ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Λυμένα Παραδείγματα

Διδάσκων: Μ. Παρασκευάς

ΣΕΤ #11 - Ψηφιακά φίλτρα IIR

- Σχεδίαση με άμεση τοποθέτηση πόλων – μηδενικών
- Μέθοδος αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης
- Μέθοδος διγραμμικού μετασχηματισμού

1. Σχεδίαση με άμεση τοποθέτηση πόλων – μηδενικών

Παράδειγμα 1

Να σχεδιαστεί ζωνοπερατό φίλτρο IIR με τις ακόλουθες προδιαγραφές:

- Ζώνη διέλευσης με κέντρο τη συχνότητα: 3.000 Hz
- Εύρος ζώνης διέλευσης (3dB): 1.000 Hz
- Μηδενική απόκριση σε: 0 Hz και 5.000 Hz
- Συχνότητα δειγματοληψίας: 10.000 Hz

Απάντηση: Εφόσον είναι επιθυμητό μηδενικό πλάτος της απόκρισης συχνότητας στα 0 Hz και 5000 Hz θα πρέπει να τοποθετηθούν μηδενικά στα αντίστοιχα σημεία του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή στα σημεία του κύκλου:

$$2\pi \frac{0\ Hz}{10.000\ Hz} = 0\pi \text{ ή } 0^o$$

$$2\pi \frac{5.000\ Hz}{10.000\ Hz} = \pi \text{ ή } 180^o$$

Εφόσον ζητείται το φίλτρο να έχει μία ζώνη διέλευσης με κέντρο τα 3000 Hz θα τοποθετήσουμε έναν πόλο στη συχνότητα:

$$2\pi \frac{3.000\ Hz}{10.000\ Hz} = \frac{3\pi}{5} \text{ ή } 108^o$$

και σε απόσταση από το κέντρο του μοναδιαίου κύκλου:

$$r \approx 1 - \frac{\Delta f_{3dB}}{F_s}\pi = 1 - \frac{500}{10000}\pi = 1 - 0.05\pi = 0.95$$

Για να είναι πραγματικοί αριθμοί οι συντελεστές της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ πρέπει να τοποθετηθεί στην κατάλληλη θέση και ο συζυγής πόλος. Οπότε η σχέση (11.60) είναι:

$$H(z) = k\frac{(z-1)(z+1)}{(z-re^{j3\pi/5})(z-re^{-j3\pi/5})} = k\frac{z^2(1-z^{-2})}{z^2(1-2rz^{-1}\cos(3\pi/5)+r^2z^{-2})}$$
$$= k\frac{1-z^{-2}}{1+0.717125z^{-1}+0.9025\,z^{-2}}$$

Η απόκριση συχνότητας είναι:

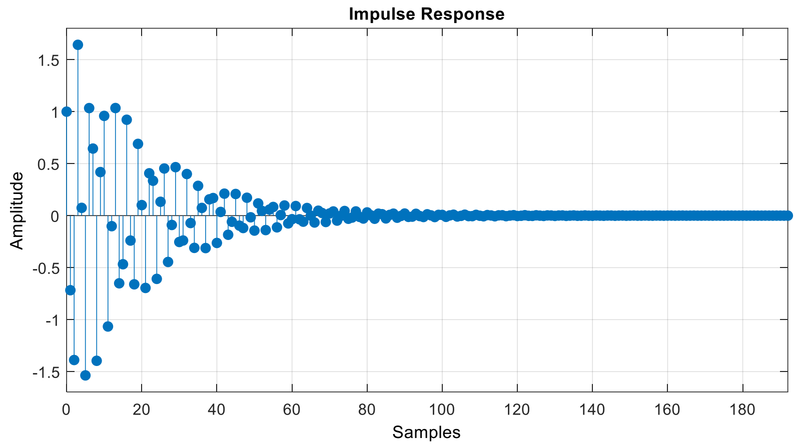
$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \cdots = k\frac{1-e^{-2j\omega}}{1+0.717125e^{-j\omega}+0.9025\,e^{-2j\omega}}$$

Για τη ζώνη διέλευσης ισχύει:

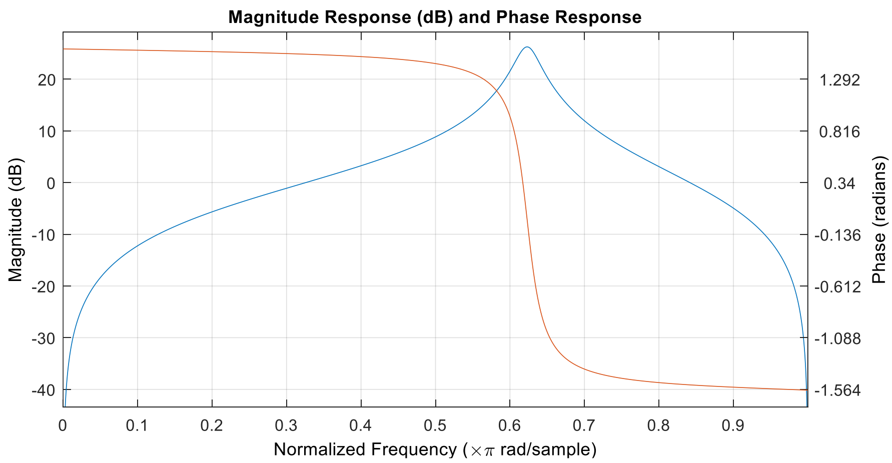
$$H\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow k\frac{1.8090+j\,0.5878}{0.0483-j\,0.1516} = 1 \Rightarrow k = -0.0005 - j\,0.0836$$

