Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Λυμένα Παραδείγματα

Διδάσκων: Μ. Παρασκευάς

ΣΕΤ #3 – Συστήματα Διακριτού Χρόνου

- Κατηγοριοποίηση Συστημάτων Διακριτού Χρόνου
- Περιγραφή Συστήματος με το Συνελικτικό Άθροισμα
- Μελέτη Συστημάτων με τη Μέθοδο της Συνέλιξης

1. Κατηγοριοποίηση Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

Παράδειγμα 1

Να εξεταστεί αν τα παρακάτω συστήματα είναι αμετάβλητα κατά τη μετατόπιση.

$$(\alpha)\quad y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\qquad(\beta)\quad \sum_{k=0}^{N}a_k\,y[n-k]=\sum_{m=0}^{M}b_m x[n-m]$$

(α) Από τη σχέση εισόδου – εξόδου και λαμβάνοντας υπόψη ότι $n\to\infty$, βρίσκουμε τη μετατοπισμένη απόκριση:

$$y[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k-n_0]$$

Η απόκριση του συστήματος στη χρονικά μετατοπισμένη είσοδο $x'[n]=x[n-n_0]$, είναι:

$$y'[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x'[k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k-n_0]$$

Επειδή $y'[n]=y[n-n_0]$ το σύστημα είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.

(β) Η μετατοπισμένη απόκριση κατά n_0 είναι:

$$y[n-n_0]=\sum_{k=0}^{N}a_k\,y[n-n_0-k]=\sum_{m=0}^{M}b_m x[n-n_0-m]$$

Η απόκριση του συστήματος στη μετατοπισμένη είσοδο $x'[n]=x[n-n_0]$, είναι:

$$y'[n]=\sum_{k=0}^{N}a_k\,y'[n-k]=\sum_{m=0}^{M}b_m x'[n-m]=\sum_{m=0}^{M}b_m x[n-n_0-m]$$

Επειδή $y'[n]=y[n-n_0]$ το σύστημα είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.

📖 Παράδειγμα 2

Να εξεταστεί αν είναι γραμμικό το σύστημα διακριτού χρόνου με σχέση εισόδου – εξόδου:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

Απάντηση: Για εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ οι αντίστοιχες έξοδοι $T\{x_1[n]\}$ και $T\{x_2[n]\}$ είναι:

$$y_1[n] = T\{x_1[n]\} = \sum_{k=0}^{N} a_k\, y_1[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x_1[n-m]$$

$$y_2[n] = T\{x_2[n]\} = \sum_{k=0}^{N} a_k\, y_2[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x_2[n-m]$$

Για τη συνδυασμένη είσοδο $x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ ισχύει:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] = \sum_{m=0}^{M} b_m (\alpha x_1[n-m] + \beta x_2[n-m])\ (1)$$

Η συνδυασμένη έξοδος $y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$ του συστήματος είναι:

$$a \sum_{k=0}^{N} a_k\, y_1[n-k] + \beta \sum_{k=0}^{N} a_k\, y_2[n-k] = a \sum_{m=0}^{M} b_m x_1[n-m] + \beta \sum_{m=0}^{M} b_m x_2[n-m] \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha a_k\, y_1[n-k] + \sum_{k=0}^{N} \beta a_k\, y_2[n-k] = \sum_{m=0}^{M} \alpha b_m x_1[n-m] + \sum_{m=0}^{M} \beta b_m x_2[n-m] \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, (\alpha y_1[n-k] + \beta y_2[n-k]) = \sum_{k=0}^{N} b_m\, (\alpha x_1[n-k] + \beta x_2[n-k])\ (2)$$

Επειδή τα δεύτερα μέλη των σχέσεων (1) και (2) είναι ίσα, προκύπτει ότι και τα πρώτα μέλη είναι ίσα, δηλαδή ισχύει:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} a_k\, (\alpha y_1[n-k] + \beta y_2[n-k])$$

Επειδή η έξοδος για συνδυασμένη είσοδο ισούται με τη συνδυασμένη έξοδο, το σύστημα είναι γραμμικό.

📖 Παράδειγμα 3

Να εξεταστεί αν είναι γραμμικό το σύστημα με την παρακάτω σχέση εισόδου – εξόδου:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, x[n+k]$$

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι το $y[n]$ σχηματίζεται από το άθροισμα των γινομένων του $x[n]$ με μετατοπισμένες εκδόσεις του εαυτού του. Π.χ.:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, x[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^2[k]$$

Ο τετραγωνικός όρος αναμένεται να κάνει μη-γραμμικό το σύστημα. Χρησιμοποιούμε ένα Παράδειγμα :

- Αν $x[n] = \delta[n]$, τότε $y[n] = \delta[n]$.
- Αν $x[n] = 2\delta[n]$, τότε $y[n] = 4\delta[n]$.

Επομένως το σύστημα δεν είναι ομογενές. Επομένως δεν είναι ούτε γραμμικό, επειδή η ομογένεια είναι προϋπόθεση της γραμμικότητας.

📖 Παράδειγμα 4

Να εξεταστεί αν είναι ευσταθές το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Απάντηση: Για να αποφανθούμε για την ευστάθεια του συστήματος θα θέσουμε μία φραγμένη είσοδο και θα εξετάσουμε αν και η έξοδος είναι φραγμένη (BIBO ευστάθεια). Αν η είσοδος είναι φραγμένη, δηλαδή $|x[n]| \leq A < \infty$, τότε το μέτρο της εξόδου είναι:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \right| < \sum_{k=-\infty}^{n} |x[k]| < \sum_{k=-\infty}^{n} A$$

Το άθροισμα αυτό τείνει στο άπειρο για $n \to \infty$. Επομένως, η έξοδος δεν είναι φραγμένη άρα το σύστημα δεν είναι BIBO ευσταθές.

