Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Λυμένα Παραδείγματα

Διδάσκων: Μ. Παρασκευάς

ΣΕΤ #8 - Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)
- Σχέση DFT με άλλους Μετασχηματισμούς
- Υπολογισμός DFT με Πίνακες
- Περιοδική επέκταση ακολουθίας - Περιοδική συνέλιξη
- Κυκλική μετατόπιση ακολουθίας - Κυκλική συνέλιξη

1. Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

📖 Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί ο DFT N-σημείων της εκθετικής ακολουθίας $x[n] = \alpha^n$, όπου $0 \leq n \leq N-1$.

Απάντηση: Ο DFT μπορεί να υπολογιστεί από τον ορισμό ως εξής:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n\, W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\alpha W_N^k\right)^n = \frac{1-\left(\alpha W_N^k\right)^N}{1-\alpha W_N^k}$$

$$= \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha W_N^k}, k = 0,1,\dots,N-1$$

📖 Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί ο DFT N-σημείων του σήματος $x[n] = e^{j2\pi k_0 n/N}$, όπου $0 \leq n \leq N-1$.

Απάντηση: Ο DFT μπορεί να υπολογιστεί από τον ορισμό ως εξής:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi k_0 n/N} e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi (k-k_0)n/N}$$

$$= \frac{1-e^{-j2\pi(k-k_0)}}{1-e^{-j2\pi(k-k_0)/N}}, k = 0,1,\dots,N-1$$

Για $k \neq k_0$ ο αριθμητής λαμβάνει τιμή μηδέν, άρα $X[k] = 0$. Για $k = k_0$ ο αριθμητής και ο παρονομαστής λαμβάνουν τιμή μηδέν, οπότε με τον κανόνα Del' Hospital βρίσκουμε:

$$X[k] = \lim_{k\to k_0} \frac{d}{dk}\left[\frac{1-e^{-j2\pi(k-k_0)}}{1-e^{-j2\pi(k-k_0)/N}}\right] = \left.\frac{2\pi j\, e^{-j2\pi(k-k_0)}}{\frac{2\pi j}{N} e^{-\frac{j2\pi(k-k_0)}{N}}}\right|_{k=k_0} = N$$

Επομένως:

$$X[k] = \begin{cases} 0, k \neq k_0 \\ N, k = k_0 \end{cases} = N\, \delta[k-k_0]$$

2. Σχέση DFT με άλλους Μετασχηματισμούς

📖 Παράδειγμα 3

(α) Για τον παλμό $x[n] = u[n] - u[n-4]$ να υπολογιστεί ο DFT 4 σημείων ($N = 4$) και να συγκριθεί με τον DTFT (βλ. Παράδειγμα 9.7.β).

(β) Να επαναληφθεί η επίλυση για DFT 8 σημείων ($N = 8$), αφού εφαρμοστεί η διαδικασία προσθήκης μηδενικών (zero padding) στην ακολουθία $x[n]$.

Απάντηση: (α) Η ακολουθία γράφεται: $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$. Υπολογίζουμε τον DFT 4-σημείων από τον ορισμό του DFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, W_4^{nk} = W_4^0 + W_4^{1k} + W_4^{2k} + W_4^{3k}, 0 \leq k \leq 3$$

Θα υπολογίσουμε τα σημεία $X[k]$ για $0 \leq k \leq 3$. Λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές των παραγόντων φάσης που υπολογίσαμε στην ενότητα 12.4.3, έχουμε:

$$X[0] = W_4^0 + W_4^0 + W_4^0 + W_4^0 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$X[1] = W_4^0 + W_4^1 + W_4^2 + W_4^3 = 1 - j - 1 + j = 0$$

$$X[2] = W_4^0 + W_4^2 + W_4^4 + W_4^6 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

$$X[3] = W_4^0 + W_4^3 + W_4^6 + W_4^9 = 1 + j - 1 - j = 0$$

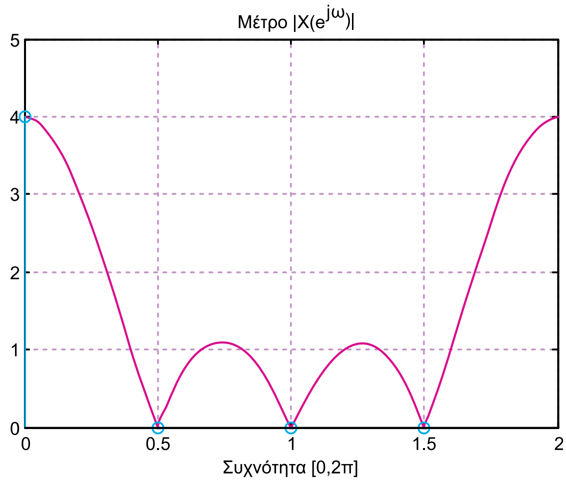
Επομένως ο DFT 4-σημείων του παλμού $x[n] = u[n] - u[n-4]$ δίνεται από:

