Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 11: Δομές Υλοποίησης Συστημάτων ΔΧ

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

- **Φίλτρα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR)**
  - Ευθεία Μορφή I
  - Ευθεία Μορφή II
  - Μορφή Καταρράκτη
  - Παράλληλη Μορφή
- **Φίλτρα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR)**
  - Ευθεία Μορφή
  - Μορφή Καταρράκτη
  - Μορφή Γραμμικής Φάσης
  - Μορφή Δειγματοληψίας Συχνότητας
- **Φίλτρα Πλέγματος**
  - Φίλτρο πλέγματος τύπου FIR (Lattice FIR)
  - Φίλτρο πλέγματος μόνο πόλων (Lattice All Pole)

Φίλτρα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR)

- Ευθεία Μορφή Ι
- Ευθεία Μορφή ΙΙ
- Μορφή Καταρράκτη
- Παράλληλη Μορφή

Περιγραφή Συστήματος IIR

<u>Πεδίο Χρόνου</u>:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \qquad (1)$$

<u>Πεδίο Συχνότητας</u>:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m\, z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k\, z^{-k}}$$

$$= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} \qquad (2)$$

Η **τάξη** του συστήματος είναι N αν $\alpha_{\mathrm{N}} \neq 0$ και είναι αυτή που προσδιορίζει το πλήθος των μονάδων καθυστέρησης για την υλοποίηση του συστήματος. Το πλήθος αυτό είναι σημαντικό επειδή κοστίζει σε θέσεις μνήμης.

Ευθεία Μορφή I

- Η ΓΕΔΣΣ της σχέσης (1) μπορεί να διασπαστεί σε δύο σχέσεις ως εξής:

$$v[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

$$y[n] = v[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

- Η πρώτη σχέση περιγράφει ένα υποσύστημα με είσοδο το σήμα $x[n]$ και έξοδο το $v[n]$. Από τη μορφή της σχέσης προκύπτει ότι το υποσύστημα αυτό είναι **μόνο πόλων** (all-pole).

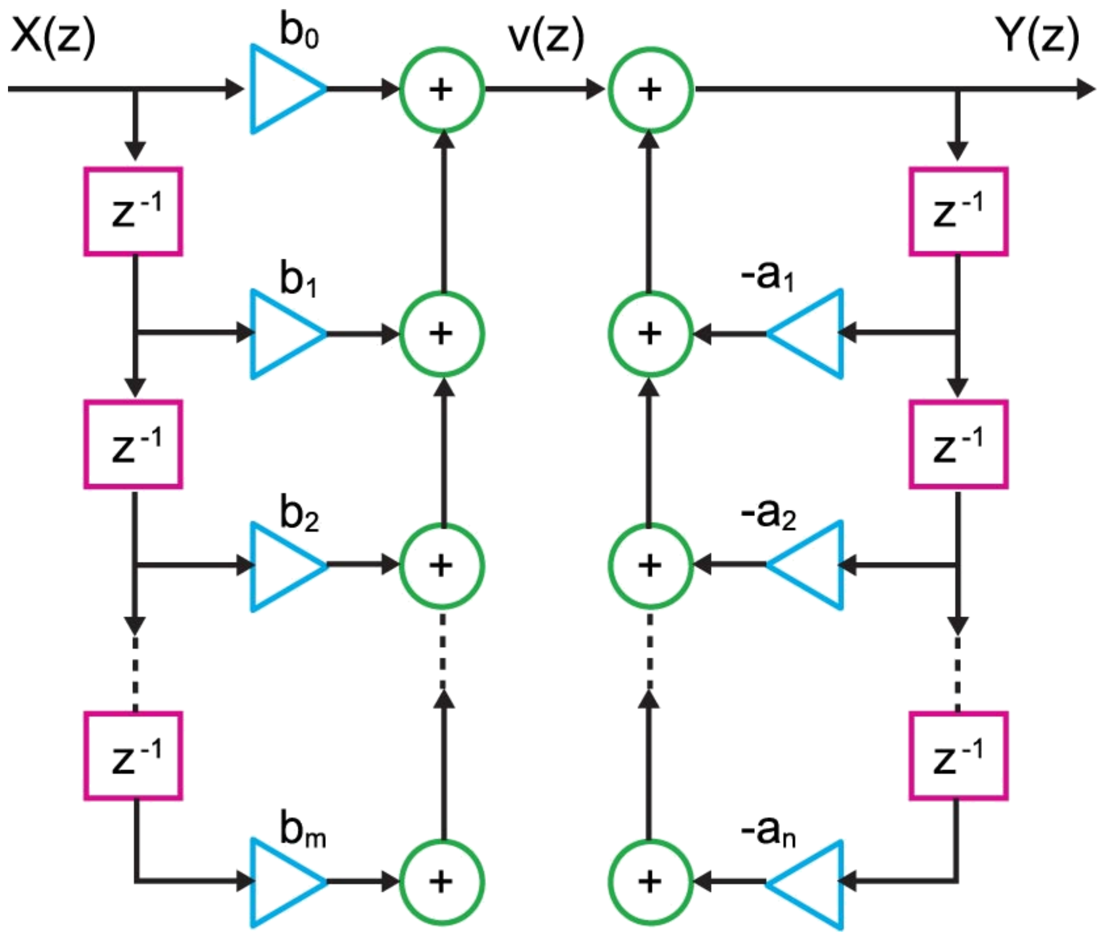
- Η δεύτερη σχέση περιγράφει ένα FIR υποσύστημα που δέχεται ως είσοδο το σήμα $v[n]$ και παράγει την έξοδο $y[n]$ του συνολικού συστήματος. Το υποσύστημα αυτό υλοποιεί τα **μηδενικά** του συστήματος.

- Τα δύο υποσυστήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά και στο πεδίο της συχνότητας περιγράφονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$V(z) = \left[b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}\right] X(z)$$

$$Y(z) = V(z) - \left[a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}\right] Y(z)$$

Ευθεία Μορφή I



Δομή IIR συστήματος σε ευθεία μορφή I

Ευθεία Μορφή Ι

- Κάθε υποσύστημα έχει υλοποιηθεί ως μία **διακλαδιζόμενη γραμμή καθυστέρησης** (tapped delay line)
- Για ένα IIR σύστημα τάξης N, το συνολικό πλήθος των μονάδων καθυστέρησης είναι $M + N$ (όταν $M \leq N$) ή $2N$ (όταν $M = N$).
- Από το σχήμα προκύπτει ότι το πλήθος υπολογισμών στην ευθεία μορφή Ι είναι:
    - Πολλαπλασιασμοί: $M + N + 1$ για κάθε δείγμα εξόδου
    - Προσθέσεις: $M + N$ για κάθε δείγμα εξόδου
    - Καθυστερήσεις: $M + N$

Ευθεία Μορφή ΙΙ

- Με βάση την αντιμεταθετική ιδιότητα εναλλάσσουμε αμοιβαία τη σειρά των υποσυστημάτων της ευθείας μορφής Ι, οπότε η ΓΕΔΣΣ γράφεται:

$$w[n] = x[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k w[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m w[n-m]$$

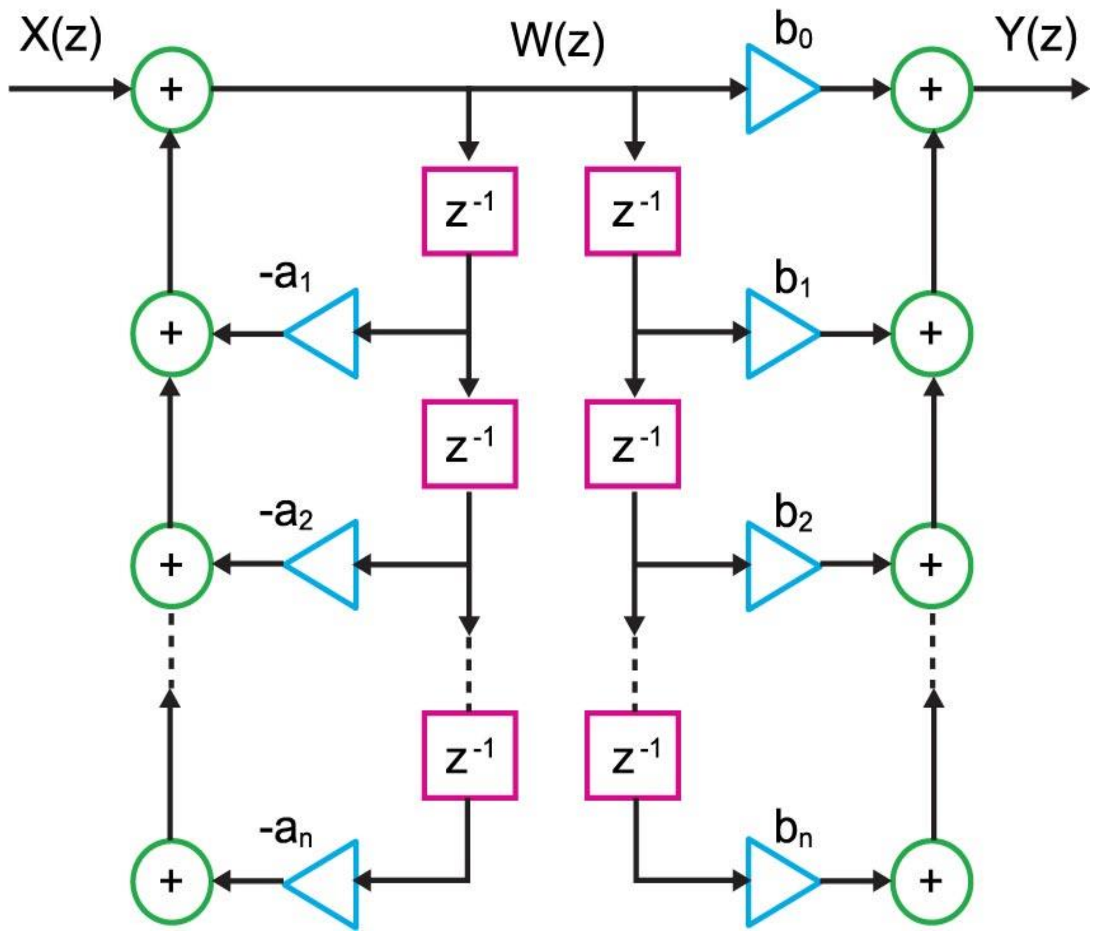
- Οι παραπάνω σχέσεις στο πεδίο της συχνότητας γράφονται:

$$W(z) = X(z) - \left[a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}\right] W(z)$$

$$Y(z) = \left[b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}\right] W(z)$$

- Με τη διαδικασία αυτή υλοποιούνται πρώτα τα μηδενικά και κατόπιν οι πόλοι του συστήματος.

Ευθεία Μορφή II

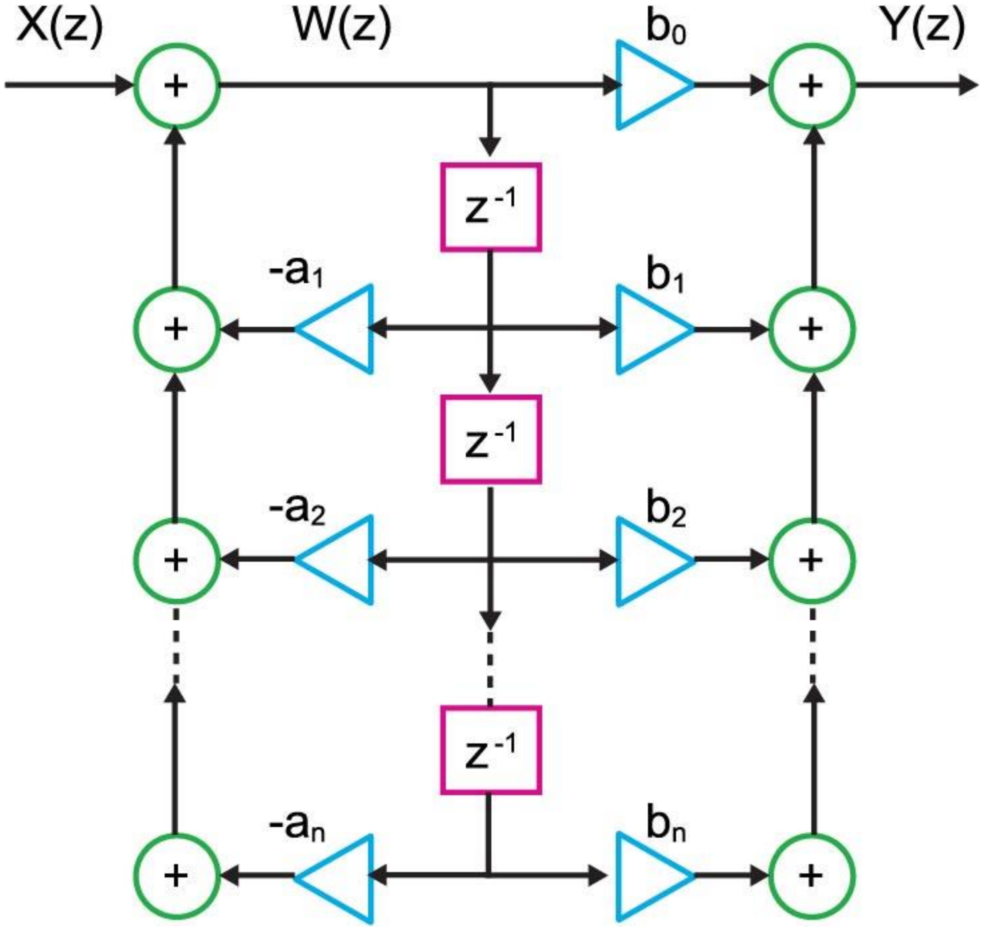


Ενδιάμεση περιγραφή δομή IIR συστήματος, θεωρώντας ότι $M = N$

Ευθεία Μορφή ΙΙ

- Επειδή οι μονάδες καθυστέρησης έχουν την ίδια είσοδο $W(z)$ μπορούμε να απαλείψουμε τη μία γραμμή καθυστέρησης, οπότε το πλήθος των μονάδων καθυστέρησης από $2N$, θα μειωθεί σε N.
- Το διάγραμμα βαθμίδων που θα προκύψει ονομάζεται **ευθεία μορφή ΙΙ** (Direct Form II) ή **κανονική** επειδή χρησιμοποιηθεί το ελάχιστο πλήθος μονάδων καθυστέρησης και εμφανίζεται στο επόμενο σχήμα.
- Από το σχήμα προκύπτει ότι το πλήθος υπολογισμών στην ευθεία μορφή ΙΙ είναι:
    - Πολλαπλασιασμοί: $M + N + 1$ για κάθε δείγμα εξόδου
    - Προσθέσεις: $M + N$ για κάθε δείγμα εξόδου
    - Καθυστερήσεις: $\max(M, N)$
- Οι ευθείες μορφές Ι και ΙΙ είναι ισοδύναμες σε ότι αφορά την είσοδο και την έξοδο και διαφοροποιούνται μόνο ως προς την εσωτερική δομή τους.
- Οι μορφές αυτές στο Matlab υλοποιούνται με τη συνάρτηση **filter()**

Ευθεία Μορφή ΙΙ



Δομή IIR συστήματος σε ευθεία μορφή ΙΙ

Άσκηση 1

Ένα ΓΑΚΜ σύστημα περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{1 + 0.9z^{-1}}{(1 + 0.1z^{-1} + 0.5z^{-2})(1 - 0.6z^{-1})}$$

(α) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα βαθμίδων ευθείας μορφής Ι και ΙΙ.

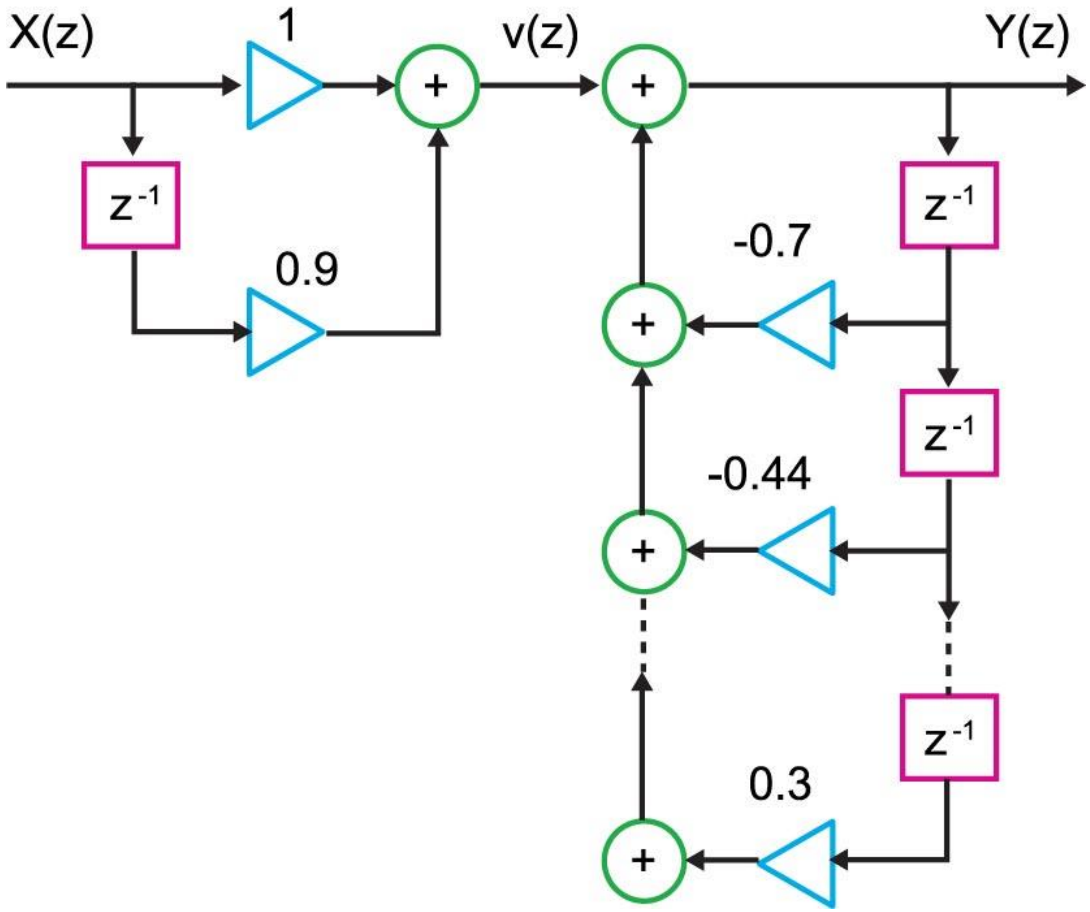
(β) Για κάθε μία μορφή να υπολογιστεί το πλήθος των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό κάθε δείγματος εξόδου, καθώς και το πλήθος των καταχωρητών καθυστέρησης.

