



ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Λυμένα Παραδείγματα Διδάσκων: Μ. Παρασκευάς

ΣΕΤ #9 - Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

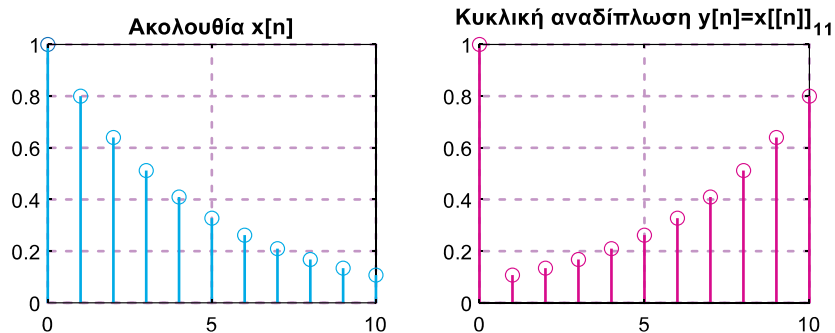
- Ιδιότητες DFT
- Σχέση κυκλικής συνέλιξης με γραμμική

1. Ιδιότητες DFT

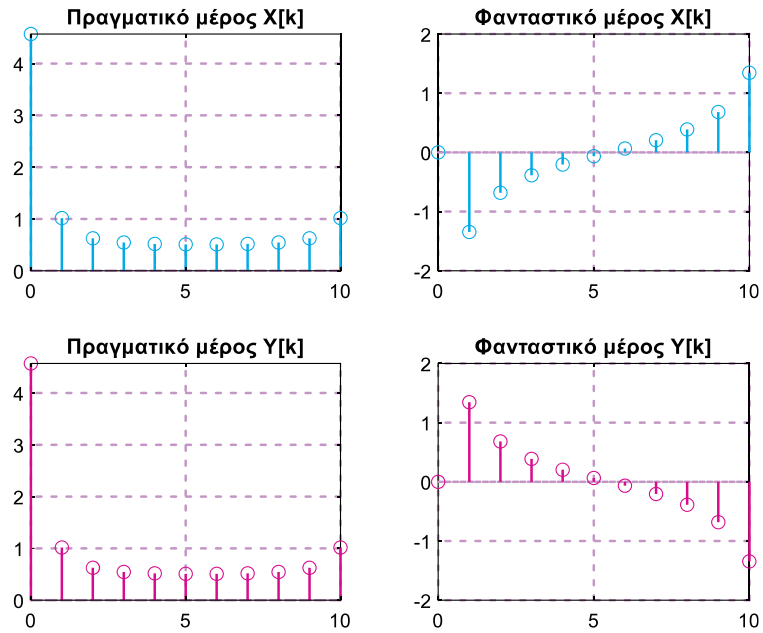
📖 Παράδειγμα 1

Χρησιμοποιώντας την ακολουθία $x[n] = (0.8)^n$ για $0 \leq n \leq 10$, να επιβεβαιωθεί η ιδιότητα της κυκλικής αναδίπλωσης.

Απάντηση:



Ακολουθία $x[n]$ και κυκλική αναδίπλωση $y[n] = x[[-n]]_{11}$



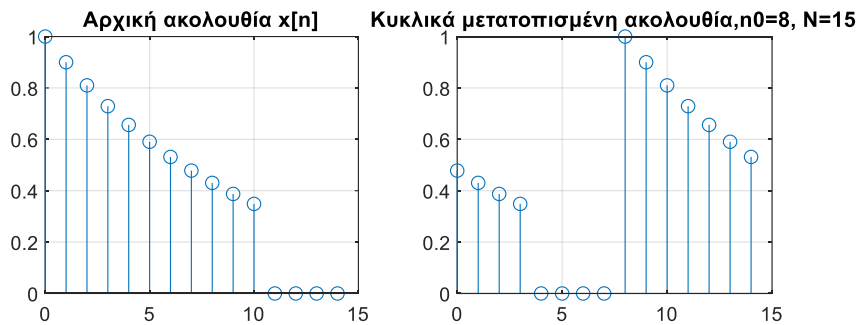
Πραγματικό και φανταστικό μέρος των DFT $X[k]$ και $Y[k]$

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα πραγματικού και φανταστικού μέρους των DFT $X[k]$ και $Y[k]$, διαπιστώνουμε ότι ισχύει η σχέση $Y[k] = X[N - k]$, άρα επιβεβαιώνεται η ιδιότητα της κυκλικής αναδίπλωσης.

