Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Λυμένα Παραδείγματα

Διδάσκων: Μ. Παρασκευάς

ΣΕΤ #7 – Σειρές και Μετασχηματισμός Fourier σημάτων διακριτού χρόνου

- Σειρές Fourier ΣΔΧ
- Μετασχηματισμός Fourier ΣΔΧ
- Ιδιότητες DTFT
- Αντίστροφος DTFT

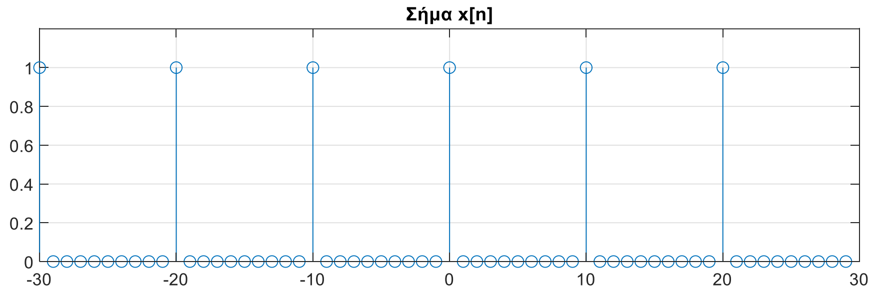
1. Σειρές Fourier Σημάτων Διακριτού Χρόνου

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το ανάπτυγμα εκθετικής σειράς Fourier του συρμού συναρτήσεων Δέλτα με περίοδο N:

$$\delta_N[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN]$$

Απάντηση: Η ακολουθία $\delta_N[n]$ έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση (για $N = 10$):



Συρμός κρουστικών συναρτήσεων $x[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN]$

Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές $\Delta[k]$ της εκθετικής σειράς Fourier από τη σχέση (10.2) επιλέγοντας για περίοδο $[-N/2 + 1, N/2]$:

$$\Delta[k] = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \delta_N[n]\, e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N}\delta[0] = \frac{1}{N}$$

Το ανάπτυγμα εκθετικής σειράς της ακολουθίας $\delta_N[n]$ είναι:

$$\delta_N[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta[k]\, e^{jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n}$$

Επομένως, το φάσμα πλάτους της ακολουθίας $\delta_N[n]$ αποτελείται από συναρτήσεις $\delta[n]$ πλάτους $1/N$, τοποθετημένες διαδοχικά μεταξύ τους.

📖 Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το εκθετικό ανάπτυγμα της ακολουθίας $x[n] = 1 + \cos(\pi n) + \sin(\pi n/2), -\infty < n < \infty$.

Απάντηση: Επειδή το εκθετικό ανάπτυγμα υπολογίζεται μόνο για περιοδικές ακολουθίες, αρχικά θα εξετάσουμε αν η δοθείσα ακολουθία είναι περιοδική. Αυτό θα συμβαίνει μόνο αν ο λόγος των περιόδων των περιοδικών ακολουθιών $\cos(\pi n)$ και $\sin(\pi n/2)$ μπορεί να γραφεί ως πηλίκο ακεραίων αριθμών. Ο όρος 1 δίνει τη συνιστώσα συνεχούς (dc component). Το $\cos(\pi n)$ έχει κυκλική συχνότητα $\omega_1 = \pi$ και περίοδο $N_1 = 2\pi/\omega_1 = 2$, ενώ το $\sin(\pi n/2)$ έχει κυκλική συχνότητα $\omega_2 = \pi/2$ και περίοδο $N_2 = 2\pi/(\pi/2) = 4$. Το σήμα $x[n]$ είναι περιοδικό επειδή έχει άπειρη διάρκεια και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Η περίοδος του $x[n]$ είναι:

$$N = \frac{N_1 N_2}{MK\Delta(N_1, N_2)} = \frac{2x4}{2} = 4$$

Με βάση τη σχέση Euler το $x[n]$ γράφεται:

$$\begin{aligned} x[n] = 1 + \frac{1}{2}\left[e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}\right] + \frac{1}{2}\left[e^{j\pi n/2} - e^{-j\pi n/2}\right] \\ = 1 + 0.5e^{j\pi n/2} - 0.5e^{-j\pi n/2} + 0.5e^{j\pi n} + 0.5e^{-j\pi n} \\ = X[0] + X[1]e^{j\omega_0 n} + X[-1]e^{-j\omega_0 n} + X[2]e^{j2\omega_0 n} \\ + X[-2]e^{-j2\omega_0 n} \end{aligned}$$

