Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Λυμένα Παραδείγματα

Διδάσκων: Μ. Παρασκευάς

ΣΕΤ #4 – Μελέτη Συστημάτων Διακριτού Χρόνου με Εξισώσεις Διαφορών

- Αναδρομικά και Μη-Αναδρομικά Συστήματα Διακριτού Χρόνου
- Εύρεση Ομογενούς και Μερικής Λύσης
- Μελέτη Ασυμπτωτικής Ευστάθειας ΓΑΚΜ Συστήματος Διακριτού Χρόνου

1. Αναδρομικά και Μη-Αναδρομικά Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Παράδειγμα 1

Ένα αναδρομικό (ARMA) σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ πρώτης τάξης:

$$y[n] = -\frac{1}{2}y[n-1] + x[n] - x[n-1]$$

(α) Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος όταν βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας και δέχεται είσοδο: (i) $x[n] = u[n]$ και (ii) $x[n] = 2u[n]$

(β) Να επαναληφθεί η επίλυση για τις ίδιες εισόδους, αλλά για αρχική συνθήκη $y[-1] = -2$.

Και στις δύο περιπτώσεις να διερευνηθεί αν το σύστημα έχει γραμμική συμπεριφορά ή όχι.

<u>Απάντηση</u>: (α-i) Εφαρμόζουμε είσοδο $x_1[n] = u[n]$ και λύνουμε επαναληπτικά τη ΓΕΔΣΣ για μηδενικές αρχικές συνθήκες και για τιμές του $n = 0,1,2,\ldots$

$$n = 0,\ \ y_1[0] = -0.5\, y_1[-1] + u[0] - u[-1] = 0 + 1 - 0 \Rightarrow y_1[0] = 1$$

$$n = 1,\ \ y_1[1] = -0.5\, y_1[0] + u[1] - u[0] = -0.5 + 1 - 1 \Rightarrow y_1[1] = -0.5$$

$$n = 2,\ \ y_1[2] = -0.5\, y_1[1] + u[2] - u[1] = 0.25 + 1 - 1 \Rightarrow y_1[2] = 0.25$$

$$n = 3,\ \ y_1[3] = -0.5\, y_1[2] + u[3] - u[2] = -0.125 + 1 - 1 \Rightarrow y_1[3] = -0.125$$

$$n = 4,\ \ y_1[4] = -0.5\, y_1[3] + u[4] - u[3] = 0.0625 + 1 - 1 \Rightarrow y_1[4] = 0.0625$$

<u>Σημείωση</u>: Ισχύει $y_1[-1] = 0$ επειδή το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας.

(α-ii) Επαναλαμβάνουμε την επίλυση για είσοδο $x_2[n] = 2u[n]$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες:

$$n = 0,\ \ y_2[0] = -0.5\, y_2[-1] + 2u[0] - 2u[-1] = 0 + 2 - 0 \Rightarrow y_2[0] = 2$$

$$n=1,\quad y_2[1]=-0.5\,y_2[0]+2u[1]-\ 2u[0]=-1+2-2\Rightarrow y_2[1]=-1$$
$$n=2,\quad y_2[2]=-0.5\,y_2[1]+2u[2]-\ 2u[1]=0.5+2-2\Rightarrow y_2[2]=0.5$$
$$n=3,\quad y_2[3]=-0.5\,y_2[2]+2u[3]-\ 2u[2]=-0.25+2-2\Rightarrow y_2[3]=-0.25$$
$$n=4,\quad y_2[4]=-0.5\,y_2[3]+2u[4]-\ 2u[3]=0.125+2-2\Rightarrow y_2[4]=0.125$$

Παρατηρούμε ότι για διπλασιασμό της εισόδου, δηλ. $x_2[n]=2x_1[n]$, προκύπτει διπλασιασμός της εξόδου, δηλ. $y_2[n]=2y_1[n]$. Επομένως, για μηδενικές αρχικές συνθήκες το σύστημα έχει γραμμική συμπεριφορά.

