Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Λυμένα Παραδείγματα

Διδάσκων: Μ. Παρασκευάς

ΣΕΤ #6 – Αντίστροφος Μετ/σμός Ζ – Μελέτη συστημάτων Δ.Χ. με τον Μετ/σμό Ζ

- Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ
- Σχέση Συνάρτησης Μεταφοράς και Εξίσωσης Διαφορών
- Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών
- Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων

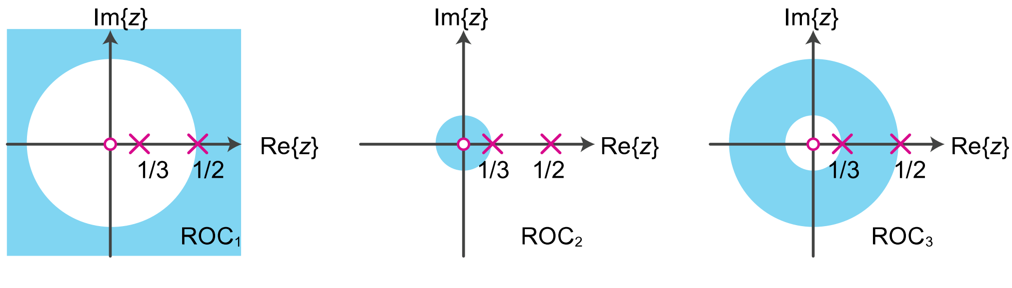
1. Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της συνάρτησης:

$$X(z) = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Απάντηση: Ο δοθείς μετασχηματισμός Z είναι το άθροισμα δύο ρητών συναρτήσεων πρώτου βαθμού, δηλαδή βρίσκεται ήδη σε μορφή αθροίσματος απλών κλασμάτων. Οι πόλοι του μετασχηματισμοί είναι $z_1 = 1/2$ και $z_2 = 1/3$. Επειδή δεν έχει προσδιοριστεί η περιοχή σύγκλισης, υπάρχουν τρεις δυνατές περιπτώσεις περιοχών σύγκλισης, όπως δείχνεται στο σχήμα.



Περιοχές σύγκλισης

(α) Περιοχή σύγκλισης ROC_1: $1/2 < |z| < \infty$: Επειδή η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X(z)$ είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου και οι πόλοι της βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του κύκλου, προκύπτει ότι η ακολουθία $x[n]$ είναι δεξιάς πλευράς (αιτιατό σήμα). Χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο ζεύγος για τις εκθετικές ακολουθίες δεξιάς πλευράς από τον Πίνακα 9.1 ή τη σχέση (9.41), βρίσκουμε:

$$x[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] = \left\{3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} u[n]$$

(β) Περιοχή σύγκλισης $\boldsymbol{ROC_2}$: $\mathbf{0 < |z| < 1/3}$: Επειδή η περιοχή σύγκλισης της $X(z)$ συνάρτησης είναι η εσωτερική επιφάνεια ενός κύκλου και οι πόλοι της βρίσκονται στην εξωτερική πλευρά του κύκλου, ακολουθία $x[n]$ είναι αριστερής πλευράς (αντιαιτιατό σήμα). Χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο ζεύγος για τις εκθετικές ακολουθίες αριστερής πλευράς από τον Πίνακα 9.1 ή τη σχέση (9.41), βρίσκουμε:

$$x[n] = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] = -\left\{3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} u[-n-1]$$

(γ) Περιοχή σύγκλισης $\boldsymbol{ROC_3}$: $\mathbf{1/3 < |z| < 1/2}$: Επειδή η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X(z)$ είναι η εσωτερική επιφάνεια ενός κυκλικού δακτυλίου, ο πόλος z_1 βρίσκεται στην εξωτερική πλευρά του μεγάλου κύκλου ενώ ο πόλος z_2 βρίσκεται στην εσωτερική πλευρά του μικρού κύκλου, η ακολουθία $x[n]$ είναι διπλής πλευράς που σχηματίζεται από το άθροισμα μιας ακολουθίας αριστερής πλευράς και μιας ακολουθίας δεξιάς πλευράς. Ομοίως με παραπάνω, βρίσκουμε:

$$x[n] = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

📖 Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων:

$$x[n] = 3^n u[-n] \text{ και } h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Απάντηση: Η ακολουθία $h[n]$ είναι δεξιάς πλευράς (αιτιατή) και έχει μετασχηματισμό Ζ:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, ROC(H): |z| > \frac{1}{2}$$

