Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Λυμένα Παραδείγματα

Διδάσκων: Μ. Παρασκευάς

ΣΕΤ #5 – Μετασχηματισμός Ζ

- Αμφίπλευρος Μετασχηματισμός Ζ και Περιοχή Σύγκλισης
- Σχέση Μετασχηματισμού Ζ με άλλους Μετασχηματισμούς
- Ιδιότητες Μετασχηματισμού Ζ
- Πόλοι και Μηδενικά

1. Αμφίπλευρος Μετασχηματισμός Ζ και Περιοχή Σύγκλισης

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Ζ των σημάτων διακριτού χρόνου άπειρης διάρκειας:

(α) $x_1[n] = a^n u[n], 0 < |a| < \infty$,

(β) $x_2[n] = -b^n u[-n-1], 0 < |b| < \infty$ και

(γ) $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$

Απάντηση: (α) Το σήμα $x_1[n]$ είναι αιτιατό (δεξιάς πλευράς) και έχει τιμές μόνο για θετικό χρόνο (positive-time sequence). Ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Ζ είναι:

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

Η συνάρτηση $X_1(z)$ συγκλίνει όταν $|az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$. Άρα η περιοχή σύγκλισης είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου που ορίζεται από το σύνολο των σημείων για τα οποία ισχύει R_{x1}: $|z| > |a|$. Δηλαδή:

$$R_{x1}: |\alpha| < |z| < \infty$$

Επίσης, υπάρχει ένας πόλος για $z = a$ και ένα μηδενικό για $z = 0$.

(β) Το σήμα $x_2[n]$ είναι αντι-αιτιατό (αριστερής πλευράς) και έχει τιμές μόνο για αρνητικό χρόνο (negative-time sequence). Ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Ζ είναι:

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -b^n\, u[-n-1]\, z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (bz^{-1})^n$$

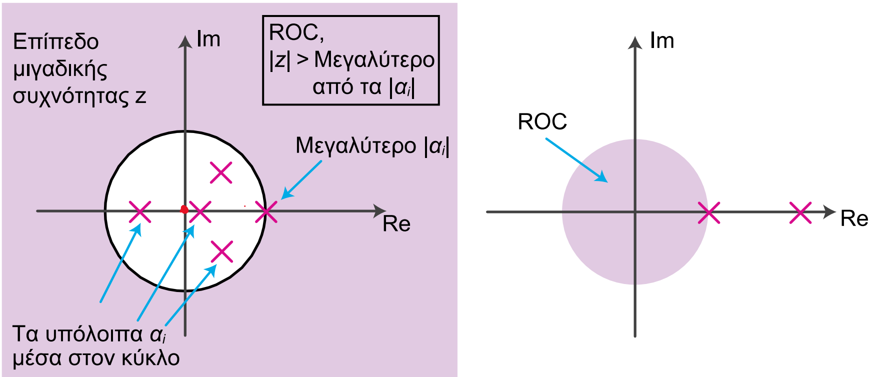
Θέτουμε $m = -n$ και έχουμε:

$$X_2(z) = -\sum_{m=1}^{\infty}(b^{-1}z)^m = 1 - \sum_{m=1}^{\infty}(b^{-1}z)^m = 1 - \frac{1}{1 - bz^{-1}} = \frac{z}{z-b}$$

Η συνάρτηση $X_2(z)$ συγκλίνει όταν $|b^{-1}z| < 1 \Rightarrow |z| < |b|$. Άρα η περιοχή σύγκλισης είναι η εσωτερική επιφάνεια ενός κύκλου που ορίζεται από το σύνολο των σημείων για τα οποία ισχύει $R_{x2}\colon |z| < |b|$. Δηλαδή:

$$R_{x2}\colon 0 < |z| < |b|$$

Επίσης, υπάρχει ένας πόλος για $z = b$ και ένα μηδενικό για $z = 0$.



Περιοχές σύγκλισης (ROC) των ακολουθιών $x_1[n]$ και $x_2[n]$.