(β-i) Εφαρμόζουμε είσοδο $x_1[n]=u[n]$ και λύνουμε επαναληπτικά τη ΓΕΔΣΣ για αρχική συνθήκη $y[-1]=-2$ και τιμές του $n=0,1,2,\dots$

$$n=0,\quad y_1[0]=-0.5\,y_1[-1]+u[0]-\ u[-1]=1+1-0\Rightarrow y_1[0]=2$$
$$n=1,\quad y_1[1]=-0.5\,y_1[0]+u[1]-\ u[0]=-1+1-1\Rightarrow y_1[1]=-1$$
$$n=2,\quad y_1[2]=-0.5\,y_1[1]+u[2]-\ u[1]=0.5+1-1\Rightarrow y_1[2]=0.5$$
$$n=3,\quad y_1[3]=-0.5\,y_1[2]+u[3]-\ u[2]=-0.25+1-1\Rightarrow y_1[3]=-0.25$$
$$n=4,\quad y_1[4]=-0.5\,y_1[3]+u[4]-\ u[3]=0.125+1-1\Rightarrow y_1[4]=0.125$$

(β-ii) Επαναλαμβάνουμε την επίλυση για είσοδο $x_2[n]=2u[n]$ και αρχική συνθήκη $y[-1]=-2$:

$$n=0,\quad y_2[0]=-0.5\,y_2[-1]+2u[0]-\ 2u[-1]=1+2-0\Rightarrow y_2[0]=3$$
$$n=1,\quad y_2[1]=-0.5\,y_2[0]+2u[1]-\ 2u[0]=-1.5+2-2\Rightarrow y_2[1]=-1.5$$
$$n=2,\quad y_2[2]=-0.5\,y_2[1]+2u[2]-\ 2u[1]=0.75+2-2\Rightarrow y_2[2]=0.75$$
$$n=3,\quad y_2[3]=-0.5\,y_2[2]+2u[3]-\ 2u[2]=-0.375+2-2\Rightarrow y_2[3]=-0.375$$
$$n=4,\quad y_2[4]=-0.5\,y_2[3]+2u[4]-\ 2u[3]=0.1875+2-2\Rightarrow y_2[4]=0.1875$$

Παρατηρούμε ότι για διπλασιασμό της εισόδου, δηλ. $x_2[n]=2x_1[n]$, δεν προκύπτει διπλασιασμός της εξόδου, δηλ. $y_2[n]=2y_1[n]$. Επομένως, το σύστημα δεν έχει γραμμική συμπεριφορά και αυτό οφείλεται στις μη-μηδενικές αρχικές συνθήκες.

📖 Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του μη-αναδρομικού (FIR) (Moving Average, MA) συστήματος, το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας και περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ πρώτης τάξης:

$$y[n]=\frac{1}{2}(x[n]+x[n-1])$$

Να ελεγχθεί το σύστημα ως προς τη γραμμικότητα και τη χρονική αμεταβλητότητα.

Απάντηση: Εφόσον ζητείται η κρουστική απόκριση $h[n]$ θεωρούμε είσοδο $x[n]=\delta[n]$. Λύνουμε επαναληπτικά τη ΓΕΔΣΣ για τιμές του $n=0,1,2,\dots$

$$n=0,\qquad h[0]=0.5(\delta[0]-\ \delta[-1])=0.5(1-0)\Rightarrow h[0]=0.5$$
$$n=1,\qquad h[1]=0.5(\delta[1]-\ \delta[0])=0.5(0-1)\Rightarrow h[1]=-0.5$$

$n = 2, \qquad h[2] = 0.5(\delta[2] - \delta[1]) = 0.5(0 - 0) \Rightarrow h[2] = 0$

$n = 3, \qquad h[3] = 0.5(\delta[3] - \delta[2]) = 0.5(0 - 0) \Rightarrow h[3] = 0$

$n = 4, \qquad h[4] = 0.5(\delta[4] - \delta[3]) = 0.5(0 - 0) \Rightarrow h[4] = 0$

Από τη ΓΕΔΣΣ παρατηρούμε ότι κάθε δείγμα εξόδου προκύπτει ως μέσος όρος του τρέχοντος και του προηγούμενου δείγματος εισόδου, δηλαδή το σήμα εξόδου είναι εξομαλυμένο το σήμα εισόδου.

