



ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Λυμένα Παραδείγματα

Διδάσκων: Μ. Παρασκευάς

ΣΕΤ #12 - Δομές συστημάτων διακριτού χρόνου

- Φίλτρα IIR
- Φίλτρα FIR
- Φίλτρα Πλέγματος (Lattice Filters)

1. Φίλτρα IIR

Παράδειγμα 1

Ένα ΓΑΚΜ σύστημα περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{1 + 0.9z^{-1}}{(1 + 0.1z^{-1} + 0.5z^{-2})(1 - 0.6z^{-1})}$$

- (α) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα βαθμίδων ευθείας μορφής I και II.
- (β) Για κάθε μία μορφή να υπολογιστεί το πλήθος των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό κάθε δείγματος εξόδου, καθώς και το πλήθος των καταχωρητών καθυστέρησης.

Απάντηση: (α) Κάνουμε τις πράξεις στον παρονομαστή, οπότε η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται:

$$H(z) = \frac{1 + 0.9z^{-1}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.44z^{-2} - 0.3z^{-3}}$$

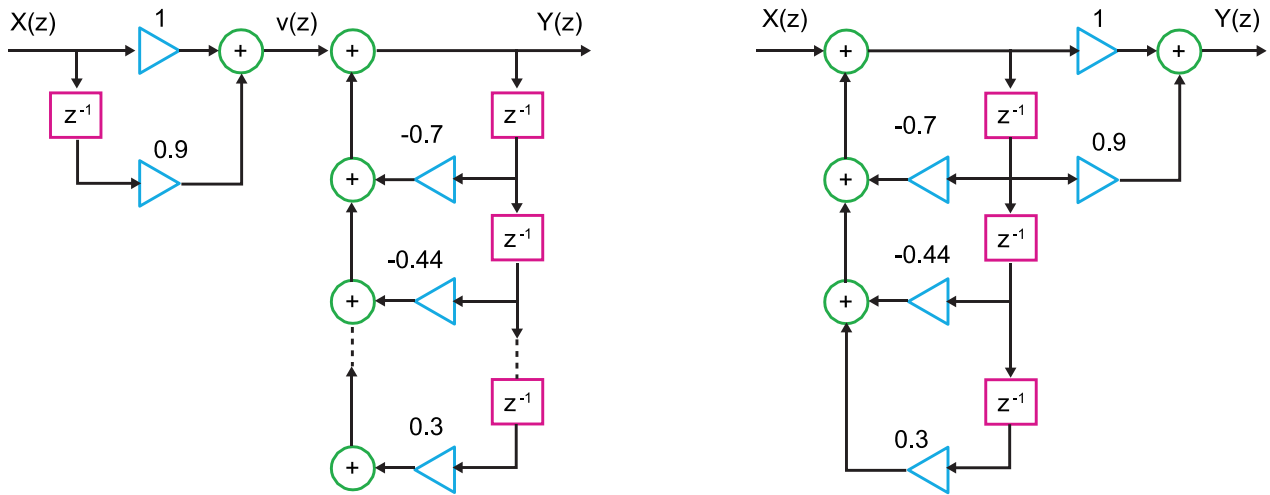
Τα διαγράμματα βαθμίδων ευθείας μορφής I και II δείχνονται στο επόμενο σχήμα.

(β) Σύμφωνα με τα διαγράμματα βαθμίδων (α) και (β), το πλήθος υπολογισμών στην ευθεία μορφή I είναι:

- Πολλαπλασιασμοί: 5 για κάθε δείγμα εξόδου
- Προσθέσεις: 4 για κάθε δείγμα εξόδου
- Καθυστερήσεις: 4

και στην ευθεία μορφή II είναι:

- Πολλαπλασιασμοί: 5 για κάθε δείγμα εξόδου
- Προσθέσεις: 4 για κάθε δείγμα εξόδου
- Καθυστερήσεις: 3



Διάγραμμα βαθμίδων: (α) ευθείας μορφής I, (β) ευθείας μορφής II

2. Φίλτρα FIR

📖 Παράδειγμα 2

(α) Να σχεδιαστεί η ευθεία μορφή του FIR συστήματος με κρουστική απόκριση:

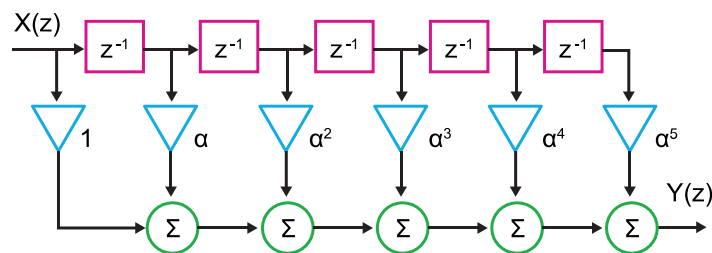
$$h[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(β) Να υπολογιστεί το πλήθος των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό κάθε δείγματος εξόδου καθώς και το πλήθος των καταχωρητών καθυστέρησης.