Απάντηση: (α) Κάνουμε τις πράξεις στον παρονομαστή, οπότε η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται:

$$H(z) = \frac{1 + 0.9z^{-1}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.44z^{-2} - 0.3z^{-3}}$$

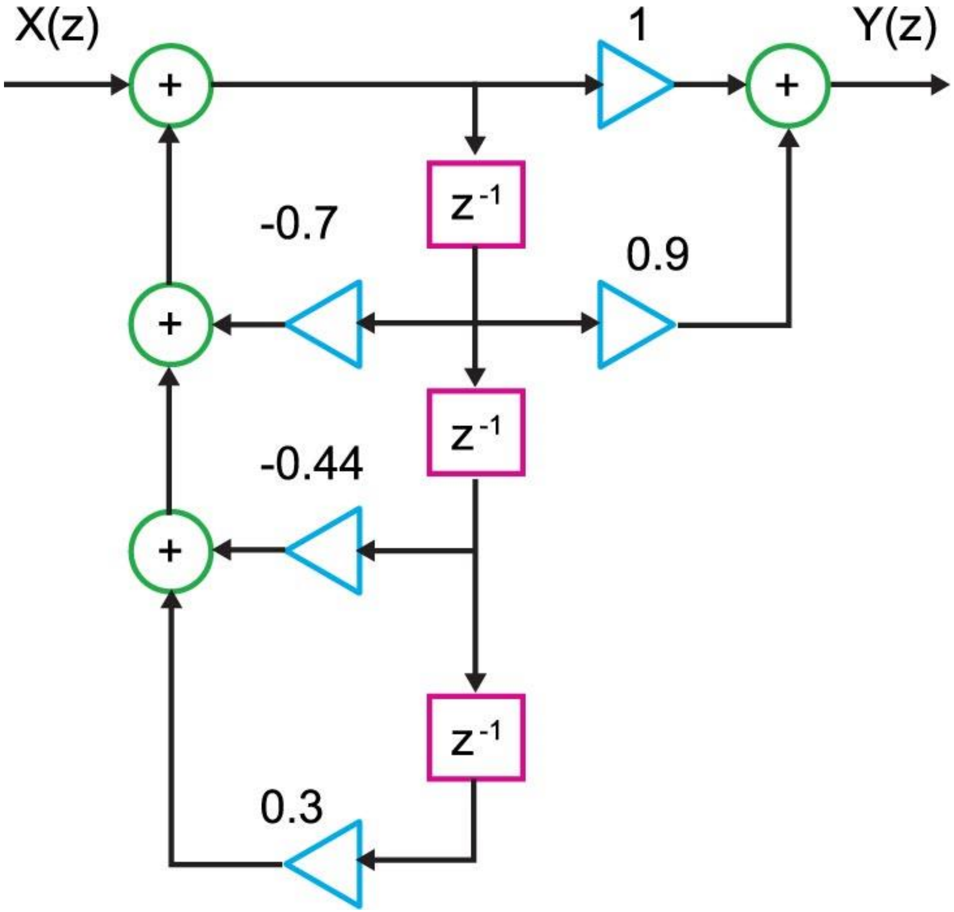
Τα διαγράμματα βαθμίδων ευθείας μορφής Ι και ΙΙ δείχνονται στο επόμενο σχήμα.

Άσκηση 1 (συνέχεια)



(α) Διάγραμμα βαθμίδων ευθείας μορφής I

Άσκηση 1 (συνέχεια)



(β) Διάγραμμα βαθμίδων ευθείας μορφής ΙΙ

Άσκηση 1 (συνέχεια)

(β) Σύμφωνα με τα διαγράμματα βαθμίδων (α) και (β), το πλήθος υπολογισμών στην ευθεία μορφή Ι είναι:

- Πολλαπλασιασμοί: 5 για κάθε δείγμα εξόδου
- Προσθέσεις: 4 για κάθε δείγμα εξόδου
- Καθυστερήσεις: 4

και στην ευθεία μορφή ΙΙ είναι:

- Πολλαπλασιασμοί: 5 για κάθε δείγμα εξόδου
- Προσθέσεις: 4 για κάθε δείγμα εξόδου
- Καθυστερήσεις: 3

Μορφή Καταρράκτη

Αν η $h[n]$ είναι πραγματική ακολουθία, τότε η $H(z)$ αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων δεύτερης τάξης με πραγματικούς συντελεστές. Συγκεκριμένα και για $M = N$ (N άρτιο), έχουμε:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = b_0 \prod_{k=1}^{N/2} \frac{1 + B[k,1]z^{-1} + B[k,2]z^{-2}}{1 + A[k,1]z^{-1} + A[k,2]z^{-2}}$$

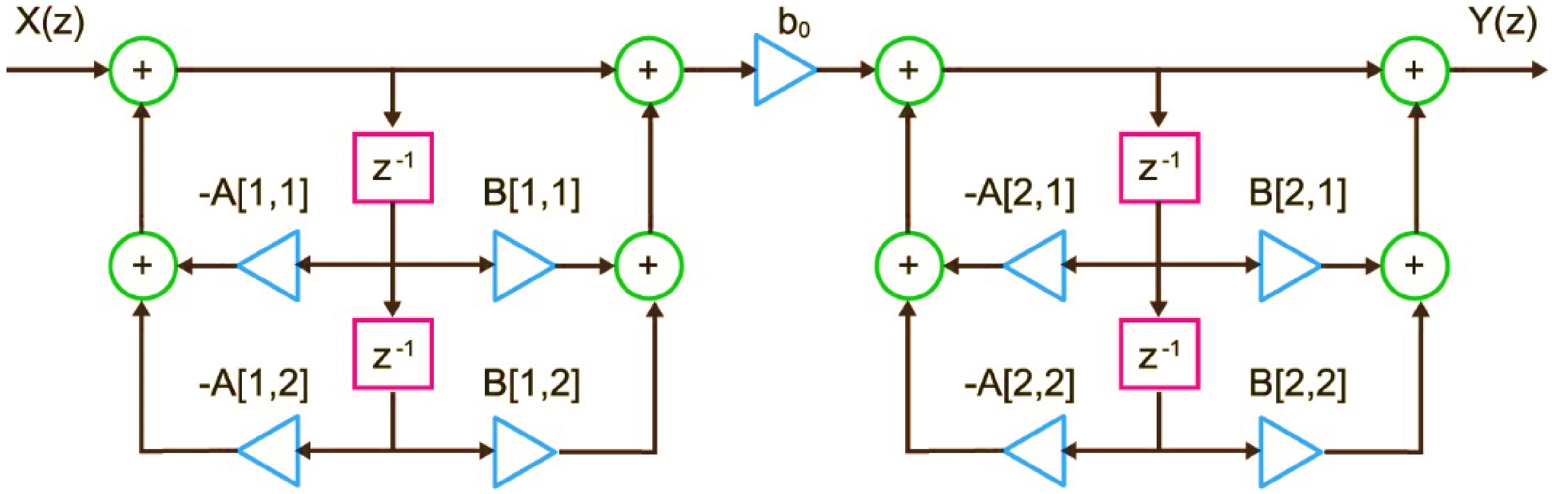
όπου $A[k,1], A[k,2], B[k,1], B[k,2]$ είναι πραγματικοί αριθμοί που αναπαριστούν τους συντελεστές των παραγόντων δεύτερης τάξης. Κάθε παράγοντας γράφεται:

$$H_k(z) = \frac{Y_{k+1}(z)}{Y_k(z)} = \prod_{k=1}^{N/2} \frac{1 + B[k,1]z^{-1} + B[k,2]z^{-2}}{1 + A[k,1]z^{-1} + A[k,2]z^{-2}}, \qquad k = 1,2, \dots N/2$$

Επίσης, ισχύει: $Y_1(z) = b[0]\, X(z)$ και $Y_{(N/2)+1}(z) = Y(z)$

Κάθε όρος $H_k(z)$ υλοποιείται σε ευθεία μορφή ΙΙ και οι όροι συνδέονται σειριακά ώστε να δημιουργούν το διάγραμμα βαθμίδων του επόμενου σχήματος (για $N = 4$), το οποίο ονομάζεται **μορφή καταρράκτη** (Cascade Form).

