Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Λυμένα Παραδείγματα

Διδάσκων: Μ. Παρασκευάς

ΣΕΤ #1 – Μετατροπή Σήματος από Αναλογική σε Ψηφιακή Μορφή

- Δειγματοληψία
- Κβαντισμός

1. Δειγματοληψία

Παράδειγμα 1

Αν ο ρυθμός Nyquist για το σήμα $x(t)$ είναι Ω_s, ποιος είναι ο ρυθμός Nyquist για τα σήματα:

(α) $y(t) = dx(t)/dt$ (β) $y(t) = x(t)\cos(\Omega_0 t)$

(γ) $y(t) = x(t)\,x(t)$ (δ) $y(t) = x(t) * x(t)$

Απάντηση: (α) Από την ιδιότητα παραγώγισης του μετασχηματισμού Fourier (βλ. Πίνακα 4.1) γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$Y(\Omega) = j\Omega\, X(\Omega)$$

Επειδή από την παραπάνω σχέση δεν προκύπτει κάποια αλλαγή στο πεδίο της συχνότητας συμπεραίνουμε ότι ο ρυθμός Nyquist του σήματος $y(t)$ είναι ίδιος με του σήματος $x(t)$.

(β) Γνωρίζουμε πως όταν πολλαπλασιάζουμε ένα σήμα $x(t)$ με μία ημιτονοειδή συνάρτηση $\cos(\Omega_0 t)$, προκύπτει διαμόρφωση και το φάσμα του σήματος $x(t)$ μετατοπίζεται κατά $\pm\Omega_0$, καθώς ο μετασχηματισμός Fourier του $y(t)$ είναι:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2}[X(\Omega - \Omega_0) + X(\Omega + \Omega_0)]$$

Επομένως, ο ρυθμός Nyquist του σήματος $y(t)$ είναι $\Omega_s + 2\Omega_0$.

(γ) Από την ιδιότητα πολλαπλασιασμού στο χρόνο του μετασχηματισμού Fourier (βλ. Πίνακα 4.1) γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\,[X(\Omega) * X(\Omega)]$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι η συνέλιξη δύο συναρτήσεων που ορίζονται σε πεπερασμένα διαστήματα της ανεξάρτητης μεταβλητής (συχνότητα Ω, στην παρούσα περίπτωση) παράγει μια συνάρτηση η οποία ορίζεται σε διάστημα που είναι το άθροισμα των άκρων των διαστημάτων ορισμού των αρχικών συναρτήσεων. Εφόσον το σήμα $x(t)$ ορίζεται στο διάστημα $[-\Omega_s, \Omega_s]$, προκύπτει ότι σήμα $x(t)$ ορίζεται στο διάστημα $[-2\Omega_s, 2\Omega_s]$. Επομένως, ο ρυθμός Nyquist του σήματος $y(t)$ είναι τετραπλάσιος του σήματος $x(t)$.

(δ) Από την ιδιότητα συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier (βλ. Πίνακα 4.1) γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$Y(\Omega) = X(\Omega)X(\Omega)$$

Επομένως, ο ρυθμός Nyquist του σήματος $y(t)$ είναι διπλάσιος του σήματος $x(t)$.

📖 Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί ο ρυθμός Nyquist για τα παρακάτω σήματα:

(α) $x(t) = sinc^2(100\pi t)$ (β) $x(t) = sinc(100\pi t) * sinc(200\pi t)$

Απάντηση: Για να απαντήσουμε στα ερωτήματα πρέπει να υπολογίσουμε τη μέγιστη συχνότητα κάθε σήματος. Θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier και τις διαπιστώσεις:

$$rect\left(\frac{t}{T}\right) \overset{F}{\leftrightarrow} T\, sinc(fT) \qquad T\, sinc(tT) \overset{F}{\leftrightarrow} rect\left(\frac{f}{T}\right)$$

$$tri\left(\frac{t}{T}\right) \overset{F}{\leftrightarrow} T\, sinc^2(fT) \qquad T\, sinc^2(tT) \overset{F}{\leftrightarrow} tri\left(\frac{f}{T}\right)$$

(α) Ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t) = sinc^2(100\pi t)$ είναι:

$$sinc^2(100\pi t) \overset{F}{\leftrightarrow} tri\left(\frac{f}{100\pi}\right)$$

Επομένως, το φάσμα είναι τριγωνικό με εύρος $[-100\pi, 100\pi]$. Επειδή η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 100π προκύπτει ότι ο ρυθμός Nyquist είναι 200π.

