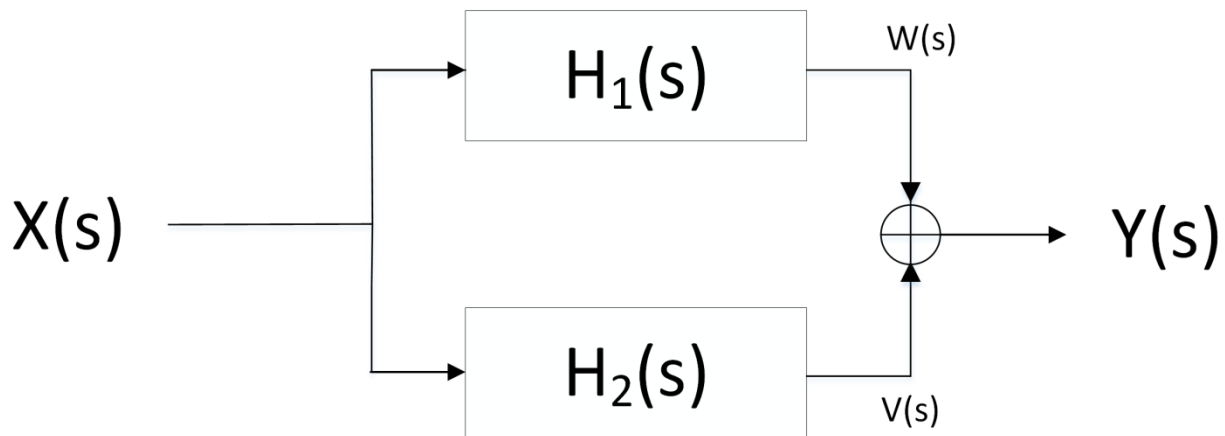
Όμως, η έξοδος γράφεται:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

Επομένως:

$$H(s) = H_2(s) + H_1(s) = H_1(s) + H_2(s)$$





Σχήμα 7.2 Σύνδεση συστημάτων παράλληλα.

Η συνολική συνάρτηση μεταφοράς ενός LTI συστήματος συνεχούς χρόνου, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα **παράλληλα**, είναι το **άθροισμα** των συναρτήσεων μεταφοράς των επί μέρους συστημάτων.

### 7.2.5. Ευστάθεια συστημάτων συνεχούς χρόνου

#### Αιτιότητα συστημάτων συνεχούς χρόνου

Ένα αιτιατό LTI σύστημα συνεχούς χρόνου έχει Περιοχή Σύγκλισης το μέγιστο δυνατό ημιεπίπεδο, που δεν περιλαμβάνει τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς. Η Περιοχή Σύγκλισης είναι το μέρος του μιγαδικού επιπέδου δεξιά από την κάθετη στον πραγματικό άξονα στο σημείο  $-Re(p)$ , όπου  $p$  είναι ο πόλος της συνάρτησης μεταφοράς με το μέγιστο πραγματικό μέρος.

#### Ευστάθεια συστημάτων συνεχούς χρόνου και μετασχηματισμός Laplace

Ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου είναι ευσταθές, αν ο φανταστικός άξονας ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς.

#### Ευστάθεια αιτιατών συστημάτων συνεχούς χρόνου και μετασχηματισμός Laplace

##### Ευσταθές σύστημα

Ένα αιτιατό LTI σύστημα συνεχούς χρόνου είναι **ευσταθές**, όταν **όλοι οι πόλοι** της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται στο **αριστερό ημιεπίπεδο** και έχουν οποιαδήποτε πολλαπλότητα. Τότε η απόκριση μοναδιαίου παλμού μηδενίζεται όσο αυξάνει ο χρόνος.

##### Ασταθές σύστημα

Ένα αιτιατό LTI σύστημα συνεχούς χρόνου είναι **ασταθές**, όταν **όλοι οι πόλοι** της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται στο **δεξιό ημιεπίπεδο** και έχουν οποιαδήποτε πολλαπλότητα. Τότε η απόκριση μοναδιαίου παλμού απειρίζεται όσο αυξάνει ο χρόνος.

##### Οριακά ευσταθές σύστημα

Ένα αιτιατό LTI σύστημα συνεχούς χρόνου είναι **οριακά ευσταθές**, όταν **όλοι οι πόλοι** της συνάρτησης μεταφοράς είναι **απλοί** και **φανταστικοί**. Τότε η απόκριση μοναδιαίου παλμού γίνεται σταθερή ή ημιτονοειδής όσο αυξάνει ο χρόνος.

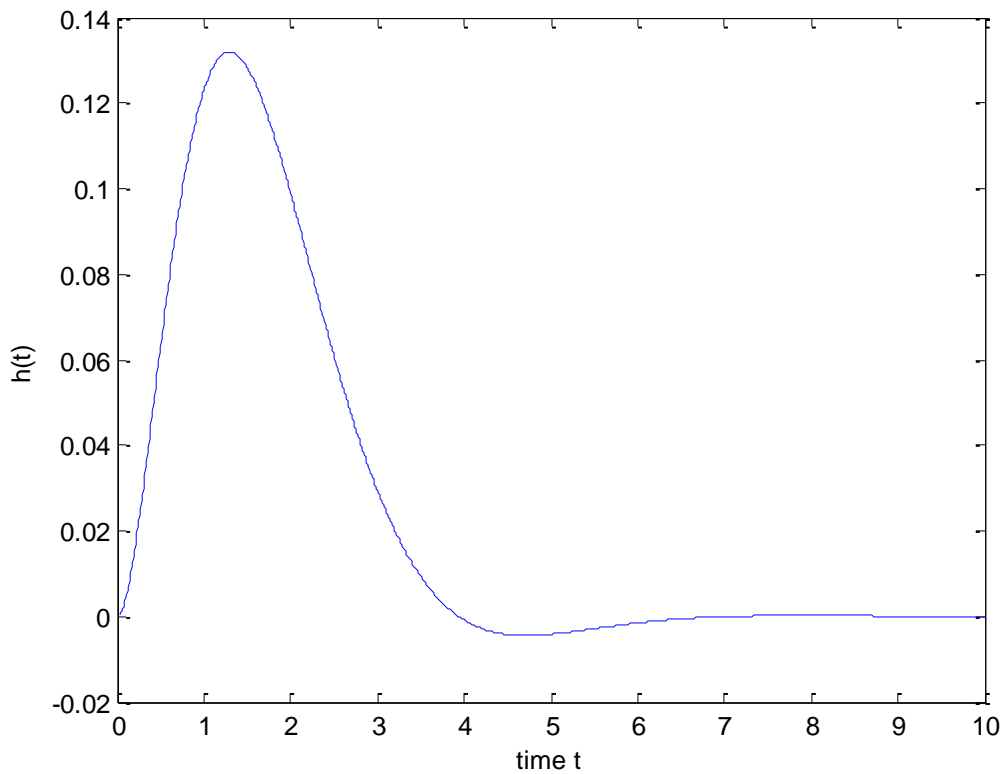
Παράδειγμα 1.

Στο Σχήμα 7.3 φαίνεται η απόκριση μοναδιαίου παλμού του ευσταθούς LTI συστήματος συνεχούς χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4}.$$



Οι τρεις πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι  $-2$ ,  $-1-j$  και  $-1+j$  και βρίσκονται όλοι στο αριστερό ημιεπίπεδο. Έτσι, η απόκριση μοναδιαίου παλμού μηδενίζεται όσο αυξάνει ο χρόνος.



**Σχήμα 7.3** Απόκριση μοναδιαίου παλμού ευσταθούς LTI συστήματος συνεχούς χρόνου.

Παράδειγμα 2.

Ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1) \cdot (s-2)}.$$

Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1) \cdot (s-2)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-2}$$

Υπάρχουν τρεις δυνατές Περιοχές Σύγκλισης:

α.  $Re(s) > 2$

Το σύστημα είναι αιτιατό με απόκριση μοναδιαίου παλμού

$$h(t) = \left( -\frac{1}{3} \cdot e^{-t} + \frac{1}{3} \cdot e^{2t} \right) \cdot u(t)$$

και δεν είναι ευσταθές επειδή  $h(t)$  τείνει στο άπειρο όταν  $t$  τείνει στο άπειρο.

β.  $-1 < Re(s) < 2$

Το σύστημα δεν είναι αιτιατό με απόκριση μοναδιαίου παλμού

$$h(t) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-t} \cdot u(t) - \frac{1}{3} \cdot e^{2t} \cdot u(-t)$$

και είναι ευσταθές επειδή ο φανταστικός άξονας ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς.

γ.  $Re(s) < -1$

Το σύστημα δεν είναι αιτιατό με απόκριση μοναδιαίου παλμού

$$h(t) = \frac{1}{3} \cdot e^{-t} \cdot u(-t) - \frac{1}{3} \cdot e^{2t} \cdot u(-t)$$

και δεν είναι ευσταθές επειδή ο φανταστικός άξονας δεν ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς.

Μπορείτε να διερευνήσετε την ευστάθεια αιτιατών συστημάτων συνεχούς χρόνου με το Διαδραστικό πρόγραμμα 7.1.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 7.1** Ευστάθεια αιτιατών συστημάτων συνεχούς χρόνου.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

### 7.2.6. Συνάρτηση μεταφοράς σε προγραμματιστικό περιβάλλον

1-0-0-0-5-0

Η συνάρτηση `[sys]=tf(b,a)` χρησιμοποιείται για την παραγωγή της συνάρτησης μεταφοράς. Η συνάρτηση έχει εισόδους τους συντελεστές `b` του αριθμητή και τους συντελεστές `a` του παρονομαστή και στην έξοδο παράγει τη συνάρτηση μεταφοράς. Για παράδειγμα, η δημιουργία της συνάρτησης μεταφοράς

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 7s + 12} \text{ απαιτεί την κλήση}$$

`b=[1]; a=[1,-7,12]; tf(b,a);`

Τότε η συνάρτηση επιστρέφει

Transferfunction:

$$\frac{1}{s^2 - 7s + 12}$$

που σημαίνει

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 7s + 12}$$

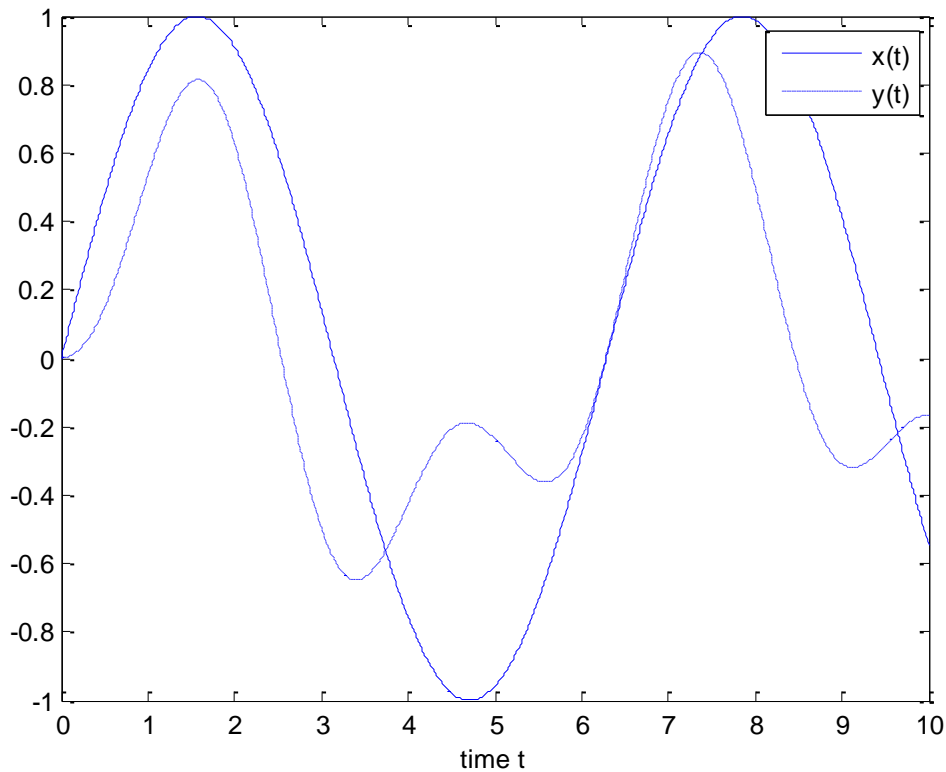
Η συνάρτηση `tf` χρησιμοποιείται μαζί με τη συνάρτηση `lsim` για τον υπολογισμό της απόκρισης ενός LTI συστήματος συνεχούς χρόνου. Για παράδειγμα, για να υπολογιστεί η απόκριση του LTI συστήματος συνεχούς χρόνου:  $y''(t) + 5y'(t) = x'(t) + 2x(t)$  για είσοδο  $x(t) = \sin(t)$  απαιτείται η παραγωγή της εισόδου

`t = [0:0.01:10]; x = sin(t);`

και η κλήση

`b=[1 2]; a=[1, 0, 5]; sys=tf(b,a); lsim(sys,x,t)`

Στο Σχήμα 7.4 παρουσιάζεται η είσοδος και η έξοδος (απόκριση) του LTI συστήματος συνεχούς χρόνου.



Σχήμα 7.4 Απόκριση LTI συστήματος συνεχούς χρόνου.

### 7.3. Αοιμένες Ασκήσεις

#### 1-2-0-0-5-6

1. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace:

$$X(s) = \frac{s+5}{s \cdot (s^2 + 2s + 26)}$$

Λύση.

$$X(s) = \frac{s+5}{s \cdot (s^2 + 2s + 26)} = \frac{s+5}{s \cdot (s - (-1-5j)) \cdot (s - (-1+5j))} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s - (-1-5j)} + \frac{C_3}{s - (-1+5j)}$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot X(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s+5}{s^2 + 2s + 26} \right) = \frac{5}{26}$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow -1-5j} [(s - (-1-5j)) \cdot X(s)] = \lim_{s \rightarrow -1-5j} \left( \frac{s+5}{s \cdot (s - (-1+5j))} \right) = \frac{4-5j}{-50+10j}$$

$$C_3 = \lim_{s \rightarrow -1+5j} [(s - (-1+5j)) \cdot X(s)] = \lim_{s \rightarrow -1+5j} \left( \frac{s+5}{s \cdot (s - (-1-5j))} \right) = \frac{4+5j}{-50-10j} = C_2^*$$

$$X(s) = \frac{5}{26} \frac{1}{s} + \frac{4-5j}{-50+10j} \frac{1}{s - (-1-5j)} + \frac{4+5j}{-50-10j} \frac{1}{s - (-1+5j)}$$

Οπότε, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι:

$$x(t) = \left[ \frac{5}{26} + \frac{4-5j}{-50+10j} e^{(-1-5j)t} + \frac{4+5j}{-50-10j} e^{(-1+5j)t} \right] \cdot u(t)$$

Η ανάλυση της συνάρτησης  $X(s)$  μεταφοράς μπορεί εναλλακτικά να γίνει ως εξής:

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{s+5}{s \cdot (s^2 + 2s + 26)} \\
&= \frac{5}{26} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{26} \cdot \frac{5s-16}{(s+1)^2 + 5^2} \\
&= \frac{5}{26} \cdot \frac{1}{s} - \frac{5}{26} \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2 + 5^2} + \frac{21}{26} \cdot \frac{1}{(s+1)^2 + 5^2} \\
&= \frac{5}{26} \cdot \frac{1}{s} - \frac{5}{26} \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2 + 5^2} + \frac{21}{26} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{(s+1)^2 + 5^2}
\end{aligned}$$

Κάνοντας πράξεις μπορεί ναδειχθεί ότι αυτή η μορφή της συνάρτησης  $X(s)$  είναι ίση με την προηγούμενη. Τότε, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace υπολογίζεται με τη χρήση των ζευγών του Πίνακα 7.1, ως εξής:

$$x(t) = \frac{5}{26} \cdot u(t) - \frac{5}{26} \cdot e^{-t} \cdot \cos(5t) \cdot u(t) + \frac{21}{26} \cdot \frac{1}{5} \cdot e^{-t} \cdot \sin(5t) \cdot u(t)$$

Να δείξετε ότι αυτή η μορφή του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace είναι ίση με την προηγούμενη (να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα του Euler).

2. Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = u(t) - u(t-10), y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Λύση.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = u(t) - u(t-10), y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 4[s \cdot Y(s) - y(0)] + 3Y(s) = \frac{1}{s} - e^{-10s} \cdot \frac{1}{s}$$

$$s^2 \cdot Y(s) - 4s \cdot Y(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s} - e^{-10s} \cdot \frac{1}{s}$$

$$(s^2 - 4s + 3) \cdot Y(s) = \frac{1 - e^{-10s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-10s}}{s \cdot (s^2 - 4s + 3)} = \frac{1}{s \cdot (s^2 - 4s + 3)} - e^{-10s} \cdot \frac{1}{s \cdot (s^2 - 4s + 3)}$$

Όμως

$$\frac{1}{s \cdot (s^2 - 4s + 3)} = \frac{1}{s \cdot (s-1) \cdot (s-3)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s-1} + \frac{C_3}{s-3}$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot \frac{1}{s \cdot (s-1) \cdot (s-3)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{(s-1) \cdot (s-3)} \right) = \frac{1}{3}$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow 1} \left( (s-1) \cdot \frac{1}{s \cdot (s-1) \cdot (s-3)} \right) = \lim_{s \rightarrow 1} \left( \frac{1}{s \cdot (s-3)} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$C_3 = \lim_{s \rightarrow 3} \left( (s-3) \cdot \frac{1}{s \cdot (s-1) \cdot (s-3)} \right) = \lim_{s \rightarrow 3} \left( \frac{1}{s \cdot (s-1)} \right) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{s \cdot (s^2 - 4s + 3)} = \frac{1}{s \cdot (s-1) \cdot (s-3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s-3}$$

Οπότε

$$y(t) = \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{6}e^{3t} \right] \cdot u(t) - \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{t-10} + \frac{1}{6}e^{3(t-10)} \right] \cdot u(t-10).$$

3. Να εξετάσετε ως προς την αιτιότητα το σύστημα συνεχούς χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+j)}$$

Λύση.

Οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι  $s_1=1, s_2=-j$ . Επομένως υπάρχουν τρεις δυνατές Περιοχές Σύγκλισης:

α.  $Re(s) > 1$

β.  $0 < Re(s) < 1$

γ.  $Re(s) < 0$

Η Περιοχή Σύγκλισης είναι το μέρος του μιγαδικού επιπέδου δεξιά από την κάθετη στον πραγματικό άξονα στο σημείο  $-Re(p)$ , όπου  $p$  είναι ο πόλος της συνάρτησης μεταφοράς με το μέγιστο πραγματικό μέρος. Ο πόλος αυτός είναι ο πόλος  $s_1=1$ . Άρα, το σύστημα είναι αιτιατό, όταν η Περιοχή Σύγκλισης είναι  $Re(s) > 1$ .

4. Δίνεται το αιτιατό LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 9s + 5}.$$

α. Να εξετάσετε ως προς την ευστάθεια το σύστημα.

β. Να υπολογίσετε την απόκριση μοναδιαίου παλμού.

Λύση.

α. Οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι  $s_1=-1, s_2=-2+j, s_3=-2-j$ .

Όλοι οι πόλοι βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο. Άρα, το σύστημα είναι ευσταθές.

β. Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 9s + 5} = \frac{1}{(s+1) \cdot (s^2 + 4s + 5)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{-1+j}{4} \cdot \frac{1}{s+2-j} + \frac{-1-j}{4} \cdot \frac{1}{s+2+j}$$

Αφού το σύστημα είναι αιτιατό, η Περιοχή Σύγκλισης είναι το μέρος του μιγαδικού επιπέδου δεξιά από την κάθετη στον πραγματικό άξονα στο σημείο  $-Re(p)$ , όπου  $p$  είναι ο πόλος της συνάρτησης μεταφοράς με το μέγιστο πραγματικό μέρος. Ο πόλος αυτός είναι ο πόλος  $s_1=-1$ .

Άρα, η Περιοχή Σύγκλισης είναι  $Re(s) > -1$ .

Επομένως, το σύστημα έχει απόκριση μοναδιαίου παλμού:

$$h(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \cdot u(t) + \frac{-1+j}{4} \cdot e^{-(2-j)t} \cdot u(t) + \frac{-1-j}{4} \cdot e^{-(2+j)t} \cdot u(t).$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η απόκριση μοναδιαίου παλμού μηδενίζεται, όσο αυξάνει ο χρόνος.

Η ανάλυση της συνάρτησης μεταφοράς μπορεί εναλλακτικά να γίνει ως εξής:

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 9s + 5} = \frac{1}{(s+1) \cdot (s^2 + 4s + 5)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{-\frac{1}{2}s - \frac{3}{2}}{(s+2)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{s+2-2}{(s+2)^2 + 1} - \frac{3}{2} \frac{1}{(s+2)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{s+2}{(s+2)^2 + 1} + \frac{1-\frac{3}{2}}{(s+2)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{s+2}{(s+2)^2 + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(s+2)^2 + 1}
\end{aligned}$$

Κάνοντας πράξεις μπορεί ναδειχθεί ότι αυτή η μορφή της συνάρτησης μεταφοράς είναι ίση με την προηγούμενη.

Τότε, η απόκριση μοναδιαίου παλμού υπολογίζεται με τη χρήση των ζευγών του Πίνακα 7.1, ως εξής:

$$h(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \cdot u(t) - \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} \cdot \cos(t) \cdot u(t) - \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} \cdot \sin(t) \cdot u(t)$$

Να δείξετε ότι αυτή η μορφή της απόκρισης μοναδιαίου παλμού είναι ίση με την προηγούμενη (να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα του Euler).

## 7.4. Ασκήσεις

### 1-2-0-0-5-6

1. Αν το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$  έχει μετασχηματισμό Laplace  $X(s)$ , τότε να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace του σήματος συνεχούς χρόνου  $x(-2 \cdot t)$ .
2. Αν το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$  έχει μετασχηματισμό Laplace  $X(s)$ , τότε να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace του σήματος συνεχούς χρόνου  $y(t) = \frac{t^2}{2} \cdot e^t \cdot u(-t)$ .

3. Να υπολογίσετε το αιτιατό σήμα με μετασχηματισμό Laplace:

$$X(s) = \frac{2s + 6}{s^2 + 9s + 20}$$

4. Να υπολογίσετε το αιτιατό σήμα με μετασχηματισμό Laplace:

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 9}$$

5. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace:

$$X(s) = \frac{1}{(s+j)^2 \cdot (s-1)}$$

6. Να υπολογίσετε την έξοδο  $y(t)$  ενός LTI συστήματος συνεχούς χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{1}{s+3} \text{ και είσοδο } x(t) = e^{(1+j)t}.$$

7. Δίνεται η διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI φίλτρο συνεχούς χρόνου:

$$y'''(t) + 2 \cdot y'(t) = x'(t) + x(t)$$

Να υπολογίσετε την συνάρτηση μεταφοράς.

8. Δίνεται η διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI φίλτρο συνεχούς χρόνου:

$$y'(t) + y(t) = x''(t) + x(t)$$

Να υπολογίσετε την συνάρτηση μεταφοράς.

Να υπολογίσετε την απόκριση μοναδιαίου παλμού.

9. Να εξετάσετε ως προς την αιτιότητα το σύστημα συνεχούς χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{1}{(s-1) \cdot (s-j)}$$

10. Να εξετάσετε ως προς την ευστάθεια το αιτιατό σύστημα συνεχούς χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς:

$$X(s) = \frac{1}{s^3 - 15s^2 + 74s - 120}$$

## 7.5. Εργαστηριακές Ασκήσεις

### Εργαστηριακή Άσκηση 12 Μετασχηματισμός Laplace και Συνάρτηση μεταφοράς

**1-0-0-0-5-0**

1. Υπολογισμός Μετασχηματισμού Laplace

Να μελετήσετε τη συνάρτηση laplace.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση laplace να υπολογίσετε τους μετασχηματισμούς Laplace των σημάτων συνεχούς χρόνου

$$x_1(t) = t^2$$

$$x_2(t) = t - 1$$

$$x_3(t) = \exp(t)$$

$$x_4(t) = \exp(2 \cdot t)$$

$$x_5(t) = \cos(2 \cdot t)$$

$$x_6(t) = 3 \cdot t^2 \cdot \cos(2 \cdot t)$$

Να εμφανίσετε τα αποτελέσματα.

2. Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Να μελετήσετε τη συνάρτηση ilaplace.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση laplace να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace του σήματος συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = 3 \cdot t^2 + \sin(t)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ilaplace να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του σήματος που βρήκατε.

Να εμφανίσετε τα αποτελέσματα.

3. Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace:  $N > M$  και απλοί πόλοι

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 7s + 12}$$

Να μελετήσετε τη συνάρτηση residue.

Να αναλύσετε την  $X(s)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση residue και να εμφανίσετε τα αποτελέσματα.

4. Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace:  $N > M$  και πολλαπλός πόλος

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace:

$$X(s) = \frac{1}{(s-2)^2 \cdot (s+1)}$$

Να αναλύσετε την  $X(s)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση residue και να εμφανίσετε τα αποτελέσματα.

5. Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace:  $N = M$

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace:

$$X(s) = \frac{1+s^2}{1-s-2s^2}$$

Να αναλύσετε την  $X(s)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση residue και να εμφανίσετε τα αποτελέσματα.

6. Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace:  $N < M$

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace:

$$X(s) = \frac{s^3 + 5s^2 - 14}{2s^2 - 1}$$

Να αναλύσετε την  $X(s)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση residue και να εμφανίσετε τα αποτελέσματα.

7. Συνάρτηση μεταφοράς και ευστάθεια

Δίνεται ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς:

$$X(s) = \frac{s^4 + s^2 - 3}{2s^3 - 1}$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση residue να υπολογίσετε τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς. Είναι το LTI σύστημα ευσταθές;

8. Συνάρτηση μεταφοράς και ευστάθεια

Δίνεται ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς:

$$X(s) = \frac{s^4 + s^2 - 3}{2s^3 + 1}$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση residue να υπολογίσετε τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς. Είναι το LTI σύστημα ευσταθές;

9. LTI φίλτρο συνεχούς χρόνου

Δίνεται η διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI φίλτρο συνεχούς χρόνου:

$$y''(t) + 5 \cdot y(t) = x'(t) + 2 \cdot x(t)$$

Να μελετήσετε τη συνάρτηση tf.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση tf να υπολογίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση lsim να υπολογίσετε την απόκριση του συστήματος για είσοδο  $x(t) = \sin(t)$ .

10. LTI φίλτρο συνεχούς χρόνου

Δίνεται η διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI φίλτρο συνεχούς χρόνου:

$$y'''(t) + 2 \cdot y'(t) + y(t) = x''(t) + x(t)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση tf να υπολογίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση lsim να υπολογίσετε την απόκριση του συστήματος για είσοδο  $x(t) = \cos(t)$ .



## 7.6. Περίληψη (ηχογραφημένη)

1-2-0-0-5-6

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη του Κεφαλαίου 7 με τον Ήχο 7.1.



Ήχος 7.1 Περίληψη Κεφαλαίου 7.