Μορφή Καταρράκτη



Δομή IIR συστήματος σε μορφή καταρράκτη

- Η μορφή καταρράκτη παρέχει ευελιξία στον τρόπο υλοποίησης του συστήματος επειδή υπάρχουν διάφοροι τρόποι συνδυασμού των πόλων και των μηδενικών καθώς και της σειράς με την οποία συνδέονται τα υποσυστήματα.

- Για τον υπολογισμό στο Matlab των συντελεστών της μορφής καταρράκτη χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **tf2sos()**.

Παράλληλη Μορφή

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα παραγόντων δεύτερης τάξης:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N/2} \frac{B[k,0] + B[k,1]z^{-1}}{1 + A[k,1]z^{-1} + A[k,2]z^{-2}} + \sum_{0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

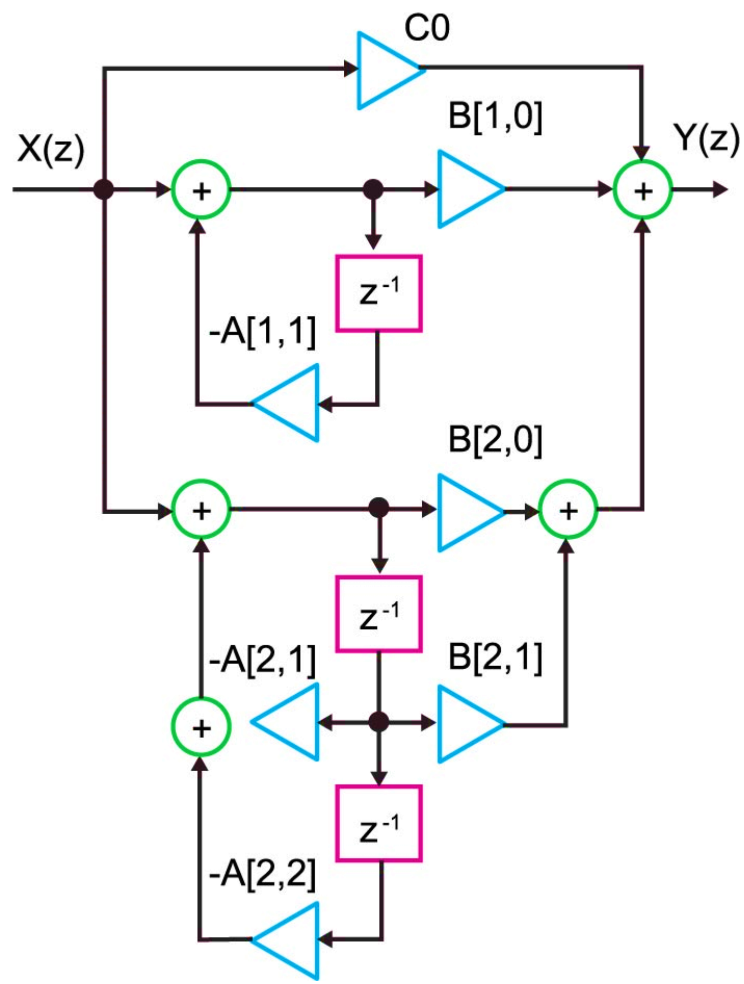
όπου $A[k,1], A[k,2], B[k,0], B[k,1]$ είναι πραγματικοί αριθμοί που αναπαριστούν τους συντελεστές των παραγόντων δεύτερης τάξης. Κάθε παράγοντας δεύτερης τάξης γράφεται:

$$H_k(z) = \frac{Y_{k+1}(z)}{Y_k(z)} = \frac{B[k,0] + B[k,1]z^{-1}}{1 + A[k,1]z^{-1} + A[k,2]z^{-2}}, \qquad k = 1,2, \dots N/2$$

Επίσης, ισχύει $Y_k(z) = H_k(z)X(z)$ και $Y(z) = \sum Y_k(z)$, $M < N$

Κάθε όρος $H_k(z)$ υλοποιείται σε ευθεία μορφή II και οι όροι συνδέονται σειριακά ώστε να δημιουργούν το διάγραμμα βαθμίδων του επόμενου σχήματος (για $M = N = 4$), το οποίο ονομάζεται **παράλληλη μορφή** (Parallel Form).

Παράλληλη Μορφή



Δομή IIR συστήματος σε παράλληλη μορφή

Φίλτρα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR)

- Ευθεία Μορφή
- Μορφή Καταρράκτη
- Μορφή Γραμμικής Φάσης
- Μορφή Δειγματοληψίας Συχνότητας

Περιγραφή Συστήματος FIR

Πεδίο Χρόνου:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] = \sum_{m=0}^{M} h[m] x[n-m] \qquad (1)$$

Πεδίο Συχνότητας:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M} = \sum_{m=0}^{M} b_m \, z^{-m} \qquad (2)$$

- Για κάθε ένα δείγμα εξόδου απαιτούνται $M+1$ πολλαπλασιασμοί και M προσθέσεις. Η τάξη του FIR συστήματος είναι $M-1$ ενώ το μήκος του είναι M.
- Τα συστήματα FIR είναι πάντα ευσταθή (επειδή δεν διαθέτουν πόλους) και μπορούν να σχεδιαστούν ώστε να έχουν απόκριση γραμμικής φάσης. Επίσης, είναι απλούστερα από τα IIR.

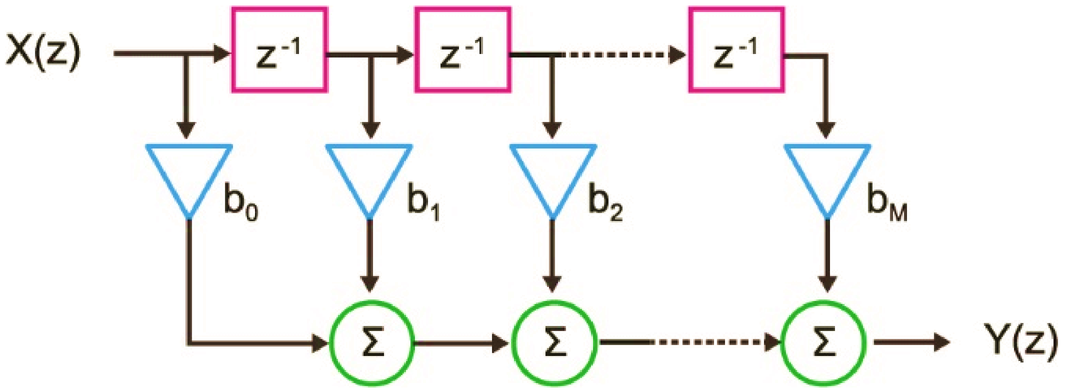
Δομές υλοποίησης FIR φίλτρων

Είναι σχηματικά διαγράμματα για τους διαφορετικούς αλλά ισοδύναμους τρόπους που μπορεί να οργανωθεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$.

- **Ευθεία Μορφή**: Προκύπτει από την άμεση εφαρμογή της ΓΕΔΣΣ σε διάγραμμα βαθμίδων.
- **Μορφή Καταρράκτη**: Η συνάρτηση μεταφοράς παραγοντοποιείται σε μικρότερα τμήματα δεύτερης τάξης. Κάθε τμήμα υλοποιείται σε ευθεία μορφή και το συνολικό σύστημα προκύπτει από τη συνένωση των επιμέρους τμημάτων.
- **Γραμμικής φάσης**: Όταν η κρουστική απόκριση ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες συμμετρίας τότε η φάση του συστήματος είναι γραμμική. Λόγω της συμμετρίας μειώνεται το πλήθος των απαιτούμενων υπολογισμών.
- **Δειγματοληψίας συχνότητας**: Βασίζεται στον υπολογισμό DFT $H[k]$ της κρουστικής απόκρισης.

Ευθεία Μορφή

Η ευθεία μορφή προκύπτει απευθείας από την ΓΕΔΣΣ και υλοποιείται ως μία διακλαδιζόμενη γραμμή καθυστέρησης, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Δομή FIR συστήματος σε ευθεία μορφή

- Το πλήθος υπολογισμών στην ευθεία μορφή είναι:
  - Πολλαπλασιασμοί: $M + 1$ για κάθε δείγμα εξόδου
  - Προσθέσεις: M για κάθε δείγμα εξόδου
  - Καθυστερήσεις: M
- Αν υπάρχουν συμμετρίες στην κρουστική απόκριση, τότε το πλήθος των πράξεων μπορεί να μειωθεί.