Με βάση τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ που υπολογίσαμε και προκειμένου να σχεδιάσουμε την κρουστική απόκριση, την απόκριση συχνότητας και το διάγραμμα πόλων – μηδενικών γράφουμε το ακόλουθο πρόγραμμα στο Matlab:

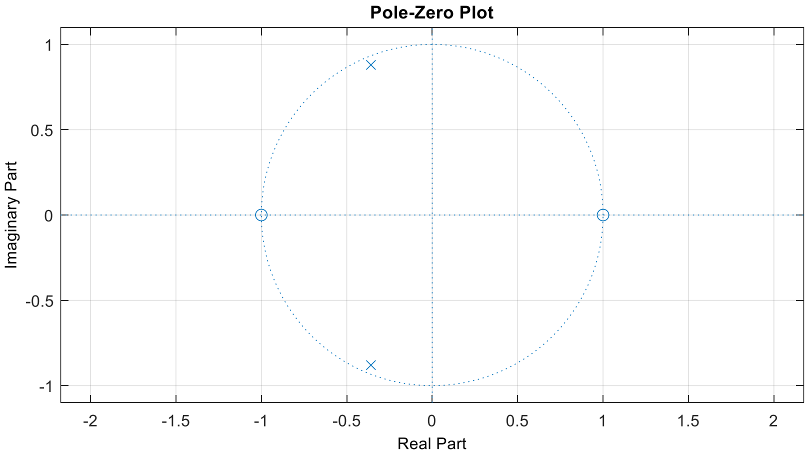
```
b = [1, 0, -1]; a = [1, 0.717125, 0.9025]; fvtool(b,a)
```



Κρουστική απόκριση



Απόκριση συχνότητας (μέτρο: μπλέ χρώμα, φάση: πράσινο χρώμα)



Διάγραμμα πόλων μηδενικών

2. Μέθοδος αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης

Παράδειγμα 2

Να μετατραπεί η παρακάτω συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του αναλογικού φίλτρου σε συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του ψηφιακού φίλτρου.

$$H(s) = \frac{3s+7}{s^2+4s+3}$$

Απάντηση: Γράφουμε την $H(s)$ σε ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων:

$$H(s) = \frac{3s+7}{s^2+4s+3} = \frac{3s+7}{(s+1)(s+3)} = \cdots = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s+1}$$

Οι πόλοι της $H(s)$ είναι: $p_1 = -1$ και $p_2 = -3$. Θέτουμε $T_d = 0.1$ και από τη σχέση

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - e^{p_k T_d} z^{-1}}$$

βρίσκουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του ψηφιακού φίλτρου:

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{-0.3} z^{-1}} + \frac{2}{1 - e^{-0.1} z^{-1}} = \frac{3 - 2.3865\, z^{-1}}{1 - 1.6457\, z^{-1} + 0.6703\, z^{-2}}$$

3. Μέθοδος διγραμμικού μετασχηματισμού

Παράδειγμα 3

Με χρήση του διγραμμικού μετασχηματισμού να απεικονιστούν στο επίπεδο z τα παρακάτω σημεία του επιπέδου s:

(α) $s_1 = -1 + j$ (β) $s_2 = 1 - j$ (γ) $s_3 = 2j$ (δ) $s_4 = -2j$

Απάντηση: Θέτουμε τιμή $T = 2$ στη σχέση

$$z = \frac{1 + (T/2)s}{1 - (T/2)s}$$

και έχουμε:

(α) $z_1 = \frac{1+s_1}{1-s_1} = \frac{1-1+j}{1+1-j} = \frac{j}{2-j} = -0.2 + 0.4j = 0.447 \measuredangle 7.2^0$

εφόσον $|z_1| < 1$, το σημείο z_1 βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

(β) $z_2 = \frac{1+s_1}{1-s_1} = \frac{1+1-j}{1-1+j} = \frac{2-j}{j} = -1 + 2j = 2.236 \measuredangle -7.2^0$

εφόσον $|z_2| > 1$, το σημείο z_2 βρίσκεται εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

(γ) $z_3 = \frac{1+s_1}{1-s_1} = \frac{1+2j}{1-2j} = -0.6 + 0.8j = 1\measuredangle 38.6^0$

εφόσον $|z_3| = 1$, το σημείο z_3 βρίσκεται επάνω στο θετικό ήμισυ της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου.

(δ) $z_4 = \frac{1+s_1}{1-s_1} = \frac{1-2j}{1+2j} = \frac{2-j}{-j} = -0.2 - 0.8j = 1\measuredangle -38.6^0$

εφόσον $|z_4| < 1$, το σημείο z_4 βρίσκεται επάνω στο αρνητικό ήμισυ της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου.

📖 Παράδειγμα 4

Με χρήση του διγραμμικού μετασχηματισμού να μετατραπεί σε ψηφιακό το αναλογικό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{3s+7}{s^2+4s+3}$$

Απάντηση: Θέτουμε τιμή $T = 2$ στη σχέση μετατροπής s←→z οπότε έχουμε:

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\Big|_{T=2} = \frac{z-1}{z+1}$$

Η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) = H(s)|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{3\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+7}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 4\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 3}$$

Με απλοποίηση λαμβάνουμε:

$$H(z) = \frac{5z^2+7z+2}{4z^2+2z} = \frac{1.25 + 1.75z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 + 0.5z^{-1}}$$