<u>Έλεγχος γραμμικότητας</u>: Αν θέσουμε στο σύστημα μια συνδυασμένη είσοδο $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ η έξοδος είναι:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}(ax_1[n] + bx_2[n] + ax_1[n-1] + bx_2[n-1]) \\ &= \frac{1}{2}(ax_1[n] + ax_1[n-1]) + \frac{1}{2}(bx_2[n] + bx_2[n-1]) \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι προκύπτει μία γραμμικά συνδυασμένη έξοδος, άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

<u>Έλεγχος χρονικής μεταβλητότητας</u>: Αν θέσουμε στο σύστημα μια χρονικά μετατοπισμένη είσοδο $x[n] = x[n - n_0]$ η έξοδος είναι:

$$y'[n] = \frac{1}{2}(x[n - n_0] + x[n - n_0 - 1]) = y[n - n_0]$$

Παρατηρούμε ότι προκύπτει μία αντίστοιχα χρονικά μετατοπισμένη έξοδος $y[n - n_0]$, άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

2. Εύρεση Ομογενούς και Μερικής Λύσης

Στα επόμενα παραδείγματα θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης όταν είναι γνωστή η ΓΕΔΣΣ και το σύστημα είναι σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας, δηλαδή είναι ΓΑΚΜ. Επειδή αναζητούμε την κρουστική απόκριση $h[n]$, θέτουμε στη ΓΕΔΣΣ ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες, επειδή το σύστημα είναι σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας. Όμως η εμφάνιση στην είσοδο μιας τόσο δραστικής ακολουθίας όπως η Δέλτα δημιουργεί νέες αρχικές συνθήκες στο σύστημα. Η έξοδος στην περίπτωση αυτή, δηλαδή η κρουστική απόκριση, θα προκύψει από τη λύση της ομογενούς εξίσωσης (απόκριση μηδενικής εισόδου) για τις νέες αρχικές συνθήκες. Επομένως, το πρόβλημα της εύρεσης της κρουστικής απόκρισης από τη ΓΕΔΣΣ ανάγεται στην εύρεση των νέων αρχικών συνθηκών εξαιτίας της ακολουθίας Δέλτα και κατόπιν στην επίλυση της ομογενούς λύσης ώστε να βρεθεί η απόκριση μηδενικής εισόδου, δηλαδή η κρουστική απόκριση.

🕮 Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του αναδρομικού συστήματος που περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] + \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

Απάντηση: Θέτουμε ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες επειδή το σύστημα είναι σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας. Έχουμε:

$$h[n] + \frac{3}{4}h[n-1] + \frac{1}{8}h[n-2] = \delta[n]$$

Η ομογενής εξίσωση είναι:

$$h[n] + \frac{3}{4}h[n-1] + \frac{1}{8}h[n-2] = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8}$$

και έχει ρίζες $\lambda_1 = -1/2$ και $\lambda_2 = -1/4$. Επομένως, η λύση της ομογενούς εξίσωσης (απόκριση μηδενικής εισόδου) είναι:

$$h[n] = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n = A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n + A_2\left(-\frac{1}{4}\right)^n, \qquad n \geq 0$$

Θα υπολογίσουμε τις τιμές των σταθερών A_1 και A_2 με χρήση των αρχικών συνθηκών. Για τη δοθείσα ΓΕΔΣΣ ισχύουν:

$$h[0] + \frac{3}{4}h[-1] + \frac{1}{8}h[-2] = \delta[0] \Rightarrow h[0] + 0 + 0 = 1 \Rightarrow h[0] = 1$$

και

$$h[1] + \frac{3}{4}h[0] + \frac{1}{8}h[-1] = \delta[1] \Rightarrow h[1] + \frac{3}{4} + 0 = 0 \Rightarrow h[1] = -\frac{3}{4}$$

Εφαρμόζουμε αυτές τις αρχικές συνθήκες στη μέχρι τώρα λύση της ομογενούς και έχουμε:

$$h[0] = A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + A_2\left(-\frac{1}{4}\right)^0 \Rightarrow A_1 + A_2 = 1$$

και

$$h[1] = A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^1 + A_2\left(-\frac{1}{4}\right)^1 \Rightarrow -\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{4}A_2 = -\frac{3}{4}$$

Γράφουμε το ζεύγος εξισώσεων με αγνώστους A_1 και A_2 σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & -1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3/4 \end{bmatrix}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε: $A_1 = 1/2$ και $A_2 = 2$.