### Μετασχηματισμός Laplace και Συνάρτηση μεταφοράς

Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής  $s$  για τις οποίες υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace, δηλαδή για τις οποίες το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού Laplace συγκλίνει, ονομάζεται Περιοχή Σύγκλισης (ΠΣ) (RegionOfConvergence – ROC).

Αν μετασχηματισμός Laplace μίας συνάρτησης είναι ρητή συνάρτηση του  $s$ , τότε οι ρίζες του αριθμητή καλούνται μηδενικά (zeros) και οι ρίζες του παρονομαστή καλούνται πόλοι (poles).

Η Περιοχή Σύγκλισης δεν περιλαμβάνει τους πόλους.

Ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης μοναδιαίου παλμού ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος συνεχούς χρόνου ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς.

Η συνολική συνάρτηση μεταφοράς ενός LTI συστήματος συνεχούς χρόνου, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά, είναι το γινόμενο των συναρτήσεων μεταφοράς των επί μέρους συστημάτων.

Η συνολική συνάρτηση μεταφοράς ενός LTI συστήματος συνεχούς χρόνου, που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα, είναι το άθροισμα των συναρτήσεων μεταφοράς των επί μέρους συστημάτων.

Ένα αιτιατό LTI σύστημα συνεχούς χρόνου έχει Περιοχή Σύγκλισης το μέγιστο δυνατό ημιεπίπεδο, που δεν περιλαμβάνει τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς. Η Περιοχή Σύγκλισης είναι το μέρος του μιγαδικού επιπέδου δεξιά από την κάθετη στον πραγματικό άξονα στο σημείο  $-Re(p)$ , όπου  $p$  είναι ο πόλος της συνάρτησης μεταφοράς με το μέγιστο πραγματικό μέρος.

Ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου είναι ευσταθές, αν ο φανταστικός άξονας ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς.

Ένα αιτιατό LTI σύστημα συνεχούς χρόνου είναι ευσταθές, όταν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο και έχουν οποιαδήποτε πολλαπλότητα. Τότε η απόκριση μοναδιαίου παλμού μηδενίζεται όσο αυξάνει ο χρόνος.

### Βιβλιογραφία/Αναφορές

Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S., Wehbring R. (2011). *GNU Octave* (3rd ed.).

Hansen J. S. (2011). *GNU Octave Beginner's Guide*. Packt Publishing.

Ingle, V. K., & Proakis, J. G. (2003). *Digital Signal Processing using MATLAB*. Stamford, CT: Thomson Brooks Cole.

Leis, J. W. (2011). *Digital Signal Processing using MATLAB for students and researchers*. J. Wiley and Sons.

McClellan, J. H., Schafer, R. W., Yoder, M. A. (2006). *Θεμελιώδεις Έννοιες της Επεξεργασίας Σημάτων*. Φιλομάθεια. Μετάφραση – Επιστημονική Επιμέλεια: Ε. Ζ. Ψαράκης.

TheMathWorksInc (2005). *Signal Processing Toolbox User's Guide*.

Θεοδωρίδης, Σ., Μπερμπερίδης, Κ., Κοφίδης, Λ. (2003). *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων*. Εκδόσεις τυπωθήτω.

Καραγιάννης, Γ., & Μαραγκός, Π. (2010). *Βασικές Αρχές Σημάτων και Συστημάτων*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου.

Καραγιάννης, Γ., & Τζιτζιράχου, Κ. (2003). *Εισαγωγή στα Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου.

Καραμπογιάς, Σ. (2009). *Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Καραμπογιά.  
Μάργαρης, Α. (2014). *Σήματα και Συστήματα*. Εκδόσεις Τζιόλα.  
Παρασκευάς, Μ. (2014). *Σήματα και Συστήματα Συνεχούς Χρόνου με Matlab*. Εκδόσεις Τζιόλα.  
Σκόδρας, Α., & Αναστασόπουλος, Β. (2003). *Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων και Σημάτων*. ΕΑΠ.  
Φωτόπουλος, Π., & Βελώνη, Α. (2008). *Σήματα και Συστήματα*. Σύγχρονη Εκδοτική.

## **Κριτήρια αξιολόγησης**

### **Κριτήριο αξιολόγησης 1**

**1-2-0-0-5-6**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 1 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 7.2.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 7.2** Κριτήριο αξιολόγησης 1.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

### **Κριτήριο αξιολόγησης 2**

**1-2-0-0-5-6**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 2 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 7.3.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 7.3** Κριτήριο αξιολόγησης 2.

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

## Κεφάλαιο 8 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier και Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται ο ορισμός του διακριτού μετασχηματισμού Fourier και παρουσιάζονται οι ιδιότητες του μετασχηματισμού. Δίνεται ο ορισμός της κυκλικής συνέλιξης σημάτων διακριτού χρόνου και αναλύεται η σχέση της γραμμικής και της κυκλικής συνέλιξης σημάτων διακριτού χρόνου. Παρουσιάζονται αλγόριθμοι γρήγορου μετασχηματισμού Fourier.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Σειρές. Κεφάλαιο 1, Κεφάλαιο 2, Κεφάλαιο 3, Κεφάλαιο 4.

### 8.1. Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

#### 1-2-3-4-0-0

#### 8.1.1. Ορισμός διακριτού μετασχηματισμού Fourier

Ο **ευθύς διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform – DFT)**  $N$  σημείων μίας ακολουθίας  $x(n)$  πεπερασμένου μήκους  $N$  που μηδενίζεται έξω από το διάστημα  $[0:N-1]$  ορίζεται ως ακολούθως:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk}, k \in [0:N-1] \quad (8.1)$$

όπου

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \quad (8.2)$$

Ο ορισμός του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT)  $N$  σημείων ισχύει και για την ακολουθία  $x(n)$  πεπερασμένου μήκους  $L < N$  που μηδενίζεται έξω από το διάστημα  $[0:L-1]$ . Στην περίπτωση αυτή γίνεται **συμπλήρωση με μηδενικά (zeropadding)** στο τέλος του σήματος.

Ο **αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Inverse Discrete Fourier Transform – IDFT)**  $N$  σημείων ορίζεται ως ακολούθως:

$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-nk}, n \in [0:N-1] \quad (8.3)$$

Ο ευθύς και ο αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT)  $N$  σημείων αποτελούν ένα μοναδικό ζεύγος και χρησιμοποιείται ο συμβολισμός:

$$x(n) \xleftrightarrow{\text{DFT-N}} X(k)$$

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier είναι διακριτός, τόσο στο πεδίο του χρόνου, όσο και στο πεδίο της συχνότητας.

### Σχέση του DFT με DTFT

Αν το σήμα  $x(n)$  είναι πεπερασμένου χρόνου στο διάστημα  $[0:N-1]$ , τότε ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) του σήματος  $x(n)$  είναι:

$$X(e^{-j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

Τότε, ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT) προκύπτει από τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) για τις ισαπέχουσες συχνότητες  $\omega_k = (2\pi/N) \cdot k, k \in [0:N-1]$ :

$$X(e^{-j(2\pi/N)k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j(2\pi/N)kn} = X(k)$$

### 8.1.2. Υπολογισμός διακριτού μετασχηματισμού Fourier

Ο υπολογισμός διακριτού μετασχηματισμού Fourier μίας ακολουθίας γίνεται χρησιμοποιώντας τον ορισμό από την (8.1).

Παράδειγμα 1.

Δίνεται το σήμα

$$x(n) = \delta(n)$$

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier  $N$  σημείων του σήματος  $x(n) = \delta(n)$  είναι:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk}, k \in [0: N-1],$$

όπου

$$W_N = e^{-j2\pi/N}.$$

Συνεπώς,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) \cdot (W_N)^{nk} = 1 \cdot (W_N)^{0 \cdot k} = 1 \cdot 1 = 1, k \in [0: N-1].$$

Παράδειγμα 2.

Δίνεται το σήμα

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-5)$$

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier  $N=10$  σημείων του σήματος  $x(n)$  είναι:

$$X(k) = \sum_{n=0}^9 x(n) \cdot W_{10}^{nk}, k \in [0: 9],$$

όπου

$$W_{10} = e^{-j2\pi/10} = e^{-j\pi/5}.$$

Συνεπώς,

$$X(k) = \sum_{n=0}^9 (\delta(n) + 2\delta(n-5)) \cdot (W_{10})^{nk}, k \in [0: 9].$$

Επομένως

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^9 (\delta(n) + 2\delta(n-5)) \cdot (W_{10})^{nk} = 1 \cdot (W_{10})^{0 \cdot k} + 2 \cdot (W_{10})^{5 \cdot k} \\ &= 1 + 2 \cdot (e^{-j\pi/5})^{5k} = 1 + 2 \cdot (e^{-j\pi})^k, k \in [0: 9] \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την **ταυτότητα του Euler**

$$e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} X(k) &= 1 + 2 \cdot (e^{-j\pi})^k = 1 + 2 \cdot [\cos(-\pi) + j \cdot \sin(-\pi)]^k = 1 + 2 \cdot [\cos(\pi) - j \cdot \sin(\pi)]^k \\ &= 1 + 2 \cdot [-1 - j \cdot 0]^k = 1 + 2 \cdot (-1)^k, k \in [0: 9] \end{aligned}$$

### 8.1.3. Υπολογισμός αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού Fourier

Ο υπολογισμός IDFT  $N$  σημείων της ακολουθίας  $X(k)$  μπορεί να γίνει με χρήση του ορισμού του αντίστροφου DFT  $N$  σημείων από την (8.3).

Επίσης, υπολογισμός IDFT  $N$  σημείων της ακολουθίας  $X(k)$  μπορεί να γίνει με δύο μεθόδους μέσω DFT  $N$  σημείων.

**Μέθοδος 1.**

$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) \cdot W_N^{nk} \right)^* \quad (8.4)$$

### Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-nk} \right) \Rightarrow N \cdot x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-nk} \Rightarrow N \cdot x^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) \cdot W_N^{nk} \\
\Rightarrow x^*(n) &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) \cdot W_N^{nk} \Rightarrow x(n) = \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) \cdot W_N^{nk} \right)^*
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, πρώτα υπολογίζεται η συζυγής ακολουθία  $X^*(k)$  της ακολουθίας  $X(k)$ , μετά γίνεται ο υπολογισμός DFT  $N$  σημείων της ακολουθίας  $X^*(k)$ , μετά υπολογίζεται η συζυγής ακολουθία του DFT  $N$  σημείων της ακολουθίας  $X^*(k)$  και τέλος γίνεται διαίρεση διά  $N$ .

### Μέθοδος 2.

$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot f(N-n) \quad (8.5)$$

όπου

$$f(n) = \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{nk} \right) \quad (8.6)$$

### Απόδειξη.

Αν  $f(n) = \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{nk} \right)$ , επειδή ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$W_N^N = \left( e^{-j2\pi/N} \right)^N = e^{-j2\pi} = \cos(-2\pi) + j \cdot \sin(-2\pi) = \cos(2\pi) - j \cdot \sin(2\pi) = 1,$$

$$W_N^{Nk} = \left( W_N^N \right)^k = 1^k = 1,$$

$$W_N^{(N-n)k} = W_N^{Nk} \cdot W_N^{-nk} = 1 \cdot W_N^{-nk} = W_N^{-nk},$$

μπορούμε να γράψουμε:

$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-nk} \right) = \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{(N-n)k} \right) = \frac{1}{N} \cdot f(N-n) \quad \blacksquare$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, πρώτα υπολογίζεται η ακολουθία  $f(n)$  που είναι ο DFT  $N$  σημείων της ακολουθίας  $X(k)$ , μετά υπολογίζεται η ακολουθία  $f(N-n)$  και τέλος γίνεται διαίρεση διά  $N$ .

### 8.1.4. Κυκλική συνέλιξη

Από την ακολουθία πεπερασμένου μήκους  $x(n), n \in [0:N-1]$  μπορεί να σχηματιστεί μία περιοδική ακολουθία  $\tilde{x}(n)$  με θεμελιώδη περίοδο  $N$ , που ονομάζεται περιοδική επέκταση της ακολουθίας  $x(n)$  ανά  $N$  δείγματα:

$$\tilde{x}(n) = x(n \bmod N) = x((n))_N \quad (8.7)$$

Η **περιοδική συνέλιξη** δύο περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου με την ίδια θεμελιώδη περίοδο  $N$  ορίζεται ως ακολούθως:

$$\tilde{x}_1(n) \otimes \tilde{x}_2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_1(k) \cdot \tilde{x}_2(n-k) \quad (8.8)$$

Η **κυκλική συνέλιξη**  $N$  σημείων δύο σημάτων διακριτού χρόνου πεπερασμένου μήκους  $N$  ορίζεται ως ακολούθως:

$$x(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k) \cdot \tilde{x}_2(n-k) \quad (8.9)$$

Αν το σήμα  $x_1(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_1$  και το σήμα  $x_2(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_2$ , όπου  $N_1 \neq N_2$ , τότε η κυκλική συνέλιξη  $N$  σημείων είναι πεπερασμένου μήκους  $N$ , όπου  $N \geq \max\{N_1, N_2\}$  και υπολογίζεται συμπληρώνοντας στο τέλος με μηδενικά (*zeropadding*) τα σήματα, ώστε να αποκτήσουν μήκος  $N$ .

Η κυκλική συνέλιξη  $N$  σημείων και η κυκλική συνέλιξη  $M$  σημείων, όπου  $N \neq M$ , δεν είναι γενικά ίσες μεταξύ τους.

#### 8.1.4.1. Υπολογισμός κυκλικής συνέλιξης

Η διαδικασία του υπολογισμού της κυκλικής συνέλιξης γίνεται σε έξι βήματα:

1. Συμπλήρωση με μηδενικά (*zeropadding*), αν χρειάζεται.
2. Παραγωγή της περιοδικής επέκτασης του ενός σήματος.
3. Αναδίπλωση της περιοδικής επέκτασης του ενός σήματος.
4. Κυκλική μετατόπιση του αναδιπλωμένου σήματος στο διάστημα χρόνου του άλλου(αμετακίνητου) σήματος.
5. Πολλαπλασιασμός των τιμών του αμετακίνητου σήματος με τις τιμές του μετατοπισμένου σήματος.
6. Πρόσθεση των τιμών.

Παράδειγμα.

Δίνονται τα σήματα

$$x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$$

και

$$x_2(n) = 9\delta(n) + 8\delta(n-1) + 7\delta(n-2).$$

Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη  $N=4$  σημείων  $x(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ .

Το σήμα  $x_1(n)$  υπάρχει στο χρονικό διάστημα  $[0:3]$  και είναι μήκους  $N_1=4$  και το σήμα  $x_2(n)$  στο χρονικό διάστημα  $[0:2]$  και είναι μήκους  $N_2=3$ . Επομένως, η κυκλική συνέλιξη  $N=4$  σημείων είναι πεπερασμένου μήκους  $N=4$ , επειδή  $N = \max\{N_1, N_2\}$  και υπολογίζεται συμπληρώνοντας πρώτα με μηδενικά το δεύτερο σήμα, ώστε να αποκτήσει μήκος  $N=4$ . Ο υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης φαίνεται παρακάτω:

$k$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	
$x_1(k)$					1	2	3	4	
$x_2(k)$					9	8	7		
$x_2(k)$					9	8	7	0	συμπλήρωση με μηδενικά
$\tilde{x}_2(k)$	9	8	7	0	9	8	7	0	περιοδική επέκταση
$\tilde{x}_2(-k)$					9	0	7	8	$x(0) = 9 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 62$
$\tilde{x}_2(1-k)$					8	9	0	7	$x(1) = 8 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 7 \cdot 4 = 54$
$\tilde{x}_2(2-k)$					7	8	9	0	$x(2) = 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 50$
$\tilde{x}_2(3-k)$					0	7	8	9	$x(3) = 0 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 4 = 74$

Υπολογισμός κυκλικής συνέλιξης

#### 8.1.4.2. Σχέση γραμμικής και κυκλικής συνέλιξης

Η γραμμική και η κυκλική συνέλιξη δύο σημάτων διακριτού χρόνου πεπερασμένου μήκους δεν είναι γενικά ίσες μεταξύ τους.

Αν το σήμα  $x_1(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_1$  και το σήμα  $x_2(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_2$ , τότε η γραμμική συνέλιξη  $x_l(n) = x_1(n) * x_2(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_l = N_1 + N_2 - 1$  και η κυκλική

συνέλιξη  $N$  σημείων  $x_c(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_c = N$ . Η γραμμική και η κυκλική συνέλιξη συνδέονται ως εξής:

α. Αν  $N_c \geq N_\ell$ , τότε

$$x_c(n) = x_\ell(n)$$

δηλαδή η γραμμική και η κυκλική συνέλιξη είναι ίσες μεταξύ τους.

β. Αν  $N_c < N_\ell$ , τότε

$$x_c(n) = x_\ell(n) + x_\ell(n + N_c), n \in [0: N_c - 1]$$

δηλαδή η κυκλική συνέλιξη μπορεί να υπολογιστεί από τη γραμμική συνέλιξη.

Παράδειγμα.

Δίνονται τα σήματα

$$x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$$

και

$$x_2(n) = 9\delta(n) + 8\delta(n-1) + 7\delta(n-2).$$

Το σήμα  $x_1(n)$  είναι μήκους  $N_1 = 4$  και το σήμα  $x_2(n)$  είναι μήκους  $N_2 = 3$ . Συνεπώς, η γραμμική συνέλιξη

$$x_\ell(n) = x_1(n) * x_2(n) \text{ είναι πεπερασμένου μήκους } N_\ell = N_1 + N_2 - 1 = 6.$$

α. Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη  $N_c = 6$  σημείων.

Στην περίπτωση αυτή  $N_c = N_\ell$ , οπότε

$$x_c(n) = x_\ell(n).$$

Η γραμμική και η κυκλική συνέλιξη  $N = 4$  σημείων είναι:

$n$	0	1	2	3	4	5
$x_\ell(n) = x_c(n)$	9	26	50	74	53	28

β. Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη  $N_c = 4$  σημείων.

Στην περίπτωση αυτή  $N_c < N_\ell$ , οπότε

$$x_c(n) = x_\ell(n) + x_\ell(n + N_c), n \in [0: N_c - 1].$$

Η κυκλική συνέλιξη  $N = 4$  σημείων προκύπτει από το άθροισμα της γραμμικής συνέλιξης και της μετατόπισης της γραμμικής συνέλιξης κατά  $N_c = 4$  προς τα αριστερά για  $n \in [0: 3]$ .

$n$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x_\ell(n)$					9	26	50	74	53	28
$x_\ell(n+4)$	9	26	50	74	53	28				
$x_c(n) = x_\ell(n) + x_\ell(n + N_c)$	9	26	50	74	62	54	50	74	53	28

Μπορείτε να διερευνήσετε την κυκλική συνέλιξη με το Διαδραστικό πρόγραμμα 8.1.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 8.1** Κυκλική συνέλιξη.

### 8.1.5. Ιδιότητες διακριτού μετασχηματισμού Fourier

Στον Πίνακα 8.1 παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT).

Ιδιότητα διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT)	Σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$	Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT) $X(k)$
Γραμμικότητα	$c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$	$c_1 \cdot X_1(k) + c_2 \cdot X_2(k)$
Συμμετρία πραγματικού σήματος	$x(n)$ πραγματικό σήμα	$X(k) = X^*((N-k))_N$
Συμμετρία φανταστικού σήματος	$x(n)$ φανταστικό σήμα	$X(k) = -X^*((N-k))_N$
Κυκλική μετατόπιση	$x((n-n_0))_N$	$W_N^{n_0 k} \cdot X(k)$
Κυκλική αναδίπλωση	$x((-n))_N$	$X^*(k)$
Κυκλική συνέλιξη	$x_1(n) \otimes x_2(n)$	$X_1(k) \cdot X_2(k)$

**Πίνακας 8.1** Ιδιότητες του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT).

Η ακόλουθη ιδιότητα της κυκλικής συνέλιξης παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού της κυκλικής συνέλιξης  $N$  σημείων μέσω του DFT  $N$  σημείων.

Αν  $x(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ , τότε

$$X(k) = X_1(k) \cdot X_2(k) \quad (8.10)$$

Παράδειγμα.

$$x_1(n) = x_2(n) = 1, n \in [0 : N-1]$$

Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη  $N$  σημείων  $x(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ .

Ο DFT  $N$  σημείων του σήματος  $x_1(n)$  είναι:

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk}, k \in [0 : N-1]$$

Για  $k=0$  έχουμε:

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} (W_N^n)^0 = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

Για  $k \in [1 : N-1]$  έχουμε:

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} (W_N^k)^n = \frac{1 - (W_N^k)^N}{1 - W_N^k} = \frac{1-1}{1-W_N^k} = 0,$$

γιατί

$$\begin{aligned} (W_N^k)^N &= (W_N)^{Nk} = (e^{-j2\pi/N})^{Nk} = e^{-j2\pi k} \\ &= \cos(-2\pi k) + j \cdot \sin(-2\pi k) = \cos(2\pi k) - j \cdot \sin(2\pi k) = 1. \end{aligned}$$

Άρα,

$$X_1(k) = \begin{cases} N, & k=0 \\ 0, & k \in [1 : N-1] \end{cases}$$

Προφανώς ο DFT  $N$  σημείων του σήματος  $x_2(n)$  είναι  $X_2(k) = X_1(k)$ .

Συνεπώς,

$$X(k) = X_1(k) \cdot X_2(k) = X_1(k) = \begin{cases} N^2, & k=0 \\ 0, & k \in [1 : N-1] \end{cases}$$



Από την ιδιότητα της κυκλικής συνέλιξης, ο αντίστροφος DFT της ακολουθίας  $X(k)$  είναι η κυκλική συνέλιξη  $x(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ .

Άρα,

$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-nk}, n \in [0: N-1]$$

οπότε

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \cdot \left\{ X(0) \cdot W_N^{-n \cdot 0} + \sum_{k=1}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-nk} \right\} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \left\{ N^2 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{N-1} 0 \cdot W_N^{-nk} \right\} = \frac{1}{N} \cdot N^2 = N \end{aligned}$$

Άρα,

$$x(n) = N, n \in [0: N-1].$$

### 8.1.6. Διακριτός μετασχηματισμός Fourier σε προγραμματιστικό περιβάλλον

#### 1-0-3-0-0-0

Χρήσιμη βιβλιογραφία για Matlab είναι το βιβλίο TheMathWorksInc., 2005. Χρήσιμη ξενόγλωσση βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι τα βιβλία IngleandProakis, 2003 και Leis, 2011. Χρήσιμη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία για σήματα σε Matlab είναι το βιβλίο Ασημάκης, 2008. Χρήσιμη βιβλιογραφία για Octave είναι τα βιβλία Eaton, Bateman, Hauberg, Wehbring, 2011 και Hansen, 2011.

Η συνάρτηση `signdft` υπολογίζει το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DiscreteFourierTransform – DFT) μίας ακολουθίας  $x(n)$  πεπερασμένου μήκους  $N$ , που μηδενίζεται έξω από το διάστημα  $[0: N-1]$ .

```
function [Xk]=signdft(xn,N)
% DFT
% x(n) -- X(k)
% N = length of x(n)
n=[0:1:N-1];
k=[0:1:N-1];
WN=exp(-j*2*pi/N);
nk=n'*k;
WNnk=WN.^nk;
Xk=xn*WNnk;
```

Η συνάρτηση `signdft` έχει εισόδους το διάνυσμα  $xn$  του σήματος και τον αριθμό  $N$ , που αντιστοιχεί στο πλήθος των σημείων του διακριτού μετασχηματισμού Fourier. Η συνάρτηση έχει έξοδο το διάνυσμα  $Xk$  του διακριτού μετασχηματισμού Fourier. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier 4 σημείων του σήματος  $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$  απαιτείται η κλήση

```
x=[1:4]; N=4; [Xk]=signdft(xn,N).
```

Η συνάρτηση `signalcirshift` εκτελεί την κυκλική μετατόπιση κατά  $m$  μίας ακολουθίας  $x(n)$  πεπερασμένου μήκους  $N$ , που μηδενίζεται έξω από το διάστημα  $[0: N-1]$ .

```
function [y]=signalcirshift(x,m,N)
% circural shift
% x(n) of length N
% y(n) = x((n-m)N)
x=[x zeros(1,N-length(x))];
n=[0:1:N-1];
n=mod(n-m,N);
y=x(n+1);
```

Η συνάρτηση `signalcirshift` έχει εισόδους το διάνυσμα  $xn$  του σήματος, τον αριθμό  $N$ , που αντιστοιχεί στο πλήθος των σημείων του διακριτού μετασχηματισμού Fourier και τον αριθμό  $m$  της κυκλικής μετατόπισης. Η συνάρτηση έχει έξοδο το διάνυσμα  $y$  του κυκλικά μετατοπισμένου σήματος. Για παράδειγμα,

για την κυκλική μετατόπιση του σήματος  $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$  κατά 2 απαιτείται η κλήση  
`x=[1:4]; N=4; m=2; [y]=signalcirshift(x,m,N) .`

Η συνάρτηση `signalcirconv` υπολογίζει την κυκλική συνέλιξη  $N$  σημείων δύο σημάτων διακριτού χρόνου πεπερασμένου μήκους.

```
function [y]=signalcirconv(x1,x2,N)
% circular convolution
% y(n)=x1(n) N x2(n)
x1=[x1 zeros(1,N-length(x1))];
x2=[x2 zeros(1,N-length(x2))];
m=[0:1:N-1];
x2=x2(mod(-m,N)+1);
H=zeros(N,N);
for n=1:1:N
    H(n,:)=signalcirshift(x2,n-1,N);
end;
y=x1*H';
```

Η συνάρτηση `signalcirconv` έχει εισόδους τα διανύσματα  $x_1$  και  $x_2$  των σημάτων και τον αριθμό  $N$ , που αντιστοιχεί στο πλήθος των σημείων της κυκλικής συνέλιξης. Η συνάρτηση έχει έξοδο το διάνυσμα  $y$  της κυκλικής συνέλιξης. Η συνάρτηση `signalcirconv` χρησιμοποιεί τη συνάρτηση `signalcirshift`. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης 4 σημείων των σημάτων  $x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$  και  $x_2(n) = 4\delta(n) + 5\delta(n-1) + 6\delta(n-2) + 7\delta(n-3)$  απαιτείται η κλήση  
`x1=[1:3]; x2=[4:7]; N=4; [y]=signalcirconv(x1,x2,N) .`

Η συνάρτηση `[y]=cconv(x1,x2,N)` υπολογίζει την κυκλική συνέλιξη  $N$  σημείων δύο σημάτων διακριτού χρόνου πεπερασμένου μήκους. Η συνάρτηση `cconv` έχει εισόδους τα διανύσματα  $x_1$  και  $x_2$  των σημάτων και τον αριθμό  $N$ , που αντιστοιχεί στο πλήθος των σημείων της κυκλικής συνέλιξης και έχει έξοδο το διάνυσμα  $y$  της κυκλικής συνέλιξης. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης 4 σημείων των σημάτων  $x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$  και  $x_2(n) = 4\delta(n) + 5\delta(n-1) + 6\delta(n-2) + 7\delta(n-3)$  απαιτείται η κλήση

```
x1=[1:3]; x2=[4:7]; N=4; [y]= cconv(x1,x2,N) .
```

Η συνάρτηση `cconv` είναι διαθέσιμη σε Matlab, αλλά δεν είναι διαθέσιμη σε Octave.