(β) Ο μετασχηματισμός Fourier του $sinc(100\pi t) * sinc(200\pi t)$ είναι:

$$sinc(100\pi t) * sinc(200\pi t) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{100\pi} rect\left(\frac{f}{100\pi}\right) \frac{1}{200\pi} rect\left(\frac{f}{200\pi}\right)$$

Επομένως, το φάσμα είναι το γινόμενο δύο τετραγωνικών φασμάτων με εύρος $[-50\pi, 50\pi]$ το πρώτο και $[-100\pi, 100\pi]$ το δεύτερο. Άρα, το εύρος του φάσματος που προκύπτει είναι $[-50\pi, 50\pi]$, οπότε η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 50π και ο ρυθμός Nyquist είναι 100π.

📖 Παράδειγμα 3

Ένα αναλογικό σήμα δημιουργείται από τον συνδυασμό ημιτονικών σημάτων στις συχνότητες $f_1 = 15\ Hz, f_2 = 60\ Hz, f_3 = 220\ Hz$ και $f_4 = 310\ Hz$. Δειγματοληπτείται με συχνότητα 100 Hz.

(α) Ποιες είναι οι ψευδεπίγραφες συχνότητες (συχνότητες αναδίπλωσης - aliased frequencies);

(β) Το δειγματοληπτημένο σήμα περνάει από ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 35\ Hz$. Ποιες συχνότητες θα εμφανίζονται στο ανακατασκευασμένο σήμα;

Απάντηση: (α) Επειδή η συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 100\ Hz$ που χρησιμοποιήσαμε είναι μικρότερη από τη συχνότητα Nyquist $f_N = 2f_{max} = 2\ x\ 310\ Hz = 620\ Hz$, δηλαδή δεν ικανοποιείται το κριτήριο Nyquist, προκύπτει ότι θα εμφανιστεί το φαινόμενο της αναδίπλωσης. Για συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 100\ Hz$ το κριτήριο Nyquist ικανοποιείται μόνο για το ημιτονικό σήμα συχνότητας $f_1 = 15\ Hz$. Επομένως, μόνο γι' αυτή τη συχνότητα δεν θα εμφανιστεί το φαινόμενο της αναδίπλωσης, καθώς και για όσες άλλες τυχόν συχνότητες υπήρχαν στην περιοχή $[-f_s/2, f_s/2] = [-50Hz\ , 50\ Hz]$. Οι συχνότητες των υπόλοιπων ημιτονικών σημάτων δεν ικανοποιούν το κριτήριο Nyquist, άρα θα δημιουργήσουν ψευδεπίγραφες (αναδιπλωμένες, aliased) συχνότητες με βάση τη σχέση $f_i' = f_i - kf_s$, όπου k επιλέγεται ακέραιος που οδηγεί σε αποτέλεσμα εντός της περιοχής $[-f_s/2, f_s/2]$. Έτσι, είναι:

$$f_2' = f_2 - kf_s = 60 - k100 = 60 - 1x100 = -40Hz$$

$$f_3' = f_3 - kf_s = 220 - k100 = 220 - 2x100 = 20Hz$$

$$f_4' = f_4 - kf_s = 310 - k100 = 310 - 3x100 = 10Hz$$

Επομένως, οι συχνότητες $f_2 = 60\ Hz, f_3 = 140\ Hz$ και $f_4 = 310\ Hz$ θα παράξουν ψευδεπίγραφες συχνότητες εντός της περιοχής $[-50Hz\ , 50\ Hz]$ και συγκεκριμένα τις συχνότητες $f_2' = -40\ Hz, f_3' = 20\ Hz$ και $f_4{}' = 10\ Hz$ καθώς και τις κατοπτρικές τους. Άρα, στην περιοχή συχνοτήτων $[0Hz\ , 50\ Hz]$ θα υπάρχουν οι συχνότητες $f_4' = 10\ Hz, f_1 = 15Hz, f_3' = 20\ Hz$, και $f_2' = 40\ Hz$.