Επειδή το δεξί μέλος της ΓΕΔΣΣ είναι $x[n]$ προκύπτει ότι η κρουστική απόκριση είναι ίση με την ομογενή λύση, δηλαδή:

$$h_g[n] = h[n] = \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$$

📖 Παράδειγμα 4

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του αναδρομικού συστήματος που περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] - \frac{2}{15}y[n-1] - \frac{1}{15}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

Απάντηση: Εφαρμόζουμε την ίδια μεθοδολογία επίλυσης. Θέτουμε ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες επειδή το σύστημα είναι σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας. Έχουμε:

$$h[n] - \frac{2}{15}h[n-1] - \frac{1}{15}h[n-2] = \delta[n]$$

Η ομογενής εξίσωση είναι:

$$h[n] - \frac{2}{15}h[n-1] - \frac{1}{15}h[n-2] = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^2 - \frac{2}{15}\lambda - \frac{1}{15}$$

και έχει ρίζες $\lambda_1 = 1/3$ και $\lambda_2 = -1/5$. Επομένως, η λύση της ομογενούς εξίσωσης (απόκριση μηδενικής εισόδου) είναι:

$$h[n] = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n = A_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + A_2\left(-\frac{1}{5}\right)^n, \qquad n \geq 0$$

Θα υπολογίσουμε τις τιμές των σταθερών A_1 και A_2 με χρήση των αρχικών συνθηκών. Για τη δοθείσα ΓΕΔΣΣ ισχύουν:

$$h[0] - \frac{2}{15}h[-1] - \frac{1}{15}h[-2] = \delta[0] + 2\delta[-1] \Rightarrow h[0] + 0 + 0 = 1 + 0 \Rightarrow h[0] = 1$$

και

$$h[1] - \frac{2}{15}h[0] - \frac{1}{15}h[-1] = \delta[1] + 2\delta[0] \Rightarrow h[1] - \frac{2}{15} - 0 = 0 + 2 \Rightarrow h[1] = \frac{32}{15}$$

Εφαρμόζουμε αυτές τις αρχικές συνθήκες στη μέχρι τώρα λύση της ομογενούς και έχουμε:

$$h[0] = A_1\left(\frac{1}{3}\right)^0 + A_2\left(-\frac{1}{5}\right)^0 \Rightarrow A_1 + A_2 = 1$$

και

$$h[1] = A_1\left(\frac{1}{3}\right)^1 + A_2\left(-\frac{1}{5}\right)^1 \Rightarrow \frac{1}{3}A_1 - \frac{1}{5}A_2 = \frac{32}{15}$$

Γράφουμε το ζεύγος εξισώσεων με αγνώστους A_1 και A_2 σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/3 & -1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 32/15 \end{bmatrix}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε: $A_1 = 35/8$ και $A_2 = -27/8$.

Άρα η ομογενής λύση είναι:

$$h[n] = \frac{1}{8}\left[35\left(\frac{1}{3}\right)^n - 27\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right]u[n]$$

Επειδή το δεξί μέλος της ΓΕΔΣΣ είναι $x[n] + 2x[n-1]$ προκύπτει ότι η κρουστική απόκριση είναι ίση με το άθροισμα $h[n] + 2h[n-1]$, δηλαδή:

$$\begin{aligned} h_g[n] &= h[n] + 2h[n-1] \\ &= \frac{1}{8}\left[35\left(\frac{1}{3}\right)^n - 27\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right]u[n] + \frac{1}{4}\left[35\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 27\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right]u[n-1] \end{aligned}$$

📖 Παράδειγμα 5

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση συστήματος με αρχικές συνθήκες $y[-1] = y[-2] = 1/8$ που περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] - 8y[n-1] + 16y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$$

Απάντηση: Εύρεση μερικής λύσης: Για είσοδο $x[n] = \delta[n]$, η μερική λύση/λύση μηδενικής κατάστασης σύμφωνα με τον Πίνακα 8.2 είναι:

$$y_p[n] = 0, \quad n \geq 0$$

Εύρεση ομογενούς λύσης:

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\lambda^2 - 8\lambda + 16$
- Φυσικές συχνότητες: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\,(1 \pm j\sqrt{3}) = e^{\pm j\pi/3}$ (φανταστικές συζυγείς)
- Ομογενής λύση/μηδενικής εισόδου: $y_h[n] = A_1\, e^{jn\pi/3} + A_2\, e^{-jn\pi/3}$
- Γενική λύση: $y[n] = A_1\, e^{jn\pi/3} + A_2 e^{-jn\pi/3},\ n \geq 0 \ \ (1)$

Για να υπολογίσουμε τις σταθερές A_1 και A_2, λύνουμε τη ΓΕΔΣΣ για $n = 0$ και $n = 1$ και έχουμε:

$$y[0] = 8y[-1] - 16y[-2] + x[0] - 2x[-1] = 1 - 2 + 1 - 0 = 0 \Rightarrow y[0] = 0$$

$$y[1] = 8y[0] - 16y[-1] + x[1] - 2x[0] = 0 - 2 + 0 - 2 \Rightarrow y[1] = 4$$

Αντικαθιστούμε τις νέες αρχικές συνθήκες στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$y[0] = y_h[0] = A_1\, e^0 + A_2\, e^0 = A_1 + A_2 = 0$$

$$y[1] = y_h[1] = A_1 e^{j\pi/3} + A_2 e^{-j\pi/3} = 4$$

Γράφουμε το ζεύγος εξισώσεων με αγνώστους A_1 και A_2 σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{j\pi/3} & e^{-j\pi/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε:

$$A_1 = 0 - 2.31j = 2.31\, e^{-j\pi/2}$$

$$A_2 = 0 + 2.31j = 2.31\, e^{j\pi/2}$$

Αντικαθιστούμε τις σταθερές A_1 και A_2 στην (1) και χρησιμοποιώντας τη σχέση Euler βρίσκουμε:

$$h[n] = 2.31\,(e^{jn\pi/3} e^{-j\pi/2} + 2.31\, e^{-jn\pi/3} e^{j\pi/2})\, u[n] = 2.31\left(e^{j\pi\left(\frac{n}{3}-\frac{1}{2}\right)} + e^{-j\pi\left(\frac{n}{3}-\frac{1}{2}\right)}\right) u[n]$$

$$= 4{,}62\, sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) u[n]$$

Επειδή το δεξί μέλος της ΓΕΔΣΣ είναι $x[n] + 2x[n-1]$, η κρουστική απόκριση είναι ίση με το άθροισμα $h[n] + 2h[n-1]$, δηλαδή είναι:

$$h_g[n] = h[n] + 2h[n-1] = 4{,}62\left[sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi(n-1)}{3}\right)\right] u[n]$$

📖 Παράδειγμα 6

Να υπολογιστούν η ομογενής λύση (απόκριση μηδενικής εισόδου), η μερική λύση (απόκριση μηδενικής κατάστασης) και η συνολική έξοδος για είσοδο $x[n] = (-0.6)^n u[n]$ για ένα αναδρομικό σύστημα με αρχικές συνθήκες $y[-1] = 1$ και $y[-2] = 1$ και ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] - y[n-2] = x[n]$$

Απάντηση: Εύρεση μερικής λύσης: Για είσοδο $x[n] = (-0.6)^n u[n]$, η μερική λύση (απόκριση μηδενικής κατάστασης) σύμφωνα με τον Πίνακα 8.2 είναι:

$$y_p[n] = C_1(-0.6)^n u[n]$$

Η μερική λύση ικανοποιεί τη ΓΕΔΣΣ, δηλαδή:

$$C_1(-0.6)^n u[n] - \frac{3}{2}C_1(-0.6)^{n-1}u[n-1] - C_1(-0.6)^{n-2}u[n-2] = (-0.6)^n u[n]$$

Βρίσκουμε την τιμή του C_1 θέττοντας $n = 2$ στην παραπάνω σχέση, οπότε έχουμε:

$$C_1(-0.6)^2 u[2] - \frac{3}{2}C_1(-0.6)^1 u[1] - C_1(-0.6)^0 u[0] = (-0.6)^2 u[2]$$

από την οποία βρίσκουμε:

$$C_1 = \frac{18}{13}$$

Επομένως, η μερική λύση είναι:

$$y_p[n] = \frac{18}{13}(-0.6)^n u[n]$$

Εύρεση ομογενούς λύσης: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1$$

και οι φυσικές συχνότητες είναι:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 2$$