Παρατηρούμε ότι αν στις παραπάνω ακολουθίες θέσουμε $a = b$, τότε ενώ οι ακολουθίες θα είναι διαφορετικές $x_1[n] \neq x_2[n]$, οι συναρτήσεις των μετασχηματισμών Ζ θα είναι ίδιες, δηλαδή $X_1(z) = X_2(z)$, αλλά με διαφορετικές περιοχές σύγκλισης ($R_{x1} \neq R_{x2}$). Επομένως, ο πλήρης υπολογισμός του μετασχηματισμού Ζ προϋποθέτει, όχι μόνο τον υπολογισμό της συνάρτησης $X(z)$, αλλά και τον προσδιορισμό της περιοχής σύγκλισης.

(γ) Το σήμα $x[n]$ είναι το άθροισμα $x_1[n] + x_2[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1]$ και καλείται ακολουθία διπλής πλευράς (two-side sequence) ή μη-αιτιατό (non-causal). Ο μετασχηματισμός Ζ είναι:

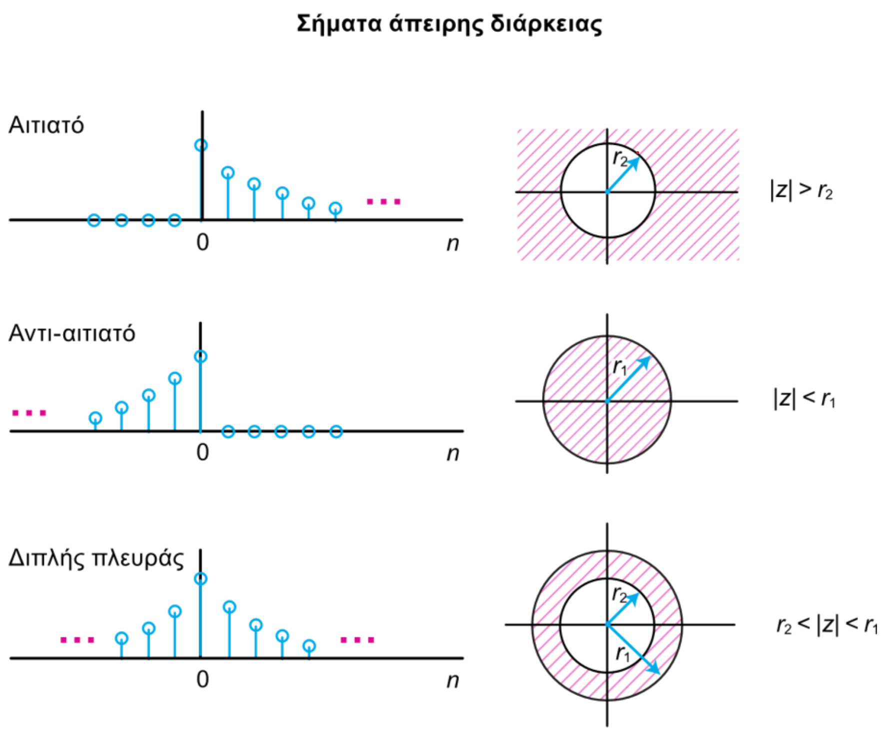
$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} \\ &= \left\{\frac{z}{z-a}, R_{x1}\colon |z| > |a|\right\} + \left\{\frac{z}{z-b}, R_{x2}\colon |z| < |b|\right\} \\ &= \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b}, R_x = R_{x1} \cap R_{x2} \end{aligned}$$

- Αν $|b| < |a|$, τότε η περιοχή σύγκλισης R_x δεν υπάρχει, επειδή η τομή των περιοχών σύγκλισης R_{x1} και R_{x2} είναι το κενό σύνολο.
- Αν $|a| < |b|$, τότε η περιοχή σύγκλισης είναι $R_x\colon |a| < |z| < |b|$.