(β) Από το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 35\ Hz$ θα διέλθουν μόνο οι συχνότητες $f_4' = 10\ Hz, f_1 = 15Hz, f_3' = 20\ Hz$. Παρατηρούμε ότι μόνο η συχνότητα $f_1 = 15Hz$ υπήρχε στο αρχικό σήμα, ενώ οι συχνότητες $f_4' = 10\ Hz$ και $f_3' = 20\ Hz$ είναι ψευδεπίγραφες λόγω χαμηλής συχνότητας δειγματοληψίας.

📖 Παράδειγμα 4

Δίνεται το αναλογικό σήμα $x_a(t) = 2cos(200\pi t)$.

(α) Να καθοριστεί η συχνότητα Nyquist και η ελάχιστη τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας.

(β) Να γραφεί το σήμα διακριτού χρόνου, αν το αναλογικό σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα δειγματοληψίας 400 Hz. Να υπολογιστεί η συχνότητα του σήματος διακριτού χρόνου.

(γ) Ομοίως με το (β) αλλά για συχνότητα δειγματοληψίας 150 Hz.

Απάντηση: (α) Η συχνότητα του αναλογικού σήματος είναι $2\pi f = 200\pi \Rightarrow f = 100\ Hz$. Επομένως, η συχνότητα Nyquist είναι $f_N = 2f = 200\ Hz$ και αυτή είναι η ελάχιστη αποδεκτή τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας, για την οποία δεν θα εμφανίζεται το φαινόμενο της αναδίπλωσης συχνοτήτων.

(β) Για συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 400\ Hz$ (δηλ. περίοδος δειγματοληψίας $T_s = 1/400\ sec$), το σήμα διακριτού χρόνου είναι:

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nTs} = 2cos\frac{200\pi}{400}n = 2\cos\frac{\pi}{2}n$$

Η συχνότητα του σήματος αυτού μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Omega T_s = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi f \frac{1}{f_s} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f = \frac{f_s}{4} \Rightarrow f = \frac{400}{4} = 100\ Hz$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα διακριτού χρόνου έχει την ίδια συχνότητα με το σήμα συνεχούς χρόνου, γεγονός που οφείλεται στην επιλογή συχνότητας δειγματοληψίας που ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist.

(γ) Για συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 150\ Hz$ (δηλ. περίοδος δειγματοληψίας $T_s = 1/150\ sec$), το σήμα διακριτού χρόνου είναι:

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nTs} = 2cos\frac{200\pi}{150}n = 2\cos\frac{4\pi}{3}n$$
$$= 2\cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)n = 2\cos\frac{2\pi}{3}n$$

Η συχνότητα του σήματος είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \Omega T_s = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2\pi f \frac{1}{f_s} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow f = \frac{f_s}{3} \Rightarrow f = \frac{150}{3} = 50\ Hz$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα διακριτού χρόνου έχει διαφορετική συχνότητα (ψευδές αντίγραφο) από το σήμα συνεχούς χρόνου, γεγονός που οφείλεται στην ακατάλληλη συχνότητα δειγματοληψίας.

Παράδειγμα 5

(α) Το αναλογικό σήμα $x_a(t) = 2cos(20\pi t)\cos(30\pi t) + \sin(40\pi t)$ δειγματοληπτείται με συχνότητα 20 δειγμάτων ανά δευτερόλεπτο. Να καθοριστεί το σήμα διακριτού χρόνου που θα προκύψει.

(β) Να επαναληφθεί το ερώτημα (α) για συχνότητα δειγματοληψίας 50 δειγμάτων ανά δευτερόλεπτο.

Απάντηση: (α) Θα εκφράσουμε το δοθέν σήμα σε άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων. Το γινόμενο $cos(20\pi t)\cos(30\pi t)$ γράφεται[1]:

$$2cos(20\pi t)\cos(30\pi t) = \cos(50\pi t) + \cos(10\pi t)$$

Οπότε το αναλογικό σήμα είναι $x_a(t) = \cos(50\pi t) + \cos(10\pi t) + \sin(40\pi t)$ και περιέχει τις συχνότητες $f_1 = 25\ Hz, f_2 = 5\ Hz$ και $f_3 = 20\ Hz$. Η συχνότητα Nyquist είναι $f_N = 2x25\ Hz = 50\ Hz$. Το σήμα διακριτού χρόνου που προκύπτει από δειγματοληψία με συχνότητα $f_s = 20\ Hz$ ($T_s = 1/20\ sec$), είναι:

$$\begin{aligned} x(n) = x_a(t)|_{t=nTs} & \\ &= \cos\left(\frac{50\pi}{20}n\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{20}n\right) + \sin\left(\frac{40\pi}{20}n\right) \\ &= \cos\left(\frac{5\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \sin(2\pi n) = \cdots \\ &= 0 \end{aligned}$$

Η συχνότητα δειγματοληψίας που επιλέχθηκε δεν ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist και οι συχνότητες που παρήχθησαν οδήγησαν σε μηδενική τιμή σήματος.