Η ακολουθία $x[n]$ είναι αριστερής πλευράς (αντι-αιτιατή) και ο μετασχηματισμός Ζ μπορεί να βρεθεί με χρήση των ιδιοτήτων της μετατόπισης και αντιστροφής στο χρόνο:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} 3^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}z\right)^n$$
$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z} = -\frac{3z^{-1}}{1 - 3z^{-1}}, ROC(X): |z| < 3$$

Άρα, ο μετασχηματισμός Ζ της συνέλιξης $y[n] = h[n] * x[n]$, είναι:

$$Y(z) = -\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{3z^{-1}}{1 - 3z^{-1}}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι $ROC(Y) = ROC(X) \cap ROC(H)$, για τις οποίες ισχύει $|z| > 1/2$ και $|z| < 3$. Επομένως η περιοχή σύγκλισης της ακολουθίας $y[n]$ είναι $ROC(Y): 1/2 < |z| < 3$.

Εξαιτίας της συγκεκριμένης μορφής της περιοχής σύγκλισης αναμένουμε η ακολουθία

$y[n]$ να είναι το άθροισμα μίας ακολουθίας δεξιάς πλευράς και μίας ακολουθίας αριστερής πλευράς.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Ζ της $Y(z)$ προκύπτει αναπτύσσοντας τη συνάρτηση $Y(z)$ σε μερικά κλάσματα:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - 3z^{-1}} \quad (1)$$

όπου τα υπόλοιπα R_1 και R_2 της πολυωνυμικής διαίρεσης για τους αντίστοιχους πόλους δίνονται από τις σχέσεις (9.38) και είναι:

$$R_1 = \left[\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)Y(z)\right]_{z=\frac{1}{2}} = \left[\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{3z^{-1}}{1 - 3z^{-1}}\right]_{z=\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{3z^{-1}}{1 - 3z^{-1}}\right]_{z=\frac{1}{2}} = \frac{6}{5}$$

$$R_2 = [(1 - 3z^{-1})\, Y(z)]_{z=3} = \left[(1 - 3z^{-1})\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{3z^{-1}}{1 - 3z^{-1}}\right]_{z=3}$$

$$= \left[\frac{3z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right]_{z=3} = -\frac{6}{5}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το πρώτο κλάσμα της $Y(z)$ (σχέση 1) είναι αριστερής πλευράς, ενώ το δεύτερο είναι δεξιάς πλευράς και με χρήση του Πίνακα 9.1 ή της σχέσης (9.31), προκύπτει:

$$y[n] = \left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{6}{5}\right)3^n u[-n-1]$$

2. Σχέση Συνάρτησης Μεταφοράς και Εξίσωσης Διαφορών

📖 Παράδειγμα 3

Ένα ΓΑΚΜ σύστημα που βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{z - 1}{z^2 - z + 0.25}$$

Να υπολογιστεί:

(α) Η εξίσωση διαφορών (ΓΕΔΣΣ) που περιγράφει το σύστημα.

(β) Η κρουστική απόκριση του συστήματος.

(γ) Η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n] = u[n]$

Απάντηση: (α) Θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από τη σχέση $H(z) = Y(z)/X(z)$, οπότε έχουμε:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z - 1}{z^2 - z + 0.25} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

Πολλαπλασιάζουμε χιαστί τα κλάσματα και λαμβάνουμε:

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + 0.25z^{-2}Y(z) = z^{-1}X(z) - z^{-2}X(z)$$

Εφαρμόζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ και λαμβάνουμε τη ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] - y[n-1] + 0.25y[n-2] = x[n-1] - x[n-2] \Rightarrow$$
$$y[n] = y[n-1] - 0.25y[n-2] + x[n-1] - x[n-2]$$