Σχόλια: Από την επίλυση του παραπάνω παραδείγματος προκύπτει ότι για σήματα **άπειρης διάρκειας** η περιοχή σύγκλισης διακρίνεται στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- **Σήματα δεξιάς πλευράς (αιτιατά)**: η περιοχή σύγκλισης είναι το εξωτερικό ενός κύκλου με ακτίνα R_{x-} τη μέγιστη ακτίνα των πόλων της $X(z)$ ή $|z| > R_{x-}$.
- **Σήματα δεξιάς πλευράς (αντι-αιτιατά)**: Η περιοχή σύγκλισης είναι το εσωτερικό κύκλου με ακτίνα R_{x+} την ελάχιστη ακτίνα των πόλων της $X(z)$ ή $|z| < R_{x+}$.
- **Σήματα διπλής πλευράς (μη-αιτιατά)**: Η περιοχή σύγκλισης είναι το εσωτερικό ενός δακτυλίου με εσωτερική ακτίνα R_{x-} και εξωτερική ακτίνα R_{x+}, που αντιστοιχούν στη μέγιστη και στην ελάχιστη ακτίνα των πόλων της $X(z)$, δηλαδή ισχύει $R_{x-} < |z| < R_{x+}$.

Η περιοχή σύγκλισης ακολουθιών άπειρης διάρκειας δείχνεται στο επόμενο σχήμα.



Περιοχές σύγκλισης ακολουθιών άπειρης διάρκειας

📖 Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z, χωρίς τον απευθείας υπολογισμό της $X(z)$, για τα παρακάτω σήματα άπειρης διάρκειας:

(α) $x_1[n] = [(0.5)^n + (0.25)^n]u[n]$ (β) $x_2[n] = 3^n u[-n]$

Απάντηση: (α) Επειδή το $x_1[n]$ είναι ακολουθία δεξιάς πλευράς, η περιοχή σύγκλισης είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου με ακτίνα τη μέγιστη ακτίνα των πόλων. Οι πόλοι είναι: $z_1 = 0.5$ που προέρχεται από τον όρο $(0.5)^n$, και $z_2 = 0.25$ που προέρχεται από τον όρο $(0.25)^n$. Επομένως, η περιοχή σύγκλισης είναι R_x: $|z| > 0.5$.

(β) Επειδή το $x_2[n]$ είναι ακολουθία αριστερής πλευράς, η περιοχή σύγκλισης καλύπτει την εσωτερική επιφάνεια ενός κύκλου με ακτίνα την ελάχιστη ακτίνα των πόλων. Η συνάρτηση έχει έναν πόλο στο $z = 3$. Επομένως, η περιοχή σύγκλισης είναι R_x: $|z| < 3$.

2. Σχέση Μετασχηματισμού Z με άλλους Μετασχηματισμούς

Παράδειγμα 3

Ο μετασχηματισμός Z μιας ακολουθίας $x[n]$ είναι:

$$X(z) = \frac{z + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - 3z^{-4} + z^{-5}}$$

Αν η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο, να βρεθεί ο DTFT της $x[n]$, για $\omega = \pi$.

Απάντηση: Αν $X(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Z της ακολουθίας $x[n]$ και ο μοναδιαίος κύκλος βρίσκεται μέσα στη περιοχή σύγκλισης, τότε ο DTFT της $x[n]$ μπορεί να βρεθεί από τον υπολογισμό της $X(z)$ επάνω στον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

Θυμίζουμε ότι ισχύει: $e^{j\omega} = cos\omega + jsin\omega$. Επομένως για $\omega = \pi$ έχουμε $e^{j\pi} = cos\pi + jsin\pi = -1$ και ο DTFT στο σημείο $\omega = \pi$, είναι:

$$X\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega=\pi} = X(z)\big|_{z=e^{j\pi}} = X(z)\big|_{z=-1}$$

Επομένως έχουμε:

$$X\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega=\pi} = \left.\frac{z + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - 3z^{-4} + z^{-5}}\right|_{z=-1} = \frac{-1 + 2 - 1}{1 - 3 - 1} = 0$$

3. Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z

Παράδειγμα 4

Θεωρώντας γνωστό τον μετασχηματισμό Z της ακολουθίας $x[n]$, να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z της ακολουθίας:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Απάντηση: Η δοθείσα σχέση $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$, μπορεί να γραφεί $y[n] = y[n-1] + x[n]$. Επομένως:

$$x[n] = y[n] - y[n-1]$$

Αν μετασχηματίσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης και χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο του μετασχηματισμού Z, βρίσκουμε:

$$X(z) = Y(z) - z^{-1}Y(z) \Rightarrow X(z) = Y(z)[1 - z^{-1}]$$

Λύνουμε ως προς $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$$

Επομένως:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\overset{Z}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$$

Η σχέση αυτή αναφέρεται και ως **ιδιότητα της επαλληλίας**.

📖 Παράδειγμα 5

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος διακριτού χρόνου:

$$x[n]=(0.4)^{-n}\,u[-n]$$

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$(0.4)^{n}\,u[n]\overset{Z}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-0.4z^{-1}},R_x:|z|>0.4$$

Από την ιδιότητα αντιστροφής στο χρόνο προκύπτει:

$$(0.4)^{-n}\,u[-n]\overset{Z}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-0.4(\mathrm{z}^{-1})^{-1}}=\frac{1}{1-0.4\,z}$$

και περιοχή σύγκλισης:

$$R'_x=1/R_x\ =|z|<1/0.4$$

📖 Παράδειγμα 6

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος διακριτού χρόνου:

$$x[n]=(0.4)^{n/2}\,u[n/2]$$

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$(0.4)^{n}\,u[n]\overset{Z}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-0.4z^{-1}},R_x:|z|>0.4$$

Από την ιδιότητα κλιμάκωσης στο χρόνο προκύπτει:

$$(0.4)^{n/2}\,u[n/2]\overset{Z}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-0.4(\mathrm{z}^{-1})^{2}}=\frac{1}{1-0.4\,z^{-2}}=\frac{1}{1-0.2\,z^{-1}}\cdot\frac{1}{1+0.2\,z^{-1}}$$

📖 Παράδειγμα 7

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος διακριτού χρόνου:

$$x[n]=\left(3e^{j\pi}\right)^{n}(0.4)^{n}\,u[n]$$

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$(0.4)^{n}\,u[n]\overset{Z}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-0.4z^{-1}},R_x:|z|>0.4$$

Από την ιδιότητα κλιμάκωσης στη μιγαδική συχνότητα προκύπτει:

$$\left(e^{j\pi}\right)^{n}(0.4)^{n}\,u[n]\overset{Z}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-0.4(\mathrm{z}/3e^{j\pi})^{-1}}=\frac{1}{1-1.2\,e^{j\pi}\,z^{-1}}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι:

$$R'_x: \left|3e^{j\pi}\right||z| > 0.4 \Rightarrow\ |z| > 1.2$$

και περιοχή σύγκλισης:

$$R'_x = R_x^{1/2}: |z| > \sqrt{0.4} = 0.2$$

📖 Παράδειγμα 8

Κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού Z να υπολογιστεί η συνέλιξη μεταξύ των ακολουθιών $x[n] = \{\hat{1}, -2, 0, 3, -1\}$ και $h[n] = \{2, \hat{3}, 0, 1\}$.

Απάντηση: Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Z κάθε ακολουθίας χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο και έχουμε:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{4} x[n]\, z^{-n} = 1 - z^{-1} + 3z^{-3} - z^{-4}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-1}^{2} h[n]\, z^{-n} = 2z + 3 + z^{-2}$$