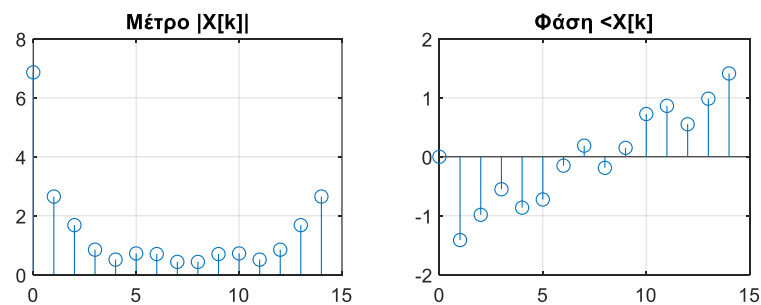
📖 Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί ο DFT της κυκλικά μετατοπισμένης ακολουθίας $y[n] = x[[n - 8]]_{15}$, όπου $x[n] = (0.9)^n$ για $0 \leq n \leq 10$.

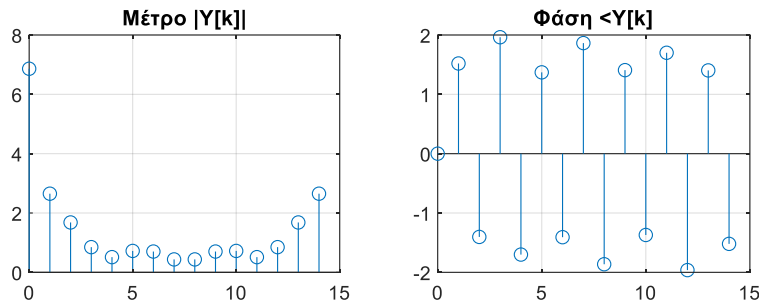
Απάντηση:



Ακολουθία $x[n]$ και κυκλικά μετατοπισμένη ακολουθία $y[n] = x[[n - 8]]_{15}$



Μέτρο και φάση του DFT $X[k]$



Μέτρο και φάση του DFT $Y[k]$

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα μέτρου των DFT $X[k]$ και $Y[k]$ διαπιστώνουμε ότι είναι ίδια, ενώ από τα διαγράμματα φάσης προκύπτει μετατόπιση φάσης ίση με τη φάση του όρου W_{15}^{8k} .

2. Σχέση κυκλικής συνέλιξης με γραμμική

📖 Παράδειγμα 3

Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη 4 σημείων μεταξύ των ακολουθιών $x[n] = \{0, 1, 2, 3\}$ και $h[n] = \{1, 2, 0, -1\}$ με χρήση του DFT.

Απάντηση: (α) Ξαναγράφουμε τις δοθείσες ακολουθίες ως:

$$x[n] = \{0, 1, 2, 3\}, n = 0, 1, 2, 3$$

$$h[n] = \{1, 2, 0, -1\}, n = -1, 0, 1, 2$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $h[n]$ μπορεί να θεωρηθεί ως η κυκλική μετατόπιση κατά μία μονάδα προς τα αριστερά μίας ακολουθίας $g[n] = \{1, 2, 0, -1\}, n = 0, 1, 2, 3$, δηλαδή είναι:

$$h[n] = g[[n + 1]]_4$$

Υπολογίζουμε μέσω του DFT την έξοδο από την κυκλική συνέλιξη $y[n] = x[n] \circledast g[n]$ και κατόπιν θα εφαρμόσουμε στο αποτέλεσμα κυκλική μετατόπιση κατά μια μονάδα προς τα αριστερά.

```
% Μήκος κυκλικής συνέλιξης
N = 4;
% Ορισμός κλίμακας χρόνου και ακολουθιών x[n] και g[n]
n = [0, 1, 2, 3]; x = [0, 1, 2, 3]; g = [1, 2, 0, -1];
% Υπολογισμός DFT N σημείων X[k] και G[k]
X = fft(x, N); G = fft(g, N);
% Πολλαπλασιασμός Y[k] = X[k].G[k]
Y = X .* G;
% Υπολογισμός αντίστροφου DFT
y = ifft(Y, N);
% Κυκλική μετατόπιση κατά -1
y = circshift(y, -1)
```

Αποτέλεσμα: $y = -1 \ 1 \ 7 \ 5$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα συμφωνεί με το αποτέλεσμα υπολογισμού της κυκλικής συνέλιξης στο πεδίο του χρόνου.