Άσκηση 2

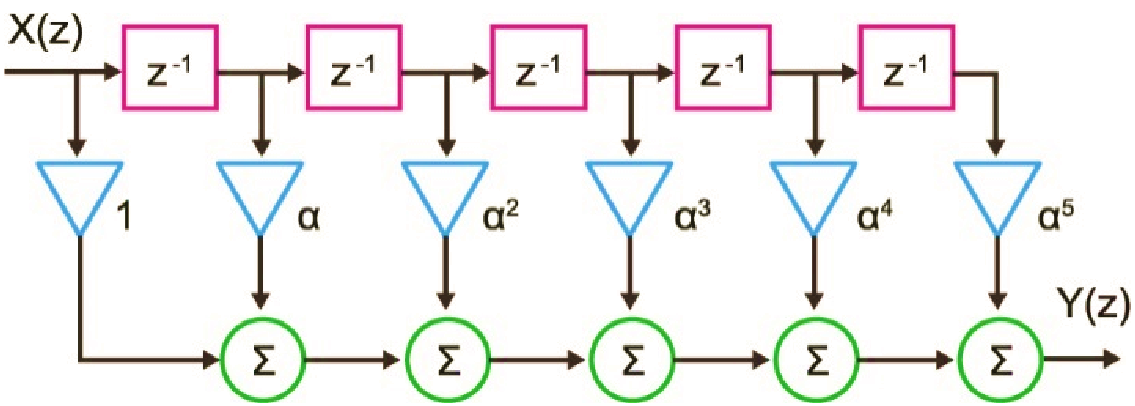
(α) Να σχεδιαστεί η ευθεία μορφή του FIR συστήματος με κρουστική απόκριση:

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Απάντηση: Η κρουστική απόκριση γράφεται:

$$h[n] = \alpha^n \big[u[n] - n[n-6]\big]$$
$$= \delta(0) + a\delta(1) + a^2\delta(2) + a^3\delta(3) + a^4\delta(4) + a^5\delta(5)$$

από την οποία προκύπτει το διάγραμμα βαθμίδων ευθείας μορφής (N=6):



Άσκηση 2 (συνέχεια)

(β) Να υπολογιστεί το πλήθος των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό κάθε δείγματος εξόδου καθώς και το πλήθος των καταχωρητών καθυστέρησης.

Απάντηση: Από το διάγραμμα βαθμίδων προκύπτει ότι το πλήθος υπολογισμών στην ευθεία μορφή είναι:

- Πολλαπλασιασμοί: 6 για κάθε δείγμα εξόδου
- Προσθέσεις: 5 για κάθε δείγμα εξόδου
- Καθυστερήσεις: 5

Μορφή Καταρράκτη

- Αν η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι πραγματική ακολουθία τότε η $H(z)$ μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο παραγόντων δεύτερης τάξης με πραγματικούς συντελεστές. Για N άρτιο, έχουμε:

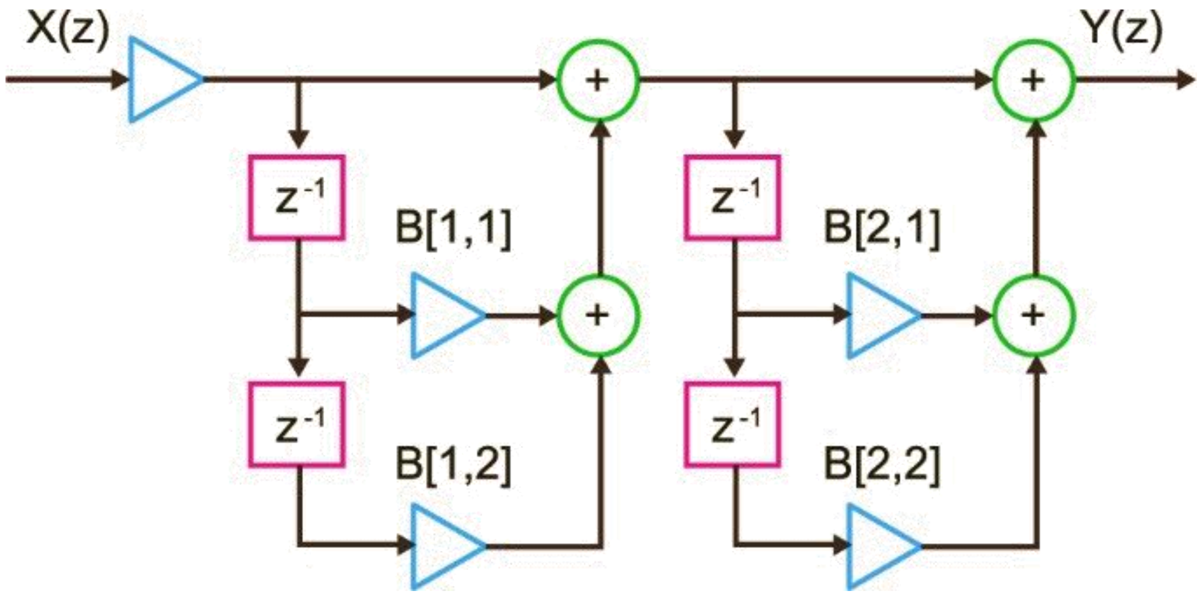
$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{N/2} 1 + B[k,1]z^{-1} + B[k,2]z^{-2}$$

όπου $B[k,1], B[k,2]$ είναι πραγματικοί αριθμοί που αναπαριστούν τους συντελεστές των παραγόντων δεύτερης τάξης.

- Κάθε όρος $H_k(z)$ υλοποιείται σε ευθεία μορφή ΙΙ και οι όροι συνδέονται σειριακά ώστε να δημιουργούν το διάγραμμα βαθμίδων του επόμενου σχήματος (παράδειγμα για $N = 4$), το οποίο ονομάζεται **μορφή καταρράκτη** (Cascade Form).

- Για τον υπολογισμό στο Matlab των συντελεστών της μορφής καταρράκτη χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **tf2sos()**.

Μορφή Καταρράκτη



Δομή FIR συστήματος σε μορφή καταρράκτη (N=4)

Μορφή Γραμμικής Φάσης

- Αν η κρουστική απόκριση $h[n]$ ικανοποιεί ιδιότητες συμμετρίας τότε μπορούμε να απλοποιήσουμε τη μορφή του διαγράμματος βαθμίδων.
- Η κρουστική απόκριση μπορεί να είναι είτε συμμετρική είτε αντισυμμετρική σύμφωνα με τις αντίστοιχες σχέσεις:

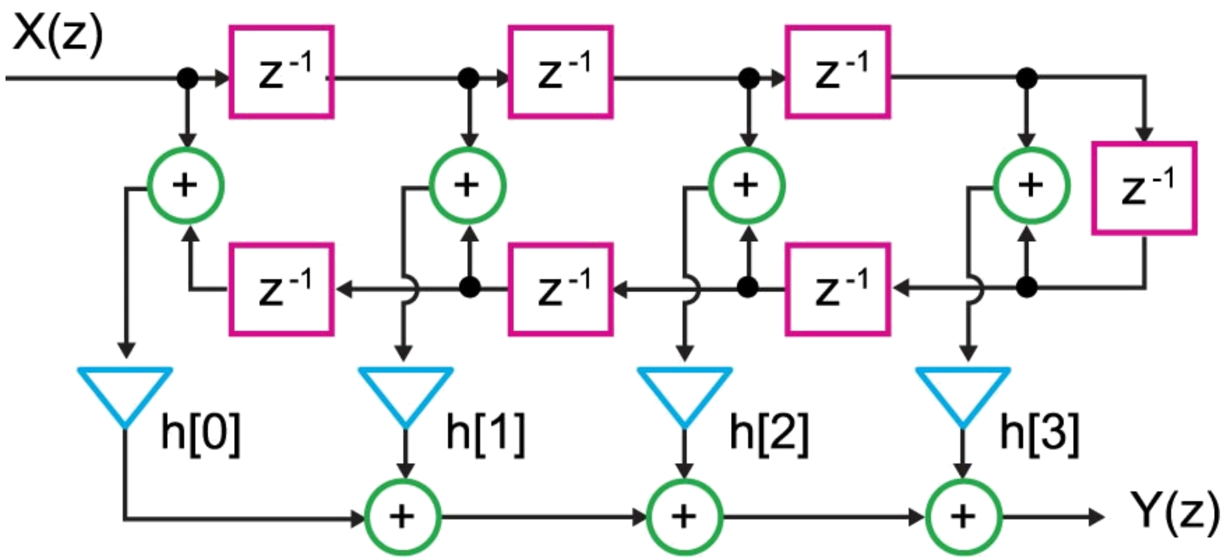
$$h[n] = h[N-n] \text{ και } \quad h[n] = -h[N-n]$$

- Για συμμετρική κρουστική απόκριση και N άρτιο, η ΓΕΔΣΣ (1) γράφεται:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{(M/2)-1} h[m]\{x[n-m] + x[n-N+m]\} + h\left[\frac{N}{2}\right] x\left[n - \frac{N}{2}\right]$$

- Η σχέση υλοποιείται με το διάγραμμα βαθμίδων του επόμενου σχήματος και με το 50% των πράξεων της ευθείας μορφής.
- Αν η κρουστική απόκριση είναι αντισυμμετρική και το N άρτιο έχουμε τα φίλτρα τύπου ΙΙ.
- Ανάλογα, για περιττό N έχουμε τα φίλτρα τύπου ΙΙΙ και IV, αντίστοιχα.