## 8.2. Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier

1-2-3-4-0-0

### 8.2.1. Ορισμός γρήγορου μετασχηματισμού Fourier

**Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform – FFT)** ονομάζεται σύνολο των αλγορίθμων για το γρήγορο υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (Discrete Fourier Transform – DFT).

Για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT)  $N$  σημείων ενός σήματος με χρήση του ορισμού απαιτούνται  $N^2$  μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και  $N \cdot (N-1)$  μιγαδικές προσθέσεις. Επομένως, η πολυπλοκότητα του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (Discrete Fourier Transform – DFT) είναι της τάξης  $O(N^2)$ .

Ο πλέον κλασικός αλγόριθμος FFT είναι ο αλγόριθμος **FFT με βάση 2 (radix-2 FFT)**, ο οποίος βασίζεται στην τεχνική «διαίρει και βασίλευε» (divide and conquer). Η βασική ιδέα του αλγορίθμου radix-2 FFT είναι η διάσπαση του σήματος, των DFT  $N$  σημείων του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε, σε 2 σήματα με μισό μήκος  $N/2$  το κάθε ένα. Η διάσπαση επαναλαμβάνεται μέχρι να φτάσουμε στον (απλό) υπολογισμό DFT 2 σημείων. Η διάσπαση μπορεί να γίνει τόσο στο πεδίο του χρόνου και ονομάζεται **αποδεκίαση στον χρόνο (Decimation In Time – DIT)**, οπότε προκύπτει ο αλγόριθμος **FFT με αποδεκίαση στον χρόνο (Decimation In Time FFT – DIT FFT)** (Cooley & Tukey, 1965), όσο και στο πεδίο των συχνοτήτων

και ονομάζεται **αποδεκάτιση στη συχνότητα**(DecimationInFrequency– **DIF**), οπότε προκύπτει ο αλγόριθμος **FFT με αποδεκάτιση στη συχνότητα**(DecimationInFrequencyFFT – **DIFFFT**)(Gentleman&G. Sande, 1966). Για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT)

$N$  σημείων ενός σήματος με χρήση FFT απαιτούνται  $\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$  μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και  $N \cdot \log_2 N$  μιγαδικές προσθέσεις. Επομένως, η πολυπλοκότητα του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier (Fast Fourier Transform – FFT) είναι της τάξης  $O(N \cdot \log_2 N)$ .

Η βέλτιστη λειτουργία του FFT αλγορίθμου επιτυγχάνεται όταν  $N = 2^m$ , δηλαδή το μήκος  $N$  είναι δύναμη του 2. Επομένως, ο FFT αλγόριθμος είναι ιδιαίτερα ταχύς και μάλιστα παρουσιάζει τη μεγαλύτερη δυνατή εξοικονόμηση χρόνου σε σχέση με τον αλγόριθμο που βασίζεται στη χρήση του ορισμού του DFT. Η χειρότερη περίπτωση για τον FFT αλγόριθμο είναι η περίπτωση, όπου το μήκος  $N$  είναι πρώτος αριθμός. Τότε ο αλγόριθμος δεν παρουσιάζει εξοικονόμηση χρόνου σε σχέση με τον αλγόριθμο, που βασίζεται στη χρήση του ορισμού του DFT.

Στην περίπτωση, που το μήκος  $N$  δεν είναι δύναμη του 2 ούτε πρώτος αριθμός, υπάρχουν FFT αλγόριθμοι, που είναι ταχείς. Ο αλγόριθμος **FFT με βάση r(radix-rFFT)** έχει ως βασική ιδέα τη διάσπαση (αποδεκάτιση) του σήματος, τον DFT  $N$  σημείων του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε, σε  $r$  σήματα μήκους  $N/r$ . Ο αλγόριθμος **FFT πρώτων παραγόντων** έχει ως βασική ιδέα τη διάσπαση (αποδεκάτιση) του σήματος χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση του  $N$  σε γινόμενο **πρώτων** αριθμών.

Χρήσιμη βιβλιογραφία είναι τα βιβλία Chu & George, 2000, Rao, Kim, Hwang, 2010, Σκόδρας & Αναστασόπουλος, 2003.

### 8.2.2. FFT με αποδεκάτιση στον χρόνο

Θεωρούμε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)$  πεπερασμένης διάρκειας  $N$  όπου  $N$  **άρτιος**. Η βασική ιδέα του αλγορίθμου **FFT με αποδεκάτιση στον χρόνο**(DecimationInTimeFFT – **DITFFT**) είναι η διάσπαση του σήματος τον DFT  $N$  σημείων, του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε, σε 2 σήματα με μισό μήκος  $N/2$  το κάθε ένα: το ένα σήμα αποτελείται από τα δείγματα του σήματος με άρτιο (even) δείκτη και το άλλο σήμα αποτελείται από τα δείγματα του σήματος με περιττό (odd) δείκτη.

Τα δείγματα του σήματος με άρτιο (even) δείκτη είναι  $N/2$ :

$$x_1(n) = x(2 \cdot n), n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (8.11)$$

και τα δείγματα του σήματος με περιττό (odd) δείκτη είναι επίσης  $N/2$ :

$$x_2(n) = x(2 \cdot n + 1), n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (8.12)$$

Στην περίπτωση αυτή, ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT)  $N$  σημείων του σήματος  $x(n)$  είναι:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk}, k \in [0, N-1]$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

και γράφεται:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2 \cdot n) \cdot W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2 \cdot n + 1) \cdot W_N^{(2n+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) \cdot W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) \cdot W_N^{(2n+1)k} \end{aligned}$$

Όμως

$$W_N^2 = \left( e^{-j2\pi/N} \right)^2 = e^{-(j2\pi)/(N/2)} = W_{N/2},$$

οπότε

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) \cdot W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) \cdot W_N^{(2n+1)k} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) \cdot W_{N/2}^{nk} + W_N^k \cdot \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) \cdot W_{N/2}^{nk}.$$

Άρα,

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k \cdot X_2(k), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (8.13)$$

όπου

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) \cdot W_{N/2}^{nk} \quad (8.14)$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) \cdot W_{N/2}^{nk} \quad (8.15)$$

Έτσι, οι πρώτες  $N/2$  τιμές του DFT  $N$  σημείων του σήματος  $x(n)$  μπορούν να υπολογιστούν από τους DFT  $N/2$  σημείων των σημάτων  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ .

Για τον υπολογισμό των υπόλοιπων  $N/2$  τιμών του DFT  $N$  σημείων του σήματος  $x(n)$  χρησιμοποιούνται οι σχέσεις:

$$X_1\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

$$X_2\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_2(k), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

οι οποίες ισχύουν επειδή

$$X_1\left(k + \frac{N}{2}\right) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) \cdot W_{N/2}^{n(k+N/2)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) \cdot W_{N/2}^{nk} \cdot W_{N/2}^{n \cdot N/2} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) \cdot W_{N/2}^{nk} = X_1(k)$$

$$X_2\left(k + \frac{N}{2}\right) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) \cdot W_{N/2}^{n(k+N/2)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) \cdot W_{N/2}^{nk} \cdot W_{N/2}^{n \cdot N/2} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) \cdot W_{N/2}^{nk} = X_2(k)$$

επειδή

$$W_{N/2}^{n \cdot N/2} = \left(e^{-j2\pi/(N/2)}\right)^{n \cdot N/2} = \left(e^{-j2\pi}\right)^n = 1.$$

Άρα,

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k \cdot X_2(k), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

επειδή

$$W_N^{k + \frac{N}{2}} = -W_N^k.$$

Έτσι καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k \cdot X_2(k), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (8.16)$$

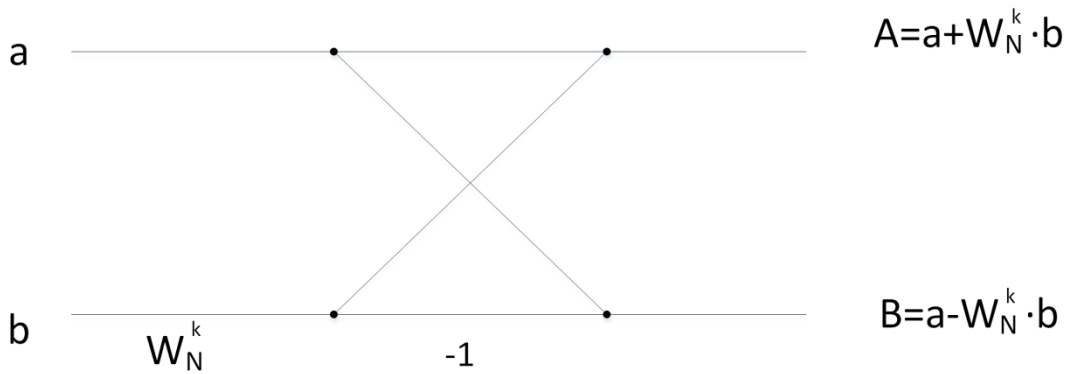
$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k \cdot X_2(k), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (8.17)$$

Η βασική δομή των παραπάνω σχέσεων ονομάζεται **πεταλούδα DIT(DITbutterfly)** και περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$A = a + W_N^k \cdot b \quad (8.18)$$

$$B = a - W_N^k \cdot b \quad (8.19)$$

Η πεταλούδα DIT φαίνεται στο Σχήμα 8.1. Ο πολλαπλασιασμός με την ποσότητα  $W_N^k$  γίνεται *πριν* την πρόσθεση/αφαίρεση. Για τον υπολογισμό της πεταλούδας απαιτείται ένας μιγαδικός πολλαπλασιασμός και δύο μιγαδικές προσθέσεις. Κάθε μιγαδικός πολλαπλασιασμός απαιτεί τέσσερις πραγματικούς πολλαπλασιασμούς και δύο πραγματικές προσθέσεις. Κάθε μιγαδική πρόσθεση απαιτεί δύο πραγματικές προσθέσεις.



Σχήμα 8.1H πεταλούδα DIT.

Έτσι, ο υπολογισμός του DFT  $N$  σημείων του σήματος  $x(n)$  μήκους  $N$ , ανάγεται στον υπολογισμό των DFT  $N/2$  σημείων των σημάτων  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$  μήκους  $N/2$ . Άρα, συνολικά έχουμε μείωση της πολυπλοκότητας κατά 50% περίπου. Θεωρούμε ότι το μήκος του σήματος  $x(n)$  είναι δύναμη του 2:  $N = 2^m$ . Η διαδικασία διάσπασης του σήματος σε δείγματα με άρτιο και περιττό δείκτη μπορεί να επαναληφθεί. Έτσι ο κάθε DFT  $N/2$  σημείων μπορεί να υπολογιστεί με 2 DFT  $N/4$  σημείων. Η διαδικασία διάσπασης (αποδεκάτισης) επαναλαμβάνεται  $m-1 = \log_2 N - 1$  φορές. Στο τέλος καταλήγουμε σε υπολογισμό  $N/2$  DFT 2 σημείων. Ο κάθε ένας από τους  $N/2$  DFT μπορεί να υπολογιστεί με μία μιγαδική πρόσθεση και μία μιγαδική αφαίρεση.

### Αντιστροφή bit

Για την εφαρμογή του αλγορίθμου απαιτείται αναδιάταξη της θέσης των δειγμάτων του αρχικού σήματος, ώστε στην έξοδο να έχουμε το αποτέλεσμα με την επιθυμητή κανονική διάταξη.

Η διάταξη των δειγμάτων εξόδου (DFT του αρχικού σήματος) είναι κανονική, ενώ η διάταξη των δειγμάτων εισόδου (αρχικό σήμα) δεν είναι κανονική, ως αποτέλεσμα της σταδιακής αποσύνθεσης των δειγμάτων εισόδου. Η διάταξη των δειγμάτων εισόδου προκύπτει από την (κανονική) διάταξη των δειγμάτων εξόδου με αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων των δεικτών τους (*bit-reversal*). Αν  $N = 2^m$ , ο μη αρνητικός ακέραιος  $n$  με δυαδική αναπαράσταση  $(n)_{10} = (b_m \dots b_2 b_1)_2$  μετατρέπεται με αντιστροφή bit στο μη αρνητικό ακέραιο  $n'$  με δυαδική αναπαράσταση  $(n')_{10} = (b_1 b_2 \dots b_m)_2$  και το δείγμα εισόδου αρχικής θέσης  $n$  αποθηκεύεται στη νέα θέση  $n'$ . Στον Πίνακα 8.2 φαίνεται η αντιστοίχιση των κανονικών και των αναδιατεταγμένων δεικτών για  $N = 8$ . Οι έξοδοι, που προκύπτουν σε κάθε βήμα, μπορούν να αποθηκευτούν στις ίδιες θέσεις, όπου είναι αποθηκευμένες οι εισοδοί, γιατί οι εισοδοί δεν χρειάζονται στο επόμενο βήμα.

κανονική διάταξη		αναδιάταξη με αντιστροφή της σειράς των bit	
δεκαδικός	δυαδικός	δυαδικός	δεκαδικός
0	000	111	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Πίνακας 8.2 Αναδιάταξη δεικτών με αντιστροφή bit.

Παράδειγμα.

Δίνεται το σήμα:

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$$

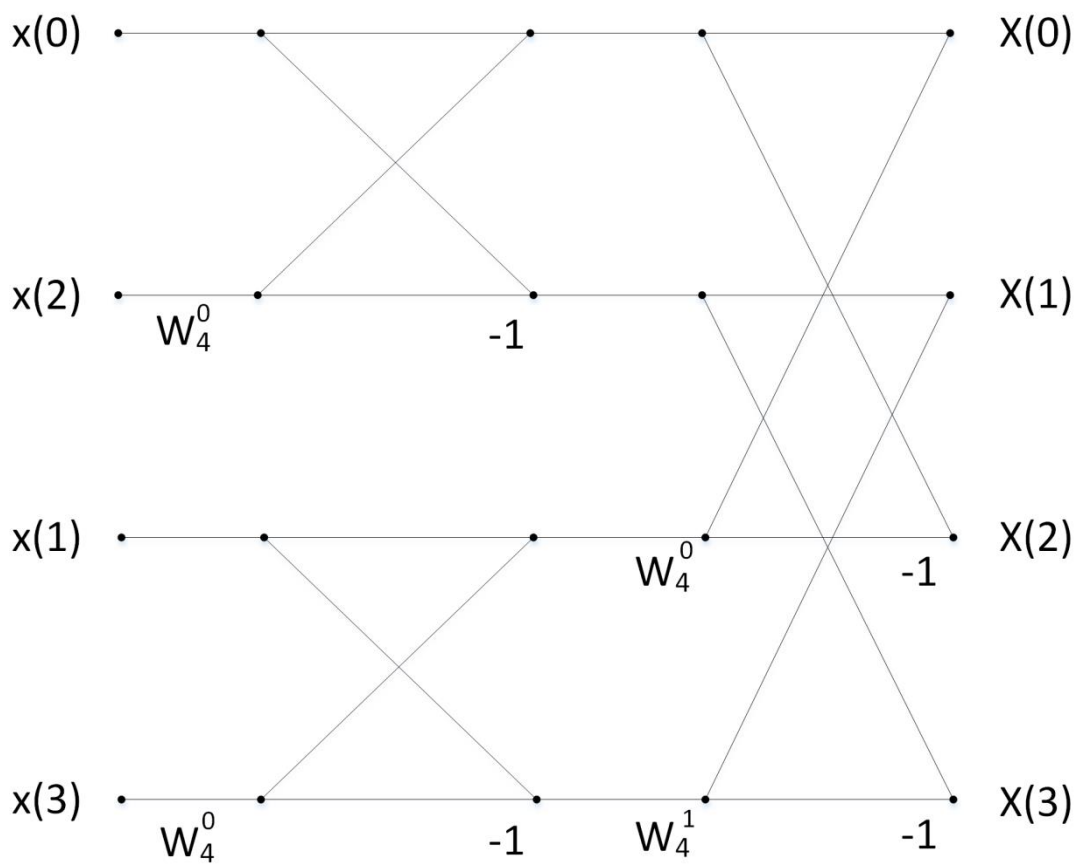
Να υπολογίσετε τον DFT  $N=4$  σημείων του σήματος  $x(n)$  με τον αλγόριθμο FFT με αποδεκάτιση στον χρόνο (DITFFT).

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT)  $N=4$  σημείων του σήματος  $x(n)$  είναι:

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n) \cdot W_4^{nk}, k \in [0,3]$$

$$W_4 = e^{-j2\pi/4} = e^{-j\pi/2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - j \cdot 1 = -j.$$

Το διάγραμμα ροής DITFFT 4 σημείων φαίνεται στο Σχήμα 8.2. Αξίζει να σημειωθεί η αναδιάταξη στα δείγματα εισόδου, ώστε η διάταξη των δειγμάτων εξόδου να είναι κανονική.



Σχήμα 8.2 Διάγραμμα ροής DITFFT 4 σημείων.

Ο υπολογισμός DFT  $N=4$  σημείων με DITFFT φαίνεται παρακάτω:

$x(0) = 1$		$1 + 1 \cdot 3 = 4$		$4 + 1 \cdot 6 = 10 = X(0)$
	$W_4^0 = 1$		$W_4^0 = 1$	
$x(2) = 3$		$1 - 1 \cdot 3 = -2$		$-2 + (-j) \cdot (-2) = -2 + 2j = X(1)$
$x(1) = 2$		$2 + 1 \cdot 4 = 6$		$4 - 1 \cdot 6 = -2 = X(2)$
	$W_4^0 = 1$		$W_4^1 = -j$	
$x(3) = 4$		$2 - 1 \cdot 4 = -2$		$-2 - (-j) \cdot (-2) = -2 - 2j = X(3)$

Ο DFT  $N = 4$  σημείων του σήματος  $x(n)$  είναι:

$$X(k) = \begin{cases} 10, & k = 0 \\ -2 - 2j, & k = 1 \\ -2, & k = 2 \\ -2 + 2j, & k = 3 \end{cases}$$

### 8.2.3. FFT με αποδεκάλιση στη συχνότητα

Θεωρούμε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)$  πεπερασμένης διάρκειας  $N$ , όπου  $N$  άρτιος. Η βασική ιδέα του αλγορίθμου **FFT με αποδεκάλιση στη συχνότητα** (Decimation In Frequency FFT – DIFFFT) είναι η διάσπαση του σήματος των DFT  $N$  σημείων, του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε, σε 2 σήματα με μισό μήκος  $N/2$  το κάθε ένα: το ένα σήμα αποτελείται από τα πρώτα  $N/2$  δείγματα του σήματος και το δεύτερο σήμα αποτελείται από τα επόμενα  $N/2$  δείγματα του σήματος:

$$x_1(n) = x(n), n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (8.20)$$

$$x_2(n) = x\left(n + \frac{N}{2}\right), n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (8.21)$$

Στην περίπτωση αυτή, ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT)  $N$  σημείων του σήματος  $x(n)$  είναι:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk}, 0 \leq k \leq N-1$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

και γράφεται:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) \cdot W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x_1(n) + W_N^{Nk/2} \cdot x_2(n)) \cdot W_N^{nk} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι:

$$e^{-j\pi k} = \begin{cases} +1, & k \text{ άρτιος} \\ -1, & k \text{ περιττός} \end{cases}$$

κάνουμε διάσπαση της ακολουθίας  $X(k)$  σε δύο ακολουθίες, η μία αποτελείται από τα δείγματα της ακολουθίας  $X(k)$  με άρτιο (even) δείκτη και η άλλη αποτελείται από τα δείγματα της ακολουθίας  $X(k)$  με περιττό (odd) δείκτη:

$$X(2 \cdot k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \{(x_1(n) + x_2(n)) \cdot W_{N/2}^{nk}\} \quad (8.22)$$

$$X(2 \cdot k + 1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \{(x_1(n) - x_2(n)) \cdot W_N^n \cdot W_{N/2}^{nk}\} \quad (8.23)$$

Θέτοντας

$$x_+(n) = x_1(n) + x_2(n), n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (8.24)$$

$$x_-(n) = (x_1(n) - x_2(n)) \cdot W_N^n, n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (8.25)$$

έχουμε:

$$X(2 \cdot k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \{x_+(n) \cdot W_{N/2}^{nk}\}$$

$$X(2 \cdot k + 1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \{x_-(n) \cdot W_{N/2}^{nk}\}$$

και

$$X(2 \cdot k) = X_+(k), k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X(2 \cdot k + 1) = X_-(k), k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Έτσι, καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$X(2 \cdot k) = X_1(k) + X_2(k), k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (8.26)$$

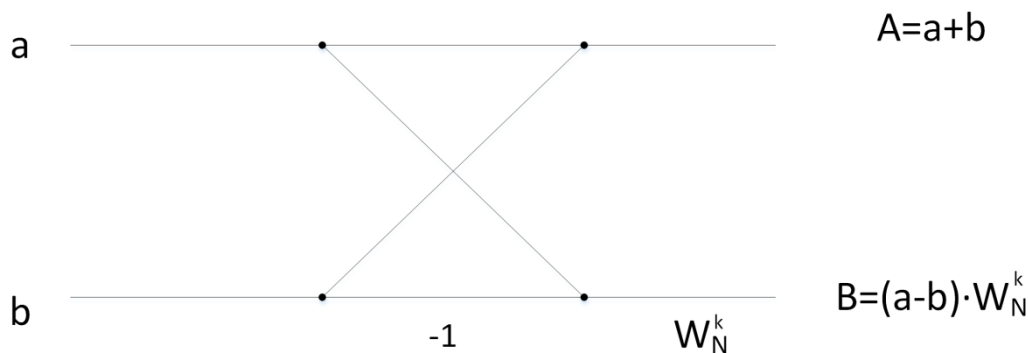
$$X(2 \cdot k + 1) = (X_1(k) - X_2(k)) \cdot W_N^k, k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (8.27)$$

Η βασική δομή των παραπάνω σχέσεων ονομάζεται **πεταλούδα DIF (DIFbutterfly)** και περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$A = a + b \quad (8.28)$$

$$B = (a - b) \cdot W_N^k \quad (8.29)$$

Η πεταλούδα DIF φαίνεται στο Σχήμα 8.3. Ο πολλαπλασιασμός με την ποσότητα  $W_N^k$  γίνεται *μετά* την πρόσθεση/αφαίρεση. Για τον υπολογισμό της πεταλούδας απαιτείται ένας μιγαδικός πολλαπλασιασμός και δύο μιγαδικές προσθέσεις. Κάθε μιγαδικός πολλαπλασιασμός απαιτεί τέσσερις πραγματικούς πολλαπλασιασμούς και δύο πραγματικές προσθέσεις. Κάθε μιγαδική πρόσθεση απαιτεί δύο πραγματικές προσθέσεις.



Σχήμα 8.3 Η πεταλούδα DIF.

Έτσι, ο υπολογισμός του DFT του σήματος  $x(n)$  μήκους  $N$ , ανάγεται στον υπολογισμό των DFT των σημάτων  $x_+(n)$  και  $x_-(n)$  μήκους  $N/2$ . Άρα, συνολικά έχουμε μείωση της πολυπλοκότητας κατά 50% περίπου. Θεωρούμε ότι το μήκος του σήματος  $x(n)$  είναι δύναμη του 2:  $N = 2^m$ . Η διαδικασία διάσπασης του σήματος σε δείγματα με άρτιο και περιττό δείκτη μπορεί να επαναληφθεί. Έτσι ο κάθε DFT  $N/2$  σημείων μπορεί να υπολογιστεί με 2 DFT  $N/4$  σημείων. Η διαδικασία διάσπασης (αποδεκάτισης) επαναλαμβάνεται  $m-1 = \log_2 N - 1$  φορές. Στο τέλος καταλήγουμε σε υπολογισμό  $N/2$  DFT 2 σημείων. Ο κάθε ένας από τους  $N/2$  DFT μπορεί να υπολογιστεί με μία μιγαδική πρόσθεση και μία μιγαδική αφαίρεση.

### Αντιστροφή bit

Για την εφαρμογή του αλγορίθμου απαιτείται αναδιάταξη της θέσης των δειγμάτων εξόδου, ώστε στην έξοδο να έχουμε το αποτέλεσμα με την επιθυμητή κανονική διάταξη.

Η διάταξη των δειγμάτων εισόδου (αρχικό σήμα) είναι κανονική, ενώ η διάταξη των δειγμάτων εξόδου (DFT του αρχικού σήματος) δεν είναι κανονική. Η διάταξη των δειγμάτων εξόδου προκύπτει από την (κανονική)



διάταξη των δειγμάτων εισόδου με αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων των δεικτών τους (*bit-reversal*). Οι έξοδοι, που προκύπτουν σε κάθε βήμα, μπορούν να αποθηκευτούν στις ίδιες θέσεις, όπου είναι αποθηκευμένες οι εισοδοι, γιατί οι εισοδοι δεν χρειάζονται στο επόμενο βήμα.

Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου FFT με αποδεκάτιση στη συχνότητα είναι ίση με την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου FFT με αποδεκάτιση στον χρόνο.

Παράδειγμα.

Δίνεται το σήμα:

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$$

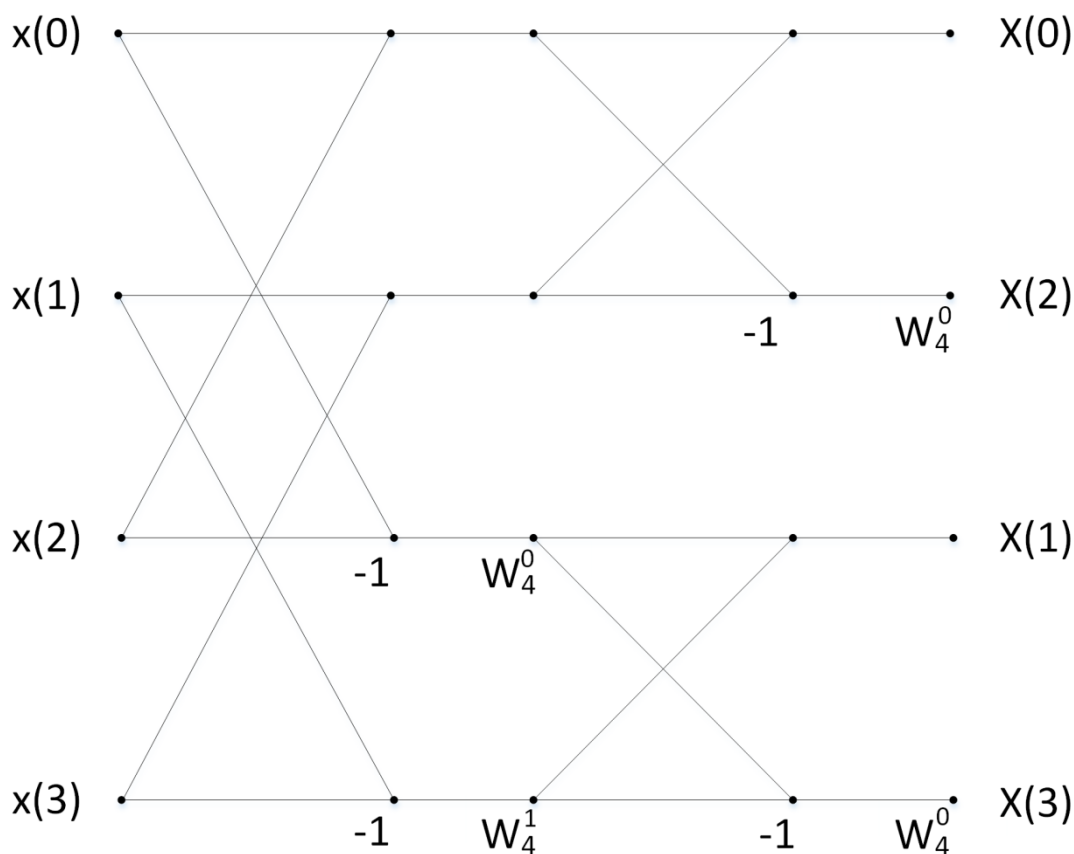
Να υπολογίσετε τον DFT  $N=4$  σημείων του σήματος  $x(n)$  με τον αλγόριθμο FFT με αποδεκάτιση στη συχνότητα (DIFFFT).