Επομένως, η ομογενής λύση (απόκριση μηδενικής εισόδου) είναι:

$$y_h[n] = A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n + A_2(2)^n$$

Η συνολική λύση είναι το άθροισμα της μερικής και της ομογενούς λύσης:

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n] = \frac{18}{13}(-0.6)^n u[n] + A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n + A_2(2)^n$$

Για να υπολογίσουμε τις σταθερές A_1 και A_2, λύνουμε τη ΓΕΔΣΣ για $n = 0$ και $n = 1$ και έχουμε:

$$y[0] = \frac{3}{2}y[-1] - y[-2] + x[0] = \frac{3}{2} - 1 + 1 \Rightarrow y[0] = \frac{3}{2}$$

$$y[1] = \frac{3}{2}y[0] - y[-1] + x[1] = \frac{9}{4} - 1 + (-0.6) \Rightarrow y[1] = \frac{13}{20}$$

Αντικαθιστούμε τις νέες αρχικές συνθήκες στη πλήρη λύση και βρίσκουμε:

$$y[0] = y_p[0] + y_h[0] = \frac{3}{2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_1 + A_2 = \frac{3}{26}$$

$$y[1] = y_p[1] + y_h[1] = \frac{13}{20} \Rightarrow \ldots \Rightarrow -\frac{1}{2}A_1 + 2A_2 = -\frac{47}{260}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $A_1 = 0{,}1646$ και $A_2 = -0.0492$.

$$y[n] = \frac{18}{13}(-0.6)^n u[n] + 0{,}1646\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 0{,}0492(2)^n$$

📖 Παράδειγμα 7

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του αναδρομικού συστήματος που περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ $y[n] + 0.1y[n-1] - 0.72y[n-2] = x[n]$ και το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας. Να επαληθευτεί η λύση με χρήση κώδικα Matlab/Octave.

Απάντηση: Εφαρμόζουμε την ίδια μεθοδολογία επίλυσης. Θέτουμε ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες επειδή το σύστημα είναι σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας.

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\lambda^2 + 0.1\lambda - 0.72 = (\lambda - 0.8)(\lambda + 0.9)$ (1)
- Φυσικές συχνότητες: $\lambda_1 = 0.8$ και $\lambda_2 = -0.9$ (απλές ρίζες)
- Ομογενής λύση/μηδενικής εισόδου: $y_h[n] = A_1(0.8)^n + A_2(-0.9)^n,\ n \geq 0$ (2)
- Μερική λύση/μηδενικής κατάστασης: $y_p[n] = 0$, επειδή $x[n] = \delta[n]$
- Πλήρης λύση: $y[n] = y_h[n] + y_p[n] = y_h[n]$ (3)

Εύρεση ομογενούς λύσης: Επειδή το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας, οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, δηλαδή: $y[-1] = y[-2] = 0$. Λύνοντας τη ΓΕΔΣΣ για $n = 0$ και $n = 1$, έχουμε για την πλήρη λύση τις νέες αρχικές συνθήκες εξαιτίας της εφαρμογής της κρουστικής εισόδου:

$$y[0] = -0.1y[-1] + 0.72y[-2] + x[0] = 1 \Rightarrow y[0] = 1$$

$$y[1] = -0.1y[0] + 0.72y[-1] + x[1] = -0.1 \Rightarrow y[1] = -0.1$$

Για να υπολογίσουμε τις σταθερές A_1 και A_2, λύνουμε την ομογενή λύση (2) για $n = 0$ και $n = 1$, λαμβάνουμε υπόψη τη σχέση (3) και βρίσκουμε:

$$y[0] = y_h[0] = A_1(0.8)^0 + A_2(-0.9)^0 \Rightarrow A_1 + A_2 = 1 \quad (4)$$

$$y[1] = y_h[1] = A_1(0.8)^1 + A_2(-0.9)^1 \Rightarrow 0.8A_1 - 0.9A_2 = -0.1 \quad (5)$$