Μορφή Γραμμικής Φάσης



Δομή FIR συστήματος σε φίλτρο τύπου I ($N = 4$)

Μορφή Δειγματοληψίας Συχνότητας

- Βασίζεται στο γεγονός ότι η $H(z)$ μπορεί να ανακατασκευαστεί από ισαπέχοντα δείγματά της επάνω στον μοναδιαίο κύκλο, τα οποία έχουν υπολογιστεί από DFT M-σημείων $H[k]$ της κρουστικής απόκρισης $h[n]$.

- Αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση (όπου: $W_M^{-k} = e^{\frac{j2\pi}{N}k}$):

$$H(z) = \frac{1}{M}(1 - z^{-M}) \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H[k]}{1 - W_M^{-k} z^{-1}}$$

- Με τη σχέση αυτή περιγράφουμε ένα φίλτρο FIR σε μία αναδρομική μορφή. Στην πραγματικότητα οι πόλοι W_M^{-k} ακυρώνονται από τις ρίζες της σχέσης $1 - z^{-M} = 0$, οπότε το σύστημα παραμένει πάντα ευσταθές.

- Η σχέση υλοποιείται από την σειριακή συνδεσμολογία ενός FIR φίλτρου $(1 - z^{-M})/M$ με ένα δικτύωμα παράλληλης σύνδεσης φίλτρων ενός πόλου:

$$H_k(z) = \frac{H[k]}{1 - W_M^{-k} z^{-1}}$$

Μορφή Δειγματοληψίας Συχνότητας

- Αν η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι πραγματική, τότε εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες συμμετρίας του W_M^{-k}, αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) = \frac{1}{M}(1 - z^{-M})\left\{\sum_{k=0}^{L} 2|H[k]|\, H_k(z) + \frac{H[0]}{1 - z^{-1}} + \frac{H[M/2]}{1 - z^{-1}}\right\}$$

όπου $L = (M-1)/2$ για M άρτιο και $L = M/2 - 1$ για M περιττό.

- Οι παράγοντες δεύτερης τάξης $H_k(z)$ δίνονται από τη σχέση:

$$H_k(z) = \frac{\cos[\measuredangle H[k]] - z^{-1}\cos\left[\measuredangle H[k] - \frac{2\pi k}{M}\right]}{1 - 2z^{-1}\cos\left(\frac{2\pi k}{M}\right) + z^{-2}}$$

Φίλτρα Πλέγματος (Lattice Filters)

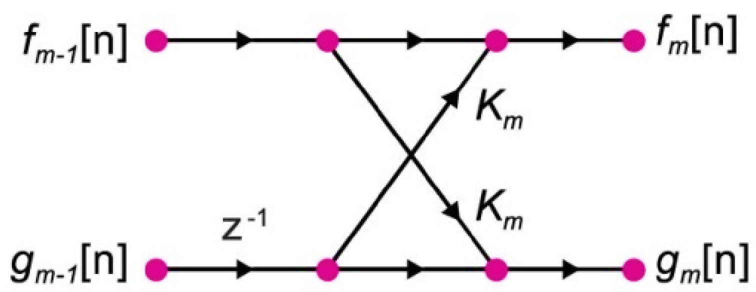
- Φίλτρο πλέγματος τύπου FIR (Lattice FIR)
- Φίλτρο πλέγματος μόνο πόλων (Lattice All Pole)

Φίλτρα Πλέγματος

- Τα φίλτρα πλέγματος (lattice filters) είναι πολύ δημοφιλή σε διάφορες εφαρμογές επειδή διαθέτουν σημαντικές ιδιότητες, όπως το μικρότερο πλήθος συντελεστών σε σχέση με τα IIR και FIR φίλτρα για τις ίδιες επιδόσεις, τη δυνατότητα αρθρωτής συνδεσμολογίας, την ευστάθεια και τη χαμηλή ευαισθησία στον κβαντισμό των συντελεστών τους.
- Χρησιμοποιούνται ευρέως στην ψηφιακή ανάλυση και σύνθεση ομιλίας, καθώς το χαμηλό πλήθος συντελεστών τους επιτρέπει την πραγματικού χρόνου υλοποίηση σύνθετων διαδικασιών που απαιτούνται στην επεξεργασία ομιλίας.
- Χωρίζονται σε:
  - Τύπου FIR
  - Μόνο πόλων (all-pole)
  - Πόλων και μηδενικών IIR

Φίλτρα Πλέγματος Τύπου FIR (Lattice FIR)

- Ένα FIR φίλτρο πλέγματος μήκους M ή τάξης M-1 δημιουργείται από μία σειριακή συνδεσμολογία M-1 στοιχειωδών τετραπόλων (βαθμίδων).



Στοιχειώδες τετράπολο (βαθμίδα) δικτυώματος

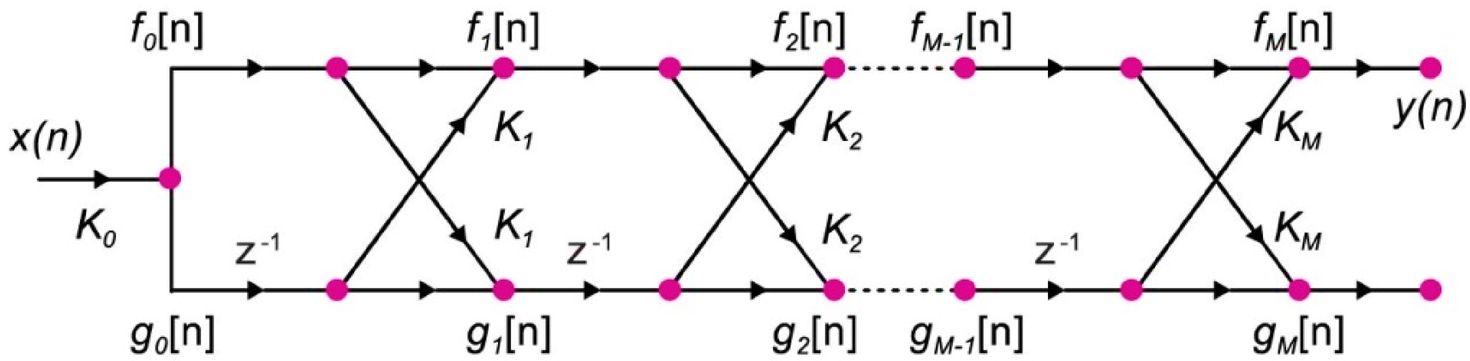
- Μεταξύ των εισόδων και των εξόδων ενός τετραπόλου ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις διαφορών:

$$f_m[n] = f_{m-1}[n] + K_m\, g_{m-1}[n-1], \qquad m = 1,2,\ldots,M-1 \qquad (1)$$

$$g_m[n] = g_{m-1}[n-1] + K_m\, f_{m-1}[n], \qquad m = 1,2,\ldots,M-1 \qquad (2)$$

Φίλτρα Πλέγματος Τύπου FIR (Lattice FIR)

- Στο σχήμα δείχνεται η πλήρης συνδεσμολογία σε σειρά M βαθμίδων και η δημιουργία ενός φίλτρου πλέγματος, μήκους M.



Φίλτρο πλέγματος μήκους M

- Οι συντελεστές $K_m,\ m = 1,2,\ldots, M-1$ ονομάζονται **συντελεστές ανάκλασης** και προσδιορίζουν το φίλτρο πλέγματος. Στην είσοδο της πρώτης βαθμίδας εφαρμόζεται το σήμα εισόδου $x[n]$ πολλαπλασιασμένο επί έναν βαθμωτό συντελεστή K_0, δηλαδή: $f_0[n] = g_0[n] = K_0 x[n]$.

- Στην έξοδο της τελευταίας βαθμίδας παράγεται το σήμα εξόδου: $y[n] = f_M[n]$

Φίλτρα Πλέγματος Τύπου FIR (Lattice FIR)

- Αν ορίσουμε ως $A_m(z)$ τη συνάρτηση μεταφοράς που συνδέει την είσοδο $x[n]$ με μία ενδιάμεση έξοδο $f_m[n],\ m = 1,2,\ldots,M-1$, από τη σχέση:

$$F_m(z) = A_m(z)\,X(z)$$

και λύσουμε τις εξισώσεις διαφορών (1) και (2) προκύπτει ο παρακάτω επαναληπτικός τύπος για την εύρεση της $A_m(z)$, ο οποίος ονομάζεται **αναδρομή θετικού βήματος** (step up down recursion):

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m\, z^{-m} A_{m-1}\left(z^{-1}\right) \qquad (3)$$

- Η παραπάνω αναδρομική διαδικασία αρχικοποιείται με $A_0(z) = 1$ και υπολογίζει τη **συνολική συνάρτηση μεταφοράς** μεταξύ εισόδου και εξόδου του πλέγματος $A_M(z)$ από τους συντελεστές ανάκλασης $K_m,\ m = 1,2,\ldots,M-1$.