2. Περιγραφή Συστήματος με Συνελικτικό Άθροισμα

📖 Παράδειγμα 5

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση ενός ΓΑΚΜ και αιτιατού συστήματος όταν για είσοδο $x[n] = u[n]$ το σύστημα παράγει έξοδο $y[n] = \delta[n]$.

Απάντηση: Γράφουμε τη σχέση $y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\, h[n-k]$ ως εξής:

$$y[n] = x[0]h[n] + \sum_{k=1}^{N-1} x[k]\, h[n-k]$$

Λύνουμε ως προς $h[n]$ και βρίσκουμε:

$$h[n] = \frac{1}{x[0]} \left[y[n] - \sum_{k=1}^{N-1} x[k]\, h[n-k] \right]$$

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **αποσυνέλιξη** (deconvolution) και προσφέρει έναν αναδρομικό τρόπο υπολογισμού της κρουστικής απόκρισης μέσω των ακόλουθων βημάτων για διάφορες τιμές του n:

$$n = 0, h[0] = \frac{1}{x[0]}[y[0]]$$

$$n=1, h[1]=\frac{1}{x[0]}\big[y[1]-h[0]x[1]\big]$$

$$n=2, h[2]=\frac{1}{x[0]}\big[y[2]-h[0]x[2]-h[1]x[1]\big]$$

....

Εφαρμόζουμε για τις δεδομένες συναρτήσεις εισόδου και εξόδου και λαμβάνουμε:

$$n=0, h[0]=\frac{1}{u[0]}\big[\delta[0]\big]=1$$

$$n=1, h[1]=\frac{1}{u[0]}\big[\delta[1]-h[0]u[1]\big]=(0-1)=-1$$

$$n=2, h[2]=\frac{1}{u[0]}\big[\delta[2]-h[0]u[2]-h[1]u[1]\big]=(0-1+1)=0$$

$$n=3, h[3]=\frac{1}{u[0]}\big[\delta[3]-h[0]u[3]-h[1]u[2]-h[2]u[1]\big]=(0-1+1-0)=0$$

....

Γενικότερα, η λύση είναι $h[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$

3. Μελέτη Συστημάτων με τη Μέθοδο της Συνέλιξης

Παράδειγμα 6

Να υπολογιστεί η συνέλιξη μεταξύ των $x[n]=(0.9)^n u[n]$ και $h[n]=n\,u[n]$.

Απάντηση: Η συνέλιξη είναι:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\{(0.9)^k\,u[k]\}\,\{[n-k]\,u[n-k]\}$$

Επειδή $u[k]=0$ για $k<0$ και $u[n-k]=0$ για $k>n$, έχουμε :

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}[n-k](0.9)^k\;=n\sum_{k=0}^{n}(0.9)^k\;-\sum_{k=0}^{n}k(0.9)^k \text{ για } n\geq 0$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\frac{1-a^N}{1-a}$
$\sum_{n=0}^{N-1}n\,\alpha^n=\frac{(N-1)a^{N+1}-Na^N+a}{(1-a)^2}$

λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} y[n]=n\frac{1-(0.9)^{n+1}}{1-0.9}-\frac{n(0.9)^{n+2}-[n+1](0.9)^{n+1}+0.9}{[1-0.9]^2} \\ =10n\{1-(0.9)^{n+1}\}-100\{n(0.9)^{n+2}-[n+1](0.9)^{n+1}+0.9\}\; n\geq 0 \\ =\{10n-90+90(0.9)^n\}\,u[n] \end{aligned}$$

📖 Παράδειγμα 7

Να υπολογιστεί με χρήση Πίνακα Toeplitz η συνέλιξη μεταξύ των σημάτων $x[n] = \{\hat{1}, -2, 0, 3, -1\}$ και $h[n] = \{2, \hat{3}, 0, 1\}$.

Απάντηση: Το σήμα $x[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας στο διάστημα $[0, 4]$ με μήκος $L_x = 5$, ενώ το σήμα $h[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας στο διάστημα $[-1, 2]$ με μήκος $L_h = 4$. Επομένως, η συνέλιξη είναι πεπερασμένης διάρκειας στο χρονικό διάστημα $[0 + (-1), 4 + 2] = [-1, 6]$ και έχει μήκος ίσιο με $L_y = L_x + L_h - 1 = 5 + 4 - 1 = 8$ δείγματα.

Το διάνυσμα $\boldsymbol{x}$ έχει διαστάσεις $[L_x, 1] = [5, 1]$ και είναι: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Ο Πίνακας $\boldsymbol{H}$ έχει διαστάσεις $[L_y, L_x] = [8, 5]$ και είναι: $H = \begin{bmatrix} 2&0&0&0&0 \\ 3&2&0&0&0 \\ 0&3&2&0&0 \\ 1&0&3&2&0 \\ 0&1&0&3&2 \\ 0&0&1&0&3 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$

Υπολογίζουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{y}^T$:

$$\boldsymbol{y}^T = \boldsymbol{H}\, \boldsymbol{x}^T = \begin{bmatrix} 2&0&0&0&0 \\ 3&2&0&0&0 \\ 1&3&2&0&0 \\ 2&1&3&2&0 \\ 0&2&1&3&2 \\ 0&0&2&1&3 \\ 0&0&0&2&1 \\ 0&0&0&0&2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \\ 7 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως η συνέλιξη είναι:

$$y[n] = \{2, -\hat{1}, -6, 7, 5, -3, 3, -1\}$$