$$X[k] = \begin{cases} 4, & n = 0 \\ 0, n = 1,2, \ldots \end{cases}$$

Από το Παράδειγμα 10.8 προκύπτει ότι ο DTFT του παλμού $x[n] = u[n] - u[n-4]$ είναι:

$$X(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j3\omega}{2}} \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}$$

Η γραφική παράσταση του φάσματος πλάτους του DTFT εμφανίζεται με κόκκινο χρώμα στο σχήμα 12.4, ενώ τα σημεία του DFT εμφανίζονται με μπλε χρώμα. Παρατηρούμε ότι τα σημεία του DFT προκύπτουν με δειγματοληψία από τον DTFT σύμφωνα με τη σχέση $X[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\pi k/2}, k = 0,1,2,3.$



Φάσμα πλάτους DTFT (κόκκινο χρώμα) και DFT 4-σημείων (μπλε χρώμα)
του παλμού $x[n] = u[n] - u[n-4]$ στην περιοχή συχνοτήτων $[0,2\pi)$

(β) Ο DFT 8-σημείων του παλμού $x[n] = u[n] - u[n-4]$ είναι:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{7} x[n]\, W_8^{nk}, 0 \leq k \leq 7$$

Υπολογίζουμε τα σημεία $X[k]$ για $0 \leq k \leq 7$:

$$X[0] = 1W_8^0 + 1W_8^0 + 1W_8^0 + 1W_8^0 + 0W_8^0 + 0W_8^0 + 0W_8^0 + 0W_8^0 = 4$$

$$X[1] = 1W_8^0 + 1W_8^1 + 1W_8^2 + 1W_8^3 + 0W_8^4 + 0W_8^5 + 0W_8^6 + 0W_8^7 = 1 - 2.41j$$

$$X[2] = 1W_8^0 + 1W_8^2 + 1W_8^4 + 1W_8^6 + 0W_8^8 + 0W_8^{10} + 0W_8^{12} + 0W_8^{14} = 0$$

$$X[3] = 1W_8^0 + 1W_8^3 + 1W_8^6 + 1W_8^9 + 0W_8^{12} + 0W_8^{15} + 0W_8^{18} + 0W_8^{21} = 1 - 0.41j$$

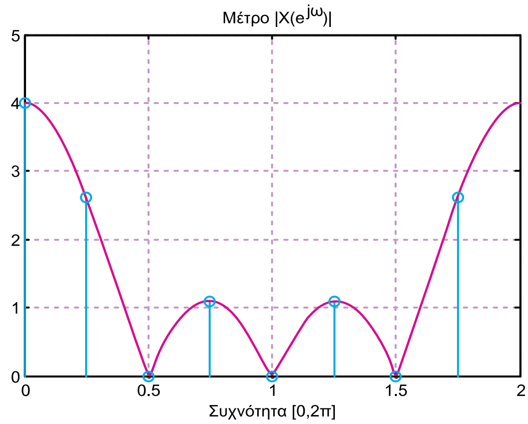
$$X[4] = 1W_8^0 + 1W_8^4 + 1W_8^8 + 1W_8^{12} + 0W_8^{16} + 0W_8^{20} + 0W_8^{24} + 0W_8^{28} = 0$$

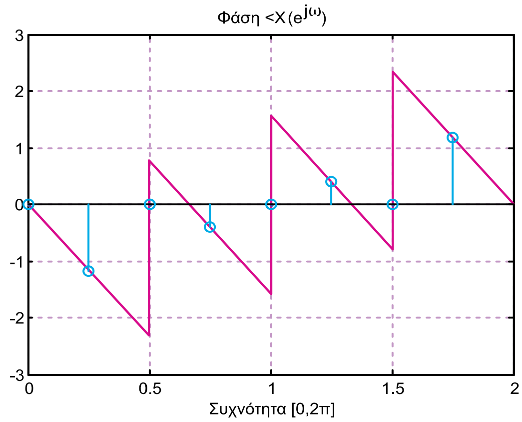
$$X[5] = 1W_8^0 + 1W_8^5 + 1W_8^{10} + 1W_8^{15} + 0W_8^{20} + 0W_8^{25} + 0W_8^{30} + 0W_8^{35} = 1 + 0.41j$$