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT)  $N=4$  σημείων του σήματος  $x(n)$  είναι:

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n) \cdot W_4^{nk}, k \in [0, 3]$$

$$W_4 = e^{-j2\pi/4} = e^{-j\pi/2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - j \cdot 1 = -j$$

Το διάγραμμα ροής DIFFFT 4 σημείων φαίνεται στο Σχήμα 8.4. Αξίζει να σημειωθεί η αναδιάταξη στα δείγματα εξόδου, ώστε η διάταξη των δειγμάτων εξόδου να είναι κανονική.



Σχήμα 8.4 Διάγραμμα ροής DIFFFT 4 σημείων.

Ο υπολογισμός DFT  $N=4$  σημείων με DIFFFT φαίνεται παρακάτω:

$x(0) = 1$		$1 + 3 = 4$		$4 + 6 = 10 = X(0)$
	$W_4^0 = 1$		$W_4^0 = 1$	

$x(1) = 2$		$2 + 4 = 6$		$(4 - 6) \cdot 1 = -2 = X(2)$
$x(2) = 3$		$(1 - 3) \cdot 1 = -2$		$-2 + (-2j) = -2 - 2j = X(1)$
	$W_4^1 = -j$		$W_4^0 = 1$	
$x(3) = 4$		$(2 - 4) \cdot (-j) = -2j$		$(-2 - (-2j)) \cdot 1 = -2 + 2j = X(3)$

Υπολογισμός DFT με DITFFT

Ο DFT  $N = 4$  σημείων του σήματος  $x(n)$  είναι:

$$X(k) = \begin{cases} 10, & k = 0 \\ -2 - 2j, & k = 1 \\ -2, & k = 2 \\ -2 + 2j, & k = 3 \end{cases}$$

Οι αλγόριθμοι FFT με αποδεκάτιση στον χρόνο και FFT με αποδεκάτιση στη συχνότητα είναι ιδιαίτερα ταχείς σε σχέση με τον DFT. Για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT)  $N = 2^m$  σημείων ενός σήματος με χρήση του ορισμού απαιτούνται  $N^2$  μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και  $N \cdot (N - 1)$  μιγαδικές προσθέσεις. Για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT)  $N = 2^m$  σημείων ενός σήματος με χρήση FFT απαιτούνται  $\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$  μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και  $N \cdot \log_2 N$  μιγαδικές προσθέσεις. Στον Πίνακα 8.3 παρουσιάζεται η πολυπλοκότητα των αλγορίθμων DFT και FFT με αποδεκάτιση στον χρόνο / στη συχνότητα. Αξίζει να σημειωθεί ότι όσο αυξάνει ο αριθμός  $N$ , τόσο ταχύτερος γίνεται ο αλγόριθμος FFT σε σχέση με τον DFT.

	DFT		FFT	
	μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί	μιγαδικές προσθέσεις	μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί	μιγαδικές προσθέσεις
$N$	$N^2$	$N \cdot (N - 1)$	$\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$	$N \cdot \log_2 N$
2	4	2	1	2
4	16	12	4	8
8	64	56	12	24
16	256	240	32	64
32	1024	992	80	160
64	4096	4032	192	384
128	16384	16256	448	896
256	65536	65280	1024	2048
512	262144	261632	2304	4608
1024	1048576	1047552	5120	10240

Πίνακας 8.3 Πολυπλοκότητα DFT και FFT με αποδεκάτιση στον χρόνο / στη συχνότητα.

#### 8.2.4. FFT με βάση $r$

Θεωρούμε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)$  πεπερασμένης διάρκειας  $N$ , όπου  $N = r^m$ . Η βασική ιδέα του αλγορίθμου **FFT με βάση  $r$  (radix- $r$ FFT)** είναι η διάσπαση (αποδεκάτιση) του σήματος, των DFT  $N$  σημείων, του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε, σε  $r$  σήματα μήκους  $N / r = r^{m-1}$ :

$$x_1(n) = x(r \cdot n)$$

$$x_2(n) = x(r \cdot n + 1)$$

$$x_3(n) = x(r \cdot n + 2)$$

...

$$x_r(n) = x(r \cdot n + r - 1)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N / r - 1$$

Τότε

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{i=1}^r W_N^{(i-1)k} \cdot X_i(k) \\
 X\left(k + \frac{N}{r}\right) &= \sum_{i=1}^r W_r^{(i-1)k} \cdot W_N^{(i-1)k} \cdot X_i(k) \\
 X\left(k + 2 \cdot \frac{N}{r}\right) &= \sum_{i=1}^r W_r^{(i-1)} \cdot W_N^{(i-1)k} \cdot X_i(k) \\
 &\dots \\
 X\left(k + (r-1) \cdot \frac{N}{r}\right) &= \sum_{i=1}^r W_r^{-(i-1)} \cdot W_N^{(i-1)k} \cdot X_i(k) \tag{8.30} \\
 k &= 0, 1, \dots, N/r - 1
 \end{aligned}$$

Έτσι ο υπολογισμός του DFT  $N$  σημείων του σήματος  $x(n)$  μήκους  $N$ , ανάγεται στον υπολογισμό  $r$  DFT  $N/r$  σημείων.

Ο αλγόριθμος DITFFT είναι ειδική περίπτωση του αλγορίθμου FFT με βάση  $r$ , όταν η βάση είναι  $r=2$ . Έτσι ο DITFFT αλγόριθμος ονομάζεται και αλγόριθμος FFT με βάση 2 (radix-2 FFT).

Η πολυπλοκότητα του FFT με βάση  $r$  είναι της τάξης  $O(N \cdot \log_r N)$ .

### 8.2.5. FFT πρώτων παραγόντων

Θεωρούμε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)$  πεπερασμένης διάρκειας  $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m$ , όπου  $p_1, p_2, \dots, p_m$  είναι *πρώτοι* αριθμοί. Η βασική ιδέα του αλγορίθμου **FFT πρώτων παραγόντων** είναι η διάσπαση του σήματος, των DFT  $N$  σημείων, του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε, χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση του  $N$  σε γινόμενο πρώτων αριθμών, δηλαδή, η αποδεκάτιση του σήματος  $x(n)$  σε  $p_1 = N/N_1$  σήματα μήκους  $N_1 = p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_m$ :

$$\begin{aligned}
 x_1(n) &= x(p_1 \cdot n) \\
 x_2(n) &= x(p_1 \cdot n + 1) \\
 x_3(n) &= x(p_1 \cdot n + 2) \\
 &\dots \\
 x_{p_1}(n) &= x(p_1 \cdot n + p_1 - 1) \\
 n &= 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1
 \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{i=1}^{p_1} W_N^{(i-1)k} \cdot X_i(k) \tag{8.31} \\
 k &= 0, 1, \dots, N - 1
 \end{aligned}$$

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με  $p_2 = \frac{N_1}{N_2}$  και  $N_2 = p_3 \cdot p_4 \cdot \dots \cdot p_m$ . Η διαδικασία επαναλαμβάνεται  $m$  φορές.

Ο αλγόριθμος FFT πρώτων παραγόντων απαιτεί  $N \cdot \left( \sum_{i=1}^m p_i - m \right)$  (μιγαδικούς) πολλαπλασιασμούς.

Η πολυπλοκότητα του FFT πρώτων παραγόντων είναι της τάξης  $O\left(N \cdot \left( \sum_{i=1}^m p_i - m \right)\right)$ .

Στην περίπτωση όπου  $p_1 = p_2 = \dots = p_m = 2$  (οπότε η βάση είναι  $r=2$ ), η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου FFT πρώτων παραγόντων είναι της τάξης  $O(N \cdot \log_2 N)$ .

Επομένως, η πολυπλοκότητα του FFT πρώτων παραγόντων εξαρτάται από την τιμή του  $N$  και από την παραγοντοποίηση του  $N$ . Έτσι, όταν  $N$  είναι δύναμη του 2, τότε ο εκτελέσιμος χρόνος είναι πολύ μικρός, ενώ όταν  $N$  είναι πρώτος αριθμός, τότε ο εκτελέσιμος χρόνος είναι πολύ μεγάλος.

Μπορείτε να διερευνήσετε το γρήγορο μετασχηματισμό Fourier (FFT) με το Διαδραστικό πρόγραμμα 8.2.



**Διαδραστικό πρόγραμμα 8.2** Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier (FFT).

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

**8.2.6. Απόκριση συχνότητας FIR φίλτρων και FFT**

Μία εφαρμογή του FFT είναι ο υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας ενός FIR φίλτρου με χρήση FFT. Θεωρούμε ένα σήμα  $x(n), n \in [0 : L - 1]$  πεπερασμένου μήκους. Τότε ο DFT  $N$  σημείων του σήματος είναι:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) \cdot W_N^{nk}, k \in [0 : N - 1] \tag{8.32}$$

όπου

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \tag{8.33}$$

Όταν  $L < N$ , τότε το σήμα συμπληρώνεται με  $N - L$  μηδενικά στο τέλος (*zeropadding*). Είναι γνωστό ότι η κρουστική απόκριση ενός FIR φίλτρου είναι ένα σήμα πεπερασμένου μήκους  $L : h(n), n \in [0 : L - 1]$ . Επίσης είναι γνωστό ότι η απόκριση συχνότητας του FIR φίλτρου είναι ο DTFT  $H(e^{j\omega})$  της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$ :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n) \cdot e^{-j\omega n} \tag{8.34}$$

Ο DTFT  $H(e^{j\omega})$  της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$  μπορεί να υπολογιστεί από τον DFT  $N$  σημείων (FFT  $N$  σημείων) της κρουστικής απόκρισης με συμπλήρωση μηδενικών στο τέλος, σε  $N$  ισαπέχουσες συχνότητες σε κάποιο διάστημα συχνότητων μήκους  $2\pi$ , όπως για παράδειγμα στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ :

$$H(e^{j2k\pi/N}) = H(k) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n) \cdot e^{-j(2k\pi/N)n}, k \in [0 : N - 1] \tag{8.35}$$

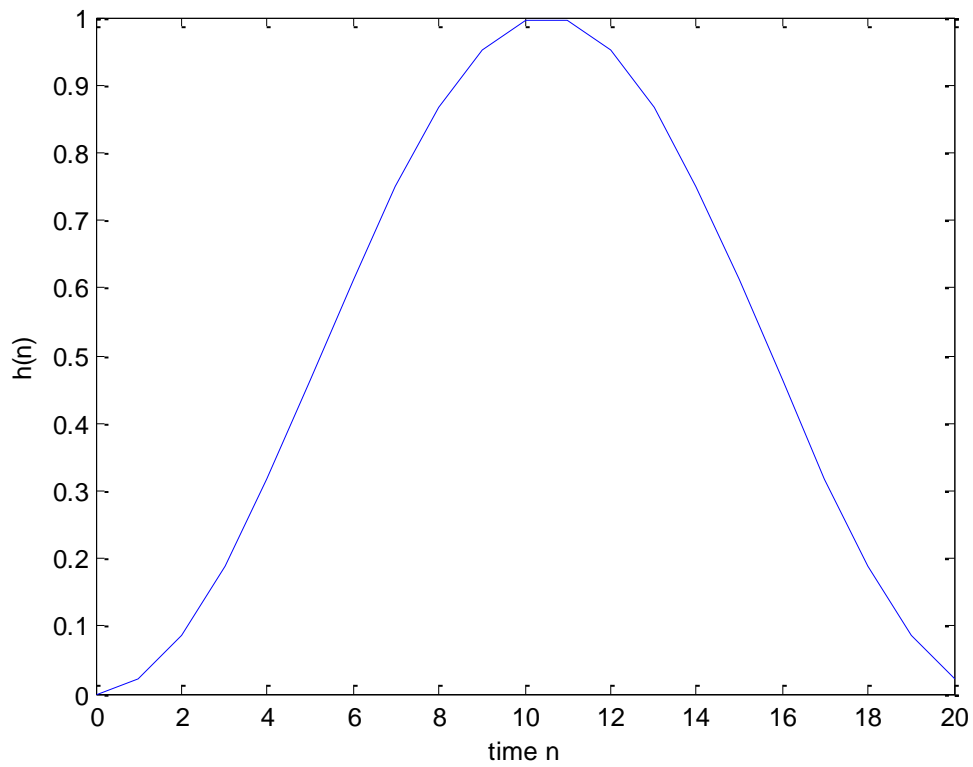
Η χρήση αρκετά μεγάλης τιμής του  $N$  οδηγεί σε πολύ ικανοποιητικό υπολογισμό της απόκρισης συχνότητας.

Παράδειγμα.

Δίνεται η κρουστική απόκριση του FIR φίλτρου Hann (ονομασία από τον J. vonHann)

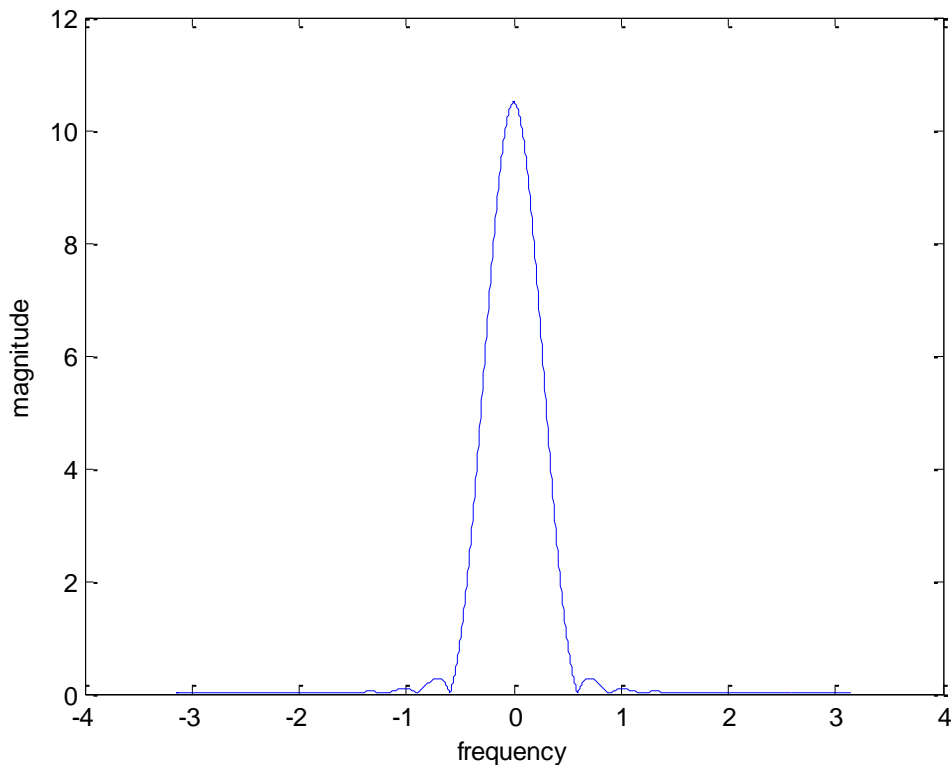
$$h(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L}n\right), n \in [0 : L - 1]$$

Στο Σχήμα 8.5 φαίνεται η κρουστική απόκριση του φίλτρου Hann με μήκος  $L = 21$ .



**Σχήμα 8.5** Κρουστική απόκριση φίλτρου Hann.

Η απόκριση συχνότητας του FIR φίλτρου Hann μπορεί να υπολογιστεί με χρήση FFT. Στο Σχήμα 8.6 φαίνεται το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του φίλτρου Hann και το μέτρο της απόκρισης συχνότητας, ο υπολογισμός της οποίας έγινε με χρήση FFT  $N = 2^{10}$  σημείων της κρουστικής απόκρισης, σε  $N = 2^{10}$  ισαπέχουσες συχνότητες στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ .



Σχήμα 8.6 Απόκριση συχνότητας φίλτρου Hann.

### 8.2.7. Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier σε προγραμματιστικό περιβάλλον 1-0-3-0-0-0

Η συνάρτηση  $[X]=\text{fft}(x, N)$  χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ευθέως διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT) με αλγόριθμους γρήγορου μετασχηματισμού Fourier (FFT). Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο το διάνυσμα  $x$  με τις τιμές ενός σήματος διακριτού χρόνου και την παράμετρο  $N$  με το πλήθος των σημείων του διακριτού μετασχηματισμού Fourier. Η συνάρτηση συμπληρώνει αυτόματα το σήμα με μηδενικά, αν απαιτείται. Η συνάρτηση παράγει στην έξοδο το διάνυσμα  $X$  με το διακριτό μετασχηματισμό Fourier  $N$  σημείων. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier  $N=4$  σημείων του σήματος  $x(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)+4\delta(n-3)$  απαιτείται η κλήση:

$x=[1 \ 2 \ 3 \ 4]; N=4; [X]=\text{fft}(x, N)$

Το αποτέλεσμα είναι:

$X = 10.0000 \quad -2.0000 + 2.0000i \quad -2.0000 \quad -2.0000 - 2.0000i$

Η συνάρτηση  $x=\text{ifft}(X, N)$  χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT). Η συνάρτηση δέχεται ως είσοδο το διάνυσμα  $X$  με τις τιμές ενός σήματος διακριτού χρόνου και την παράμετρο  $N$  με το πλήθος των σημείων του αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού Fourier. Η συνάρτηση παράγει στην έξοδο το διάνυσμα  $x$  με τον αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier  $N$  σημείων. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του αντίστροφου

μετασχηματισμού Fourier  $N=4$  σημείων του σήματος  $X(k)=\begin{cases} 10, & k=0 \\ -2-2j, & k=1 \\ -2, & k=2 \\ -2+2j, & k=3 \end{cases}$

απαιτείται η κλήση:

$X=[10 \ -2+2i \ -2 \ -2-2i]; N=4; [x]=\text{ifft}(X, N)$

Το αποτέλεσμα είναι:

$x = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

### 8.3. Λυμένες Ασκήσεις

#### 1-2-3-4-0-0

1. Να υπολογίσετε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier  $N = 10$  σημείων του σήματος  $x(n) = u(n) - u(n-2)$ .

Λύση.

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier  $N$  σημείων του σήματος  $x(n) = u(n) - u(n-2)$  είναι:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk}, k \in [0: N-1],$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}.$$

Επομένως,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^9 [u(n) - u(n-2)] \cdot W_{10}^{nk} = \sum_{n=0}^2 1 \cdot W_{10}^{nk} = \sum_{n=0}^2 (W_{10}^k)^n = \frac{1 - (W_{10}^k)^3}{1 - W_{10}^k}, k \in [0:9]$$

$$W_{10} = e^{-j2\pi/10}$$

Δηλαδή,

$$X(k) = \frac{1 - e^{-j3k\pi/5}}{1 - e^{-jk\pi/5}}, k \in [0:9].$$

2. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier  $N$  σημείων του σήματος  $X(k) = N \cdot \delta(k)$ .

Λύση.

Ο αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier  $N$  σημείων του σήματος  $X(k) = N \cdot \delta(k)$  είναι:

$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-nk}, n \in [0: N-1],$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}.$$

Επομένως,

$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} N \cdot \delta(k) \cdot W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \cdot N \cdot \delta(0) \cdot W_N^{-n \cdot 0} = 1, n \in [0: N-1].$$

3. Δίνεται η γραμμική συνέλιξη  $x_\ell(n)$  των σημάτων πεπερασμένου μήκους  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ :

$$x_\ell(n) = x_1(n) * x_2(n) = \delta(n) + 10\delta(n-1) + 20\delta(n-2) + 30\delta(n-3) + 40\delta(n-4).$$

Να υπολογίσετε την κυκλική συνέλιξη  $N = 3$  σημείων  $x_c(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$  των σημάτων  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ .

Λύση.

Η γραμμική συνέλιξη  $x_\ell(n) = x_1(n) * x_2(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_\ell = 5$  και η κυκλική συνέλιξη  $N = 3$  σημείων  $x_c(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_c = 3$ . Επομένως, αφού  $N_c < N_\ell$ , ισχύει:

$$x_c(n) = x_\ell(n) + x_\ell(n + N_c), n \in [0: N_c - 1]$$

Άρα, η κυκλική συνέλιξη  $N = 3$  σημείων προκύπτει από το άθροισμα της γραμμικής συνέλιξης και της μετατόπισης της γραμμικής συνέλιξης κατά  $N_c = 3$  προς τα αριστερά για  $n \in [0:2]$ , όπως φαίνεται παρακάτω:

$n$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x_\ell(n)$					1	10	20	30	40
$x_\ell(n+3)$		1	10	20	30	40			
$x_c(n) = x_\ell(n) + x_\ell(n + N_c)$		1	10	20	31	50	20	30	40

Άρα,  $x_c(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = 31\delta(n) + 50\delta(n-1) + 20\delta(n-2)$ .

4. Να υπολογίσετε τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier  $N = 4$  σημείων του σήματος  $x(n) = \delta(n) + 10\delta(n-3)$

Λύση.

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier  $N$  σημείων του σήματος  $x(n) = \delta(n) + 10\delta(n-3)$  είναι:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk}, k \in [0: N-1],$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}.$$

Για  $N = 4$

$$W_4 = e^{-j2\pi/4} = e^{-j\pi/2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - j \cdot 1 = -j,$$

οπότε

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^3 [\delta(n) + 10\delta(n-3)] \cdot W_4^{nk} \\ &= 1 \cdot W_4^{0 \cdot k} + 10 \cdot W_4^{3 \cdot k} = 1 + 10 \cdot (-j)^{3k}, k \in [0:3] \end{aligned}$$

Επομένως,

$$X(k) = 1 + 10 \cdot (-j)^{3k}, k \in [0:3]$$

Δηλαδή,

$$X(0) = 1 + 10 \cdot (-j)^{3 \cdot 0} = 1 + 10 = 11$$

$$X(1) = 1 + 10 \cdot (-j)^{3 \cdot 1} = 1 + 10 \cdot (-j)^3 = 1 + 10j$$

$$X(2) = 1 + 10 \cdot (-j)^{3 \cdot 2} = 1 + 10 \cdot (-j)^6 = 1 - 10 = -9$$

$$X(3) = 1 + 10 \cdot (-j)^{3 \cdot 3} = 1 + 10 \cdot (-j)^9 = 1 - 10j$$

Άρα,

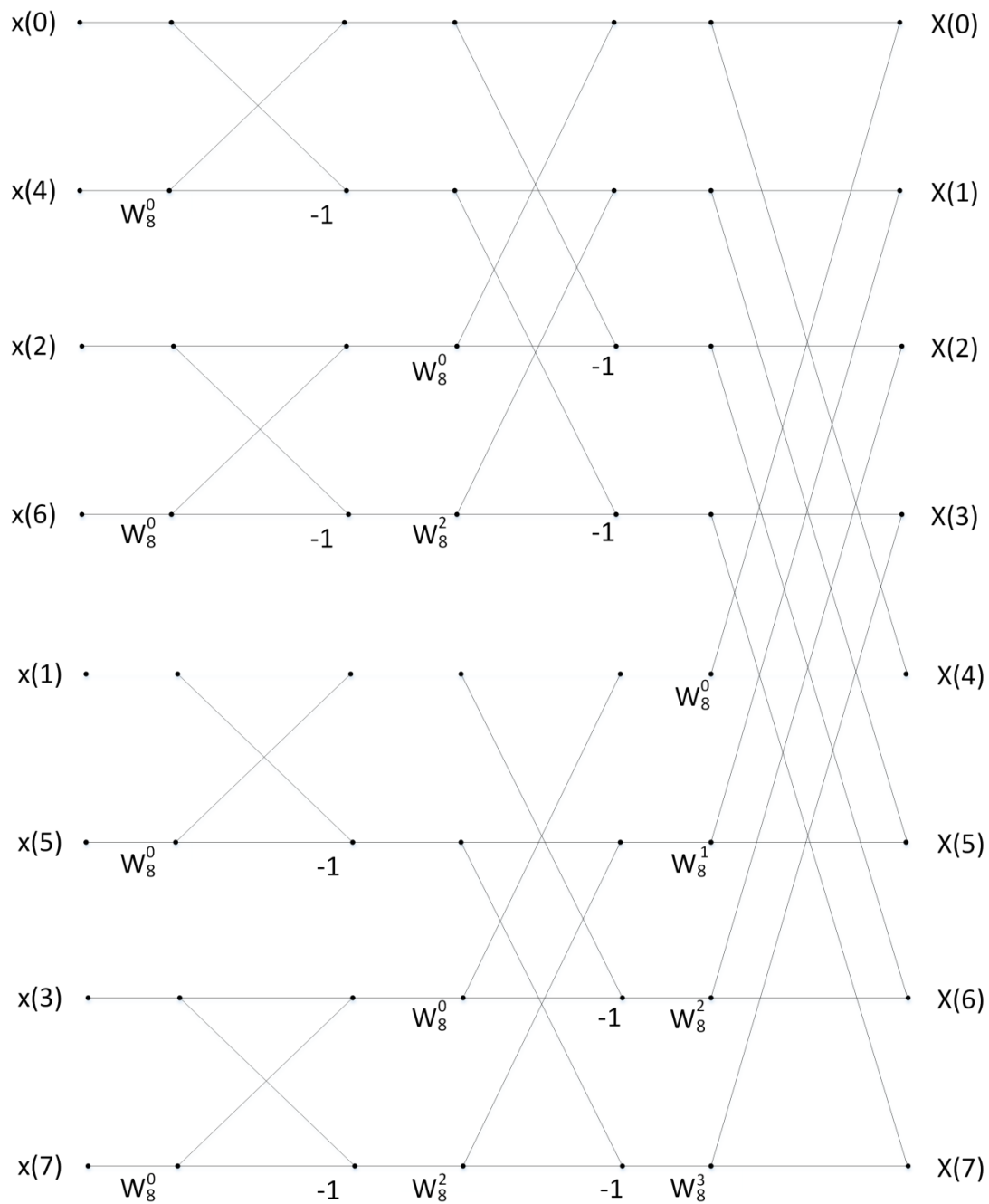
$$X(k) = \begin{cases} 11, & k = 0 \\ 1 + 10j, & k = 1 \\ -9, & k = 2 \\ 1 - 10j, & k = 3 \end{cases}$$

5. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα ροής DIT FFT 8 σημείων.

Λύση.

Το διάγραμμα ροής DIT FFT 8 σημείων φαίνεται στο Σχήμα 8.7.