- Η αναδρομική σχέση (3) συναρτήσει των συντελεστών $a_m[i]$ είναι:
  - $\alpha_m[i] = a_{m-1}[i] + K_m\, a_{m-1}[m-i],\ \ i = 1,2,\ldots,m-i \qquad (4)$
  - $a_m[m] = K_m \qquad (5)$

Φίλτρα Πλέγματος Τύπου FIR (Lattice FIR)

- Στην περίπτωση που είναι γνωστή η συνάρτηση μεταφοράς $A_M(z)$ και ζητείται να υπολογιστούν οι συντελεστές ανάκλασης K_m, εφαρμόζουμε την **αναδρομή αρνητικού βήματος** (step down recursion) από τη σχέση:

$$A_{m-1}(z) = \frac{1}{1 - K_m^2}\left\{A_m(z) - K_m\, z^{-m} A_m\left(z^{-1}\right)\right\}, \qquad m = M, \ldots, 1 \qquad (5)$$

- Όπως στις σχέσεις (3) και (4), η αναδρομική σχέση (5) εκφρασμένη ως προς τους συντελεστές $a_m[i]$ είναι:

   - $\alpha_{m-1}[i] = \frac{1}{1-K_m^2}\{a_m[i] - K_m\, a_m[m-i]\}, \quad i = 1,2, \ldots, m-2 \qquad (6)$
   - $a_{m-1}[m-1] = K_{m-1} \qquad (7)$

Φίλτρα Πλέγματος Τύπου FIR (Lattice FIR)

- Θα δοθεί η αντιστοίχιση των συντελεστών ανάκλασης του FIR φίλτρου πλέγματος με τους συντελεστές της συνάρτησης μεταφοράς της ευθείας μορφής του FIR φίλτρου. Αν η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του FIR φίλτρου σε ευθεία μορφή είναι:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} b_m \, z^{-m}$$

και τη μετατρέψουμε στην παρακάτω μορφή, βγάζοντας κοινό παράγοντα τον συντελεστή b_0:

$$H(z) = b_0 \left(1 + \sum_{m=1}^{M-1} \frac{b_m}{b_0} \, z^{-m} \right) = b_0 \left(1 + \sum_{m=1}^{M-1} \alpha_{M-1}[m] \; z^{-m} \right)$$

όπου:

$$\alpha_{M-1}[m] = \frac{b_m}{b_0}, \qquad m = 1,2, \dots, M-1$$

Φίλτρα Πλέγματος Τύπου FIR (Lattice FIR)

- τότε οι συντελεστές του φίλτρου πλέγματος $K_m,\ m = 1,2,\ldots,M-1$ ως προς τους γνωστούς συντελεστές της ευθείας μορφής $b_m,\ m = 1,2,\ldots,M-1$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$K_0 = b_0 \qquad (8)$$

$$K_{M-1} = \alpha_{M-1}[M-1] = \frac{b_{M-1}}{b_0} \qquad (9)$$

$$K_m = \alpha_m[m], \qquad m = M-2, \ldots, 1 \qquad (10)$$

Άσκηση 3

Οι συντελεστές ανάκλασης ενός φίλτρου πλέγματος FIR δεύτερης τάξης είναι $K_1 = 1/4$ και $K_2 = 1/8$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις μεταφοράς πρώτης $A_1(z)$ και δεύτερης τάξης $A_2(z)$, οι οποίες συνδέουν την είσοδο $x[n]$ με τις $f_1[n]$ και $f_2[n]$, αντίστοιχα.

Απάντηση: Για να υπολογίσουμε την $A_1(z)$ θέτουμε $m = 1$ στη σχέση (3) και βρίσκουμε:

$$A_1(z) = A_0(z) + K_1\, z^{-1} A_0\left(z^{-1}\right) \qquad (\alpha)$$

Η αρχική συνθήκη είναι $A_0(z) = 1$, επομένως και $A_0\left(z^{-1}\right) = 1$. Από τη σχέση (α) είναι:

$$A_1(z) = 1 + \frac{1}{4}\, z^{-1} \qquad (\beta)$$

Από τη σχέση (β) βρίσκουμε ότι:

$$A_1\left(z^{-1}\right) = 1 + \frac{1}{4}\, z \qquad (\gamma)$$

Ομοίως, για την $A_2(z)$ θέτουμε $m = 2$ στη σχέση (3) και έχουμε:

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2\, z^{-2} A_1\left(z^{-1}\right) \qquad (\delta)$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (β) και (γ) στη σχέση (δ) και βρίσκουμε:

$$A_2(z) = \left(1 + \frac{1}{4}\, z^{-1}\right) + \frac{1}{8} z^{-2} \left(1 + \frac{1}{4}\, z\right) = 1 + \frac{9}{32}\, z^{-1} + \frac{1}{8}\, z^{-2}$$

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι συντελεστές ανάκλασης του FIR φίλτρου δεύτερης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς:

$$A_2(z) = 1 - \frac{1}{2} z^{-2}$$

Απάντηση: Θέτουμε $m = 2$ στη σχέση (3) και έχουμε:

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2\, z^{-2} A_1\left(z^{-1}\right) \qquad (\alpha)$$

Το $A_1(z)$ βρίσκεται θέτοντας $m = 1$ στη σχέση (3):

$$A_1(z) = A_0(z) + K_1\, z^{-1} A_0\left(z^{-1}\right) \qquad (\beta)$$

Επειδή $A_0(z) = 1$ και $A_0\left(z^{-1}\right) = 1$, η σχέση (α) γράφεται:

$$A_1(z) = 1 + K_1\, z^{-1} \qquad (\gamma)$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Από τη σχέση (β) βρίσκουμε ότι:

$$A_1\left(z^{-1}\right) = 1 + K_1\, z \qquad (\delta)$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (β), (γ) και (δ) στη σχέση (α) και βρίσκουμε:

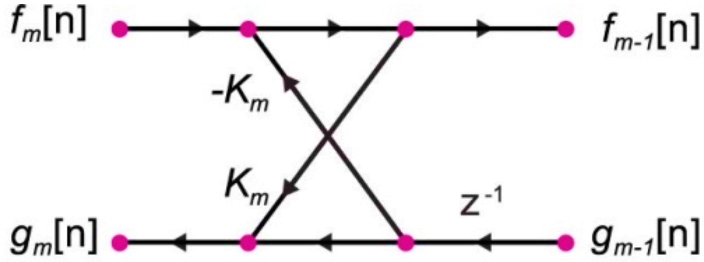
$$A_2(z) = 1 + K_1 z^{-1} + K_2 z^{-2}(1 + K_1 z) = 1 + (K_1 + K_1 K_2) z^{-1} + K_2 z^{-2} \qquad (\varepsilon)$$

Εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές της δοθείσας συνάρτησης μεταφοράς $A_2(z)$ και της σχέσης (ε) και βρίσκουμε:

$$K_2 = -\frac{1}{2}, \qquad K_1 = 0$$

Φίλτρο Πλέγματος Μόνο Πόλων (Lattice All Pole)

- Ένα φίλτρο πλέγματος μόνο πόλων μήκους N δημιουργείται από μία σειριακή συνδεσμολογία N-1 στοιχειωδών τετραπόλων.



Στοιχειώδες τετράπολο δικτυώματος

- Μεταξύ των εισόδων και των εξόδων ενός τετραπόλου ισχύουν οι παρακάτω αναδρομικές σχέσεις:
    - $f_N[n] = x[n]$
    - $f_{m-1}[n] = f_m[n] - K_m\, g_{m-1}[n-1],\ m = N, N-1, \dots 1$
    - $g_m[n] = K_m\, f_{m-1}[n] - g_{m-1}[n-1],\ m = N, N-1, \dots 1$
    - $y[n] = f_0[n] = g_0[n]$

όπου οι παράμετροι $K_m,\ m = 1, 2, \dots, M-1$ είναι οι συντελεστές ανάκλασης του φίλτρου πλέγματος μόνο πόλων.