(β) Το σήμα διακριτού χρόνου που προκύπτει από δειγματοληψία με συχνότητα $f_s =$

[1] Χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή σχέση: $cosA\ cosB = (1/2)[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

50 Hz ($T_s = 1/50\ sec$), είναι:

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nTs} = \cos\left(\frac{50\pi}{50}n\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{50}n\right) + \sin\left(\frac{40\pi}{50}n\right)$$
$$= \cos(\pi n) + \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$$

Η συχνότητα της συνιστώσας $\cos(\pi n)$ είναι:

$$\omega_1 = \pi \Rightarrow \Omega_1 T_s = \pi \Rightarrow 2\pi f_1 \frac{1}{f_s} = \pi \Rightarrow f_1 = \frac{f_s}{2} \Rightarrow f_1 = \frac{50}{2} = 25\ Hz$$

Η συχνότητα της συνιστώσας $\cos(\pi n/5)$ είναι:

$$\omega_2 = \frac{\pi}{5} \Rightarrow \Omega_2 T_s = \frac{\pi}{5} \Rightarrow 2\pi f_2 \frac{1}{f_s} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow f_2 = \frac{f_s}{10} \Rightarrow f_2 = \frac{50}{10} = 5\ Hz$$

Η συχνότητα της συνιστώσας $\cos(4\pi n/5)$ είναι:

$$\omega_3 = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow \Omega_3 T_s = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow 2\pi f_3 \frac{1}{f_s} = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow f_3 = \frac{2f_s}{5} \Rightarrow f_3 = \frac{100}{5} = 20\ Hz$$

Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες του σήματος διακριτού χρόνου είναι ίδιες με τις συχνότητες του αναλογικού σήματος, γεγονός που οφείλεται στο ότι η συχνότητα δειγματοληψίας που επιλέχθηκε ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist.

2. Κβαντισμός

Παράδειγμα 6

Δίνεται το αναλογικό σήμα:

$$x_a(t) = -\frac{3}{2} + cos(100\pi t)\cos(200\pi t) + \frac{1}{2}\sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(300\pi t)$$

(α) Να καθοριστεί η συχνότητα Nyquist και η ελάχιστη αποδεκτή τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας.

(β) Ποιες συχνότητες θα προκύψουν αν το αναλογικό σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα δειγματοληψίας 150 Hz.

(γ) Ποιο είναι το σήμα διακριτού χρόνου που θα προκύψει από το ερώτημα (β);

(δ) Αν το πλάτος του σήματος εκφράζεται σε Volts και κάθε δείγμα του διακριτού σήματος κβαντίζεται στα 8 bits, σε πόσα Volts αντιστοιχεί το βήμα κβαντισμού;

Απάντηση: (α) Για να καθοριστεί η συχνότητα Nyquist πρέπει να βρεθεί η μέγιστη συχνότητα του σήματος. Για το λόγο αυτό θα εκφράσουμε το δοθέν σήμα σε άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων. Το γινόμενο $cos(100\pi t)\cos(200\pi t)$ γράφεται[2]:

$$cos(100\pi t)\cos(200\pi t) = \frac{1}{2}[\cos(300\pi t) + \cos(100\pi t)]$$

Άρα το αναλογικό σήμα γράφεται:

$$x_a(t) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(300\pi t) + \frac{1}{2}\cos(100\pi t) + \frac{1}{2}\sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(300\pi t)$$
$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(100\pi t) + \frac{1}{2}\sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2}\cos(300\pi t) \quad (1)$$

[2] Χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή σχέση: $cosA\cos B = (1/2)[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