Με βάση την ιδιότητα της συνέλιξης έχουμε:

$$\begin{aligned} Y(z) = X(z)\, H(z) &= (1 - 2z^{-1} + 3z^{-3} - z^{-4})(2z + 3 + z^{-2}) \\ &= 2z + 3 + z^{-2} - 4 - 6z^{-1} - 2z^{-3} + 6z^{-2} + 9z^{-3} + 3z^{-5} - 2z^{-3} \\ &- 3z^{-4} - z^{-6} \\ &= 2z - 1 - 6z^{-1} + 7z^{-2} + 5z^{-3} - 3z^{-4} + 3z^{-5} - z^{-6} \\ &= \sum_{n=-1}^{6} y[n]\, z^{-n} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας για μία ακόμα φορά την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο, λαμβάνουμε το αποτέλεσμα:

$$y[n] = \{2, -\hat{1}, -6, 7, 5, -3, 3, -1\}$$

📖 Παράδειγμα 9

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος διακριτού χρόνου:

$$x[n] = -\, n\, (0.4)^n\, u[n]$$

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$(0.4)^n\, u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - 0.4z^{-1}}, R_x: |z| > 0.4$$

Από την ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα z προκύπτει:

$$-n\, (0.4)^n\, u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} z\left(\frac{1}{1 - 0.4\, z^{-1}}\right)' = \frac{-0.4}{(1 - 0.4z^{-1})^2}$$

και περιοχή σύγκλισης:

$$R'_x = R_x: |z| > 0.4$$

📖 Παράδειγμα 10

Αιτιατό σήμα διακριτού χρόνου έχει μετασχηματισμό Ζ που δίνεται από τη σχέση:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Να υπολογιστεί η τιμή του σήματος $x[n]$ στη θέση $n = 0$ και για $n \to \infty$

Απάντηση: Για $x[0]$ από το θεώρημα αρχικής τιμής προκύπτει:

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{1 - az^{-1}} = 1$$

📖 Παράδειγμα 11

Αιτιατό σήμα διακριτού χρόνου έχει μετασχηματισμό Ζ που δίνεται από τη σχέση:

$$X(z) = \frac{4z^2 + 3z + 1}{(z-1)(z+2)^2}$$

Να υπολογιστεί η τιμή του σήματος $x[n]$ στη θέση $n = 0$ και για $n \to \infty$

Απάντηση: Για $x[\infty]$ από το θεώρημα τελικής τιμής προκύπτει:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} x[n] &= \lim_{z \to 1} (z-1) X(z) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{4z^2 + 3z + 1}{(z-1)(z+2)^2} \\ &= \lim_{z \to 1} \frac{4z^2 + 3z + 2}{(z+2)^2} = \frac{4 + 3 + 1}{3^2} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

4. Πόλοι και Μηδενικά

📖 Παράδειγμα 12

Να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων και μηδενικών της συνάρτησης:

$$X(z) = \frac{2z^2 + 3z}{z^2 + 0.4z + 1}$$

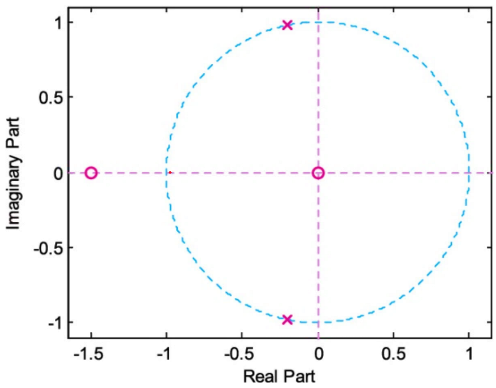
Απάντηση: Για να βρούμε τα μηδενικά υπολογίζουμε τις ρίζες του αριθμητή. Είναι:

$$2z^2 + 3z = 0 \Rightarrow z(2z + 3) = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \text{ και } z_2 = -3/2$$

Για να βρούμε τους πόλους υπολογίζουμε τις ρίζες του παρονομαστή. Είναι:

$$z^2 + 0.4z + 1 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -0.20 \pm j0.98$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο μιγαδικοί συζυγείς πόλοι $p_{1,2} = -0.20 \pm j0.98$, τοποθετημένοι επάνω στον μοναδιαίο κύκλο και δύο μηδενικά τοποθετημένα στις θέσεις $z_1 = 0$ και $z_2 = -1.5$.



Διάγραμμα πόλων – μηδενικών