(β) Επειδή στην έκφραση της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ με όρους z^{-n} ο βαθμός του αριθμητή είναι ίδιος με βαθμό του παρονομαστή θα αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα τη συνάρτηση $\widetilde{H}(z)$:

$$\widetilde{H}(z) = \frac{H(z)}{z} = \frac{z-1}{z(z^2 - z + 0.25)} = \frac{(z-1)}{z(z-0.5)^2}$$

Το ανάπτυγμα είναι:

$$\widetilde{H}(z) = \frac{H(z)}{z} = \frac{R_1}{z} + \frac{R_2}{(z-0.5)^2} + \frac{R_3}{(z-0.5)} \qquad (1)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (9.38) βρίσκουμε τα υπόλοιπα R_1και R_2:

$$R_1 = \left[z\,\widetilde{H}(z)\right]_{z=0} = \left[\frac{(z-1)}{(z-0.5)^2}\right]_{z=0} = -4$$

$$R_2 = \left[(z-0.5)^2\,\widetilde{H}(z)\right]_{z=0.5} = \left[\frac{(z-1)}{z}\right]_{z=0.5} = -1$$

Για την εύρεση του υπολοίπου R_3 αντικαθιστούμε τυχαίες τιμές του z, οι οποίες δεν πρέπει να είναι πόλοι. Θέτουμε $z = 1$ στη σχέση (1) και έχουμε:

$$\widetilde{H}(1) = \frac{H(1)}{1} = \frac{(1-1)}{1(1-0.5)^2} = 0 \Rightarrow \frac{-4}{1} + \frac{-1}{(1-0.5)^2} + \frac{R_3}{(1-0.5)} = 0 \Rightarrow$$
$$= -4 - 4 + \frac{R_3}{0.5} \Rightarrow R_3 = 4$$

Άρα:

$$H(z) = \frac{R_1\,z}{z} + \frac{R_2\,z}{(z-0.5)^2} + \frac{R_3\,z}{(z-0.5)}$$
$$= -4 - 2\frac{0.5\,z}{(z-0.5)^2} + 4\frac{z}{(z-0.5)}$$

Με βάση τον Πίνακα 9.1 η κρουστική απόκριση είναι:

$$h[n] = -4\delta[n] - 2n(0.5)^n\,u[n] + 4(0.5)^n\,u[n]$$

(γ) Μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο είτε με συνέλιξη $y[n] = x[n] * h[n]$ είτε με αντίστροφο μετασχηματισμό $y[n] = Z^{-1}\{X(z)H(z)\}$. Θα ακολουθήσουμε τον δεύτερο τρόπο. Ο μετασχηματισμός Ζ της εισόδου είναι:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{z-1}, |z| > 1$$

Επομένως:

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{z-1}.\frac{z-1}{z^2 - z + 0.25} = \frac{1}{z^2 - z + 0.25} = \frac{z^{-2}}{(1 - z^{-1} + 0.25z^{-2})}$$
$$= \frac{z^{-2}}{(1-0.5z^{-1})^2}$$

Επειδή η παράσταση στον παρονομαστή είναι δευτέρου βαθμού χρησιμοποιούμε τη σχέση (9.39) και λαμβάνουμε το ανάπτυγμα:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{R_2 z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})^2}, (1)$$

Υπολογίζουμε το R_2 από τη σχέση (9.38):

$$R_2 = [(1-0.5z^{-1})^2\, Y(z)]_{z=2} = [z^{-2}]_{z=2} = \frac{1}{4}$$

Για να υπολογίσουμε το R_1 επιλέγουμε μία τιμή του z που δεν είναι πόλος της συνάρτησης $Y(z)$. Έστω ότι $z = 1$. Υπολογίζουμε το $Y(1)$ από τον ορισμό. Είναι:

$$Y(1) = \frac{1^{-2}}{(1-0.5\ 1^{-1})^2} = \frac{1}{0.5^2} = 4$$

Υπολογίζουμε το $Y(1)$ από το ανάπτυγμα (σχέση 1). Είναι:

$$Y(1) = \frac{R_1}{1-0.5\ 1^{-1}} + \frac{R_2\ 1^{-1}}{(1-0.5\ 1^{-1})^2} = \frac{R_1}{0.5} + \frac{0.25}{0.25} = \frac{R_1}{0.5} + 1$$