Επομένως οι συχνότητες του σήματος είναι: $f_1 = 0\ Hz, f_2 = 50\ Hz, f_3 = 100\ Hz$ και $f_4 = 150\ Hz$. Άρα η συχνότητα Nyquist και ελάχιστη αποδεκτή τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας είναι:

$$f_{s(min)} = f_N = 2f_4 = 300\ Hz.$$

(β) Για συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 150\ Hz$, θα αναπαρασταθούν σωστά μόνο οι συχνότητες $f_1 = 0\ Hz$ και $f_2 = 50\ Hz$, που βρίσκονται μέσα στην περιοχή $[-f_s/2, f_s/2] = [-75Hz\ , 75\ Hz]$. Οι συχνότητες $f_3 = 100\ Hz$ και $f_4 = 150\ Hz$ θα υποστούν αναδίπλωση και θα φαίνεται ότι αντιστοιχούν στις ψευδεπίγραφες συχνότητες:

$$f_3' = f_3 - kf_s = 100 - 150 = -50Hz$$

$$f_4' = f_4 - kf_s = 150 - 150 = 0Hz$$

Με βάση τα παραπάνω, προκύπτει ότι το δειγματοληπτημένο σήμα θα περιέχει μία συνιστώσα συνεχούς ($0\ Hz$) και μία ημιτονοειδή συνιστώσα συχνότητας $50\ Hz$, δηλαδή οι συχνότητες $100\ Hz$ και $150\ Hz$ δεν θα εμφανίζονται πλέον στο δειγματοληπτημένο σήμα.

(γ) Για συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 150\ Hz$ (δηλ. περίοδος δειγματοληψίας $T_s = 1/150\ sec$), το σήμα διακριτού χρόνου είναι:

$$\begin{aligned}
x(n) = x_a(t)|_{t=nTs} \\
&= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{100\pi}{150}n\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{200\pi}{150}n - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2}\cos\left(\frac{300\pi}{150}n\right) \\
&= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{3}n\right) + \frac{3}{2}\cos(2\pi n) \\
&= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}n\right) + \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)
\end{aligned}$$

Η συχνότητα του σήματος αυτού μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \Omega T_s = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2\pi f\frac{1}{f_s} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow f = \frac{f_s}{3} \Rightarrow f = \frac{150}{3} = 50\ Hz$$

(δ) Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι το αναλογικό σήμα λαμβάνει μέγιστη τιμή $+1$ Volt (όταν κάθε τριγωνομετρικός όρος λάβει τιμή $+1$) και ελάχιστη τιμή -4 Volts (όταν κάθε τριγωνομετρικός όρος λάβει τιμή -1). Επομένως, η δυναμική περιοχή του αναλογικού σήματος είναι 5 Volts και το βήμα κβαντισμού Δ υπολογίζεται σε:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{2^L - 1} = \frac{1 - (-4)}{2^8 - 1} = \frac{5}{255} = 19{,}61\ mV$$

Συνήθως οι κβαντιστές λειτουργούν θεωρώντας ότι οι τιμές πλάτους του σήματος είναι συμμετρικές, δηλαδή $\pm 5\ V, \pm 10V$, κλπ. Στην περίπτωση του παραπάνω σήματος που το πλάτος του σήματος κυμαίνεται από $+1$ Volt έως -4 Volts πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κβαντιστή $\pm 5\ V$. Άρα το βήμα κβαντισμού για μετατροπέα 8 bits είναι:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{2^L - 1} = \frac{10}{2^8 - 1} = \frac{10}{255} = 39{,}22\ mV$$

Παράδειγμα 7

(α) Από ένα αναλογικό σήμα λαμβάνονται δείγματα με ρυθμό Nyquist f_s και κβαντίζονται σε L στάθμες. Να υπολογιστεί η χρονική διάρκεια (τ) του 1 bit του σήματος που είναι κωδικοποιημένο σε δυαδικό.

(β) Αν κάθε δείγμα ενός κβαντισμένου αναλογικού σήματος πρέπει να είναι γνωστό με ακρίβεια $\pm 0.5\%$ της τιμής κορυφής προς κορυφή με πόσα δυαδικά ψηφία (bits) πρέπει να παρίσταται κάθε δείγμα;

Απάντηση: (α) Έστω ότι B είναι ο αριθμός των bit ανά δείγμα. Τότε, ισχύει:

$$B = [log_2 L]$$

Όπου $[log_2 L]$ δείχνει τον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο που θα ληφθεί αν το $log_2 L$ δεν έχει ακέραια τιμή.