$$X[6] = 1W_8^0 + 1W_8^6 + 1W_8^{12} + 1W_8^{18} + 0W_8^{24} + 0W_8^{30} + 0W_8^{36} + 0W_8^{42} = 0$$

$$X[7] = 1W_8^0 + 1W_8^7 + 1W_8^{14} + 1W_8^{21} + 0W_8^{28} + 0W_8^{35} + 0W_8^{42} + 0W_8^{49} = 1 + 2.41j$$

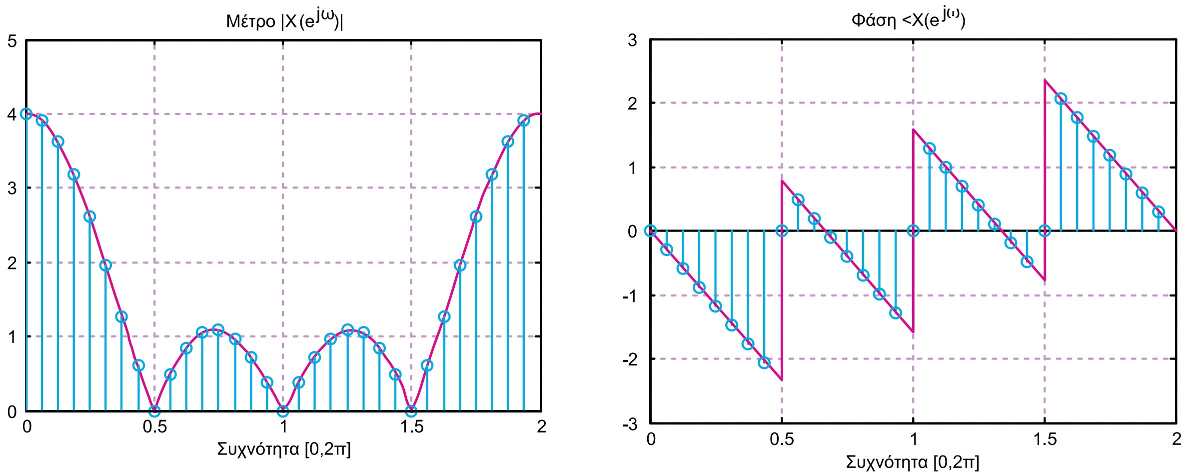
και λαμβάνουμε το σχήμα:





Φάσματα πλάτους και φάσης DTFT (κόκκινο χρώμα) και DFT 8σημείων (μπλε χρώμα) του παλμού $x[n] = u[n] - u[n-4]$ στην περιοχή συχνοτήτων $[0,2\pi)$

Επαναλαμβάνουμε για DFT 32-σημείων και λαμβάνουμε το σχήμα:



Φάσματα πλάτους και φάσης DTFT (μπλε χρώμα) και DFT 32 σημείων (κόκκινο χρώμα) του παλμού $x[n] = u[n] - u[n-4]$ στην περιοχή συχνοτήτων $[0,2\pi)$

Σχόλια:

- Από τα παραπάνω σχήματα διαπιστώνουμε ότι το πλάτος και η φάση του DFT έχουν άρτια και περιττή συμμετρία, αντίστοιχα. Επομένως, μπορούμε να κρατήσουμε μόνο το τμήμα συχνοτήτων $[0,\pi)$, δηλαδή τις τιμές $X[k], k = 0,1,\dots,(N/2)-1$, επειδή η πληροφορία του τμήματος $[-\pi,0)$ είναι ταυτόσημη.
- Όπως αναφέραμε παραπάνω, αν για μία δοθείσα απεριοδική ακολουθία $x[n]$ επιθυμούμε να αυξήσουμε την πυκνότητα των δειγμάτων του DFT, τότε πρέπει να **αυξήσουμε το πλήθος** των δειγμάτων της $x[n]$. Αυτό γίνεται με την **προσθήκη μηδενικών** (zero padding), εφαρμόζοντας την ακόλουθη διαδικασία:
    - Δημιουργούμε μία περιοδική επέκταση $\tilde{x}[n]$ μήκους $L \geq N$ της $x[n]$, προσθέτοντας $L-N$ μηδενικά στο τέλος της.
    - Υπολογίζουμε τον DFT $\tilde{X}[k]$ μήκους L σημείων της ακολουθίας $\tilde{x}[n]$.
    - Ο DFT $X[k]$ της $x[n]$ είναι: $X[k] = \tilde{X}[k]$, για $0 \leq k \leq L-1$
- Η προσθήκη των μηδενικών δεν αλλάζει τίποτε στο άθροισμα της σχέσης (12.9), επομένως δεν βελτιώνει την ευκρίνεια του DFT απλά μειώνει την απόσταση μεταξύ των διαδοχικών δειγμάτων της $X[k]$. Για να αυξηθεί η ευκρίνεια του DTF πρέπει να ληφθούν **περισσότερα δεδομένα από το σήμα**, δηλαδή να αυξηθεί το πλήθος των δειγμάτων του σήματος.
- Αν η ακολουθία είναι **περιοδική**, τότε για να αυξήσουμε την ευκρίνεια του DFT, δεν προβαίνουμε σε προσθήκη μηδενικών αλλά περιλαμβάνουμε στον υπολογισμό του DFT περισσότερες από μία περιόδους της ακολουθίας.

📖 Παράδειγμα 4

Να υπολογιστεί ο DFT N σημείων της ακολουθίας $x[n] = \delta[n-n_0]$, όπου $0 < n_0 < N$, με δειγματοληψία στον μετασχηματισμό Z.

Απάντηση: Από τον Πίνακα 9.1 γνωρίζουμε ότι για την ακολουθία $\delta[n-n_0]$ ισχύει:

$$\delta[n-n_0] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) = z^{-n_0}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι όλο το πεδίο z, εκτός από το 0 όταν $n_0 > 0$. Άρα ο μοναδιαίος κύκλος βρίσκεται μέσα στην περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Ζ, επομένως με δειγματοληψία της συνάρτησης $X(z)$ στα σημεία $z = W_N^{-k}$ για $k = 0,1,\dots,N-1$, βρίσκουμε:

$$X[k] = W_N^{n_0 k}, k = 0,1,\dots,N-1$$

Εναλλακτική γραφή:

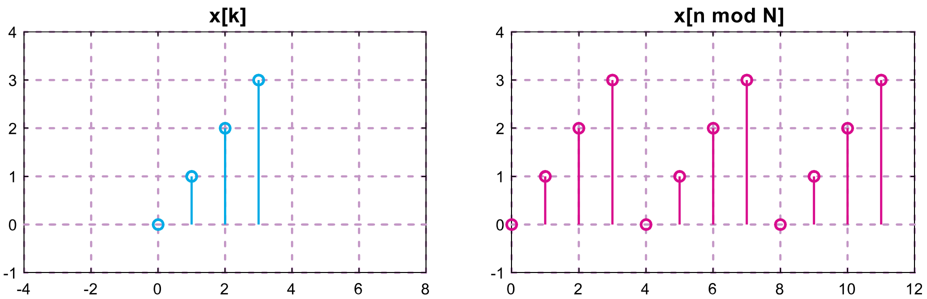
$$X[k] = \left[1, W_N^{n_0}, W_N^{2n_0}, \dots, W_N^{(N-1)n_0}\right]$$

3. Περιοδική επέκταση ακολουθίας - Περιοδική συνέλιξη

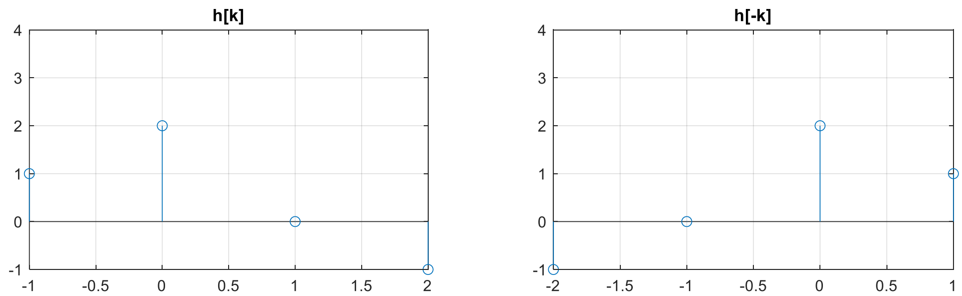
Παράδειγμα 5

Να υπολογιστεί η περιοδική συνέλιξη μεταξύ των σημάτων διακριτού χρόνου $x[n] = \{\hat{0}, 1, 2, 3\}$ και $h[n] = \{1, \hat{2}, 0, -1\}$.