Ισχύει:

$$\frac{R_1}{0.5} + 1 = 4 \Rightarrow R_1 = \frac{3}{2}$$

Άρα το ανάπτυγμα είναι:

$$Y(z) = \left(\frac{3}{2}\right)\frac{1}{1-0.5z^{-1}} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{0.5\ z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})^2}$$

και από τον Πίνακα 9.1 βρίσκουμε:

$$y[n] = \frac{3}{2}(0.5)^n\ u[n] + \frac{1}{2}(0.5)^n\ nu[n] = \frac{1}{2}[3+n]\ (0.5)^n\ u[n]$$

📖 Παράδειγμα 4

Να επιλυθεί η ΓΕΔΣΣ με μηδενικές αρχικές συνθήκες και είσοδο $x[n] = u[n]$:

$$y[n] = 1.6\ y[n-1] - 0.64\ y[n-2] + x[n]$$

Απάντηση: Γράφουμε τη ΓΕΔΣΣ, μεταφέροντας τους όρους $y[\ ]$ στο αριστερό μέλος:

$$y[n] - 1.6\ y[n-1] - 0.64\ y[n-2] = x[n]$$

Ο μετασχηματισμός Ζ της εισόδου είναι:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{z-1}, |z| > 1$$

Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Ζ και των δύο μελών της ΓΕΔΣΣ. Με χρήση της ιδιότητας της μετατόπισης στο χρόνο του μετασχηματισμού Ζ λαμβάνουμε:

$$Y(z) - 1.6\ z^{-1}Y(z) - 0.64\ z^{-2}Y(z) = X(z) \Rightarrow Y(z)[1-1.6z^{-1}-0.64z^{-2}] = \frac{1}{1-z^{-1}} \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-1.6z^{-1}-0.64z^{-2})} = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-0.8z^{-1})^2}$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση (9.39) και λαμβάνουμε το ανάπτυγμα:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1 - z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - 0.8z^{-1}} + \frac{R_3 z^{-1}}{(1 - 0.8z^{-1})^2}, (1)$$

Υπολογίζουμε τα R_1 και R_3 από τη σχέση (9.38):

$$R_1 = [(1 - z^{-1})^2\, Y(z)]_{z^{-1}=1} = \left[\frac{1}{(1 - 0.8z^{-1})^2}\right]_{z^{-1}=1} = \cdots = 25$$

$$R_3 = [(1 - 0.8z^{-1})^2\, Y(z)]_{z^{-1}=1/0.8=1.25} = \left[\frac{1}{(1 - z^{-1})}\right]_{z^{-1}=1.25} = \cdots = -4$$

Για να υπολογίσουμε το R_2 επιλέγουμε μία τιμή του z που δεν είναι πόλος της συνάρτησης $Y(z)$. Έστω ότι $z = 2$. Υπολογίζουμε το $Y(2)$ από τον ορισμό. Είναι:

$$Y(2) = \frac{1}{(1 - 2^{-1})(1 - 0.8\, 2^{-1})} = \cdots = \frac{1}{0.18}$$

Υπολογίζουμε το $Y(2)$ από το ανάπτυγμα (σχέση 1). Είναι:

$$Y(2) = \frac{25}{1 - 2^{-1}} + \frac{R_2}{(1 - 0.8\, 2^{-1})} - \frac{4\, 2^{-1}}{(1 - 0.8\, 2^{-1})^2} = \frac{25}{0.5} + \frac{R_2}{0.6} - \frac{2}{0.36}$$

Κάνοντας τις πράξεις, βρίσκουμε:

$$R_2 = -\frac{5}{6}$$

Άρα το ανάπτυγμα είναι:

$$Y(z) = 25\frac{1}{1 - z^{-1}} + \left(-\frac{5}{6}\right)\frac{1}{1 - 0.8z^{-1}} + (-5)\frac{0.8\, z^{-1}}{(1 - 0.8z^{-1})^2}$$