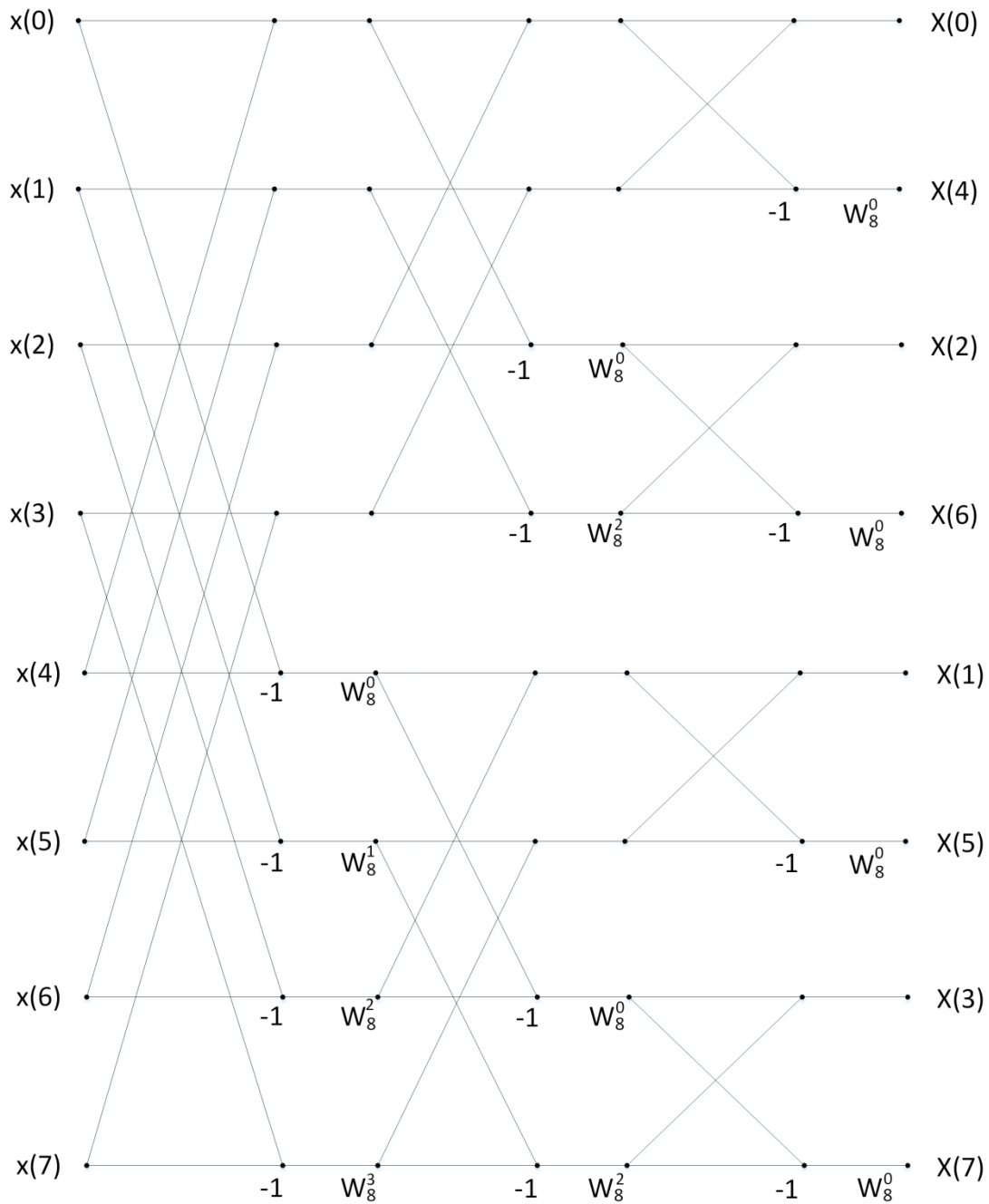


Σχήμα 8.7 Διάγραμμα ροής DITFFT 8 σημείων.

6. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα ροής DIF FFT 8 σημείων.

Λύση.

Το διάγραμμα ροής DIF FFT 8 σημείων φαίνεται στο Σχήμα 8.7.



Σχήμα 8.8 Διάγραμμα ροής DIF FFT 8 σημείων.

### 8.4. Ασκήσεις

1-2-3-4-0-0

1. Να υπολογίσετε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier  $N = 10$  σημείων των σημάτων:

$$x_1(n) = 1, n \in [0:9]$$

$$x_2(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$$

$$x_3(n) = e^{j2\pi n/5}, n \in [0:9]$$

$$x_4(n) = u(n) - u(n-5)$$

2. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier  $N = 10$  σημείων των ακολουθιών:

$$X_1(k) = 1, n \in [0:9]$$

$$X_2(k) = \cos(2\pi k / 5)$$

3. Να υπολογίσετε την κυκλική συνέλιξη  $N = 4$  σημείων  $x(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$  των σημάτων:

$$x_1(n) = 3\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$x_2(n) = \delta(n) + \delta(n-1) - \delta(n-2) - 2\delta(n-3)$$

4. Δίνεται το σήμα  $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-3)$  με DFT  $N = 5$  σημείων  $X(k)$ .

Να υπολογίσετε τον IDFT της ακολουθίας  $Y(k) = X^2(k)$ .

5. Δίνεται το σήμα  $x(n) = \delta(n) + 3\delta(n-3)$ .

Να υπολογίσετε τον FFT  $N = 4$  σημείων του σήματος  $x(n)$

α. με χρήση του αλγορίθμου FFT με αποδεκάτιση στον χρόνο,

β. με χρήση του αλγορίθμου FFT με αποδεκάτιση στη συχνότητα.

## 8.5. Εργαστηριακές Ασκήσεις

### Εργαστηριακή Άσκηση 13

### Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

**1-0-3-0-0-0**

1. Υπολογισμός διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT)

Δίνεται το σήμα  $x(n)$  πεπερασμένου μήκους  $N = 4$ :

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `signaldfst` να γράψετε πρόγραμμα για την παραγωγή του σήματος  $x(n)$  και για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier  $N = 4$  σημείων  $X(k)$  του σήματος  $x(n)$ .

Να εμφανίσετε τις τιμές των σημάτων  $x(n)$  και  $X(k)$ .

2. Γραμμικότητα

Να γράψετε πρόγραμμα για την επιβεβαίωση της ιδιότητας της γραμμικότητας του διακριτού μετασχηματισμού Fourier.

Να παράγετε τα σήματα  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$  πεπερασμένου μήκους  $N = 4$ :

$$x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$$

$$x_2(n) = 9\delta(n) + 8\delta(n-1) + 7\delta(n-2) + 6\delta(n-3)$$

Να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n) = 2 \cdot x_1(n) + 3 \cdot x_2(n)$ .

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `signaldfst` να υπολογίσετε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier  $N = 4$  σημείων  $X(k)$ .

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `signaldfst` να υπολογίσετε τους διακριτούς μετασχηματισμούς Fourier  $N = 4$  σημείων  $X_1(k)$  και  $X_2(k)$  και να υπολογίσετε την ποσότητα  $Y(k) = 2 \cdot X_1(k) + 3 \cdot X_2(k)$ .

Να εμφανίσετε τις τιμές των σημάτων  $X(k)$  και  $Y(k)$  και να διαπιστώσετε ότι είναι ίσα.

3. Κυκλική μετατόπιση

Δίνεται το σήμα  $x(n)$  πεπερασμένου μήκους  $N = 4$ :

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `signalcirshift` να γράψετε πρόγραμμα για την παραγωγή του σήματος  $x(n)$  και για την εκτέλεση των κυκλικών μετατοπίσεων  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ ,  $x_3(n)$  και  $x_4(n)$  του σήματος  $x(n)$  κατά 1, 2, 3 και 4, αντίστοιχα.

Να εμφανίσετε τις τιμές των σημάτων.

4. Ιδιότητα κυκλικής μετατόπισης διακριτού μετασχηματισμού Fourier

Να γράψετε πρόγραμμα για την επιβεβαίωση της ιδιότητας της κυκλικής μετατόπισης του διακριτού μετασχηματισμού Fourier.

Να παράγετε το σήμα  $x(n)$  πεπερασμένου μήκους  $N=4$ :

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `signalcircshift` να παράγετε την κυκλική μετατόπιση  $y(n)$  του σήματος  $x(n)$  κατά 1.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `signdft` να υπολογίσετε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier  $N=4$  σημείων  $Y(k)$ .

Να υπολογίσετε την ποσότητα  $Z(k) = W_N^{n_0 k} \cdot X(k)$  για  $n_0=1$ .

Να εμφανίσετε τις τιμές των σημάτων  $x(n)$  και  $y(n)$ .

Να εμφανίσετε τις τιμές των σημάτων  $Y(k)$  και  $Z(k)$  και να διαπιστώσετε ότι είναι ίσα.

5. Υπολογισμός κυκλικής συνέλιξης  $N$  σημείων

Δίνονται τα σήματα πεπερασμένου μήκους:

$$x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$$

$$x_2(n) = 4\delta(n) + 5\delta(n-1) + 6\delta(n-2) + 7\delta(n-3)$$

Να παράγετε τα σήματα  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ .

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `signalcircconv` να γράψετε πρόγραμμα για τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης  $N=4$  σημείων  $x(n)$  των σημάτων  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ .

Να εμφανίσετε τις τιμές των σημάτων  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$  και  $x(n)$ .

Να μελετήσετε τη συνάρτηση `conv`.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `conv` να γράψετε πρόγραμμα για τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης  $N=4$  σημείων  $x(n)$  των σημάτων  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ .

Να εμφανίσετε τις τιμές των σημάτων  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$  και  $x(n)$ .

6. Κυκλική συνέλιξη  $N$  σημείων και κυκλική συνέλιξη  $M$  σημείων όπου  $N \neq M$

Δίνονται τα σήματα πεπερασμένου μήκους:

$$x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$$

$$x_2(n) = 4\delta(n) + 5\delta(n-1) + 6\delta(n-2) + 7\delta(n-3)$$

Να παράγετε τα σήματα  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ .

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `signalcircconv` να γράψετε πρόγραμμα για τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης  $N=5$  σημείων  $x_5(n)$  και της κυκλικής συνέλιξης  $N=6$  σημείων  $x_6(n)$  των σημάτων  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ .

Να εμφανίσετε τις τιμές των σημάτων  $x_5(n)$  και  $x_6(n)$  και να επιβεβαιώσετε ότι η κυκλική συνέλιξη 5 σημείων και η κυκλική συνέλιξη 6 σημείων δεν είναι ίσες μεταξύ τους.

7. Γραμμική συνέλιξη ίση με κυκλική συνέλιξη

Δίνονται τα σήματα πεπερασμένου μήκους:

$$x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$$

$$x_2(n) = 5\delta(n) + 6\delta(n-1) + 7\delta(n-2) + 8\delta(n-3)$$

Το σήμα  $x_1(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_1=4$  και το σήμα  $x_2(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_2=4$ .

Η γραμμική συνέλιξη  $y_\ell(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_\ell = N_1 + N_2 - 1 = 7$  και η κυκλική συνέλιξη  $N=7$  σημείων  $y_c(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_c = N = 7$ .

Στην περίπτωση αυτή η γραμμική συνέλιξη και η κυκλική συνέλιξη 7 σημείων είναι ίσες μεταξύ τους:

$$y_c(n) = y_\ell(n)$$

γιατί ισχύει η σχέση:

$N_c \geq N_\ell$ , αφού  $N_c = N_\ell = 7$ .

Να παράγετε τα σήματα  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ .

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις `conv` και `signalcircconv` να γράψετε πρόγραμμα για τον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης  $y_\ell(n)$  και της κυκλικής συνέλιξης 7 σημείων  $y_c(n)$  των σημάτων  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ .

Να εμφανίσετε τις τιμές των σημάτων  $y_\ell(n)$  και  $y_c(n)$  και να επιβεβαιώσετε ότι η γραμμική συνέλιξη και η κυκλική συνέλιξη 7 σημείων είναι ίσες μεταξύ τους.

#### 8. Σχέση γραμμικής συνέλιξης και κυκλικής συνέλιξης

Δίνονται τα σήματα πεπερασμένου μήκους:

$$x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$$

$$x_2(n) = 5\delta(n) + 6\delta(n-1) + 7\delta(n-2) + 8\delta(n-3)$$

Το σήμα  $x_1(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_1 = 4$  και το σήμα  $x_2(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_2 = 4$ .

Η γραμμική συνέλιξη  $y_\ell(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_\ell = N_1 + N_2 - 1 = 7$  και η κυκλική συνέλιξη  $N = 4$  σημείων  $y_c(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους  $N_c = N = 4$ .

Στην περίπτωση αυτή η γραμμική και η κυκλική συνέλιξη συνδέονται με την ακόλουθη σχέση:

$$y_c(n) = y_\ell(n) + y_\ell(n + N_c), n \in [0 : N_c - 1]$$

γιατί ισχύει η σχέση:

$$N_c < N_\ell, \text{ αφού } N_c = 4 < 7 = N_\ell.$$

Να γράψετε πρόγραμμα για την επιβεβαίωση της παραπάνω σχέσης μεταξύ της γραμμικής συνέλιξης και της κυκλικής συνέλιξης. Να παράγετε τα σήματα  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ . Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις `conv` και `signalcircconv` να γράψετε πρόγραμμα για τον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης  $y_\ell(n)$  και της κυκλικής συνέλιξης  $N = 4$  σημείων  $y_c(n)$  των σημάτων  $x_1(n)$  και  $x_2(n)$ . Να υπολογίσετε το σήμα  $y_\ell(n+4)$ . Να υπολογίσετε το άθροισμα  $y_\ell(n) + y_\ell(n + N_c)$ . Να σχεδιάσετε τα σήματα  $y_\ell(n)$ ,  $y_\ell(n+4)$ ,  $y_\ell(n) + y_\ell(n + N_c)$  και  $y_c(n)$ . Να επιβεβαιώσετε ότι ισχύει η σχέση  $y_c(n) = y_\ell(n) + y_\ell(n + N_c), n \in [0 : 3]$ .

#### 9. Διακριτός και γρήγορος μετασχηματισμός Fourier σήματος μικρού μήκους

Να γράψετε πρόγραμμα για να επιβεβαιώσετε ότι οι διακριτός μετασχηματισμός Fourier και ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier σήματος μικρού μήκους είναι ίσοι.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση `fft`.

Δίνεται το σήμα πεπερασμένου μήκους  $N = 4$ :

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-3)$$

Να παράγετε το σήμα  $x(n)$ .

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `fft` να υπολογίσετε το γρήγορο μετασχηματισμό Fourier  $N = 4$  σημείων  $X_1(k)$  του σήματος  $x(n)$ .

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `signdft` να υπολογίσετε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier  $N = 4$  σημείων  $X_2(k)$  του σήματος  $x(n)$ .

Να εμφανίσετε τις τιμές των σημάτων  $x(n)$ ,  $X_1(k)$  και  $X_2(k)$  και να επιβεβαιώσετε ότι οι συναρτήσεις `fft` και `signdft` παράγουν το ίδιο αποτέλεσμα.

#### 10. Υπολογισμός διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT) με FFT

Δίνεται το σήμα  $x(n)$  πεπερασμένου μήκους  $N = 4$ :

$$x(n) = n + 2, n \in [0 : 5]$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `fft` να γράψετε πρόγραμμα για την παραγωγή του σήματος  $x(n)$  και για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier  $N = 4$  σημείων  $X(k)$  του σήματος  $x(n)$ .

Να εμφανίσετε τις τιμές των σημάτων  $x(n)$  και  $X(k)$ .

#### 11. Υπολογισμός αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT) με IFFT

Να μελετήσετε τη συνάρτηση `fft` και τη συνάρτηση `ifft`.

Δίνεται το σήμα  $x(n)$  πεπερασμένου μήκους  $N=4$ :

$$x(n) = n + 2, n \in [0:5]$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `fft` να γράψετε πρόγραμμα για την παραγωγή του σήματος  $x(n)$  και για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier  $N=4$  σημείων  $X(k)$  του σήματος  $x(n)$ .

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `ifft` να γράψετε πρόγραμμα για τον υπολογισμό του αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού Fourier  $N=4$  σημείων  $y(n)$  του σήματος  $X(k)$ .

Να εμφανίσετε τις τιμές των σημάτων  $x(n)$  και  $y(n)$  και να διαπιστώσετε ότι είναι ίσα.

## 12. Απόκριση συχνότητας FIR φίλτρου με χρήση FFT

Να υπολογίσετε με χρήση FFT για και να σχεδιάσετε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του FIR φίλτρου με κρουστική απόκριση  $h(n)=1, n \in [0:M]$ .

## 13. Διακριτός και γρήγορος μετασχηματισμός Fourier σήματος μεγάλου μήκους

Να γράψετε πρόγραμμα για να επιβεβαιώσετε ότι οι διακριτός μετασχηματισμός Fourier και ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier σήματος μεγάλου μήκους είναι ίσοι.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `rand` να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)$   $N=100$  σημείων.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `fft` να υπολογίσετε το γρήγορο μετασχηματισμό Fourier  $N=100$  σημείων  $X_1(k)$  του σήματος  $x(n)$ .

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `signaldfst` να υπολογίσετε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier  $N=100$  σημείων  $X_2(k)$  του σήματος  $x(n)$ .

Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του πλάτους της διαφοράς  $X_1(k) - X_2(k)$  και να εμφανίσετε το αποτέλεσμα.

Ενδεικτικό αποτέλεσμα:  $3 \cdot 10^{-12}$ .

## 14. Υπολογισμός εκτελέσιμου χρόνου του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier

Να γράψετε πρόγραμμα για να υπολογίσετε τον εκτελέσιμο χρόνο του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `rand` να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $x_1(n)$   $N=16001$  σημείων.

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις `clock`, `fft` και `etime` να υπολογίσετε τον εκτελέσιμο χρόνο  $t_1$  του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier  $N=16001$  σημείων  $X_1(k)$  του σήματος  $x_1(n)$ .

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `rand` να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $x_2(n)$   $N=16171$  σημείων.

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις `clock`, `fft` και `etime` να υπολογίσετε τον εκτελέσιμο χρόνο  $t_2$  του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier  $N=16171$  σημείων  $X_2(k)$  του σήματος  $x_2(n)$ .

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `rand` να παράγετε το σήμα διακριτού χρόνου  $x_3(n)$   $N=16384$  σημείων.

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις `clock`, `fft` και `etime` να υπολογίσετε τον εκτελέσιμο χρόνο  $t_3$  του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier  $N=16384$  σημείων  $X_3(k)$  του σήματος  $x_3(n)$ .

Να εμφανίσετε τους εκτελέσιμους χρόνους  $t_1$ ,  $t_2$  και  $t_3$ .

Να παρατηρήσετε ότι:

$$t_1 > t_2 > t_3$$

επειδή

- ο αριθμός  $N=16001$  είναι πρώτος αριθμός,

- ο αριθμός  $N=16171$  αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:  $N=103 \cdot 157$ ,

- ο αριθμός  $N=16384$  είναι δύναμη του 2:  $N=16384=2^{14}$ .

## 15. Εκτελέσιμος χρόνος του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier

Να γράψετε πρόγραμμα για να υπολογίσετε τον εκτελέσιμο χρόνο του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier.

Να μελετήσετε τις συναρτήσεις `clock` και `etime`.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `rand` να παράγετε σήματα διακριτού χρόνου  $N$  σημείων όπου  $N \in [1:2^{10}]$ .

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις `clock`, `fft` και `etime` να υπολογίσετε τους εκτελέσιμους χρόνους των γρήγορων μετασχηματισμών Fourier των σημάτων.

Να σχεδιάσετε εκτελέσιμους χρόνους (σε sec) των γρήγορων μετασχηματισμών Fourier των σημάτων.

16. Απόκριση συχνότητας FIR φίλτρων μέσω FFT

Δίνεται η κρουστική απόκριση του FIR φίλτρου Hann (ονομασία από τον J. VonHann)

$$h(n) = 0.5 - 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L}n\right), n \in [0:L-1]$$

και η κρουστική απόκριση του FIR φίλτρου Hamming (ονομασία από τον R. Hamming)

$$h(n) = 0.54 - 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L}n\right), n \in [0:L-1]$$

Να σχεδιάσετε τις κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων για  $L = 21$ .

Να υπολογίσετε τις αποκρίσεις συχνότητας των φίλτρων με χρήση FFT  $N = 2^{10}$  σημείων και να σχεδιάσετε το μέτρο των αποκρίσεων συχνότητας για  $L = 21$  και  $L = 31$ . Τι παρατηρείτε;

## 8.6. Περίληψη (ηχογραφημένη)

1-2-3-4-0-0

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη του Κεφαλαίου 8 με τον Ήχο 8.1.



Ήχος 8.1 Περίληψη Κεφαλαίου 8.

### Διακριτός μετασχηματισμός Fourier και Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT) προκύπτει από τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) για τις ισπαέχουσες συχνότητες  $\omega_k = (2\pi/N) \cdot k, k \in [0:N-1]$ .

Η κυκλική συνέλιξη μπορεί να υπολογιστεί από τη γραμμική συνέλιξη.

Για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT)  $N$  σημείων ενός σήματος με χρήση του ορισμού απαιτούνται  $N^2$  μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και  $N \cdot (N-1)$  μιγαδικές προσθέσεις. Η πολυπλοκότητα του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (Discrete Fourier Transform – DFT) είναι της τάξης  $O(N^2)$ .

Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform – FFT) ονομάζεται το σύνολο των αλγορίθμων για τον γρήγορο υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (Discrete Fourier Transform – DFT).

Ο κλασικός αλγόριθμος FFT είναι ο αλγόριθμος FFT με βάση 2 (radix-2 FFT), ο οποίος βασίζεται στην τεχνική «διαίρει και βασίλευε» (divide and conquer). Η βασική ιδέα του αλγορίθμου radix-2 FFT είναι η διάσπαση του σήματος, του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε, τον DFT  $N$  σημείων, σε 2 σήματα με μισό μήκος  $N/2$  το κάθε ένα. Η διάσπαση επαναλαμβάνεται μέχρι να φτάσουμε στον (απλό) υπολογισμό DFT 2 σημείων. Η διάσπαση μπορεί να γίνει τόσο στο πεδίο του χρόνου και ονομάζεται αποδεκάτιση στον χρόνο (Decimation In Time – DIT), οπότε προκύπτει ο αλγόριθμος FFT με αποδεκάτιση στον χρόνο (Decimation In Time FFT – DIT FFT), όσο και στο πεδίο των συχνοτήτων και ονομάζεται αποδεκάτιση στη συχνότητα (Decimation In Frequency – DIF), οπότε προκύπτει ο αλγόριθμος FFT με αποδεκάτιση στη συχνότητα (Decimation In Frequency FFT – DIF FFT). Για τον υπολογισμό του διακριτού

μετασχηματισμού Fourier (DFT)  $N$  σημείων ενός σήματος με χρήση FFT απαιτούνται  $\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$  μιγαδικοί

πολλαπλασιασμοί και  $N \cdot \log_2 N$  μιγαδικές προσθέσεις. Επομένως, η πολυπλοκότητα του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier (Fast Fourier Transform – FFT) είναι της τάξης  $O(N \cdot \log_2 N)$ .

Στον αλγόριθμο DITFFT η διάταξη των δειγμάτων εξόδου (DFT του αρχικού σήματος) είναι κανονική, ενώ η διάταξη των δειγμάτων εισόδου (αρχικό σήμα) δεν είναι κανονική, ως αποτέλεσμα της σταδιακής αποσύνθεσης των δειγμάτων εισόδου. Η διάταξη των δειγμάτων εισόδου προκύπτει από την (κανονική) διάταξη των δειγμάτων εξόδου με αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων των δεικτών τους (bit-reversal).

Στον αλγόριθμο DIFFFT η διάταξη των δειγμάτων εισόδου (αρχικό σήμα) είναι κανονική, ενώ η διάταξη των δειγμάτων εξόδου (DFT του αρχικού σήματος) δεν είναι κανονική. Η διάταξη των δειγμάτων εξόδου προκύπτει από την (κανονική) διάταξη των δειγμάτων εισόδου με αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων των δεικτών τους (bit-reversal).

### **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

Chu, E., & George, A. (2000). *Inside the FFT Black Box: Serial and Parallel Fast Fourier Transform Algorithms*. CRC Press LLC.

Cooley, J. W., & Tukey, J.W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, 19, 297-301.

Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S., Wehbring R. (2011). *GNU Octave* (3rd ed.).

Gentleman, W. M., & Sande, G. (1996). Fast Fourier transforms for fun and profit. *Proceedings of Fall Joint Computer Conference*, (pp. 563-578).

Hansen J. S. (2011). *GNU Octave Beginner's Guide*. Packt Publishing.

Ingle, V. K., & Proakis, J. G. (2003). *Digital Signal Processing using MATLAB*. Stamford, CT: Thomson Brooks Cole.

Leis, J. W. (2011). *Digital Signal Processing using MATLAB for students and researchers*. J. Wiley and Sons.

Rao, K. R., Kim, D. N., Hwang, J. J. (2010). *Fast Fourier Transform – Algorithms and Applications*. Springer Science+Business Media B.V..

The MathWorks Inc (2005). *Signal Processing Toolbox User's Guide*.

Ασημάκης, Ν. (2008). *Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων*. Gutenberg.

Σκόδρας, Α., & Αναστασόπουλος, Β. (2003). *Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων και Σημάτων*. ΕΑΠ.

### **Κριτήρια αξιολόγησης**

#### **Κριτήριο αξιολόγησης 1**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 1 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 8.3.



#### **Διαδραστικό πρόγραμμα 8.3 Κριτήριο αξιολόγησης 1.**

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

#### **Κριτήριο αξιολόγησης 2**

Μπορείτε να κάνετε το κριτήριο αξιολόγησης 2 με το Διαδραστικό πρόγραμμα 8.4.





**Διαδραστικό πρόγραμμα 8.4** *Κριτήριο αξιολόγησης 2.*

Η Απάντηση/Λύση βρίσκεται στο Παράρτημα.