Λύνουμε το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων (4) και (5) ως προς A_1, A_2 και βρίσκουμε:

$$A_1 = \frac{8}{17} \text{ και } A_2 = \frac{9}{17}$$

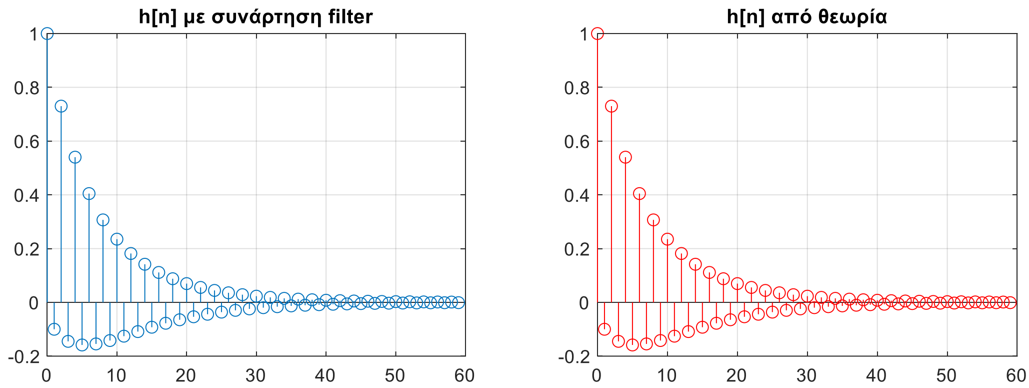
Επομένως η πλήρης λύση της ΓΕΔΣΣ είναι:

$$y[n] = y_h[n] = \left[\frac{8}{17}(0.8)^n + \frac{9}{17}(-0.9)^n\right]u[n]$$

Με βάση το δεξί μέλος της ΓΕΔΣΣ, η κρουστική απόκριση ισούται με την ομογενή λύση και είναι:

$$h[n] = y_h[n] = \left[\frac{8}{17}(0.8)^n + \frac{9}{17}(-0.9)^n\right]u[n]$$

Τα Matlab/Octave για την επίλυση των ΓΕΔΣΣ χρησιμοποιούν τη συνάρτηση **filter(b,a,x)**, όπου a, b είναι πίνακες με τους συντελεστές $a[k]$ και $b[m]$ και x το σήμα εισόδου. Η συνάρτηση **filtic(b,a,y,x)** δημιουργεί τις αρχικές συνθήκες για τη συνάρτηση **filter()**. Συγκεκριμένα, μετατρέπει την παρελθούσα είσοδο x και την έξοδο y σε αρχικές συνθήκες εισόδου και εξόδου, αντίστοιχα. Στο σχήμα (α) δείχνεται η κρουστική απόκριση όπως υπολογίζεται με τη συνάρτηση **filter()** και στο σχήμα (β) όπως προκύπτει από τη θεωρητική επίλυση που παρουσιάστηκε παραπάνω. Παρατηρούμε ότι η θεωρητική επίλυση συμπίπτει με την υπολογιστική επίλυση.



(α) Κρουστική απόκριση υπολογισμένη με τη συνάρτηση **filter()**
(β) Κρουστική απόκριση υπολογισμένη από θεωρητική επίλυση

3. Μελέτη Ασυμπτωτικής Ευστάθειας ΓΑΚΜ Συστήματος Διακριτού Χρόνου

🕮 Παράδειγμα 7

Να διερευνηθεί ως προς την ασυμπτωτική ευστάθεια το σύστημα διακριτού χρόνου με ΓΕΔΣΣ:

$$9y[n] + 13y[n-1] + 5y[n-2] + y[n-3] = x[n] + 2x[n-1]$$

Απάντηση: Η ομογενής ΓΕΔΣΣ είναι:

$$9y[n] + 13y[n-1] + 5y[n-2] + y[n-3] = 0$$

από την οποία προκύπτει ότι η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\begin{aligned} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 9\lambda + \lambda^2 + 4\lambda + 9 &= (\lambda+1)(\lambda^2 + 4\lambda + 9) \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2-3j)(\lambda+2+3j) = 0 \end{aligned}$$

Επομένως, οι ρίζες (φυσικές συχνότητες) είναι $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2+3j,\ \lambda_3 = -2-3j$. Τα μέτρα των ριζών είναι: $|\lambda_1| = 1,\ |\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{13}$. Επειδή υπάρχουν ρίζες που βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ασταθές.