όπου $\omega_0 = \pi/2$. Επομένως, οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier είναι:

$$X[0] = 1, X[1] = X[-1]^* = -0.5, X[2] = X[-2]^* = 0.5$$

2. Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Διακριτού Χρόνου

📖 Παράδειγμα 3

Να υπολογιστεί ο DTFT της ακολουθίας $x[n] = \begin{cases} 0.5^n & n = 0,2,4,\ldots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Απάντηση: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του DTFT έχουμε:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{n=0,2,4,\ldots}^{\infty} 0.5^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^{2n} e^{-2jn\omega} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(0.25\, e^{-2j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - 0.25\, e^{-2j\omega}} \end{aligned}$$

📖 Παράδειγμα 4

Να υπολογιστεί ο DTFT της ακολουθίας $x[n] = 0.5^n\, u[n+3]$

Απάντηση: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του DTFT έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-3}^{\infty} 0.5^n\, e^{-jn\omega} = \sum_{n=-3}^{\infty} \left(0.5\, e^{-j\omega}\right)^n$$
$$= \left(0.5\, e^{-j\omega}\right)^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(0.5\, e^{-j\omega}\right)^n = \frac{8\, e^{j3\omega}}{1 - 0.5\, e^{-j\omega}}$$

📖 Παράδειγμα 5

Να υπολογιστεί ο DTFT της ακολουθίας $x[n] = A(u[n] - u[n-N])$.

Απάντηση: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του DTFT έχουμε:

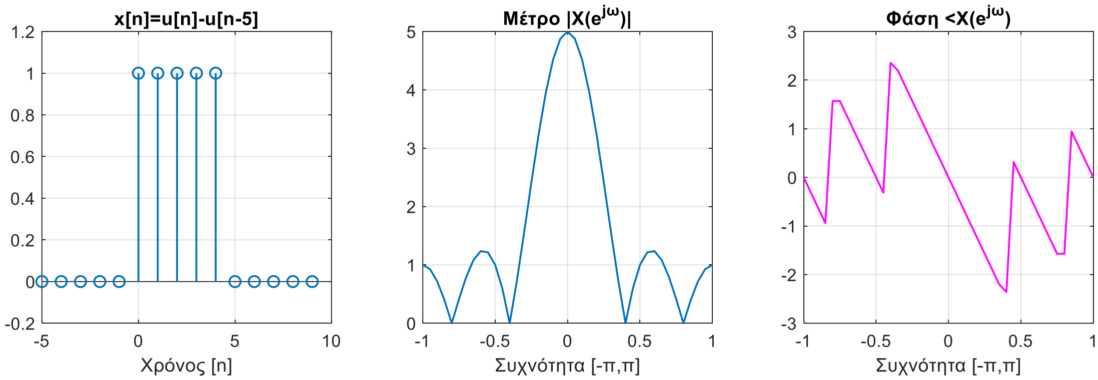
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{N-1} A\, e^{-jn\omega} = A \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\omega} = A \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j\omega}\right)^n$$
$$= \frac{A\left(1 - e^{-j\omega N}\right)}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{Ae^{-j\omega N/2}\left(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}\right)}{e^{-j\omega/2}\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right)}$$
$$= \frac{Ae^{-j\omega N/2}\, 2j\, sin(\omega N/2)}{e^{-j\omega/2}\, 2j\, sin(\omega/2)} = Ae^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

Το μέτρο του DTFT είναι:

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = |A| \left|\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right| \quad (1)$$

και η φάση είναι:

$$\varphi_X(\omega) = -\frac{\omega(N-1)}{2} \quad (2)$$



(α) Σήμα $x[n] = u[n] - u[n-5]$, (β) Φάσμα πλάτους,
(γ) Φάσμα φάσης, σε μία περίοδο $[-\pi, \pi)$

Σχόλια: Για το μέτρο του DTFT ισχύουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Επειδή ο αριθμητής και ο παρονομαστής της σχέσης (1) είναι περιττές συναρτήσεις, προκύπτει ότι το μέτρο του DTFT είναι άρτια συνάρτηση, όπως αναμενόταν.