και από τον Πίνακα 9.1 βρίσκουμε:

$$y[n] = 25(1)^n u[n] - \frac{5}{6}(0.8)^n u[n] - 5(0.8)^n n\, u[n] = \left[25 - 5\left[n + \frac{1}{6}\right](0.8)^n\right] u[n]$$

3. Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών

📖 Παράδειγμα 5

ΓΑΚΜ σύστημα περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] = 0.2y[n - 1] + 0.8y[n - 2] + x[n]$$

Να βρεθεί η απόκριση του συστήματος για είσοδο $x[n] = (0.5)^n\, u[n]$ και αρχικές συνθήκες $y[-1] = 5$ και $y[-2] = 10$.

Απάντηση: Υπολογίζουμε τον μονόπλευρο μετασχηματισμό Z^+ κάθε ενός από τους όρους της ΓΕΔΣΣ:

$$Y^+(z) = 0.2\left[z^{-1}Y^+(z) + y[-1]\right] + 0.8\left[z^{-2}\, Y^+(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]\right] + X^+(z)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των αρχικών συνθηκών, έχουμε:

$$Y^+(z) = 0.2\,[z^{-1}\, Y^+(z) + 5] + 0.8\,[z^{-2}\, Y^+(z) + 5z^{-1} + 10] + X^+(z) \Rightarrow$$

$$Y^+(z) = 0.2\, z^{-1}\, Y^+(z) + 1 + 0.8\, z^{-2}\, Y^+(z) + 4z^{-1} + 8 + X^+(z)$$

Μεταφέροντας τους όρους που περιέχουν την $Y^+(z)$ στο αριστερό μέλος, έχουμε:

$$Y^+(z)[1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2}] = 9 + 4z^{-1} + X^+(z)$$

Η ακολουθία $x[n] = (0.5)^n u[n]$ έχει μονόπλευρο μετασχηματισμό $X^+(z)$ίπου δίνεται από τη σχέση:

$$X^+(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Άρα ισχύει:

$$Y^+(z)[1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2}] = (9 + 4z^{-1}) + \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Επιλύοντας ως προς $Y^+(z)$ έχουμε:

$$Y^+(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z) = \frac{(9 + 4z^{-1})}{1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2}} + \frac{\frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}}{1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2}} \quad (1)$$

Εκτελώντας την πρόσθεση των κλασμάτων και κατόπιν παραγοντοποιώντας τον παρονομαστή, έχουμε:

$$Y^+(z) = \frac{10 - 0.5z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2})(1 - 0.5z^{-1})} = \frac{10 - 0.5\, z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > 1$ και οι πόλοι του συστήματος είναι $z_1 = 1, z_2 = -0.8, z_3 = 0.5$. Επειδή ένας πόλος βρίσκεται επάνω στον μοναδιαίο κύκλο (και οι υπόλοιποι εντός του μοναδιαίου κύκλου) το σύστημα είναι οριακά ευσταθές.

Για το ανάπτυγμα του $Y^+(z)$ σε μερικά κλάσματα θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα R_1, R_2 και R_3:

$$Y^+(z) = \frac{R_1}{1 - z^{-1}} + \frac{R_2}{1 + 0.8z^{-1}} + \frac{R_3}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Επειδή οι πόλοι είναι απλοί και διακριτοί ($z_1 = 1, z_2 = -0.8, z_3 = 0.5$), υπολογίζουμε υπόλοιπα R_1, R_2 και R_3 από τη σχέση (9.38) και έχουμε:

$$R_1 = [Y^+(z)(1 - z^{-1})]_{z=1} = \left[\frac{10 - 0.5\, z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 + 0.8z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}\right]_{z=1} = \frac{25}{3}$$

$$R_2 = [Y^+(z)(1 + 0.8z^{-1})]_{z=-0.8} = \left[\frac{10 - 0.5\, z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}\right]_{z=-0.8} = \frac{80}{39}$$

$$R_3 = [Y^+(z)(1 - 0.5z^{-1})]_{z=0.5} = \left[\frac{10 - 0.5\, z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})}\right]_{z=0.5} = -\frac{10}{26}$$