Πρέπει να μεταδίδονται nf_s δυαδικοί παλμοί ανά sec. Έτσι θα έχουμε:

$$\tau = \frac{1}{nf_s} = \frac{T_s}{n} = \frac{T_s}{[log_2 L]}$$

όπου T_s είναι η περίοδος δειγματοληψίας.

(β) Έστω ότι η τιμή κορυφής προς κορυφή (peak-to-peak) του σήματος είναι $2m_p$. Τότε το μέγιστο σφάλμα είναι $0{,}005\ (2m_p) = 0{,}01\ m_p$, και το σφάλμα κορυφής είναι $2(0{,}01 m_p) = 0{,}02\ m_p$ και αντιστοιχεί στο μέγιστο μέγεθος βήματος κβαντισμού Δ. Το απαιτούμενο πλήθος σταθμών κβαντισμού είναι:

$$L = \frac{2m_p}{\Delta} = \frac{2\ m_p}{0{,}02\ m_p} = 100 \leq 2^n$$

Κατά συνέπεια, το πλήθος των δυαδικών ψηφίων που χρειάζονται για κάθε δείγμα είναι $n = 7$.

Παράδειγμα 8

Δίνεται το αναλογικό σήμα:

$$x(t) = \delta(t) - \frac{10}{2\pi} sinc^2\left(\frac{10}{2\pi}\right)$$

(α) Να υπολογιστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για το σήμα $x(t)$.

Το σήμα $x(t)$ διέρχεται από ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με απόκριση συχνότητας $H_{LPF}(\Omega)$ και στην έξοδο του φίλτρου προκύπτει το σήμα $y(t)$.

$$H_{LPF}(\Omega) = rect\left(\frac{\Omega}{20}\right)$$

(β1) Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση $h_{LPF}(t)$ του φίλτρου.

(β2) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους $Y(\Omega)$.

(β3) Να υπολογιστεί το σήμα $y(t)$, χωρίς τη χρήση συνέλιξης.

Ακολουθεί η μετατροπή του αναλογικού σήματος $y(t)$ σε ψηφιακό μέσω ενός A/D μετατροπέα.

(γ1) Να υπολογιστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για το σήμα $y(t)$.

(γ2) Το σήμα $y(t)$ δειγματοληπτείται με συχνότητα δειγματοληψίας που είναι πολλαπλάσια επί 3π της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας και κατόπιν κβαντίζεται σε 256 στάθμες. Να υπολογιστεί ο ρυθμός πληροφορίας στην έξοδο του A/D μετατροπέα και να βρεθεί το ελάχιστο εύρος ζώνης του σήματος εξόδου προκειμένου να μεταδοθεί το σήμα με διαμόρφωση PCM.

(γ3) Να υπολογιστεί η αναλυτική σχέση στο πεδίο συχνότητας $Y_s(\Omega)$ και στο πεδίο διακριτού χρόνου του δειγματοληπτημένου σήματος $y_s(n)$ για συχνότητα δειγματοληψίας ίδια με του ερωτήματος γ2.

(γ4) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα $Y_s(\Omega)$ για $k = -1{,}0{,}1$ για συχνότητα δειγματοληψίας ίδια με του ερωτήματος γ2.

(γ5) Να επαναληφθεί το ερώτημα γ4 για συχνότητα δειγματοληψίας $\Omega_s = 4\pi$.

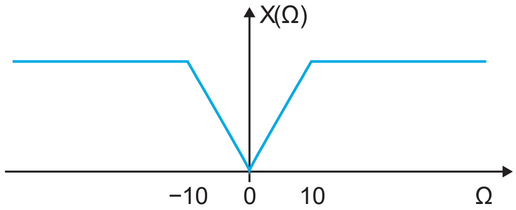
Απάντηση: (α) Επειδή ισχύουν οι ακόλουθοι μετασχηματισμοί Fourier (βλ. Πίνακα 4.2):

$$\delta(t) \overset{F}{\leftrightarrow} 1 \qquad \text{και} \qquad \frac{B}{2\pi} sinc^2\left(\frac{Bt}{2\pi}\right) \overset{F}{\leftrightarrow} tri\left(\frac{\Omega}{B}\right)$$

προκύπτει ότι το φάσμα πλάτους $X(\Omega)$ του σήματος είναι:

$$X(\Omega) = 1 - tri\left(\frac{\Omega}{10}\right)$$

Το φάσμα $X(\Omega)$ δείχνεται στο επόμενο σχήμα:



Παρατηρούμε ότι το φάσμα εκτείνεται προς το άπειρο, άρα το εύρος ζώνης του σήματος είναι άπειρο, οπότε δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί κάποια ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας σύμφωνα με το κριτήριο Nyquist. Άρα το συγκεκριμένο σήμα δεν είναι εφικτό να δειγματοληπτηθεί.