Απάντηση: Η γραφική παράσταση της $x[n]$ και της περιοδικής επέκτασής της $\tilde{x}[n]$ για $N = 4$ δείχνεται στο σχήμα:



Ακολουθία πεπερασμένου μήκους $x[n]$
και η περιοδική επέκτασή της $\tilde{x}[n] = x[n \, mod \, 4] = x\big[[n]\big]_4$



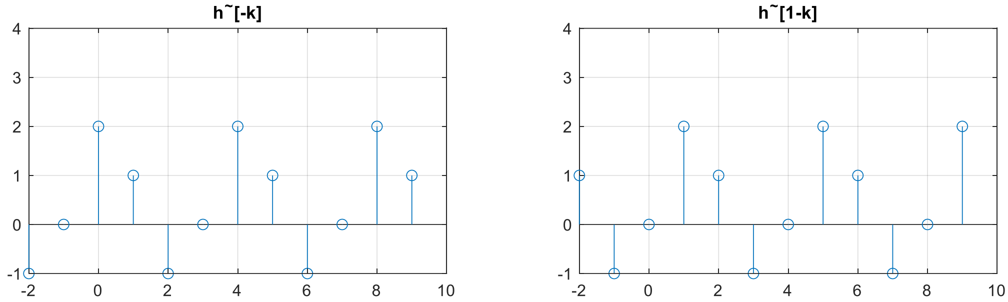
Ακολουθία $h[k]$ και ανάκλαση $h[-k]$

Χρησιμοποιούμε τον γραφικό τρόπο υπολογισμού του συνελικτικού αθροίσματος:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k] \, \tilde{h}[n-k]$$

Η γραφική παράσταση της $h[n]$, της ανάκλασης $h[-k]$ και της περιοδικής επέκτασής της $\tilde{h}[-k]$ για $N = 4$, δείχνεται στο επόμενο σχήμα. Το $\tilde{y}[0]$ βρίσκεται αθροίζοντας τα γινόμενα $\tilde{x}[k] \, \tilde{h}[-k]$ για $k = 0$ έως 3. Είναι: $\tilde{y}[0] = 0x2 + 1x1 + 2x(-1) + 3x0 = -1$.

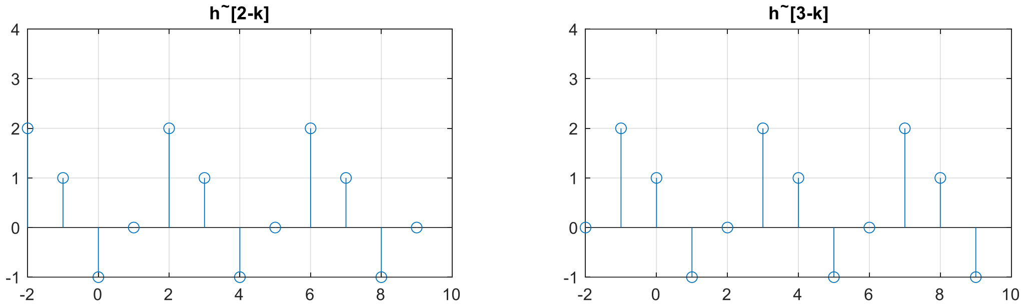
Κατόπιν η $\tilde{h}[-k]$ μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά ένα, οπότε προκύπτει το $\tilde{h}[1-k]$. Το $\tilde{y}[1]$ βρίσκεται αθροίζοντας τα γινόμενα $\tilde{x}[k]\,\tilde{h}[1-k]$ για $k = 0$ έως 3. Είναι: $\tilde{y}[1] = 0x0 + 1x2 + 2x1 + 3x(-1) = 1$.