Επομένως, το ανάπτυγμα της $Y^+(z)$ σε μερικά κλάσματα είναι:

$$Y^+(z) = \left(\frac{25}{3}\right)\frac{1}{1 - z^{-1}} + \left(\frac{80}{39}\right)\frac{1}{1 + 0.8z^{-1}} + \left(-\frac{10}{26}\right)\frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Εκτελώντας αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ προκύπτει η ζητούμενη λύση:

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\frac{25}{3}\right)(1)^n u[n] + \left(\frac{80}{39}\right)(-0.8)^n u[n] + \left(-\frac{10}{26}\right)(0.5)^n u[n] \\ &= \left[\left(\frac{25}{3}\right) + \left(\frac{80}{39}\right)(-0.8)^n + \left(-\frac{10}{26}\right)(0.5)^n\right] u[n] \end{aligned}$$

Σχόλια: Η συνολική λύση μπορεί να εκφραστεί με τους ακόλουθους τρόπους:

- Ως άθροισμα της **ομογενούς λύσης** και της **μερικής λύσης**:

$$y[n] = \left[\left(\frac{25}{3}\right) + \left(\frac{80}{39}\right)(-0.8)^n\right]u[n] + \left(-\frac{10}{26}\right)(0.5)^n u[n]$$

  Η ομογενής λύση οφείλεται στους πόλους και η μερική λύση στα μηδενικά του σήματος εισόδου.

- Ως άθροισμα της **μεταβατικής κατάστασης** και της **μόνιμης κατάστασης**:

$$y[n] = \left[\left(\frac{80}{39}\right)(-0.8)^n + \left(-\frac{10}{26}\right)(0.5)^n\right]u[n] + \left(\frac{25}{3}\right)u[n]$$

  Η μεταβατική κατάσταση οφείλεται στους πόλους (απλούς ή πολλαπλούς) που βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου και η μόνιμη κατάσταση οφείλεται στους απλούς πόλους που βρίσκονται επάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Αν υπάρχουν πόλοι (απλοί ή πολλαπλοί) εκτός του μοναδιαίου κύκλου, τότε η απόκριση τείνει στο άπειρο.

- Ως άθροισμα της **απόκρισης μηδενικής εισόδου** (ή αρχικής κατάστασης) και της **απόκρισης μηδενικής αρχικής κατάστασης**. Συγκεκριμένα, η παραπάνω σχέση (1) είναι άθροισμα δύο όρων. Ο πρώτος όρος μπορεί να γραφεί ως:

$$Y_{zi}(z) = H(z)\, X_{ic}(z)$$

  αναπαριστά την απόκριση για τη δοθείσα είσοδο, θεωρώντας μηδενική αρχική κατάσταση και ονομάζεται **απόκριση μηδενικής αρχικής κατάστασης**. Η συνάρτηση $X_{ic}(z)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία ισοδύναμη είσοδος αρχικής κατάστασης η οποία παράγει την ίδια έξοδο $Y_{zi}(z)$ που δημιουργείται από τις αρχικές συνθήκες. Στο παράδειγμά μας και με βάση τη σχέση (1) προκύπτει: $x_{ic}[n] = \{\hat{9}, 4\}$.

  Ο δεύτερος όρος μπορεί να γραφεί ως:

$$Y_{zs}(z) = H(z)\, X(z)$$

  αναπαριστά την απόκριση για μηδενική είσοδο, με εφαρμογή μόνο της αρχικής κατάστασης και ονομάζεται **απόκριση μηδενικής εισόδου**.

  Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z της σχέσης (1), έχουμε (σχέση 11.28):

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

  όπου $y_{zi}[n]$ είναι η απόκριση μηδενικής εισόδου και δίνεται από:

$$y_{zi}[n] = \left(\frac{65}{9}\right)(1)^n u[n] + \left(\frac{116}{45}\right)(-0.8)^n u[n] = \left[\left(\frac{65}{9}\right) + \left(\frac{116}{45}\right)(-0.8)^n\right]u[n]$$

  και $y_{zs}[n]$ είναι η απόκριση μηδενικής κατάστασης, η οποία δίνεται από:

$$\begin{aligned} y_{zs}[n] &= \left(\frac{10}{9}\right)(1)^n u[n] + \left(\frac{32}{117}\right)(-0.8)^n u[n] + \left(\frac{5}{13}\right)(0.5)^n u[n] \\ &= \left[\left(\frac{32}{117}\right)(-0.8)^n + \left(\frac{5}{13}\right)(0.5)^n + \left(\frac{10}{9}\right)\right]u[n] \end{aligned}$$

4. Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων

📖 Παράδειγμα 6

Ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου που είναι σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας, περιγράφεται από τη ΓΔΕΣΣ:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=x(t)$$

Να βρεθεί η απόκριση του συστήματος για είσοδο $x(t)=u[t]$.

Απάντηση: Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στη διαφορική εξίσωση βρίσκουμε:

$$s^2Y(s)+5sY(s)+6Y(s)=X(s)=\frac{1}{s}\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s(s^2+5s+6)}=\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{s}-\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{s+2}+\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{s+3}$$

Επομένως η απόκριση για βηματική είσοδο είναι:

$$y(t)=\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-3t}\right]u(t)$$

Εφαρμόζουμε στη διαφορική εξίσωση τις προσεγγίσεις της πρώτης και δεύτερης παραγώγου που δίνονται στις σχέσεις (11.29) και (11.30), κατόπιν θέτουμε $t=nTs$ και λαμβάνουμε:

$$\frac{y(t)-2y(t-T_s)+y(t-2T_s)}{T_s^2}+5\frac{y(t)-y(t-T_s)}{T_s}+6y(t)=x(t)$$
$$\Rightarrow\left(6+\frac{5}{T_s}+\frac{1}{T_s^2}\right)y(t)-\left(-\frac{5}{T_s}-\frac{2}{T_s^2}\right)y(t-T_s)+\left(\frac{1}{T_s^2}\right)y(t-2T_s)=x(t)$$
$$\Rightarrow\left(6+\frac{5}{T_s}+\frac{1}{T_s^2}\right)y(nT_s)-\left(-\frac{5}{T_s}-\frac{2}{T_s^2}\right)y((n-1)T_s)+\left(\frac{1}{T_s^2}\right)y((n-2)T_s)=x(nT_s)$$
$$\Rightarrow a_1y(nT_s)+a_2y((n-1)T_s)+a_3y((n-2)T_s)=b_1x(nT_s)$$

όπου:

$$a_1=\left(6+\frac{5}{T_s}+\frac{1}{T_s^2}\right),a_2=-\left(-\frac{5}{T_s}-\frac{2}{T_s^2}\right),a_3=\left(\frac{1}{T_s^2}\right),b_1=1$$

Η περίοδος δειγματοληψίας πρέπει να έχει μία επαρκώς μικρή τιμή που υπολογίζεται σύμφωνα με το κριτήριο Nyquist. Για λόγους απλότητας θέτουμε $T_s=1$ και λαμβάνουμε:

$$a_1=12,a_2=7,a_3=1,b_1=1$$

οπότε προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση διαφορών:

$$12y[n]+7y[n-1]+y[n-2]=x[n],n>0$$

Για μηδενικές αρχικές συνθήκες έχουμε $y[0]=1/12$ και από το θεώρημα τελικής τιμής βρίσκουμε $y[n]=1/20$ για $n\to\infty$. Ο μετασχηματισμός Z της εξόδου είναι:

$$Y(z)(12+7z^{-1}+z^{-2})=\frac{1}{1-z^{-1}}\Rightarrow Y(z)=\frac{z^3}{(z-1)(12z^2+7z+1)}$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z με τη μέθοδο που δείχθηκε στο παράδειγμα 9.15, βρίσκουμε:

$$y[n]=\left[\frac{1}{240}+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{20}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$$

Η επίλυση αυτή είναι προσεγγιστική και όχι ακριβής, επειδή επιλέξαμε μεγάλη τιμή για την περίοδο δειγματοληψίας $T_s=1$. Επιλέγοντας μικρότερη τιμή, η επίλυση γίνεται ακριβής.