- Με τον κανόνα de l'Hospital βρίσκουμε ότι για τη συχνότητα $\omega = 0$ το μέτρο λαμβάνει τη μέγιστη τιμή η οποία είναι $\left|X\left(e^{j0}\right)\right| = A$.
- Τα σημεία μηδενισμού του μέτρου είναι αυτά που ικανοποιούν τη σχέση $\sin(\omega N/2) = 0$, άρα το μέτρο μηδενίζεται στις συχνότητες $\omega = 2k\pi/N$.
- Το μέτρο του DTFT είναι συνάρτηση:
    - Περιοδική με περίοδο 2π, όταν το N είναι περιττό.
    - Μη-περιοδική όταν το N είναι άρτιο.

3. DTFT Περιοδικών Σημάτων Διακριτού Χρόνου

Παράδειγμα 6

Να αποδειχθεί ότι ο DTFT του σήματος $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, όπου $\omega \in (-\pi, \pi]$, δίνεται από τη σχέση:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m), m \in Z$$

Απάντηση: Επειδή το σήμα δεν είναι απολύτως αθροίσιμο ο DTFT δεν μπορεί να υπολογιστεί από τον ορισμό του. Για το λόγο αυτό θα εργαστούμε αντίστροφα, δηλαδή θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο DTFT. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m)$$

είναι ένα άπειρο άθροισμα κρουστικών συναρτήσεων που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $2\pi m$ επάνω στον άξονα συχνοτήτων. Με άλλα λόγια ο DTFT του $e^{j\omega_0 n}$ περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στις συχνότητες $\omega_0 \pm 2\pi m$. Ο **αντίστροφος** DTFT υπολογίζεται στην περιοχή συχνοτήτων $(-\pi, \pi]$ από τη σχέση:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m) \right\} e^{j\omega n}\, d\omega$$

Στην περιοχή όμως $(-\pi, \pi]$ υπάρχει μόνο η συνάρτηση $\delta(\omega - \omega_0)$, οπότε το ολοκλήρωμα είναι:

$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0)\, e^{j\omega n}\, d\omega = e^{j\omega n}\Big|_{\omega=\omega_0} = e^{j\omega_0 n}$$

Παράδειγμα 7

Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{j\omega_0 k n}$

Απάντηση: Από το προηγούμενο παράδειγμα γνωρίζουμε:

$$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη γραμμικότητα του DTFT έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = F\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{j\omega_0 kn}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, A_k\, \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m)$$

4. Ιδιότητες DTFT

Παράδειγμα 8

Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $x[n] = a^n \sin(n\omega_0)\, u[n]$ και να σχεδιαστούν τα φάσματα.

Απάντηση: Με τον τύπο του Euler εκφράζουμε το ημίτονο σε άθροισμα μιγαδικών συναρτήσεων και κατόπιν υπολογίζουμε τον DTFT κάθε όρου. Έχουμε:

$$x[n] = \frac{1}{2j}\left[a^n e^{jn\omega_0} - a^n e^{-jn\omega_0}\right] u[n]$$

Ο DTFT του πρώτου όρου είναι:

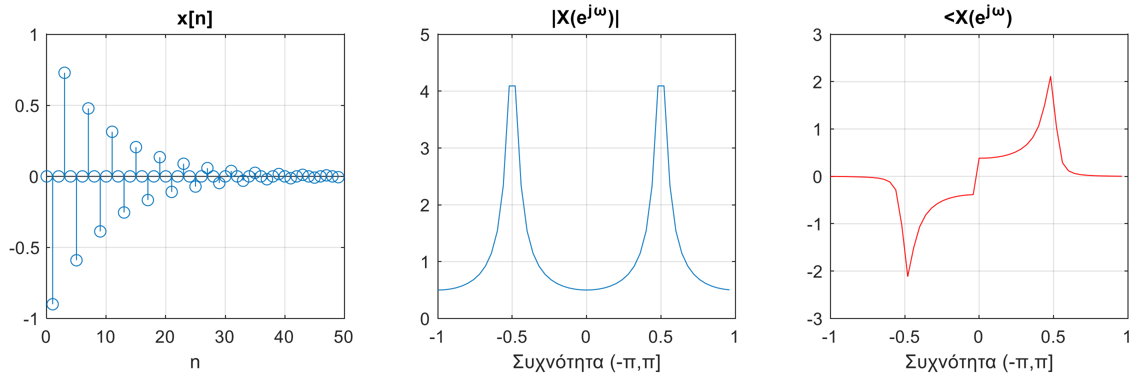
$$\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{jn\omega_0} e^{-jn\omega} = \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(a e^{-j(\omega-\omega_0)}\right)^n = \frac{1}{2j}\frac{1}{1 - a e^{-j(\omega-\omega_0)}}$$