Περιοδική επέκταση $h\big[[-k]\big]_4$ και
ολίσθηση περιοδικής επέκτασης $\tilde{h}[1-k] = h\big[[1-k]\big]_4$

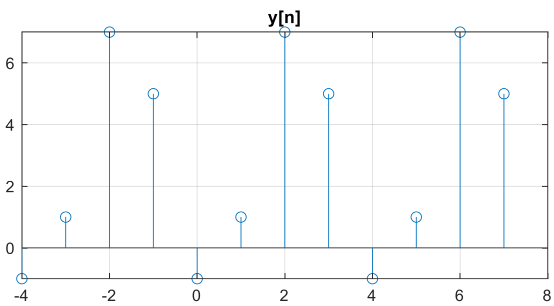
Μετατοπίζοντας την $\tilde{h}[-k]$ προς τα δεξιά κατά δύο προκύπτει το $\tilde{h}[2-k]$, σχήμα 12.13 (α). Το $\tilde{y}[2]$ βρίσκεται αθροίζοντας τα γινόμενα $\tilde{x}[k]\,\tilde{h}[2-k]$ για $k = 0$ έως 3. Είναι: $\tilde{y}[2] = 0x(-1) + 1x0 + 2x2 + 3x1 = 7$.

Τέλος, η $\tilde{h}[-k]$ μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά τρία, οπότε προκύπτει το $\tilde{h}[3-k]$. Το $\tilde{y}[3]$ βρίσκεται αθροίζοντας τα γινόμενα $\tilde{x}[k]\,\tilde{h}[3-k]$ για $k = 0$ έως 3. Είναι: $\tilde{y}[3] = 0x1 + 1x(-1) + 2x0 + 3x2 = 5$.



Ολίσθηση περιοδικής επέκτασης $\tilde{h}[2-k] = h\big[[2-k]\big]_4$ και $\tilde{h}[3-k] = h\big[[3-k]\big]_4$

Επομένως, η περιοδική συνέλιξη είναι: $\tilde{y}[n] = \{-1, 1, 7, 5, -\hat{1}, 1, 7, 5, -1, 1, 7, 5\}$. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα:



Περιοδική συνέλιξη $\tilde{y}[n]$

4. Κυκλική μετατόπιση ακολουθίας - Κυκλική συνέλιξη

📖 Παράδειγμα 6

Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη 4 σημείων μεταξύ των σημάτων διακριτού χρόνου $x[n] = \{\hat{0}, 1, 2, 3\}$ και $h[n] = \{1, \hat{2}, 0, -1\}$.

Απάντηση: Υπολογίζουμε την κυκλική συνέλιξη τεσσάρων σημείων από τη σχέση:

$$y[n] = \left[\sum_{k=0}^{3} x[k]\,\tilde{h}[n-k]\right] R_4[n]$$

Για $n = 0$:

$$y[0] = \left[\sum_{k=0}^{3} x[k]\,\tilde{h}[-k]\right] R_4[n] = \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 1, 2, 3\}\,\{\hat{2}, 1, -1, 0\}$$
$$= \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 1, -2, 0\} \Rightarrow y[0] = -1$$

Για $n = 1$:

$$y[1] = \left[\sum_{k=0}^{3} x[k]\,\tilde{h}[1-k]\right] R_4[n] = \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 1, 2, 3\}\,\{\hat{0}, 2, 1, -1\}$$
$$= \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 2, 2, -3\} \Rightarrow y[1] = 1$$

Για $n = 2$:

$$y[2] = \left[\sum_{k=0}^{3} x[k]\,\tilde{h}[2-k]\right] R_4[n] = \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 1, 2, 3\}\,\{-\hat{1}, 0, 2, 1\}$$
$$= \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 0, 4, 3\} \Rightarrow y[2] = 7$$

Για $n = 3$:

$$y[3] = \left[\sum_{k=0}^{3} x[k]\,\tilde{h}[3-k]\right] R_4[n] = \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 1, 2, 3\}\,\{\hat{1}, -1, 0, 2\}$$
$$= \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, -1, 0, 6\} \Rightarrow y[3] = 5$$

Επομένως είναι:

$$y[n] = h[n] \text{④} x[n] = \{-\hat{1}, 1, 7, 5\}$$

Παρατηρούμε ότι επαληθεύει τη σχέση $y[n] = x_1[n] \text{Ⓝ} x_2[n] = [\tilde{x}_2[n] \circledast \tilde{x}_1[n]] R_N[n]$. Η γραμμική συνέλιξη μεταξύ των $h[n]$ και $x[n]$, είναι η παρακάτω ακολουθία έξι σημείων:

$$h[n] * x[n] = \{1, \hat{4}, 7, 5, -2, -3\}$$

Παρατηρούμε ότι η γραμμική συνέλιξη και η κυκλική συνέλιξη των ίδιων ακολουθιών δίνουν διαφορετικό αποτέλεσμα.