Απάντηση: (α) Η κρουστική απόκριση γράφεται:

$$h[n] = a^n[u[n] - n[n - 6]] = \delta(0) + a\delta(1) + a^2\delta(2) + a^3\delta(3) + a^4\delta(4) + a^5\delta(5)$$

από την οποία προκύπτει ότι το διάγραμμα βαθμίδων ευθείας μορφής είναι:



Δομή FIR συστήματος σε ευθεία μορφή (N=6)

(β) Από το διάγραμμα βαθμίδων προκύπτει ότι το πλήθος υπολογισμών στην ευθεία μορφή είναι:

- Πολλαπλασιασμοί: 6 για κάθε δείγμα εξόδου
- Προσθέσεις: 5 για κάθε δείγμα εξόδου
- Καθυστερήσεις: 5

3. Φίλτρα Πλέγματος FIR (Lattice FIR)

📖 Παράδειγμα 3

Οι συντελεστές ανάκλασης ενός φίλτρου πλέγματος FIR δεύτερης τάξης είναι $K_1 = 1/4$ και $K_2 = 1/8$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις μεταφοράς πρώτης $A_1(z)$ και δεύτερης τάξης $A_2(z)$, οι οποίες συνδέουν την είσοδο $x[n]$ με τις $f_1[n]$ και $f_2[n]$, αντίστοιχα.

Απάντηση: Θέτουμε $m = 1$ στη σχέση $A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-m} A_{m-1}(z^{-1})$ και βρίσκουμε:

$$A_1(z) = A_0(z) + K_1 z^{-1} A_0(z^{-1}) \quad (1)$$

Η αρχική συνθήκη είναι $A_0(z) = 1$, επομένως και $A_0(z^{-1}) = 1$. Άρα η σχέση (1) υπολογίζεται σε:

$$A_1(z) = 1 + \frac{1}{4} z^{-1} \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) βρίσκουμε ότι:

$$A_1(z^{-1}) = 1 + \frac{1}{4} z \quad (3)$$

Θέτουμε $m = 2$ στη σχέση $A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-m} A_{m-1}(z^{-1})$ και έχουμε:

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2 z^{-2} A_1(z^{-1}) \quad (4)$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (2) και (3) στη σχέση (4) και βρίσκουμε:

$$A_2(z) = \left(1 + \frac{1}{4} z^{-1}\right) + \frac{1}{8} z^{-2} \left(1 + \frac{1}{4} z\right) = 1 + \frac{9}{32} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-2}$$

📖 Παράδειγμα 4

Να βρεθούν οι συντελεστές ανάκλασης του FIR φίλτρου δεύτερης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς:

$$A_2(z) = 1 - \frac{1}{2} z^{-2}$$

Απάντηση: Θέτουμε $m = 2$ στη σχέση $A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-m} A_{m-1}(z^{-1})$ και έχουμε:

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2 z^{-2} A_1(z^{-1}) \quad (1)$$

Θέτουμε $m = 1$ στη σχέση $A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-m} A_{m-1}(z^{-1})$ και έχουμε:

$$A_1(z) = A_0(z) + K_1 z^{-1} A_0(z^{-1}) \quad (2)$$

Επειδή $A_0(z) = 1$ και $A_0(z^{-1}) = 1$, η σχέση 1 γράφεται:

$$A_1(z) = 1 + K_1 z^{-1} \quad (3)$$

Από τη σχέση (2) βρίσκουμε ότι:

$$A_1(z^{-1}) = 1 + K_1 z \quad (4)$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (2), (3) και (4) στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$A_2(z) = 1 + K_1 z^{-1} + K_2 z^{-2} (1 + K_1 z) = 1 + (K_1 + K_1 K_2) z^{-1} + K_2 z^{-2} \quad (5)$$

Εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές της δοθείσας συνάρτησης μεταφοράς $A_2(z)$ και της σχέσης (5) και βρίσκουμε:

$$K_2 = -\frac{1}{2}, \quad K_1 = 0$$

4. Φίλτρα Πλέγματος IIR (Lattice IIR)

📖 Παράδειγμα 5

Να μετατραπεί το ακόλουθο IIR φίλτρο πόλων - μηδενικών σε μορφή πλέγματος:

$$H(z) = \frac{0.25 + 0.5z^{-1} - 0.4z^{-2}}{1 - 0.1z^{-1} + z^{-2}}$$

Απάντηση: Αρχικά θα μετατρέψουμε τους συντελεστές του παρονομαστή σε συντελεστές ανάκλασης:

$$A_2(z) = 1 - 0.1z^{-1} + z^{-2}$$

Θέτουμε $m = 2$ και $m = 1$ στη σχέση $A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-m} A_{m-1}(z^{-1})$ και αντίστοιχα λαμβάνουμε:

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2 z^{-2} A_1(z^{-1}) \quad (1)$$

$$A_1(z) = A_0(z) + K_1 z^{-1} A_0(z^{-1}) \quad (2)$$

Επειδή $A_0(z) = 1$ και $A_0(z^{-1}) = 1$, βρίσκουμε:

$$A_1(z) = 1 + K_1 z^{-1} \quad (3)$$

$$A_1(z^{-1}) = 1 + K_1 z \quad (4)$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (2), (3) και (4) στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$A_2(z) = 1 + K_1 z^{-1} + K_2 z^{-2} (1 + K_1 z) = 1 + (K_1 + K_1 K_2) z^{-1} + K_2 z^{-2} \quad (5)$$

Εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές της αρχικής συνάρτησης $A_2(z)$ και της σχέσης (5) και βρίσκουμε:

$$K_2 = 1, \quad K_1 = -0.05$$

Οι συντελεστές a_m και b_m που δίνονται στην εκφώνηση είναι:

$$a_m = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\} = \{1, -0.1, 1\}$$

$$b_m = \{b_0, b_1, b_2\} = \{0.25, 0.5, -0.4\}$$

Τέλος, οι συντελεστές C_2 υπολογίζονται για $m = 2, 1, 0$ από την αναδρομική σχέση:

$$y[n] = \sum_{m=0}^M C_m g_m[n]$$

και είναι:

$$m = 2: C_2 = b_2 = -0.4$$

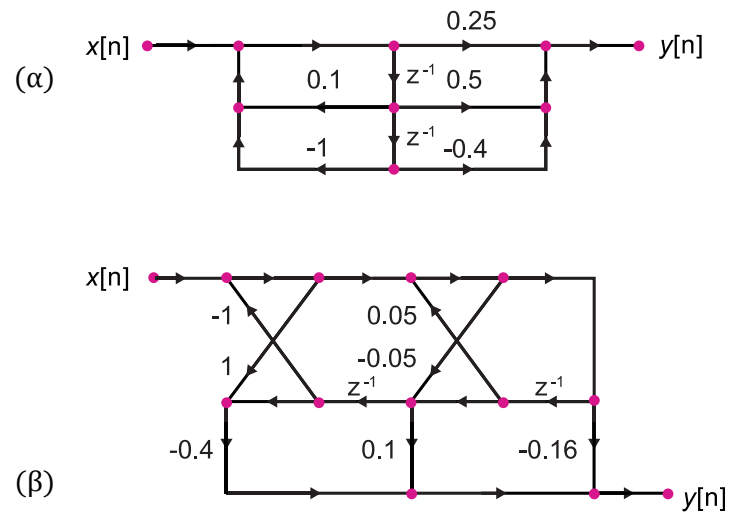
$$m = 1: C_1 = b_1 + C_2 a_2[1] = 0.5 + (-0.4) 1 = 0.1$$

$$m = 0: C_0 = b_0 + C_1 a_1[1] + C_2 a_2[2] = 0.25 + 0.1(-0.1) + (-0.4)1 = -0.16$$

Επομένως:

$$C_0 = -0.16, C_1 = 0.1, C_2 = -0.4$$

Στο παρακάτω σχήμα δείχνονται η ευθεία μορφή και η μορφή πλέγματος του δοθέντος IIR φίλτρου.



Φίλτρο IIR: (α) Ευθεία μορφή, (β) Μορφή πλέγματος