## Παράρτημα Α. Τοπολόγιο

### Σήματα διακριτού χρόνου

Διακριτός χρόνος	$n$	
Σήμα διακριτού χρόνου	$x(n)$	
Ιδιότητες		
Αιτιότητα	$x(n) = 0, n < 0$	
Περιοδικότητα	$x(n) = x(n + N), \forall n$	
Συμμετρία		
Άρτιο	$x(n) = x(-n), \forall n$	
Περιττό	$x(n) = -x(-n), \forall n$	
Συζυγές συμμετρικό	$x(-n) = x^*(n), \forall n$	
Συζυγές αντισυμμετρικό	$x(-n) = -x^*(n), \forall n$	
Ανάλυση σε άρτιο και περιττό	$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$	
	$x_e(n) = \frac{1}{2} \cdot [x(n) + x(-n)]$	
	$x_o(n) = \frac{1}{2} \cdot [x(n) - x(-n)]$	

### Βασικά σήματα

σήμα μοναδιαίου δείγματος	$\delta(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$	
σήμα μοναδιαίου βήματος	$u(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$	
σχέση $\delta(n)$ και $u(n)$	$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$	
ημιτονοειδές σήμα	$x(n) = A \cdot \sin(\omega \cdot n + \varphi)$	

αν  $\omega$  είναι ρητό πολλαπλάσιο του  $2\pi$ , τότε θεμελιώδης περίοδος  $N = \frac{2\pi}{\omega}$

πραγματικό εκθετικό σήμα	$x(n) = r^n, r \in \mathbb{R}$	
φανταστικό εκθετικό σήμα	$x(n) = e^{j\omega n} = \cos(\omega \cdot n) + j \cdot \sin(\omega \cdot n)$	

αν  $\omega$  είναι ρητό πολλαπλάσιο του  $2\pi$ , τότε θεμελιώδης περίοδος  $N = \frac{2\pi}{\omega}$

μγαδικό εκθετικό σήμα	$x(n) = r^n \cdot e^{j\omega n} = r^n \cdot [\cos(\omega \cdot n) + j \cdot \sin(\omega \cdot n)]$	
μοναδιαίο εναλλακτικό σήμα	$u_a(n) = \begin{cases} (-1)^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$	
σήμα μέγιστης παλινδρόμησης	$u_a^\pm(n) = (-1)^{ n }, \forall n$	
σήμα μοναδιαίας κλίσης	$u_r(n) = \begin{cases} n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$	

Ενέργεια

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

Μέση ισχύς

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot N + 1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} x(n) \cdot x^*(n) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot N + 1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2 \right]$$

Μέση ισχύς περιοδικού σήματος

με θεμελιώδη περίοδο  $N$

$$P_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot x^*(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

πραγματικό σήμα

Ενέργεια

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n)$$

Μέση ισχύς

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot N + 1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} x^2(n) \right]$$

Μέση ισχύς περιοδικού σήματος

με θεμελιώδη περίοδο  $N$

$$P_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n)$$

Σήμα ενέργειας

Σήμα ισχύος

πεπερασμένη ενέργεια  $E < +\infty$  & μηδενική ισχύ  $P = 0$   
πεπερασμένη ισχύς  $P < +\infty$  & άπειρη ενέργεια  $E = +\infty$

## Σήματα συνεχούς χρόνου

Συνεχής χρόνος

$t$

Σήμα συνεχούς χρόνου

$x(t)$

Ιδιότητες

Αιτιότητα

$$x(t) = 0, t < 0$$

Περιοδικότητα

$$x(t) = x(t + T), \forall t$$

Συμμετρία

Άρτιο

$$x(-t) = x(t), \forall t$$

Περιττό

$$x(-t) = -x(t), \forall t$$

Συζυγές συμμετρικό

$$x(-t) = x^*(t), \forall t$$

Συζυγές αντισυμμετρικό

$$x(-t) = -x^*(t), \forall t$$

Ανάλυση σε άρτιο και περιττό

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2} \cdot [x(t) + x(-t)]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2} \cdot [x(t) - x(-t)]$$

Βασικά σήματα

σήμα μοναδιαίου παλμού

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0), f(t) \text{ συνεχής στο } t = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, t \neq 0 \\ \infty, t = 0 \end{cases}$$

μοναδιαίο βηματικό σήμα

$$u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

σχέση  $\delta(t)$  και  $u(t)$

$$\delta(t) = \frac{d u(t)}{dt}$$

ημιτονοειδές σήμα

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\text{θεμελιώδης περίοδος } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

πραγματικό εκθετικό σήμα

$$x(t) = c \cdot e^{\sigma t}$$

φανταστικό εκθετικό σήμα

$$x(t) = e^{j \cdot \omega t}$$

$$\text{θεμελιώδης περίοδος } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

μγαδικό εκθετικό σήμα

$$x(t) = c \cdot e^{s t} = |c| \cdot e^{j \cdot \theta} \cdot e^{(\sigma + j \cdot \omega) t} = |c| \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j \cdot (\omega t + \theta)}$$

σήμα ράμπας

$$r(t) = \begin{cases} t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Ενέργεια

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Μέση ισχύς

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^{+T} x(t) \cdot x^*(t) dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt \right]$$

Μέση ισχύς περιοδικού σήματος

με θεμελιώδη περίοδο  $T$

$$P_T = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot x^*(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

πραγματικό σήμα

Ενέργεια

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

Μέση ισχύς

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt \right]$$

Μέση ισχύς περιοδικού σήματος

με θεμελιώδη περίοδο  $T$

$$P_T = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x^2(t) dt$$

Σήμα ενέργειας

Σήμα ισχύος

πεπερασμένη ενέργεια  $E < +\infty$  & μηδενική ισχύ  $P = 0$   
πεπερασμένη ισχύς  $P < +\infty$  & άπειρη ενέργεια  $E = +\infty$

## Δειγματοληψία

Θεώρημα δειγματοληψίας

$$f_s \geq 2 \cdot F_{\max}$$

Ανακατασκευή

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ x(n) \cdot \text{sinc} \left( \frac{t}{T_s} - n \right) \right]$$

Συνάρτηση δειγματοληψίας

$$\text{sinc}(\tau) = \frac{\sin(\tau \cdot n)}{\tau \cdot n}$$

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ x(n) \cdot \varphi \left( \frac{t}{T_s} - n \right) \right]$$

κλιμακωτή συνάρτηση  $\sigma(\tau) = 1, -\frac{1}{2} \leq \tau \leq \frac{1}{2}$

τριγωνική συνάρτηση  $\sigma(\tau) = 1 - |\tau|, -1 \leq \tau \leq 1$

χρονικά περιορισμένη συνάρτηση δειγματοληψίας  $\sigma(\tau) = \text{sinc}(\tau), -N \leq \tau \leq N$

## Πράξεις σημάτων διακριτού χρόνου

Πρόσθεση	$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$
Πολλαπλασιασμός	$x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$
Κλιμάκωση στο πλάτος	$y(n) = c \cdot x(n)$
Μετατόπιση ή ολίσθηση	$y(n) = x(n - n_0)$
Αναδίπλωση ή ανάκλαση	$y(n) = x(-n)$
Κλιμάκωση στον χρόνο	$y(n) = x(c \cdot n)$
Διαίρεση συχνότητας	$y(n) = x(M \cdot n)$
Πολλαπλασιασμός συχνότητας	$y(n) = x\left(\frac{n}{M}\right)$

Ανάλυση σημάτων διακριτού χρόνου  $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot \delta(n - k)$

Συνέλιξη  $x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n - k)$

Ιδιότητες συνέλιξης

$$\begin{aligned}
 x(n) * \delta(n) &= x(n) \\
 x_1(n) * x_2(n) &= x_2(n) * x_1(n) \\
 x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)] &= [x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n) \\
 x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] &= [x_1(n) * x_2(n)] + [x_1(n) * x_3(n)]
 \end{aligned}$$

Ετεροσυσχέτιση  $r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot y(n + k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot y(k - n)$

$$r_{xy}(n) = x(n) * y(-n)$$

Αυτοσυσχέτιση  $r_x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot x(n + k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot x(k - n)$

$$\begin{aligned}
 r_x(n) &= x(n) * x(-n) \\
 r_x(n) &= r_x(-n) \\
 r_x(0) &= E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2
 \end{aligned}$$

Αυτοσυσχέτιση πραγματικού σήματος ισχύος

$$\bar{r}_x(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2N + 1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} x(k) \cdot x(n + k) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2N + 1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} x(k) \cdot x(k - n) \right]$$

$$\bar{r}_x(0) = P = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2N + 1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2 \right]$$

## Πράξεις σημάτων συνεχούς χρόνου

Πρόσθεση	$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$
Πολλαπλασιασμός	$x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$
Κλιμάκωση στο πλάτος	$y(t) = c \cdot x(t)$
Μετατόπιση ή ολίσθηση	$y(t) = x(t - t_0)$
Αναδίπλωση ή ανάκλαση	$y(t) = x(-t)$
Κλιμάκωση στον χρόνο	$y(t) = x(c \cdot t)$
Συστολή	$c > 1$
Διαστολή	$0 < c < 1$

Ανάλυση σημάτων συνεχούς χρόνου

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \cdot \Delta$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$

Συνέλιξη

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau$$

Ιδιότητες συνέλιξης

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

$$x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$$

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] + [x_1(t) * x_3(t)]$$

Ετεροσυσχέτιση

$$r_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau + t) \cdot y(\tau) d\tau$$

$$r_{xy}(t) = x(t) * y(-t)$$

Αυτοσυσχέτιση

$$r_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot x(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau + t) \cdot x(\tau) d\tau$$

$$r_x(t) = x(t) * x(-t)$$

$$r_x(0) = E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Αυτοσυσχέτιση πραγματικού σήματος ισχύος

$$\bar{r}_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{+T} x(\tau) \cdot x(\tau - t) d\tau \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{+T} x(\tau + t) \cdot x(\tau) d\tau \right]$$

$$\bar{r}_x(0) = P = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt \right]$$



## Συστήματα διακριτού χρόνου

Σύστημα διακριτού χρόνου

$$y(n) = T[x(n)]$$

αρχή της επαλληλίας ή αρχή της υπέρθεσης

$$T\left[\sum_{i=1}^N x_i(n)\right] = \sum_{i=1}^N T[x_i(n)]$$

ομογένεια

$$T[c \cdot x(n)] = c \cdot T[x(n)]$$

γραμμικότητα

$$T\left[\sum_{i=1}^N c_i \cdot x_i(n)\right] = \sum_{i=1}^N c_i \cdot T[x_i(n)]$$

χρονική αμεταβλητότητα

$$y(n) = T[x(n)] \Rightarrow y(n - n_0) = T[x(n - n_0)]$$

αιτιότητα

$$y(n = n_0) = f(x(n \leq n_0))$$

ευστάθεια

$$|x(n)| = L_x < +\infty \Rightarrow |y(n)| = L_y < +\infty$$

αντιστρεψιμότητα

$$x_1(n) \neq x_2(n) \Rightarrow T[x_1(n)] \neq T[x_2(n)]$$

LTI συστήματα

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

LTI αιτιατό

$$h(n) = 0, n < 0$$

LTI ευσταθές

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = L < +\infty$$

Σύνδεση σε σειρά

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n)$$

Παράλληλη σύνδεση

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

Εξισώσεις διαφορών

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k)$$

FIR

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k)$$

IIRAR

$$y(n) = x(n) - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k)$$

IIRARMA

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k)$$

Φίλτρο μέσης τιμής

$$y_M(n) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} x(n-k)$$

## Συστήματα διακριτού χρόνου

Σύστημα διακριτού χρόνου	$y(t) = T[x(t)]$
αρχή της επαλληλίας ή αρχή της υπέρθεσης	$T\left[\sum_{i=1}^N x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^N T[x_i(t)]$
ομογένεια	$T[c \cdot x(t)] = c \cdot T[x(t)]$
γραμμικότητα	$T\left[\sum_{i=1}^N c_i \cdot x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^N c_i \cdot T[x_i(t)]$
χρονική αμεταβλητότητα	$y(t) = T[x(t)] \Rightarrow y(t - t_0) = T[x(t - t_0)]$
αιτιότητα	$y(t = t_0) = f(x(t \leq t_0))$
ευστάθεια	$ x(t)  = L_x < +\infty \Rightarrow  y(t)  = L_y < +\infty$
αντιστρεψιμότητα	$x_1(t) \neq x_2(t) \Rightarrow T[x_1(t)] \neq T[x_2(t)]$

LTΠ συστήματα	$y(t) = h(t) * x(t)$
LTΠ αιτιατό	$h(t) = 0, t < 0$
LTΠ ευσταθές	$\int_{-\infty}^{+\infty}  h(t)  dt = L < +\infty$
Σύνδεση σε σειρά	$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$
Παράλληλη σύνδεση	$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$

Διαφορικές εξισώσεις  $\sum_{k=0}^M b_k \cdot \frac{d^k x(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N a_k \cdot \frac{d^k y(t)}{dt^k}$

Σύστημα πλήρους ανόρθωσης	$y(t) = T[x(t)] =  x(t) $
Ολοκληρωτής	$y(t) = T[x(t)] = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$
Διαμορφωτής	$y(t) = T[x(t)] = x(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$
Σύστημα μέσης τιμής	$y_T(t) = T[x(t)] = \frac{1}{T} \cdot \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$

**Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου  
Discrete Time Fourier Transform – DTFT**

Ευθύς DTFT  $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n}$       ύπαρξη  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| = L < \infty$

Αντίστροφος DTFT  $x(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} \cdot d\omega$

Ζεύγη DTFT

Ακολουθία διακριτού χρόνου	Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT)
$\delta(n)$	1
$\delta(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$2\pi \cdot \delta(\omega)$
$e^{-j\pi\omega_0}$	$2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$
$a^n \cdot u(n),  a  < 1$	$\frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$
$-a^n \cdot u(-n-1),  a  > 1$	$\frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$
$(n+1) \cdot a^n \cdot u(n),  a  < 1$	$\frac{1}{(1 - a \cdot e^{-j\omega})^2}$
$\sin(\omega_0 \cdot n)$	$-j \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$\cos(\omega_0 \cdot n)$	$\pi \cdot [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$u(n) - u(n - n_0)$	$\frac{\sin\left(\frac{\omega n_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cdot e^{-j\frac{\omega(n_0-1)}{2}}$

Ιδιότητες DTFT

Ιδιότητα Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT)	Ακολουθία Διακριτού χρόνου	Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT)
	$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
	$x_1(n)$	$X_1(e^{j\omega})$
	$x_2(n)$	$X_2(e^{j\omega})$
Γραμμικότητα	$c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$	$c_1 \cdot X_1(e^{j\omega}) + c_2 \cdot X_2(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στον χρόνο	$x(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0} \cdot X(e^{j\omega})$
Αναδίπλωση	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega_0 n} \cdot x(n)$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Συνέλιξη	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$
Μιγαδική Συζυγία	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
Κλιμάκωση στον χρόνο πολλαπλασιασμός συχνότητας	$x(M \cdot n)$	$\frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega - 2k\pi}{M}}\right)$
Κλιμάκωση στον χρόνο διαίρεση συχνότητας	$x\left(\frac{n}{M}\right), n = k \cdot M$	$X(e^{jM\omega})$
Πολλαπλασιασμός	$x_1(n) \cdot x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) \cdot X_2(e^{j(\omega - \theta)}) \cdot d\theta$
Διαφόριση στη συχνότητα	$n \cdot x(n)$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Συζυγής συμμετρία για πραγματικά σημεία	$x(n)$ πραγματική	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \text{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \text{Re}\{X(e^{-j\omega})\} \\ \text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = -\text{Im}\{X(e^{-j\omega})\} \\ \arg\{X(e^{j\omega})\} = -\arg\{X(e^{-j\omega})\} \end{cases}$
Συμμετρία για πραγματικά και άρτια σήματα	$x(n)$ πραγματική και άρτια	$X(e^{j\omega})$ πραγματική και άρτια
Συμμετρία για πραγματικά και περιττά σήματα	$x(n)$ πραγματική και περιττή	$X(e^{j\omega})$ φανταστική και περιττή
Θεώρημα Parseval (Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας)	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}  x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi}  X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	

Απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n} = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot e^{-j\omega k}}$

Σύνδεση σε σειρά  $H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega})$

Παράλληλη σύνδεση  $H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$

All Pass  $|H(e^{j\omega})| = 1$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}, |a| < 1, a \in \mathbb{R}$$

$$h(n) = -a \cdot \delta(n) + (1 - a^2) \cdot a^{n-1} \cdot u(n-1)$$

Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

LowPass  $H(e^{j\omega}) = 1, \omega \in [-\omega_c, \omega_c], 0 < \omega_c < \pi$

High Pass  $H(e^{j\omega}) = 1, \omega \notin [-\omega_c, \omega_c], 0 < \omega_c < \pi$

Band Pass  $H(e^{j\omega}) = 1, \omega \in [-\omega_2, -\omega_1] \cup [\omega_1, \omega_2], 0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi$

Band Stop  $H(e^{j\omega}) = 1, \omega \notin [-\omega_2, -\omega_1] \cup [\omega_1, \omega_2], 0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi$

Φίλτρο αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας (notchfilter)

FIRnotch filter  $H(e^{j\omega}) = B \cdot (1 - 2 \cdot \cos(\omega_c) \cdot e^{-j\omega} + e^{-2j\omega})$

IIRnotch filter  $H(e^{j\omega}) = B \cdot \frac{(1 - 2 \cdot \cos(\omega_c) \cdot e^{-j\omega} + e^{-2j\omega})}{(1 - 2 \cdot c \cdot \cos(\omega_c) \cdot e^{-j\omega} + c^2 \cdot e^{-2j\omega})}$

Φίλτρα γραμμικής φάσης  $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\omega c}$ ,  $c \in \mathbb{R}$

Φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου I.

$$h(n) = h(N-n), n \in [0:N]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{jN\omega/2} \cdot \sum_{k=0}^{N/2} a_k \cdot \cos(\omega \cdot k)$$

$$a_k = 2 \cdot h\left(\frac{N}{2} - k\right), k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

$$a_0 = h\left(\frac{N}{2}\right)$$

Φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου II.

$$h(n) = h(N-n), n \in [0:N]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{jN\omega/2} \cdot \sum_{k=1}^{(N+1)/2} b_k \cdot \cos\left(\omega \cdot k - \frac{\omega}{2}\right)$$

$$b_k = 2 \cdot h\left(\frac{N+1}{2} - k\right), k = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2}$$

Φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου III.

$$h(n) = -h(N-n), n \in [0:N]$$

$$H(e^{j\omega}) = j \cdot e^{jN\omega/2} \cdot \sum_{k=1}^{N/2} c_k \cdot \sin\left(\omega \cdot k - \frac{\omega}{2}\right)$$

$$c_k = 2 \cdot h\left(\frac{N}{2} - k\right), k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

Φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου IV.

$$h(n) = -h(N-n), n \in [0:N]$$

$$H(e^{j\omega}) = j \cdot e^{jN\omega/2} \cdot \sum_{k=1}^{(N+1)/2} d_k \cdot \sin\left(\omega \cdot k - \frac{\omega}{2}\right)$$

$$d_k = 2 \cdot h\left(\frac{N+1}{2} - k\right), k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

## Μετασχηματισμός z

Ευθύς μετασχηματισμός z  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n}$ , Περιοχή Σύγκλισης

Αντίστροφος μετασχηματισμός z  $x(n) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_c X(z) \cdot z^{n-1} dz$

Ζεύγη μετασχηματισμού z

Ακολουθία διακριτού χρόνου	Μετασχηματισμός z	Περιοχή Σύγκλισης
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$\delta(n-n_0)$	$z^{-n_0}$	$\forall z$ εκτός $z=0, n_0 > 0$ ή $z=\infty, n_0 < 0$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  > 1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  < 1$
$a^n \cdot u(n)$	$\frac{1}{1-a \cdot z^{-1}}$	$ z  >  a $
$-a^n \cdot u(-n-1)$	$\frac{1}{1-a \cdot z^{-1}}$	$ z  <  a $
$n \cdot a^n \cdot u(n)$	$\frac{a \cdot z^{-1}}{(1-a \cdot z^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$-n \cdot a^n \cdot u(-n-1)$	$\frac{a \cdot z^{-1}}{(1-a \cdot z^{-1})^2}$	$ z  <  a $
$(n+1) \cdot a^{n+1} \cdot u(n)$	$\frac{a}{(1-a \cdot z^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$\sin(\omega_0 \cdot n) \cdot u(n)$	$\frac{\sin(\omega_0) \cdot z^{-1}}{1-2 \cdot \cos(\omega_0) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\cos(\omega_0 \cdot n) \cdot u(n)$	$\frac{1-\cos(\omega_0) \cdot z^{-1}}{1-2 \cdot \cos(\omega_0) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  < 1$
$a^n \cdot \sin(\omega_0 \cdot n) \cdot u(n)$	$\frac{a \cdot \sin(\omega_0) \cdot z^{-1}}{1-2 \cdot a \cdot \cos(\omega_0) \cdot z^{-1} + a^2 \cdot z^{-2}}$	$ z  >  a $
$a^n \cdot \cos(\omega_0 \cdot n) \cdot u(n)$	$\frac{1-a \cdot \cos(\omega_0) \cdot z^{-1}}{1-2 \cdot a \cdot \cos(\omega_0) \cdot z^{-1} + a^2 \cdot z^{-2}}$	$ z  <  a $

Ιδιότητες μετασχηματισμού z

Ιδιότητα Μετασχηματισμού z	Ακολουθία διακριτού χρόνου	Μετασχηματισμός z	Περιοχή Σύγκλισης
	$x(n)$	$X(z)$	$ROC = (D_1 <  z  < D_2)$
	$x_1(n)$	$X_1(z)$	$ROC_1$
	$x_2(n)$	$X_2(z)$	$ROC_2$
Γραμμικότητα	$c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$	$c_1 \cdot X_1(z) + c_2 \cdot X_2(z)$	περιέχει $ROC_1 \cap ROC_2$
Μετατόπιση στον χρόνο	$x(n - n_0)$	$z^{-n_0} \cdot X(z)$	$ROC$ εκτός $z = 0, n_0 > 0$ ή $z = \infty, n_0 < 0$
Αναδίπλωση	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{D_2} <  z  < \frac{1}{D_1}$
Μετατόπιση στη συχρότητα	$a^n \cdot x(n)$	$X(a^{-1} \cdot z)$	$ a  \cdot D_1 <  z  <  a  \cdot D_2$
Συνέλιξη στον χρόνο	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$	περιέχει $ROC_1 \cap ROC_2$
Μιγαδική συζυγία	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$ROC$
Παραγωγή στο πεδίο-z	$n \cdot x(n)$	$-z \cdot \frac{dX(z)}{dz}$	$R$
Πρώτη διαφορά	$x(n) - x(n-1)$	$(1 - z^{-1}) \cdot X(z)$	περιέχει $R \cap ( z  > 0)$

Θεώρημα αρχικής τιμής

Αν  $x(n) = 0, n < 0$ , τότε η αρχική τιμή του σήματος  $x(n)$  είναι  $x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z)$

Θεώρημα τελικής τιμής

Αν  $x(n) = 0, n > 0$ , τότε η τελική τιμή του σήματος  $x(n)$  είναι  $x(0) = \lim_{z \rightarrow 0} X(z)$

Μονόπλευρος μετασχηματισμός z

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Μετατόπιση ή ολίσθηση προς τα δεξιά

Αν  $x(n) \xrightarrow{z^+} X^+(z)$ , τότε

$$x(n - n_0), n_0 > 0 \xrightarrow{z^+} z^{-n_0} \cdot X^+(z) + z^{-n_0} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} x(-i) \cdot z^i$$

Μετατόπιση ή ολίσθηση προς τα αριστερά

Αν  $x(n) \xrightarrow{z^+} X^+(z)$ , τότε

$$x(n + n_0), n_0 > 0 \xrightarrow{z^+} z^{n_0} \cdot X^+(z) - z^{n_0} \cdot \sum_{i=0}^{n_0-1} x(i) \cdot z^{-i}$$

Συνάρτηση μεταφοράς  $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot z^{-n} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k}}$

Σύνδεση σε σειρά  $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$

Παράλληλη σύνδεση  $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$



Σύστημα ανάδρασης  $Q(z) = \frac{H(z)}{1 + H(z) \cdot G(z)}$

**Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου**  
**Continuous Time Fourier Transform – CTFT**

Ευθύς CTFT  $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$       ύπαρξη  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = L < \infty$

Αντίστροφος CTFT  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} dt$

Ζεύγη μετασχηματισμού CTFT

Συνάρτηση συνεχούς χρόνου $x(t)$	Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) $X(\omega)$
1	$2\pi \cdot \delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$
$t \cdot e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$\sin(\omega_0 \cdot t)$	$j \cdot \pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$\cos(\omega_0 \cdot t)$	$\pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$e^{- t } \cdot u(t)$	$\frac{1}{1 + j\omega} = \frac{1 - j\omega}{1 + \omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$

Ιδιότητες μετασχηματισμού CTFT

Ιδιότητα μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT)	Συνάρτηση συνεχούς χρόνου $x(t)$	Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT) $X(\omega)$
	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Γραμμικότητα	$c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)$	$c_1 \cdot X_1(\omega) + c_2 \cdot X_2(\omega)$
Μετατόπιση στον χρόνο	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} \cdot X(\omega)$
Αναδίπλωση	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega_0 t} \cdot x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Συνέλιξη στον χρόνο	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$
Κλιμάκωση στον χρόνο	$x(a \cdot t)$	$\frac{1}{ a } \cdot X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Παραγωγή	$\frac{d^k x(t)}{dt^k}$	$(j\omega)^k \cdot X(\omega)$
Θεώρημα Parseval (Αρχή Διατήρησης Ενέργειας)	της $\int_{-\infty}^{+\infty}  x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi}  X(\omega) ^2 d\omega$	

Απόκριση συχνοτήτων  $H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot (j\omega)^k}$

Σύνδεση σε σειρά  $H(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$

Παράλληλη σύνδεση  $H(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega)$

## Μετασχηματισμός Laplace

Ευθύς μετασχηματισμός Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) \cdot e^{st} ds$$

Ζεύγη μετασχηματισμού Laplace

Συνάρτηση συνεχούς χρόνου $x(t)$	Μετασχηματισμός Laplace $X(s)$	Περιοχή Σύγκλισης
$\delta(t)$	1	$\text{Re}(s) > -\infty$
$\delta(t-T)$	$e^{-sT}$	$\text{Re}(s) > -\infty$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}(s) < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}(s) > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}(s) < 0$
$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)$
$-e^{-at} \cdot u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}(s) < -\text{Re}(a)$
$e^{-at} \cdot t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)$
$-e^{-at} \cdot t^n \cdot u(-t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\text{Re}(s) < -\text{Re}(a)$
$\cos(\omega_0 \cdot t) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\sin(\omega_0 \cdot t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$(e^{-at} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \cdot u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)$
$(e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)) \cdot u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα μετασχηματισμού Laplace	Συνάρτηση συνεχούς χρόνου $x(t)$	Μετασχηματισμός Laplace $X(s)$	Περιοχή Σύγκλισης
	$x(t)$	$X_1(s)$	$ROC = (\sigma_1 < Re(s) < \sigma_2)$
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	$ROC_1$
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	$ROC_2$
Γραμμικότητα	$c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)$	$c_1 \cdot X_1(s) + c_2 \cdot X_2(s)$	περιέχει $ROC_1 \cap ROC_2$
Μετατόπιση στον χρόνο	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} \cdot X(s)$	$ROC$
Κλιμάκωση στον χρόνο	$x(a \cdot t)$	$\frac{1}{ a } \cdot X\left(\frac{s}{a}\right)$	$ROC = \left(\frac{\sigma_1}{a} < Re(s) < \frac{\sigma_2}{a}\right)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{s_0 t} \cdot x(t)$	$X(s - s_0)$	$ROC = (\sigma_1 + Re(s_0) < Re(s) < \sigma_2 + Re(s_0))$
Συνέλιξη στον χρόνο	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s) \cdot X_2(s)$	περιέχει $ROC_1 \cap ROC_2$
Παραγωγή	$\frac{d^k x(t)}{dt^k}$	$s^k \cdot X(s)$	περιέχει $ROC$

Μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace  $X^+(s) = \int_0^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$

Μετατόπιση ή ολίσθηση Αν  $x(t) \leftrightarrow X^+(s)$ , τότε  $\frac{d^k x(t)}{dt^k} \overset{L^+}{\leftrightarrow} s^k \cdot X^+(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^i \cdot \frac{d^i x(0)}{dt^i}$

Θεώρημα αρχικής τιμής  $\lim_{t \rightarrow 0} [x(t)] = \lim_{s \rightarrow +\infty} [s \cdot X(s)]$