Ο DTFT του δεύτερου όρου είναι:

$$-\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jn\omega_0} e^{-jn\omega} = -\frac{1}{2j}\frac{1}{1 - a e^{-j(\omega+\omega_0)}}$$

Επομένως, είναι:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1 - a e^{-j(\omega-\omega_0)}} \frac{1}{1 - a e^{-j(\omega+\omega_0)}}\right] = \frac{a\, e^{-j\omega} \sin\omega_0}{1 - 2a\, e^{-j\omega}\cos\omega_0 + a^2 e^{-2j\omega}}$$



(α) Ακολουθία $x[n] = a^n \sin(n\omega_0)\, u[n]$, (β) Φάσμα πλάτους,
(γ) Φάσμα φάσης στην περιοχή συχνοτήτων $[-\pi, \pi]$

Παράδειγμα 9

Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $y[n] = x[n]\, c[n]$, όπου $x[n] = u[n + n_0] - u[n - n_0]$ όπου $n_0 = 5$ και $c[n] = \cos(\omega_0 n)$ όπου $\omega_0 = 0.7\ (rad)$.

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι ο DTFT του $c[n] = \cos(\omega_0 n)$ είναι:

$$C(e^{j\omega}) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Με βάση την ιδιότητα του πολλαπλασιασμού στο χρόνο, ο DTFT του γινομένου $y[n] = x[n]\, c[n]$ είναι:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * C(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * \big[\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]\big] \qquad (1) \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της ιδιότητας της συνέλιξης $f(x) * \delta(x - x_0) = f(x - x_0)$ έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) * \delta(\omega - \omega_0) = X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

$$X(e^{j\omega}) * \delta(\omega + \omega_0) = X(e^{j(\omega + \omega_0)})$$

Οπότε η σχέση (1) γράφεται:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X(e^{j(\omega - \omega_0)}) + \frac{1}{2} X(e^{j(\omega + \omega_0)}) \qquad (2)$$

Διαπιστώνουμε ότι καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα με το παράδειγμα 10.16 αλλά με διαφορετικό τρόπο. Από το παράδειγμα 10.8 γνωρίζουμε ότι ο DTFT του παλμού $z[n] = u[n] - u[n - N]$ για $N = 10$ είναι:

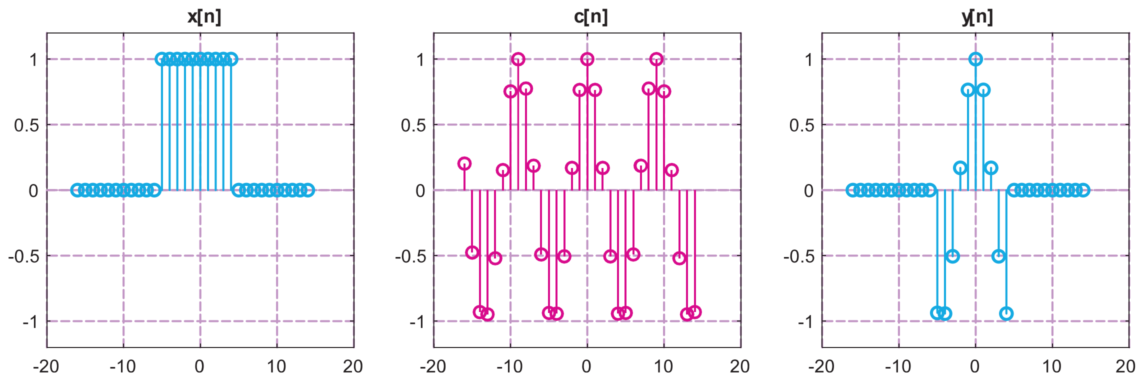
$$Z(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} = e^{-j9\omega/2} \frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega/2)} \qquad (3)$$