(β1) Από τον Πίνακα 4.2 γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\frac{B}{2\pi} sinc\left(\frac{Bt}{2\pi}\right) \overset{F}{\leftrightarrow} rect\left(\frac{\Omega}{B}\right)$$

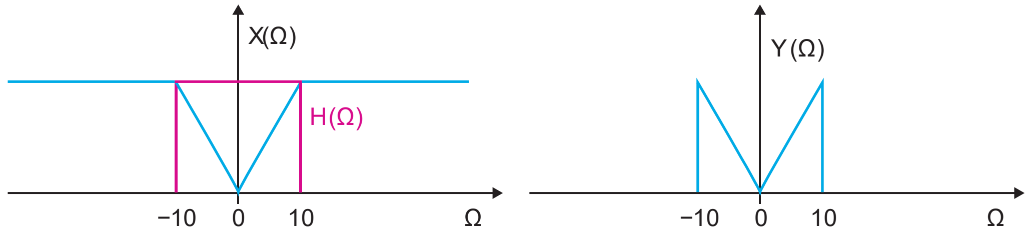
Επομένως, η κρουστική απόκριση $h_{LPF}(t)$ του φίλτρου μπορεί να υπολογιστεί με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην απόκριση συχνότητας και είναι:

$$h_{LPF}(t) = \frac{20}{2\pi} sinc\left(\frac{20t}{2\pi}\right) = \frac{10}{\pi} sinc\left(\frac{10t}{\pi}\right)$$

(β2) Το φάσμα πλάτους $Y(\Omega)$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \left[1 - tri\left(\frac{\Omega}{10}\right)\right] rect\left(\frac{\Omega}{20}\right) = rect\left(\frac{\Omega}{20}\right) - tri\left(\frac{\Omega}{10}\right)$$

Η γραφική παράσταση του φάσματος $Y(\Omega)$ προκύπτει από το γινόμενο των φασμάτων $X(\Omega)$ και $H(\Omega)$ σύμφωνα με το σχήμα:



(β3) Το φάσμα $Y(\Omega)$ δίνεται από τη σχέση:

$$Y(\Omega) = rect\left(\frac{\Omega}{20}\right) - tri\left(\frac{\Omega}{10}\right)$$

Με χρήση του Πίνακα 4.2, προκύπτει ότι το σήμα $y(t)$ είναι:

$$y(t) = \frac{20}{2\pi} sinc\left(\frac{20t}{2\pi}\right) - \frac{10}{2\pi} sinc^2\left(\frac{10t}{2\pi}\right) = \frac{10}{\pi} sinc\left(\frac{10t}{\pi}\right) - \frac{5}{\pi} sinc^2\left(\frac{5t}{\pi}\right)$$

(γ1) Το σήμα $y(t)$ έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης συχνοτήτων και η μέγιστη συχνότητα είναι $\Omega_{max} = 10\ rad/sec$ ή $f_{max} = 5/\pi\ (Hz)$ Επομένως, το σήμα είναι εφικτό να δειγματοληπτηθεί. Η συχνότητα Nyquist (ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας) είναι:

$$f_{s(min)} = f_N = 2f_{max} = 10/\pi\ (Hz)$$

και σε κυκλική συχνότητα είναι:

$$\Omega_N = 2\pi f_N = 20\ (rad/sec)$$

(γ2) Η επιλεγμένη συχνότητα δειγματοληψίας είναι:

$$f_s = 3\pi f_{s(min)} = 3\pi(10/\pi) = 30\ (Hz)$$

Η κυκλική συχνότητα δειγματοληψίας είναι:

$$\Omega_s = 2\pi f_s = 60\pi\ (Hz)$$

και η περίοδος δειγματοληψίας είναι:

$$T_s = \frac{1}{30}\ sec$$

Επειδή ο κβαντισμός γίνεται σε 256 στάθμες, το μήκος λέξης είναι:

$$B = [log_2 L] = [log_2 256] = 8\ bits$$

Επομένως, ο ζητούμενος ρυθμός πληροφορίας στην έξοδο του A/D μετατροπέα είναι:

$$R = f_s B = 30\ samples/sec\ x\ 8\ bits/sample = 240\ bits/sec = 240\ bps$$

Το ελάχιστο εύρος ζώνης του σήματος εξόδου προκειμένου να μεταδοθεί το σήμα με διαμόρφωση PCM δίνεται από τη σχέση:

$$W_{PCM} = \frac{1}{2} f_s B = 120\ Hz$$

(γ3) Το δειγματοληπτημένο σήμα στο πεδίο της συχνότητας δίνεται από τη σχέση (6.6) και είναι:

$$Y_s(\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(\Omega - k\Omega_s) = 30\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[rect\left(\frac{\Omega - k\Omega_s}{20}\right) - tri\left(\frac{\Omega - k\Omega_s}{10}\right)\right]$$

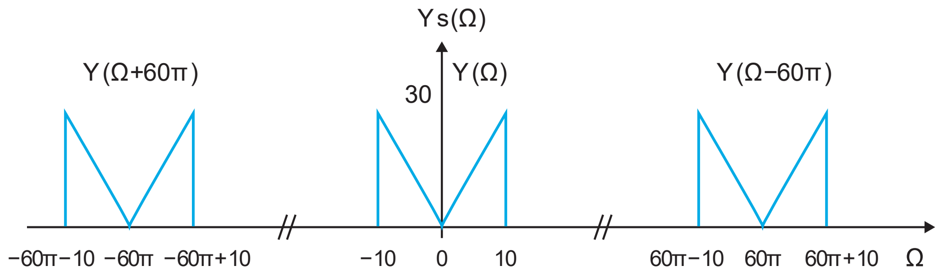
και στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$y_s(n) = y(t)|_{t=nT_s} = \frac{10}{\pi}sinc\left(\frac{10n}{30\pi}\right) - \frac{5}{\pi}sinc^2\left(\frac{5n}{30\pi}\right) = \frac{10}{\pi}sinc\left(\frac{n}{3\pi}\right) - \frac{5}{\pi}sinc^2\left(\frac{n}{6\pi}\right)$$

(γ4) Για $k = -1,0,1$ η αναλυτική σχέση του φάσματος είναι:

$$\begin{aligned}Y_s(\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-1}^{1} Y(\Omega - k\Omega_s) &= 30[Y(\Omega + 60\pi) + Y(\Omega) + Y(\Omega - 60\pi)] = \\ &= 30\left[\left[rect\left(\frac{\Omega + 60\pi}{20}\right) - tri\left(\frac{\Omega + 60\pi}{10}\right)\right]\right. \\ &\left.+\left[\left[rect\left(\frac{\Omega}{20}\right) - tri\left(\frac{\Omega}{10}\right)\right] + \left[rect\left(\frac{\Omega - 60\pi}{20}\right) - tri\left(\frac{\Omega - 60\pi}{10}\right)\right]\right]\right]\end{aligned}$$

Η γραφική αναπαράσταση του φάσματος του δειγματοληπτημένου σήματος είναι:



Παρατηρούμε ότι μεταξύ των επαναλήψεων του φάσματος (λόγω δειγματοληψίας) μεσολαβεί επαρκής κενός φασματικός χώρος ώστε να μην επικαλύπτονται τα φάσματα. Μπορούμε εύκολα να ανακτήσουμε το αρχικό σήμα φιλτράροντας το παραπάνω φάσμα με ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής που ικανοποιεί τη σχέση: $10 < \Omega_c < 60\pi - 10$.

(γ5) Η δοθείσα συχνότητα δειγματοληψίας $\Omega_s = 4\pi$ rad/sec είναι μικρότερη της κυκλικής συχνότητας Nyquist $\Omega_N = 2\pi f_N = 20\,rad/sec$, επομένως αναμένουμε αναδίπλωση συχνοτήτων. Η περίοδος δειγματοληψίας είναι $T_s = 1/2\,sec$ και το ζητούμενο φάσμα είναι:

$$Y_s(\Omega) = 2\sum_{k=-1}^{1} Y(\Omega - k4\pi) = 2[Y(\Omega + 4\pi) + Y(\Omega) + Y(\Omega - 4\pi)]$$