Θεώρημα τελικής τιμής  $\lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot X(s)]$

Συνάρτηση μεταφοράς  $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-st} dt = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot s^k}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot s^k}$

Σύνδεση σε σειρά  $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$

Παράλληλη σύνδεση  $H(s) = H_1(s) + H_2(s)$

## Διακριτός μετασχηματισμός Fourier Discrete Fourier Transform – DFT

Ευθύς DFTN σημείων

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk}, k \in [0: N-1]$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

Αντίστροφος DFT N σημείων

$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-nk}, n \in [0: N-1]$$

Περιοδική επέκταση της ακολουθίας  $x(n)$

$$\tilde{x}(n) = x(n \bmod N) = x((n))_N$$

Κυκλική μετατόπιση κατά  $n_0$  της ακολουθίας  $x(n)$

$$x((n - n_0))_N = \tilde{x}(n - n_0)$$

Κυκλική συνέλιξη N σημείων

$$x(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k) \cdot \tilde{x}_2(n - k)$$

Σχέση γραμμικής και κυκλικής συνέλιξης

Αν  $N_c \geq N_\ell$ , τότε  $x_c(n) = x_\ell(n)$

Αν  $N_c < N_\ell$ , τότε  $x_c(n) = x_\ell(n) + x_\ell(n + N_c), n \in [0: N_c - 1]$

Ιδιότητες του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT)

Ιδιότητα διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT)	Σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$	Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT) $X(k)$
Γραμμικότητα	$c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$	$c_1 \cdot X_1(k) + c_2 \cdot X_2(k)$
Συμμετρία πραγματικού σήματος	$x(n)$ πραγματικό σήμα	$X(k) = X^*((N - k))_N$
Συμμετρία φανταστικού σήματος	$x(n)$ φανταστικό σήμα	$X(k) = -X^*((N - k))_N$
Κυκλική μετατόπιση	$x((n - n_0))_N$	$W_N^{n_0 k} \cdot X(k)$
Κυκλική αναδίπλωση	$x((-n))_N$	$X^*(k)$
Κυκλική συνέλιξη	$x_1(n) \otimes x_2(n)$	$X_1(k) \cdot X_2(k)$

## Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier Fast Fourier Transform – FFT

FFT με αποδεκάτιση στον χρόνο

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k \cdot X_2(k), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k \cdot X_2(k), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

FFT με αποδεκάτιση στη συχνότητα

$$X(2 \cdot k) = X_1(k) + X_2(k), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X(2 \cdot k + 1) = X(2 \cdot k) = (X_1(k) - X_2(k)) \cdot W_N^k, k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

## Μιγαδικοί αριθμοί

$$z = a + j \cdot b = r \cdot e^{j \cdot \varphi}$$

- πραγματική συνιστώσα  $\operatorname{Re}(z) = a$

- φανταστική συνιστώσα  $\operatorname{Im}(z) = b$

- μέτρο  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- φάση  $\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \arctan \frac{b}{a}$

Συζυγής

$$z^* = a - j \cdot b \text{ συζυγής του } z = a + j \cdot b$$

Μοναδιαίος Κύκλος

$$|z| = 1$$

Ταυτότητα του DeMoivre  $[\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)]^n = \cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)$

Ταυτότητα του Euler  $e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot [e^{j \cdot \varphi} + e^{-j \cdot \varphi}]$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot [e^{j \cdot \varphi} - e^{-j \cdot \varphi}] = -\frac{1}{2} \cdot j \cdot [e^{j \cdot \varphi} - e^{-j \cdot \varphi}]$$



## Σειρές

$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a},  a  < 1$	$\sum_{n=0}^{N-1} n \cdot a^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) \text{ (Riemann)}$	$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}$	$\sum_{n=a}^b n^2 = \frac{b(b+1)(2b+1) - a(a-1)(2a-1)}{6}$
$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{N(N-1)}{2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot a^n = \frac{a}{(1-a)^2},  a  < 1$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$	$\sum_{n=a}^b n = \frac{(a+b)(b-a+1)}{2}$

## Παράρτημα Β. Συναρτήσεις

### Σήματα και Συστήματα

cconv	*	κυκλική συνέλιξη
dirac		συνάρτηση δέλτα του Dirac
dsolve		επίλυση διαφορικών εξισώσεων
fft		γρήγορος μετασχηματισμός Fourier
filter		απόκριση LTI συστήματος διακριτού χρόνου
filtic		δημιουργία αρχικών συνθηκών για τη συνάρτηση filter
fourier		μετασχηματισμός Fourier
freqz		απόκριση συχνότητας LTI συστήματος διακριτού χρόνου
ifft		αντίστροφος γρήγορος μετασχηματισμός Fourier
ifourier		αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier
ilaplace		αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
laplace		μετασχηματισμός Laplace
lsim		απόκριση LTI συστήματος συνεχούς χρόνου
residue		ανάλυση συνάρτησης μεταφοράς (μετασχηματισμός Laplace) σε άθροισμα απλών κλασμάτων
residuez		ανάλυση συνάρτησης μεταφοράς (μετασχηματισμός z) σε άθροισμα απλών κλασμάτων
seqperiod	*	περίοδος ακολουθίας
tf		δημιουργία συνάρτησης μεταφοράς (μετασχηματισμός Laplace)
xcorr		ετεροσυσχέτιση
zplane		διάγραμμα πόλων-μηδενικών συνάρτησης μεταφοράς

\* δεν είναι διαθέσιμη σε Octave

**Γενικού σκοπού**

abs	μέτρο
angle	φάση
any	έλεγχος ύπαρξης μη μηδενικών στοιχείων
axis	έλεγχος εμφάνισης αξόνων
clock	τρέχουσα ημερομηνία και ώρα
conj	συζυγής μιγαδικός
conv	γραμμική συνέλιξη και πολλαπλασιασμός πολυωνύμων
cos	συνημίτονο
deconv	αποσυνέλιξη και διαίρεση πολυωνύμων
error	εμφάνιση μηνύματος και ακύρωση συνάρτησης
etime	χρόνος που παρήλθε
exp	εκθετική συνάρτηση
figure	δημιουργία παράθυρου σχήματος
find	εύρεση δεικτών μη μηδενικών στοιχείων
fliplr	αναδίπλωση ή ανάκλαση
floor	κάτω ακέραιο μέρος
hold	διατήρηση τρέχοντος σχήματος
imag	φανταστικό μέρος μιγαδικού
legend	λεζάντα
length	διάσταση (μήκος) διανύσματος
max	μέγιστο
min	ελάχιστο
mod	υπόλοιπο
plot	σχεδίαση (γραμμική)
pretty	εμφάνιση συμβολικής έκφρασης
rand	τυχαίοι αριθμοί ομοιόμορφης κατανομής
real	πραγματικό μέρος μιγαδικού
sin	ημίτονο
stem	σχεδίαση ακολουθίας
subplot	διαίρεση παράθυρου σχεδίασης
syms	δημιουργία συμβολικών αντικειμένων
text	εμφάνιση σχολίου κειμένου σε σχήμα
title	τίτλος σχήματος
xlabel	επιγραφή άξονα τεταγμένων
ylabel	επιγραφή άξονα τεταγμένων
zeros	μηδενικά

### Σήματα διακριτού χρόνου

signalcexp	μιγαδικό εκθετικό σήμα
signaliexp	φανταστικό εκθετικό σήμα
signalimp	σήμα μοναδιαίου δείγματος
signalrexp	πραγματικό εκθετικό σήμα
signalsin	ημιτονοειδές σήμα
signalstep	σήμα μοναδιαίου βήματος

### Πράξεις σημάτων διακριτού χρόνου

signaladd	πρόσθεση
signalconv	συνέλιξη
signalfold	αναδίπλωση ή ανάκλαση
signalmult	πολλαπλασιασμός
signalscaldiv	διαίρεση συχνότητας
signalscalmul	πολλαπλασιασμός συχνότητας
signalshift	μετατόπιση ή ολίσθηση

### Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

signaldft	διακριτός μετασχηματισμός Fourier
signalcirshift	κυκλική μετατόπιση
signalcirconv	κυκλική συνέλιξη

## Παράρτημα Γ. Απαντήσεις/Λύσεις διαδραστικών προγραμμάτων

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Διαδραστικό πρόγραμμα 1.3 Περιοδικότητα ημιτονοειδούς σήματος διακριτού χρόνου.

#### Κεφάλαιο 1

Περιοδικότητα ημιτονοειδούς σήματος διακριτού χρόνου

Να ταιριάζετε τα σήματα με τις περιοδικότητες:


Σήμα	Περιοδικότητα
$x(n) = \sin\left(\frac{n}{5}\right)$	Μη περιοδικό
$x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n + 4\right)$	Θεμελιώδης Περίοδος N=6
$x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot n + 0.1\right)$	Θεμελιώδης Περίοδος N=10

## Κεφάλαιο 1

### Κριτήριο αξιολόγησης 1


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Τα συζυγή μιγαδικά σήματα έχουν αντίθετες φάσεις. 


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Το μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου έχει γραμμική φάση. 


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Αν ένα σήμα  $x(n)$  είναι περιττό, τότε το σήμα  $x^2(n)$  είναι περιττό. 


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Το άθροισμα των τιμών άρτιου σήματος διακριτού χρόνου είναι μηδέν. 


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Ισχύει η σχέση  $u(n) = \delta(n-1) - \delta(n)$ . 


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Η θεμελιώδης περίοδος του σήματος  $x(n) = e^{j\pi n/8}$  είναι  $N = 32$ . 


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Η θεμελιώδης περίοδος του σήματος  $x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$  είναι  $N = 4$ . 

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Ένα σήμα λέγεται σήμα ενέργειας αν έχει πεπερασμένη ενέργεια και άπειρη ισχύ. 


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Ένα σήμα λέγεται σήμα ισχύος αν έχει πεπερασμένη ισχύ και άπειρη ενέργεια. 

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Το σήμα  $\delta(n)$  είναι σήμα ενέργειας. 

---

## Κεφάλαιο 1

### Κριτήριο αξιολόγησης 2

Να ταιριάζετε τα σήματα με τις συμμετρίες:

Σήμα	Συμμετρία
$x(t) = j \cdot e^{j\pi t/2}$	Συζυγές αντισυμμετρικό
$x(t) = j \cdot e^{-j\pi t/2}$	Συζυγές συμμετρικό
$x(t) = \sin\left(4 \cdot t + \frac{\pi}{8}\right)$	Περιττό
$x(t) = \cos\left(4 \cdot t + \frac{\pi}{8}\right)$	Άρτιο

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαδραστικό πρόγραμμα 2.6 Κριτήριο αξιολόγησης 1.

### Κεφάλαιο 2

#### Κριτήριο αξιολόγησης 1

Δίνεται το σήμα:

$n$	0	1	2	3	4	5
$x(n)$	4	8	9	3	1	5

1. Ποιο είναι το σήμα  $x(-n)$ ;

α

α.

$n$	-5	-4	-3	-2	-1	0
$x(-n)$	5	1	3	9	8	4

β.

$n$	0	1	2	3	4	5
$x(-n)$	5	1	3	9	8	4

2. Ποιο είναι το σήμα  $x(n+3)$ ;

β

α.

$n$	-3	-2	-1	0	1	2
$x(n+3)$	4	8	9	3	1	5

β.

$n$	3	4	5	6	7	8
$x(n+3)$	4	8	9	3	1	5

3. Ποιο είναι το σήμα  $x(2n)$ ;

β

α.

$n$	0	1	2
$x(2n)$	4	9	1

β.

$n$	2	1	0
$x(2n)$	4	9	1

4. Ποιο είναι το σήμα  $x(2-n)$ ;

α

α.

$n$	-7	-6	-5	-4	-3	-2
$x(2-n)$	5	1	3	9	8	4

β.

$n$	-3	-2	-1	0	1	2
$x(2-n)$	5	1	3	9	8	4




## Κεφάλαιο 2

### Κριτήριο αξιολόγησης 2


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Στην καθυστέρηση η μετατόπιση γίνεται δεξιά, ενώ στην πρωτοπορία η μετατόπιση γίνεται αριστερά. 


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Στη διαίρεση συχνότητας γίνεται «άπλωμα» του σήματος. 


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Οι πράξεις Αναδίπλωση και Μετατόπιση δεν αντιμετατίθενται. 


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Αν δύο σήματα πεπερασμένου μήκους έχουν τιμές στο διάστημα  $[0:20]$ , τότε η γραμμική συνέλιξη των σημάτων έχει τιμές στο διάστημα  $[0:20]$ . 


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

$x(n) * y(n) = x(-n) * y(-n)$  


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

$u(n) * \delta(n) = u(n)$  


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Η ετεροσυσχέτιση έχει άρτια συμμετρία. 


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

$r_x(n) = r_x(-n)$  


---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Το σήμα  $x(n) = \delta(n - 3)$  έχει αυτοσυσχέτιση  $r_x(n) = \delta(n)$  

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Αν ένα σήμα πεπερασμένου μήκους έχει τιμές στο διάστημα  $[0:10]$ , τότε η αυτοσυσχέτιση του σήματος έχει τιμές στο διάστημα  $[0:20]$ . 

---

Διαδραστικό πρόγραμμα 2.8 Κριτήριο αξιολόγησης 3.

## Κεφάλαιο 2

### Κριτήριο αξιολόγησης 3

Αν το σήμα  $x(n)$  έχει τιμές στον χρόνο  $[-10:10]$  και το σήμα  $y(n)$  έχει τιμές στον χρόνο  $[0:100]$ , να ταιριάξετε τα σήματα με τις διάρκειες:

Σήμα	Διάρκεια
$x(n) * y(n)$	$[-10:110]$
$x(-n) * y(-n)$	$[-110:10]$
$r_x(n)$	$[-20:20]$
$x(n-1) * y(-n)$	$[-9:111]$

Διαδραστικό πρόγραμμα 2.9 Κριτήριο αξιολόγησης 4.

## Κεφάλαιο 2

### Κριτήριο αξιολόγησης 4

Δίνεται το σήμα  $x(t) = 1 - t$ ,  $t$  ανήκει στο διάστημα  $[0, 10]$ . Να ταιριάξετε τα σήματα με τις πράξεις:

Ποιο είναι το σήμα $x(-t)$ ;	$x(-t) = 1 + t$ , $t$ ανήκει στο διάστημα $[-10, 0]$
------------------------------	--

Ποιο είναι το σήμα $x(2t)$ ;	$x(2t) = 1 - 2t$ , $t$ ανήκει στο διάστημα $[0, 5]$
------------------------------	---

Ποιο είναι το σήμα $x(t + 3)$ ;	$x(t + 3) = 4 - t$ , $t$ ανήκει στο διάστημα $[-3, 7]$
---------------------------------	--

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Διαδραστικό πρόγραμμα 3.3 Κριτήριο αξιολόγησης 1.

### Κεφάλαιο 3

#### Κριτήριο αξιολόγησης 1

##### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Η ομογένεια εκφράζεται με τον τύπο  $T[c \cdot x(n)] = T[x(c \cdot n)]$  ❌

##### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Ένα σύστημα είναι ευσταθές (stable), όταν κάθε φραγμένη είσοδος παράγει επίσης φραγμένη έξοδο. ✔️

##### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Η κρουστική απόκριση (impulseresponse) ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος είναι η έξοδος (απόκριση) του συστήματος στην κρουστική είσοδο. ✔️

##### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Η βηματική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος είναι η έξοδος (απόκριση) του συστήματος στη βηματική είσοδο. ✔️

##### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Η συνολική κρουστική απόκριση ενός LTI συστήματος που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα είναι το γινόμενο των κρουστικών αποκρίσεων των επί μέρους συστημάτων. ❌

##### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Τα FIR φίλτρα έχουν κρουστική απόκριση πεπερασμένης διάρκειας. ✔️

##### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή ενός IIR φίλτρου εξαρτάται από εξόδους του συστήματος τις προηγούμενες χρονικές στιγμές. ✔️

##### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Όταν η είσοδος σε ένα IIR φίλτρο είναι η κρουστική συνάρτηση, τότε η μερική λύση της εξίσωσης διαφορών είναι μηδέν. ✔️

##### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ομογενούς λύσης της εξίσωσης διαφορών ενός IIR φίλτρου τάξης  $(N, M)$  έχει  $M$  ρίζες. ❌

##### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Κάθε FIR φίλτρο με ίσους συντελεστές είναι FIR φίλτρο μέσης τιμής. ❌

### Κεφάλαιο 3

#### Κριτήριο αξιολόγησης 2

Να ταιριάζετε τις εξισώσεις διαφορών με τα Συστήματα:

Εξίσωση	Σύστημα
$y(n) = x(n) + y(n-2)$	IIR-AR
$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2)$	FIR
$y(n) = \frac{1}{3}x(n) + \frac{1}{3}x(n-1) + \frac{1}{3}x(n-2)$	FIR μέσης τιμής
$y(n) = x(n) - x(n-1) + y(n-2)$	IIR-ARMA

## Κεφάλαιο 3

### Κριτήριο αξιολόγησης 3

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Σε ένα γραμμικό σύστημα ισχύει  $T[c_1 \cdot x_1(t) - c_2 \cdot x_2(t)] = c_1 \cdot T[x_1(t)] - c_2 \cdot T[x_2(t)]$  ✓

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Σε ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα ισχύει  $y(t) = T[x(t)] \Rightarrow y(t - t_0) = T[x(t - t_0)]$  ✓

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Σε ένα LTI σύστημα η απόκριση είναι ίση με τη συνέλιξη της απόκρισης μοναδιαίου παλμού με την είσοδο . ✓

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (LTI) σύστημα είναι αιτιατό όταν  $h(t) = 0, t > 0$  ✗

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (LTI) σύστημα είναι ευσταθές όταν η απόκριση μοναδιαίου παλμού είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. ✓

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Ένα σύστημα είναι αντιστρέψιμο όταν η έξοδος μπορεί να προσδιοριστεί από την είσοδο με μοναδικό τρόπο. ✗

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Η απόκριση μοναδιαίου παλμού ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος είναι η έξοδος (απόκριση) του συστήματος στην είσοδο μοναδιαίου παλμού  $x(t) = u(t)$ . ✗

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Η συνολική απόκριση μοναδιαίου παλμού ενός LTI συστήματος που αποτελείται από LTI συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά είναι το άθροισμα των αποκρίσεων μοναδιαίου παλμού των επί μέρους συστημάτων. ✗

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Ένα LTI σύστημα με απόκριση μοναδιαίου παλμού  $h_1(t)$  συνδέεται σε σειρά με ένα LTI σύστημα με απόκριση μοναδιαίου παλμού  $h_2(t)$ .

Το σύστημα που προκύπτει συνδέεται παράλληλα με ένα LTI σύστημα με απόκριση μοναδιαίου παλμού  $h_3(t)$ .

Τότε, η απόκριση μοναδιαίου παλμού του συνολικού συστήματος είναι  $h(t) = [h_2(t) * h_1(t)] + h_3(t)$ . ✓

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα συνεχούς χρόνου περιγράφεται με μία διαφορική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές. ✓

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Διαδραστικό πρόγραμμα 4.1 Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT).

### Κεφάλαιο 4

#### Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Να ταιριάζετε τα σήματα με τους μετασχηματισμούς Fourier διακριτού χρόνου:

Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot u(n-1)$	$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$
$x(n) = \delta(n) + \delta(n+2)$	$X(e^{j\omega}) = 1 + e^{-2j\omega}$
$x(n) = \delta(-n)$	$X(e^{j\omega}) = 1$
$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1} \cdot u(-n-1)$	$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1} \cdot u(-n-1)$

## Κεφάλαιο 4

### Φίλτρα γραμμικής φάσης

Να ταιριάζετε τις κρουστικές αποκρίσεις με τα φίλτρα γραμμικής φάσης:

Κρουστική Απόκριση	Φίλτρο
$h_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 2\delta(n-3) + \delta(n-4)$	Φίλτρο γραμμικής φάσης τύπου I
$h_2(n) = \delta(n) - 2\delta(n-1) + 2\delta(n-3) - \delta(n-4)$	Φίλτρο γραμμικής φάσης τύπου III
$h_3(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) - 3\delta(n-3) - 2\delta(n-4) - \delta(n-5)$	Φίλτρο γραμμικής φάσης τύπου IV
$h_4(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 3\delta(n-3) + 2\delta(n-4) + \delta(n-5)$	Φίλτρο γραμμικής φάσης τύπου II



## Κεφάλαιο 4

### Κριτήριο αξιολόγησης 1

Να ταιριάζετε τις εξισώσεις διαφορών με τις αποκρίσεις συχνότητας:

Εξίσωση	Απόκριση Συχνότητας
$y(n) = 2x(n) - 6x(n-1) + x(n-2) - y(n-1) - 4y(n-2)$	$H(e^{j\omega}) = \frac{2 - 6e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}{1 + e^{-j\omega} + 4e^{-2j\omega}}$
$y(n) = 2x(n) - 3x(n-1) - 5x(n-3)$	$H(e^{j\omega}) = 2 - 3e^{-j\omega} - 5e^{-3j\omega}$
$2y(n) = x(n) - 2x(n-1) - 4y(n-1) + 8y(n-2)$	$H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{2} - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega} - 4e^{-2j\omega}}$
$2y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 4y(n-1) - 8y(n-2)$	$H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{2} - e^{-j\omega}}{1 - 2e^{-j\omega} + 4e^{-2j\omega}}$

## Κεφάλαιο 4

### Κριτήριο αξιολόγησης 2

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου ενός σήματος διακριτού χρόνου υπάρχει πάντα. ❌

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

$$x(n) = \delta(n) \Rightarrow X(e^{j\omega}) = 1 \quad \text{❌}$$

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

$$x(n) = (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}\right)^2} \quad \text{✅}$$

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Η απόκριση συχνότητας είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο  $\pi$ . ❌

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

$$y(n) = x(n) - 4x(n-2) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = 1 - 4e^{-2j\omega} \quad \text{✅}$$

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

$$y(n) = x(n) - 4x(n-2) - y(n-1) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 4e^{-2j\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \quad \text{❌}$$

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Τα φίλτρα μέσης τιμής είναι φίλτρα γραμμικής φάσης. ✅

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Τα FIR μπορούν να είναι φίλτρα γραμμικής φάσης. ❌

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Στα φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου II ισχύει ότι  $h\left(\frac{N}{2}\right) = 0$  ✅

---

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Στα φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου IV ισχύει ότι  $N$  είναι άρτιος. ❌

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Διαδραστικό πρόγραμμα 5.1 Μετασχηματισμός z.

### Κεφάλαιο 5

#### Μετασχηματισμός z

Να ταιριάζετε τα σήματα με τους μετασχηματισμούς z:

Σήμα	Μετασχηματισμός z
$x(n) = n \cdot 2^n \cdot u(n)$	$X(z) = \frac{2 \cdot z^{-1}}{(1 - 2 \cdot z^{-1})^2},  z  > 2$
$x(n) = -n \cdot 2^n \cdot u(-n-1)$	$X(z) = \frac{2 \cdot z^{-1}}{(1 - 2 \cdot z^{-1})^2},  z  < 2$
$x(n) = \delta(-n)$	$X(z) = 1$
$x(n) = (n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot u(n)$	$X(z) = \frac{2}{(1 - 2 \cdot z^{-1})^2},  z  > 2$

## Κεφάλαιο 5

### Ευστάθεια σημάτων διακριτού χρόνου

Να ταιριάζετε τα σήματα με τους τύπους ευστάθειας:

Σήμα	Ευστάθεια
$x_1(n) = (3)^n \cdot u(n)$	Ασταθές
$x_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n)$	Ευσταθές
$x_3(n) = u(n)$	Οριακά Ευσταθές

## Κεφάλαιο 5

### Κριτήριο αξιολόγησης 1

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Τα αιτιατά σήματα έχουν μετασχηματισμό  $z$  με Περιοχή Σύγκλισης την εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου. ✓

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Αν μετασχηματισμός  $z$  ενός σήματος διακριτού χρόνου είναι ρητή συνάρτηση του  $z$ , τότε οι ρίζες του αριθμητή καλούνται πόλοι (poles) και οι ρίζες του παρονομαστή καλούνται μηδενικά (zeros). ✗

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

$x(n) \xrightarrow{z} X(z) \Rightarrow x(-n) \xrightarrow{z} X(z^{-1})$  ✓

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός LTI συστήματος είναι πάντα ρητή συνάρτηση του  $z$ . ✗

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι ευσταθές όταν όλοι οι πόλοι του μετασχηματισμού  $z$  βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου. ✓

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Το ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου είναι οριακά ευσταθές. ✓

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι ασταθές όταν όλοι οι πόλοι του μετασχηματισμού  $z$  βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου. ✗

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Ένα LTI σύστημα είναι αιτιατό όταν η Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου. ✓

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

$x(n) \xrightarrow{z^+} X^+(z) \Rightarrow x(n-1) \xrightarrow{z^+} z^{-1} \cdot X^+(z) - x(-1)$  ✗

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός  $z$  μίας ακολουθίας διακριτού χρόνου  $x(n)$  είναι ίσος με τον μετασχηματισμό  $z$  της ακολουθίας  $x(n) \cdot u(n)$ . ✓

Διαδραστικό πρόγραμμα 5.5 Κριτήριο αξιολόγησης 2.

## Κεφάλαιο 5

### Κριτήριο αξιολόγησης 2

Να ταιριάζετε τα συστήματα με τους ορισμούς:

Σύστημα	Ορισμός
Πραγματοποιήσιμο	όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου
Αιτιατό	η Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου
Ευσταθές	ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος

## Κεφάλαιο 5

### Κριτήριο αξιολόγησης 3

Να ταιριάζετε τις εξισώσεις διαφορών με τις συναρτήσεις μεταφοράς:

Εξίσωση διαφορών	Συνάρτηση μεταφοράς
$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-1) - 4y(n-2)$	$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 4z^{-2}}$
$y(n) = x(n) - 2x(n-1) - 3x(n-1) + 4y(n-2)$	$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} - 4z^{-2}}$
$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 3x(n-1) - 4y(n-2)$	$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 4z^{-2}}$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Διαδραστικό πρόγραμμα 6.1 Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT).