Επειδή το σήμα $x[n] = u[n + 5] - u[n - 5]$ είναι η μετατόπιση του $z[n] = u[n] - u[n - 10]$ κατά -5 μονάδες χρόνου, δηλαδή ισχύει $x[n] = z[n + 5]$, από την ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο ο DTFT του $x[n]$ είναι:

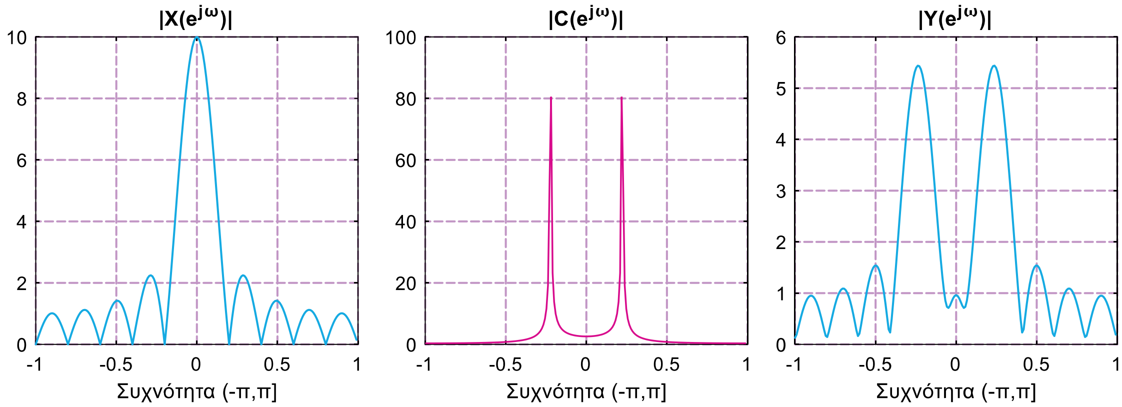
$$X(e^{j\omega}) = e^{-j(-5)\omega}\, Z(e^{j\omega}) = e^{j5\omega} e^{-j9\omega/2} \frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega/2)} = e^{j\omega/2} \frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega/2)} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (1) και (4) λαμβάνουμε:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[e^{j(\omega - 0.7)/2} \frac{\sin(5(\omega - 0.7))}{\sin((\omega - 0.7)/2)} + e^{j(\omega + 0.7)/2} \frac{\sin(5(\omega + 0.7))}{\sin((\omega + 0.7)/2)}\right]$$



Σήματα (α) $x[n] = u[n + 5] - u[n - 5]$, (β) $c[n] = \cos(\omega_0 n)$, (γ) $y[n] = x[n]\, c[n]$.



Φάσματα πλάτους (α) $|X(e^{j\omega})|$, (β) $|C(e^{j\omega})|$, (γ) $|Y(e^{j\omega})|$.

Σχόλια:

- Το Παράδειγμα περιγράφει ταυτόχρονα τη **διαμόρφωση** ενός πληροφοριακού σήματος $x[n]$ από ένα σήμα φορέα $c[n] = \cos(\omega_0 n)$ αλλά και την **παραθύρωση** ενός συνημιτόνου $\cos(\omega_0 n)$ από ένα τετραγωνικό παράθυρο $x[n] = u[n + n_0] - u[n - n_0]$.
- Σε ότι αφορά τη διαμόρφωση παρατηρούμε ότι το φάσμα του τετραγωνικού παλμού μεταφέρθηκε στις συχνότητες $\pm\omega_0$ με πλάτος μισό του αρχικού.
- Με τον όρο παραθύρωση περιγράφουμε τον πολλαπλασιασμό ενός σήματος $c[n]$ με ένα παράθυρο (τετραγωνικό στο παράδειγμά μας), οπότε αποσπάμε ένα **τμήμα** από το σήμα $c[n]$. Στην περίπτωση αυτή ο DTFT του τμήματος (του συνημιτόνου στο παράδειγμά μας) δεν αποτελείται πλέον από τις δύο κρουστικές συναρτήσεις στις συχνότητες $-\omega_0$ και ω_0 (φάσμα του συνημιτόνου), αλλά από δύο συναρτήσεις δειγματοληψίας (φάσμα του τετραγωνικού παλμού) τοποθετημένες στις συχνότητες $-\omega_0$ και ω_0.
- Η παραθύρωση προκαλεί **διάχυση του φάσματος** του σήματος σε συχνότητες εκατέρωθεν της συχνότητας $\pm\omega_0$ του συνημιτόνου. Η διάχυση του φάσματος είναι μια ανεπιθύμητη παραμόρφωση, ειδικά στην περίπτωση που επιδιώκουμε να διακρίνουμε συνημίτονα με γειτονικές συχνότητες επειδή οι λοβοί των φασμάτων εμπλέκονται μεταξύ τους.
- Η ελαχιστοποίηση της επίδρασης του τετραγωνικού παραθύρου στο φάσμα του σήματος επιτυγχάνεται με την αύξηση της διάρκειας $[-n_0, n_0]$ του παραθύρου, επειδή αυτό οδηγεί στη μείωση του εύρους των λοβών του φάσματος του παραθύρου. Ένα μεγαλύτερης διάρκειας παράθυρο προκαλεί μικρότερη αλλοίωση στο φάσμα του σήματος, ενώ ένα παράθυρο άπειρης διάρκειας δεν προκαλεί καμία επίδραση στο φάσμα του σήματος, ωστόσο κάτι τέτοιο δεν προκαλεί πλέον παραθύρωση του σήματος, όπως έχουμε σχολιάσει και για τα σήματα συνεχούς χρόνου.

🕮 Παράδειγμα 10

Δειγματοληπτούμε το αναλογικό σήμα $x_\alpha(t) = 1 + \cos(15\pi t)$ με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 0{,}1\ sec$ και το περνάμε από ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 2{,}5\ Hz$. Ποιο είναι το σήμα που παράγεται στην έξοδο του φίλτρου;

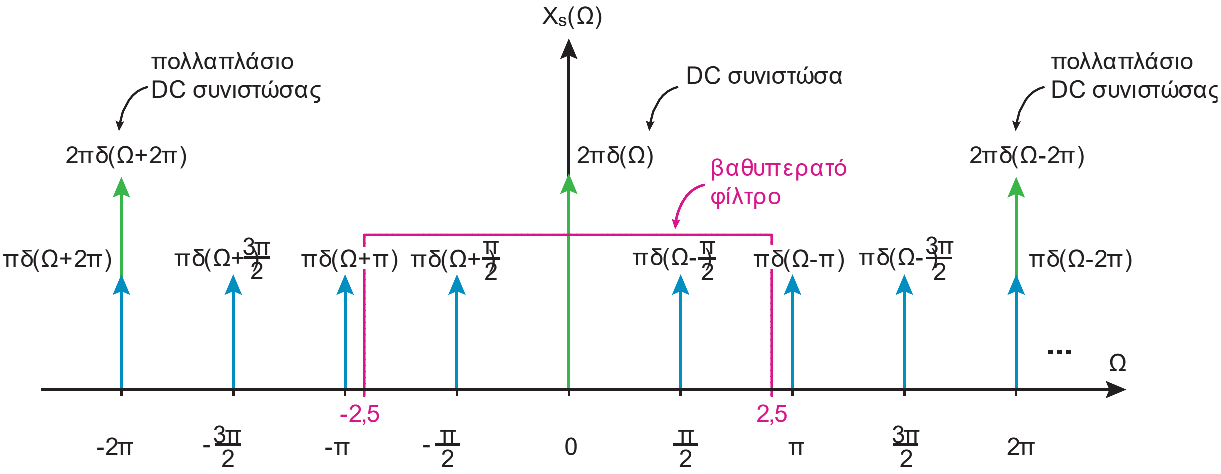
Απάντηση: Το αναλογικό σήμα περιέχει μια συνιστώσα συνεχούς (DC component) με μηδενική συχνότητα και μία συνημιτονοειδή συνιστώσα με συχνότητα $2\pi F = 15\pi$ $\Rightarrow F = 7{,}5\ Hz$, η οποία είναι και η μέγιστη συχνότητα (F_{max}) του αναλογικού σήματος. Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 1/T_s = 1/0{,}1\ sec\ = 10\ Hz$. Επειδή ισχύει $f_s = 7{,}5 < 10 = 2F_{max}$, προκύπτει ότι δεν ικανοποιείται το κριτήριο Nyquist, άρα θα εμφανιστεί αναδίπλωση συχνοτήτων για όσες συχνότητες είναι εκτός της φασματικής περιοχής που ορίζεται με βάση με τη συχνότητα δειγματοληψίας, δηλαδή της φασματικής περιοχής $[-f_s/2, f_s/2] = [-5Hz, 5Hz]$. Επομένως, η συχνότητα $F = F_{max} = 7{,}5\ Hz$ του σήματος θα αναδιπλωθεί και θα εμφανίσει την ψευδεπίγραφη συχνότητα $F' = F - kf_s = 7{,}5 - k10 = 7{,}5 - 1x10 = -2{,}5\ Hz$. Άρα, η συνημιτονοειδής συνιστώσα $\cos(15\pi t)$ συχνότητας 7,5 Hz του αναλογικού σήματος, όταν δειγματοληπτηθεί θα φαίνεται σαν ένα συνημίτονο συχνότητας 2,5 Hz. Η συνιστώσα συνεχούς (DC component) δεν επηρεάζεται από τη δειγματοληψία. Με βάση τα παραπάνω, το σήμα διακριτού χρόνου που προκύπτει από τη δειγματοληψία είναι:

$$x_s[n] = x_a(t)|_{t=nTs=n/10} = 1 + \cos\left(\frac{15\pi}{10}n\right)$$
$$= 1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2}n\right) = 1 + \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)n = 1 + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Για να υπολογίσουμε το σήμα στην έξοδο του βαθυπερατού φίλτρου, πρέπει να αποκτήσουμε τη φασματική μορφή του σήματος διακριτού χρόνου. Ο DTFT του δειγματοληπτημένου σήματος $x_s[n]$ δίνεται από τη σχέση (6.6) και είναι:

$$X_s(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\,(\Omega - k\Omega_s)$$
$$= \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\Omega_s) + \pi\left[\delta\left(\Omega - k\Omega_s - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\Omega - k\Omega_s + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

όπου $\Omega_s = 2\pi\ T_s$. Στο σχήμα αναπαρίσταται το φάσμα του σήματος διακριτού χρόνου και το φάσμα του βαθυπερατού φίλτρου.



Φάσμα σήματος διακριτού χρόνου

Παρατηρούμε ότι οι μοναδικές συνιστώσες του φάσματος του σήματος που εξέρχονται από το βαθυπερατό φίλτρο είναι οι:

$$\hat{X}_s(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega) + \pi\left[\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου βρίσκουμε ότι το αναλογικό σήμα που παράγεται στην έξοδο του βαθυπερατού φίλτρου είναι:

$$\hat{x}_s(t) = 1 + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

5. Αντίστροφος DTFT

📖 Παράδειγμα 11

Να βρεθεί στο σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ με DTFT τη συνάρτηση:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + 0.2\, e^{-j\omega} - 0.35\, e^{-2j\omega}}$$

Απάντηση: Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή της συνάρτησης $X(e^{j\omega})$ και έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + 0.2\, e^{-j\omega} - 0.35\, e^{-2j\omega}} = \frac{1}{(1 - 0.5e^{-j\omega})}\frac{1}{(1 + 0.7e^{-j\omega})}$$
$$= \frac{A}{(1 - 0.5e^{-j\omega})} + \frac{B}{(1 + 0.7e^{-j\omega})}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές A και B από τις σχέσεις:

$$A = \frac{1}{(1 - 0.5e^{-j\omega})}\frac{1}{(1 + 0.7e^{-j\omega})}(1 - 0.5e^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{5}{12}$$
$$B = \frac{1}{(1 - 0.5e^{-j\omega})}\frac{1}{(1 + 0.7e^{-j\omega})}(1 + 0.7e^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=-10/7} = \frac{12}{7}$$

Οπότε η συνάρτηση γράφεται:

$$X(e^{j\omega}) = \left(\frac{5}{12}\right)\frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}} + \left(\frac{12}{7}\right)\frac{1}{1 + 0.7e^{-j\omega}}$$

Με χρήση του Πίνακα 10.1 βρίσκουμε τον αντίστροφο DTFT:

$$x[n] = \left[\frac{5}{12}(0.5)^{-n} + \frac{12}{7}(-0.7)^{-n}\right]u[n]$$