### Κεφάλαιο 6

#### Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου (CTFT)

Να ταιριάζετε τα σήματα με τους μετασχηματισμούς Fourier συνεχούς χρόνου:

Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου
$x(t) = e^{-(t-2)} \cdot u(t-2)$	$X(\omega) = \frac{e^{-2j\omega}}{1+j\omega}$
$x(t) = e^{-2(t-1)} \cdot u(t-1)$	$X(\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}$
$x(t) = \cos(3 \cdot t) - \frac{1}{2}$	$X(\omega) = \pi \cdot [\delta(\omega-3) + \delta(\omega+3) - \delta(\omega)]$
$x(t) = \sin(3 \cdot t) - \frac{1}{2}$	$X(\omega) = j \cdot \pi \cdot [\delta(\omega+3) - \delta(\omega-3)] - \pi \cdot \delta(\omega)$



## Κεφάλαιο 6

### Κριτήριο αξιολόγησης 1

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου ενός σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t)$  υπάρχει όταν  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = L < \infty$ . ❌

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(\omega) = 1 \quad \text{❌}$$

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

$$x(t) = \sin(4 \cdot t) \Rightarrow X(\omega) = -\frac{1}{2j} \cdot [\delta(\omega + 4) - \delta(\omega - 4)] \quad \text{✅}$$

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Η απόκριση συχνοτήτων είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο  $2\pi$ . ❌

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} X(\omega) \Rightarrow \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{\text{CTFT}} -\omega^2 \cdot X(\omega) \quad \text{✅}$$

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} X(\omega) \Rightarrow x(-2 \cdot t) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} X\left(-\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{❌}$$

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

$$x(t) = \delta(t+1) + \delta(t-2) \Rightarrow X(\omega) = e^{j\omega} + e^{-2 \cdot j\omega} \quad \text{✅}$$

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad \text{❌}$$

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

$$y''(t) + y'(t) = x'(t) - x(t) \Rightarrow H(\omega) = \frac{1 + j\omega}{j\omega + (j\omega)^2} \quad \text{❌}$$

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Αν σε ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με απόκριση συχνοτήτων  $H(\omega)$  έχουμε είσοδο το σήμα  $x(t) = e^{3 \cdot jt}$ , τότε η έξοδος είναι  $y(t) = H(3) \cdot x(t)$ . ✅

## Κεφάλαιο 6

### Κριτήριο αξιολόγησης 2

Να ταιριάζετε τις διαφορικές εξισώσεις με τις αποκρίσεις συχνότητας:

Διαφορική εξίσωση	Απόκριση συχνότητας
$y''(t) + y(t) = x'(t) + x(t)$	$H(\omega) = \frac{1 + j\omega}{1 + (j\omega)^2}$
$y'''(t) + y'(t) = x''(t) + x(t)$	$H(\omega) = \frac{1 + (j\omega)^2}{j\omega + (j\omega)^3}$
$3 \cdot y''(t) - y(t) = x''(t) + 2 \cdot x(t)$	$H(\omega) = \frac{1 + 2 \cdot (j\omega)^2}{-1 + 3 \cdot (j\omega)^2}$
$3 \cdot y''(t) - y(t) = 4 \cdot x''(t) - 2 \cdot x'(t)$	$H(\omega) = \frac{4 \cdot (j\omega)^2 - 2 \cdot j\omega}{-1 + 3 \cdot (j\omega)^2}$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Διαδραστικό πρόγραμμα 7.1 Ευστάθεια αιτιατών συστημάτων συνεχούς χρόνου.

### Κεφάλαιο 7

**Ευστάθεια αιτιατών συστημάτων συνεχούς χρόνου**

Να ταιριάζετε τα συστήματα με τους τύπους ευστάθειας:

Σύστημα	Ευστάθεια
$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$	Οριακά Ευσταθές
$H(s) = \frac{1}{s + 1}$	Ευσταθές
$H(s) = \frac{1}{s^2 - 5s + 4}$	Ασταθές

## Κεφάλαιο 7

### Κριτήριο αξιολόγησης 1

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Ο μετασχηματισμός Laplace ενός σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t)$  υπάρχει πάντα. ❌

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Η Περιοχή Σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace ενός σήματος συνεχούς χρόνου περιλαμβάνει τους πόλους. ❌

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

$\cos(3 \cdot t) \cdot u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{s}{s^2 + 9}, \text{Re}(s) > 0$  ✔️

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Ο μετασχηματισμός Laplace ενός σήματος συνεχούς χρόνου και ο μετασχηματισμός Laplace του ίδιου σήματος συνεχούς χρόνου μετατοπισμένου στον χρόνο, έχουν την ίδια Περιοχή Σύγκλισης. ❌

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

$x(t) \cdot X(s) \Rightarrow x(-2 \cdot t) X\left(-\frac{s}{2}\right)$  ❌

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

$y''(t) + y'(t) = x'(t) - x(t) \Rightarrow H(s) = \frac{s-1}{s^2 + s}$  ✔️

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Αν σε ένα LTI σύστημα συνεχούς χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς  $H(s)$  έχουμε είσοδο το σήμα  $x(t) = e^{2t}$ , τότε η έξοδος είναι  $y(t) = H(2j) \cdot x(t)$  ❌

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Η Περιοχή Σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace ενός αιτιατού σήματος συνεχούς χρόνου είναι το δεξιό ημιεπίπεδο. ❌

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Ο φανταστικός άξονας ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς ενός ευσταθούς LTI συστήματος συνεχούς χρόνου. ✔️

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Η απόκριση μοναδιαίου παλμού ενός ευσταθούς LTI συστήματος συνεχούς χρόνου μηδενίζεται όσο αυξάνει ο χρόνος. ✔️

## Κεφάλαιο 7

### Κριτήριο αξιολόγησης 2

Να ταιριάζετε τις διαφορικές εξισώσεις με τις συναρτήσεις μεταφοράς:

Διαφορική εξίσωση	Συνάρτηση μεταφοράς
$y''(t) + y(t) = x'(t) + x(t)$	$H(s) = \frac{1+s}{1+s^2}$
$y'''(t) + y'(t) = x''(t) + x(t)$	$H(\omega) = \frac{1+s^2}{s+s^3}$
$3 \cdot y''(t) - y(t) = x''(t) + 2 \cdot x(t)$	$H(\omega) = \frac{2+s^2}{-1+3 \cdot s^2}$
$3 \cdot y''(t) - y(t) = 4 \cdot x''(t) - 2 \cdot x'(t)$	$H(\omega) = \frac{4 \cdot s^2 - 2 \cdot s}{-1+3 \cdot s^2}$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Διαδραστικό πρόγραμμα 8.2 Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier (FFT).

### Κεφάλαιο 8

#### Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier

Να ταιριάζετε το μήκος γρήγορου μετασχηματισμού Fourier με τους αλγόριθμους γρήγορου μετασχηματισμού Fourier:

Μήκος FFT	Αλγόριθμος FFT
$N = 15625$	FFT με βάση 5
$N = 16171$	FFT πρώτων παραγόντων
$N = 16384$	DITFFT / DIFFFT

## Κεφάλαιο 8

### Κριτήριο αξιολόγησης 1

Επιλέξτε τον αλγόριθμο FFT που ταιριάζει στην κάθε πρόταση:

<p>α. Η βασική ιδέα του αλγορίθμου είναι η διάσπαση του σήματος των DFT <math>N</math> σημείων του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε, σε 2 σήματα με μισό μήκος <math>N/2</math> το κάθε ένα: το ένα σήμα αποτελείται από τα δείγματα του σήματος με άρτιο (even) δείκτη και το άλλο σήμα αποτελείται από τα δείγματα του σήματος με περιττό (odd) δείκτη.</p> <p><input checked="" type="radio"/> DIT FFT <input type="radio"/> DIF FFT</p>
<p>β. Η βασική ιδέα του αλγορίθμου είναι η διάσπαση του σήματος των DFT <math>N</math> σημείων του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε, σε 2 σήματα με μισό μήκος <math>N/2</math> το κάθε ένα: το ένα σήμα αποτελείται από τα πρώτα <math>N/2</math> δείγματα του σήματος και το δεύτερο σήμα αποτελείται από τα επόμενα <math>N/2</math> δείγματα του σήματος.</p> <p><input type="radio"/> DIT FFT <input checked="" type="radio"/> DIF FFT</p>
<p>γ. Η πεταλούδα του αλγορίθμου περιγράφεται από τις σχέσεις <math>A = a + b</math> και <math>B = (a - b) \cdot W_N^k</math>.</p> <p><input type="radio"/> DIT FFT <input checked="" type="radio"/> DIF FFT</p>
<p>δ. Η πεταλούδα του αλγορίθμου περιγράφεται από τις σχέσεις <math>A = a + W_N^k \cdot b</math> και <math>B = a - W_N^k \cdot b</math>.</p> <p><input checked="" type="radio"/> DIT FFT <input type="radio"/> DIF FFT</p>
<p>ε. Η διάταξη των δειγμάτων εξόδου προκύπτει από την (κανονική) διάταξη των δειγμάτων εισόδου με αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων των δεικτών τους (bit-reversal).</p> <p><input type="radio"/> DIT FFT <input checked="" type="radio"/> DIF FFT</p>
<p>στ. Η διάταξη των δειγμάτων εισόδου προκύπτει από την (κανονική) διάταξη των δειγμάτων εξόδου με αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων των δεικτών τους (bit-reversal).</p> <p><input checked="" type="radio"/> DIT FFT <input type="radio"/> DIF FFT</p>

## Κεφάλαιο 8

### Κριτήριο αξιολόγησης 2

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Ο υπολογισμός του DFT  $N$  σημείων του σήματος  $x(n)$  πεπερασμένου μήκους  $L < N$  που μηδενίζεται έξω από το διάστημα  $[0 : L - 1]$ , γίνεται με συμπλήρωση με μηδενικά (zeropadding) στο τέλος του σήματος. ✓

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Η κυκλική συνέλιξη μπορεί πάντα να υπολογιστεί από τη γραμμική συνέλιξη. ✓

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Αν  $x(n) \xrightarrow{DFT-N} X(k)$  και  $x(n)$  είναι πραγματικό σήμα, τότε  $X(k) = X^*((N-k))_N$ . ✓

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Η ιδιότητα της γραμμικότητας δεν ισχύει στον DFT. ✗

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Η γραμμική συνέλιξη δύο σημάτων διακριτού χρόνου πεπερασμένου μήκους  $N$  και η κυκλική συνέλιξη  $N$  σημείων δύο σημάτων διακριτού χρόνου είναι ίσες μεταξύ τους. ✗

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Στην πεταλούδα DIF ο πολλαπλασιασμός με την ποσότητα  $W_N^k$  γίνεται μετά την πρόσθεση/αφαίρεση. ✓

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Στον αλγόριθμο DITFFT η διάταξη των δειγμάτων εισόδου προκύπτει από την (κανονική) διάταξη των δειγμάτων εξόδου με αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων των δεικτών τους (bit-reversal). ✓

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT)  $N$  σημείων ενός σήματος με χρήση του ορισμού απαιτούνται  $2N^2$  πραγματικοί πολλαπλασιασμοί και  $6N^2 - 2 \cdot N$  πραγματικές προσθέσεις. ✓

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT)  $N$  σημείων ενός σήματος με χρήση του DITFFT απαιτούνται  $N \cdot \log_2 N$  μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και  $N \cdot \log_2 N$  μιγαδικές προσθέσεις. ✗

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Οι αλγόριθμοι DITFFT και DIFFFT βασίζονται στην τεχνική «διαίρει και βασίλευε» (divideandconquer). ✓



# Ευρετήριο

## A. ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

### 1. Ευρετήριο αγγλικών όρων

aliasing	επικάλυψη ή παραποίηση
allPass	ολοπερατό φίλτρο
AnalogtoDigitalConversion – ADC	μετατροπή αναλογικού σε ψηφιακό
AutoRegressive – AR	αυτοπαλινδρομούμενο φίλτρο
AutoRegressiveMovingAverage – ARMA	αυτοπαλινδρομούμενο φίλτρο κινητού μέσου όρου
autocorrelation	αυτοσυσχέτιση
BandPass	ζωνοπερατό φίλτρο
BandStop	ζωνοφρακτικό φίλτρο ή φίλτρο απόρριψης ζώνης
bilateralz–transform	δίπλευρος μετασχηματισμός z
bit-reversal	αντιστροφή bit
Continuous Time Fourier Transform – CTFT	μετασχηματισμός Fourier συνεχούςχρόνου
continuous time signals	σήματασυνεχούςχρόνου
convolution	συνέλιξη
crosscorrelation	ετεροσυσχέτιση
Decimation In Frequency – DIF	αποδεκάτισηστησυχνότητα
Decimation In Frequency FFT – DIF FFT	FFT μεαποδεκάτισηστησυχνότητα
Decimation In Time – DIT	αποδεκάτισηστονχρόνο
Decimation In Time FFT – DIT FFT	FFT μεαποδεκάτισηστονχρόνο
DIF butterfly	πεταλούδα DIF
Digital to Analog Conversion – DAC	μετατροπήψηφιακούσεαναλογικό
Discrete Fourier Transform – DFT	διακριτόςμετασχηματισμός Fourier
Discrete Time Fourier Transform – DTFT	μετασχηματισμός Fourier διακριτούχρόνου
discrete time signals	σήματαδιακριτούχρόνου
DIT butterfly	πεταλούδα DIT
divide and conquer	διαίρεικαιβασίλευε
encoding	κωδικοποίηση
Fast Fourier Transform – FFT	γρήγοροςμετασχηματισμός Fourier
Finite duration Impulse Response – FIR	πεπερασμένηκρουστικήαπόκριση
FIRnotchfilter	FIR φίλτρο αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας
frequencyresponse	απόκριση συχνότητας
HighPass	υψηπερατό φίλτρο
homogenousolution	ομογενής λύση
IIRnotchfilter	IIR φίλτρο αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας
impulseresponse	κρουστική απόκριση
InfinitedurationImpulseResponse – IIR	άπειρη κρουστική απόκριση
Laplacetransform	μετασχηματισμός Laplace
linear	γραμμικό σύστημα
linearconvolution	γραμμική συνέλιξη
LinearTimeInvariant – LTI	γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα
LowPass	χαμηλοπερατό ή βαθυπερατό φίλτρο

MovingAverage – MA	φίλτρο κινητού μέσου όρου
notchfilter	φίλτρο αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας
one-sidedz–transform	μονόπλευρος μετασχηματισμός z
partial solution	μερική λύση
poles	πόλοι
quantisation	κβάντιση
radix-2 FFT	FFT με βάση 2
radix-rFFT	FFT με βάση r
Region Of Convergence – ROC	περιοχή σύγκλισης
sampling	περιοδική δειγματοληψία
stable	ευσταθές σύστημα
timeinvariant	χρονικά αμετάβλητο σύστημα
transferfunction (Laplacetransform)	συνάρτηση μεταφοράς (μετασχηματισμός Laplace)
transferfunction (ztransform)	συνάρτηση μεταφοράς (μετασχηματισμός z)
unitcircle	μοναδιαίος κύκλος
zeropadding	συμπλήρωση με μηδενικά
zeros	μηδενικά

## 2. Ευρετήριο ονομάτων

Dirac  
Euler  
Fibonacci  
Fourier  
Hamming  
Hann  
Kronecker  
Laplace  
Nyquist  
Shannon  
Toeplitz

### 3. Ευρετήριοελληνικώνόρων

αιτιατά σήματα (σήματα διακριτού χρόνου)  
αιτιατά σήματα (σήματα συνεχούς χρόνου)  
αιτιατό σύστημα  
αιτιοκρατικό ή νομοτελειακό ή ντετερμινιστικό σήμα  
αιτιότητα  
αιτιότητα (σήματος διακριτού χρόνου)  
αιτιότητα (σήματος συνεχούς χρόνου)  
ακολουθία  
ακολουθία Fibonacci  
ακολουθία αριστερής πλευράς  
ακολουθία δεξιάς πλευράς  
αλγόριθμος FFT με αποδεκάτιση στη συχνότητα  
αλγόριθμος FFT με αποδεκάτιση στον χρόνο  
αλγόριθμος FFT με βάση 2  
αλγόριθμος FFT με βάση  $r$   
αλγόριθμος FFT πρώτων παραγόντων  
αμφίπλευρη ακολουθία  
αναδίπλωση (σήματος διακριτού χρόνου)  
αναδίπλωση (σήματος συνεχούς χρόνου)  
αναιτιατά σήματα (σήματα διακριτού χρόνου)  
αναιτιατά σήματα (σήματα συνεχούς χρόνου)  
ανάκλαση (σήματος διακριτού χρόνου)  
ανάκλαση (σήματος συνεχούς χρόνου)  
αναλογικά σήματα  
ανάλυση σημάτων διακριτού χρόνου  
ανάλυση σημάτων συνεχούς χρόνου  
αντιστρεψιμότητα  
αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων  
αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier  
αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου  
αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου  
αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace  
αντίστροφος μετασχηματισμός  $z$   
αποδεκάτιση στη συχνότητα  
αποδεκάτιση στον χρόνο  
απόκριση (σύστημα διακριτού χρόνου)  
απόκριση (σύστημα συνεχούς χρόνου)  
απόκριση συχνότητας  
απόκριση συχνότητων  
άρτιο (σήμα διακριτού χρόνου)  
άρτιο (σήμα συνεχούς χρόνου)  
αρχή της επαλληλίας  
αρχή της υπέρθεσης  
ασταθές αιτιατό LTI σύστημα  
ασταθές σήμα  
αυτοπαλινδρομούμενα φίλτρα  
αυτοπαλινδρομούμενα φίλτρα κινητού μέσου όρου  
αυτοσυσχέτιση (σήματος διακριτού χρόνου)  
αυτοσυσχέτιση (σήματος συνεχούς χρόνου)

βαθυπερατό φίλτρο

γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

γραμμική συνέλιξη (σημάτων διακριτού χρόνου)  
γραμμικό σύστημα  
γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα  
γραμμικότητα  
γρήγορος μετασχηματισμός Fourier

δειγματοληψία  
δέλτα του Kronecker  
διαίρει και βασίλευε  
διαίρεση συχνότητας  
διακριτός μετασχηματισμός Fourier  
διαμορφωτής  
διάρκεια (σήματος διακριτού χρόνου)  
διάρκεια (σήματος συνεχούς χρόνου)  
διαστολή  
διαφορική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές  
διαφορική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές

ενέργεια (σήματος διακριτού χρόνου)  
ενέργεια (σήματος συνεχούς χρόνου)  
επικάλυψη  
ετεροσυσχέτιση (σημάτων διακριτού χρόνου)  
ετεροσυσχέτιση (σημάτων συνεχούς χρόνου)  
ευθύς αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace  
ευθύς αμφίπλευρος μετασχηματισμός  $z$   
ευθύς διακριτός μετασχηματισμός Fourier  
ευθύς μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου  
ευθύς μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου  
ευστάθεια  
ευστάθεια BIBO  
ευστάθεια αιτιατών LTI συστημάτων διακριτού χρόνου  
ευστάθεια σημάτων διακριτού χρόνου  
ευστάθεια συστημάτων διακριτού χρόνου  
ευσταθές αιτιατό LTI σύστημα  
ευσταθές σήμα  
ευσταθές σύστημα  
ευσταθές σύστημα

ζεύγη μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου  
ζεύγη μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου  
ζεύγη μετασχηματισμού Laplace  
ζεύγη μετασχηματισμού  $z$   
ζωνοπερατό φίλτρο  
ζωνοφρακτικό φίλτρο

ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου  
ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου

θεμελιώδης περίοδος (σήματος διακριτού χρόνου)  
θεμελιώδης περίοδος (σήματος συνεχούς χρόνου)  
θεώρημα Parseval (αρχή διατήρησης της ενέργειας)  
θεώρημα αρχικής τιμής (μετασχηματισμός Laplace)  
θεώρημα αρχικής τιμής (μετασχηματισμός  $z$ )  
θεώρημα δειγματοληψίας  
θεώρημα τελικής τιμής (μετασχηματισμός Laplace)

θεώρημα τελικής τιμής (μετασχηματισμός  $z$ )

ιδιοσυνάρτηση

ιδιότητες διακριτού μετασχηματισμού Fourier

ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου

ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace

ιδιότητες μετασχηματισμού  $z$

ιδιότητες συνέλιξης (σημάτων διακριτού χρόνου)

ιδιότητες συνέλιξης (σημάτων συνεχούς χρόνου)

ιδιοτιμή

κβάντιση

κλιμάκωση στο πλάτος (σήματος διακριτού χρόνου)

κλιμάκωση στο πλάτος (σήματος συνεχούς χρόνου)

κλιμάκωση στον χρόνο (σήματος διακριτού χρόνου)

κλιμάκωση στον χρόνο (σήματος συνεχούς χρόνου)

κλιμακωτή συνάρτηση

κρουστική απόκριση

κυκλική συνέλιξη

κωδικοποίηση

μερική λύση

μέση ισχύς (σήματος διακριτού χρόνου)

μέση ισχύς (σήματος συνεχούς χρόνου)

μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου

μετασχηματισμός Laplace

μετασχηματισμός  $z$

μετατόπιση (σήματος διακριτού χρόνου)

μετατόπιση (σήματος συνεχούς χρόνου)

μετατροπή αναλογικού σε ψηφιακό

μετατροπή ψηφιακού σε αναλογικό

μη αιτιατά σήματα (σήματα διακριτού χρόνου)

μη αιτιατά σήματα (σήματα συνεχούς χρόνου)

μηδενικά

μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου

μιγαδικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου

μοναδιαίο βηματικό σήμα

μοναδιαίο εναλλακτικό σήμα

μοναδιαίος κύκλος

μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace

μονόπλευρος μετασχηματισμός  $z$

ολίσθηση (σήματος διακριτού χρόνου)

ολίσθηση (σήματος συνεχούς χρόνου)

ολοκληρωτής

ολοπερατό φίλτρο

ομογένεια

ομογενής εξίσωση διαφορών

ομογενής λύση

οριακά ευσταθές αιτιατό LTI σύστημα

οριακά ευσταθές σήμα

όριο Nyquist

παράλληλη σύνδεση (μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου)  
παραποίηση  
περιοδική δειγματοληψία  
περιοδική επέκταση ακολουθίας  
περιοδική συνέλιξη  
περιοδικό σήμα (σήμα διακριτού χρόνου)  
περιοδικό σήμα (σήμα συνεχούς χρόνου)  
περιοδικότητα (σήματος διακριτού χρόνου)  
περιοδικότητα (σήματος συνεχούς χρόνου)  
περιοχή σύγκλισης (μετασχηματισμός Laplace)  
περιοχή σύγκλισης (μετασχηματισμός z)  
περιττό (σήμα διακριτού χρόνου)  
περιττό (σήμα συνεχούς χρόνου)  
πεταλούδα DIF  
πεταλούδα DIT  
πίνακας Toeplitz  
πλάτος  
πολλαπλασιασμός (σημάτων διακριτού χρόνου)  
πολλαπλασιασμός (σημάτων συνεχούς χρόνου)  
πολλαπλασιασμός συχνότητας  
πόλοι  
πολυδιάστατα σήματα  
πραγματικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου  
πραγματικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου  
πραγματοποιήσιμο σύστημα  
πρόσθεση (σημάτων διακριτού χρόνου)  
πρόσθεση (σημάτων συνεχούς χρόνου)

σήμα  
σήμα διακριτού χρόνου  
σήμα ενέργειας (σήμα διακριτού χρόνου)  
σήμα ενέργειας (σήμα συνεχούς χρόνου)  
σήμα ισχύος (σήμα διακριτού χρόνου)  
σήμα ισχύος (σήμα συνεχούς χρόνου)  
σήμα μέγιστης παλινδρόμησης  
σήμα μοναδιαίας κλίσης  
σήμα μοναδιαίου βήματος  
σήμα μοναδιαίου δείγματος  
σήμα μοναδιαίου παλμού  
σήμα ράμπας  
σήμα συνεχούς χρόνου  
σήματα άπειρης διάρκειας  
σήματα διακριτού χρόνου  
σήματα διακριτού χρόνου διακριτού πλάτους  
σήματα διακριτού χρόνου συνεχούς πλάτους  
σήματα πεπερασμένης διάρκειας  
σήματα συνεχούς χρόνου  
σήματα συνεχούς χρόνου διακριτού πλάτους  
σήματα συνεχούς χρόνου συνεχούς πλάτους  
συζυγές αντισυμμετρικό (σήμα διακριτού χρόνου)  
συζυγές αντισυμμετρικό (σήμα συνεχούς χρόνου)  
συζυγές συμμετρικό (σήμα διακριτού χρόνου)  
συζυγές συμμετρικό (σήμα συνεχούς χρόνου)  
συμμετρία (σήματος διακριτού χρόνου)  
συμμετρία (σήματος συνεχούς χρόνου)

συμπλήρωση με μηδενικά  
συνάρτηση  
συνάρτηση δειγματοληψίας  
συνάρτηση δέλτα του Dirac  
συνάρτηση μεταφοράς (μετασχηματισμός Laplace)  
συνάρτηση μεταφοράς (μετασχηματισμός z)  
σύνδεση σε σειρά (μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου)  
σύνδεση συστημάτων παράλληλα  
σύνδεση συστημάτων παράλληλα (μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου)  
σύνδεση συστημάτων παράλληλα (μετασχηματισμός Laplace)  
σύνδεση συστημάτων παράλληλα (μετασχηματισμός z)  
σύνδεση συστημάτων σε σειρά  
σύνδεση συστημάτων σε σειρά (μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου)  
σύνδεση συστημάτων σε σειρά (μετασχηματισμός Laplace )  
σύνδεση συστημάτων σε σειρά (μετασχηματισμός z)  
συνέλιξη (σημάτων διακριτού χρόνου)  
συνέλιξη (σημάτων συνεχούς χρόνου)  
σύστημα ανάδρασης  
σύστημα διακριτού χρόνου  
σύστημα κλάδου ανάδρασης  
σύστημα μέσης τιμής (σύστημα συνεχούς χρόνου)  
σύστημα συνεχούς χρόνου  
σύστημα του ευθέως κλάδου  
συστολή  
συσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου  
συσχέτιση σημάτων συνεχούς χρόνου  
σχέση γραμμικής και κυκλικής συνέλιξης

ταυτότητα του Euler  
τριγωνική συνάρτηση  
τυχαία ή στοχαστικά σήματα

υψηλερατό φίλτρο

φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου  
φανταστικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου  
φίλτρα γραμμικής φάσης  
φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου I  
φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου II  
φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου III  
φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου IV  
φίλτρο Hamming  
φίλτρο Hann  
φίλτρο άπειρης κρουστικής απόκρισης  
φίλτρο αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας  
φίλτρο απόρριψης ζώνης  
φίλτρο επιλογής συχνοτήτων  
φίλτρο κινητού μέσου όρου  
φίλτρο μέσης τιμής (σύστημα διακριτού χρόνου)  
φίλτρο πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης

χαμηλοπερατό φίλτρο  
χαρακτηριστική εξίσωση  
χαρακτηριστικό πολυώνυμο  
χρονικά αμετάβλητο σύστημα



χρονικά περιορισμένη συνάρτηση δειγματοληψίας  
χρονική αμεταβλητότητα  
χρόνος  
χρυσή τομή

ψηφιακά σήματα

## B. ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

### 1. Ευρετήριοbuilt-infunctions

abs  
angle  
any  
axis  
cconv  
clock  
conj  
conv  
cos  
deconv  
dirac  
dsolve  
error  
etime  
exp  
fft  
figure  
filter  
filtic  
find  
fliplr  
floor  
fourier  
freqz  
hold  
ifft  
ifourier  
ilaplace  
imag  
laplace  
legend  
length  
lsim  
max  
min  
mod  
plot  
pretty  
rand  
real  
residue  
residuez  
seqperiod  
sin  
stem  
subplot  
syms  
text  
tf  
title  
xcorr  
xlabel  
ylabel  
zeros  
zplane

## 2. Ευρετήριο user-defined functions

signaladd  
signalcexp  
signalcirconv  
signalcirshift  
signalconv  
signaldft  
signalfold  
signaliexp  
signalimp  
signalmult  
signalrexp  
signalscaldiv  
signalscalmul  
signalshift  
signalsin  
signalstep