Φίλτρο Πλέγματος Μόνο Πόλων (Lattice All Pole)

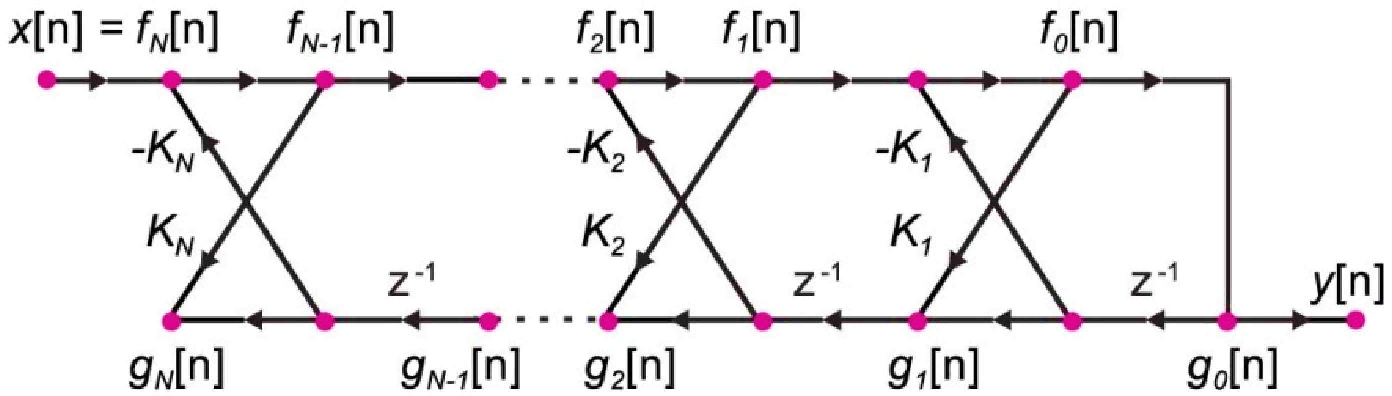
- Οι συντελεστές αυτοί υπολογίζονται από τις αναδρομικές σχέσεις (7) έως (9), εκτός από τον συντελεστή K_0, ο οποίος είναι ίσος με 1 ($K_0 = 1$).
- Καθώς το τεράπολο δεν έχει μηδενικά, η απόκριση συχνότητάς του δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) = \frac{1}{A_N(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{N} \alpha_N[m]\, z^{-m}}$$

όπου η συνάρτηση μεταφοράς $A_N(z)$ υπολογίζεται από τον αλγόριθμο που περιγράφεται στη σχέση (3).

- Είναι φανερό ότι το φίλτρο πλέγματος μόνο πόλων είναι το αντίστροφο του FIR φίλτρου πλέγματος, εκτός από τον συντελεστή b_0.
- Επομένως, μία δομή πλέγματος ενός φίλτρου IIR μόνο πόλων μπορεί να παραχθεί αντιστρέφοντας μία δομή πλέγματος FIR φίλτρου.

Φίλτρο Πλέγματος Μόνο Πόλων (Lattice All Pole)



Φίλτρο πλέγματος μόνο πόλων τάξης N

Φίλτρο Πλέγματος τύπου IIR (Lattice IIR)

- Η συνάρτηση μεταφοράς ενός φίλτρου IIR με N πόλους και M μηδενικά (γενικά θεωρούμε ότι $N \leq M$) δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) = \frac{B_M(z)}{A_N(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \, z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^{N} \alpha_N[m] \, z^{-m}}$$

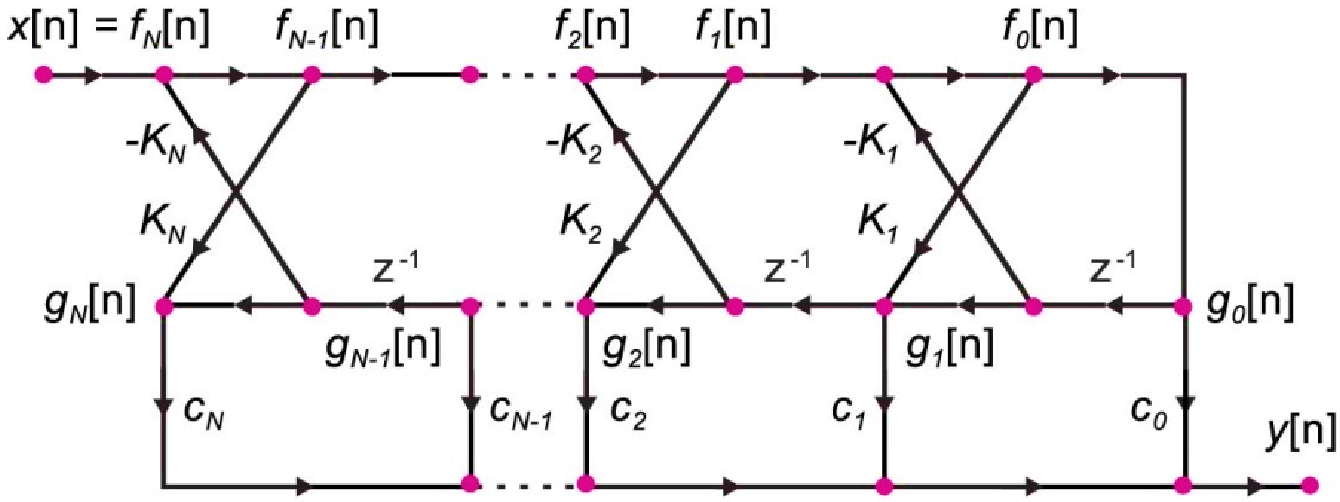
- Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι ένα IIR φίλτρο πλέγματος απαρτίζεται από δύο τμήματα:
  - Το πρώτο τμήμα αντιστοιχεί στον όρο $1/A_N(z)$) και είναι ένα φίλτρο πλέγματος μόνο πόλων με συντελεστές ανάκλασης $K_m, \; 1 \leq m \leq N$.
  - Το δεύτερο τμήμα είναι μία διακλαδιζόμενη γραμμή καθυστέρησης (tapped delay line) με συντελεστές C_m, η οποία παράγει στην έξοδο του πλέγματος έναν σταθμισμένο γραμμικό συνδυασμό των δειγμάτων $g_m[n]$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} C_m \, g_m[n] \qquad (11)$$

Φίλτρο Πλέγματος τύπου IIR (Lattice IIR)

- Οι συντελεστές C_m της γραμμής καθυστέρησης προσδιορίζουν τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ και αποδεικνύεται ότι υπολογίζονται από τους συντελεστές b_m της ευθείας μορφής από τη σχέση:

$$C_m = b_m + \sum_{i=m+1}^{M} C_i \, a_i[i-m], \qquad m = M-1, \dots, 1, 0$$



Φίλτρο πλέγματος IIR

Άσκηση 5

Να μετατραπεί το ακόλουθο IIR φίλτρο πόλων – μηδενικών σε μορφή πλέγματος:

$$H(z) = \frac{0.25 + 0.5z^{-1} - 0.4z^{-2}}{1 - 0.1z^{-1} + z^{-2}}$$

Απάντηση: Αρχικά θα μετατρέψουμε τους συντελεστές του παρονομαστή σε συντελεστές ανάκλασης. Εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στην άσκηση 4 για τη συνάρτηση:

$$A_2(z) = 1 - 0.1z^{-1} + z^{-2}$$

Θέτουμε $m = 2$ και $m = 1$ στη σχέση (3) και αντίστοιχα λαμβάνουμε:

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2\, z^{-2} A_1\left(z^{-1}\right) \qquad (\alpha)$$

$$A_1(z) = A_0(z) + K_1\, z^{-1} A_0\left(z^{-1}\right) \qquad (\beta)$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Επειδή $A_0(z) = 1$ και $A_0\left(z^{-1}\right) = 1$, βρίσκουμε:

$$A_1(z) = 1 + K_1\, z^{-1} \qquad (\gamma)$$

$$A_1\left(z^{-1}\right) = 1 + K_1\, z \qquad (\delta)$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (β), (γ) και (δ) στη σχέση (α) και βρίσκουμε:

$$A_2(z) = 1 + K_1 z^{-1} + K_2 z^{-2}(1 + K_1 z) = 1 + (K_1 + K_1 K_2) z^{-1} + K_2 z^{-2} \qquad (\varepsilon)$$

Εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές της αρχικής συνάρτησης $A_2(z)$ και της σχέσης (ε) και βρίσκουμε:

$$K_2 = 1, \qquad K_1 = -0.05$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Οι συντελεστές a_m και b_m που δίνονται στην εκφώνηση είναι:

$$a_m = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\} = \{1, -0.1, 1\}$$

$$b_m = \{b_0, b_1, b_2\} = \{0.25, 0.5, -0.4\}$$

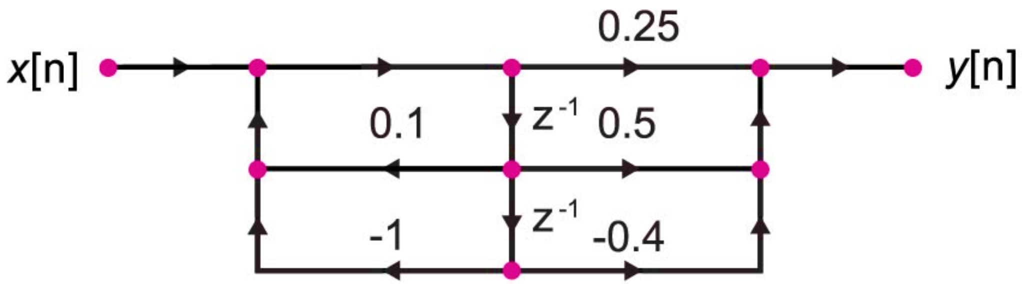
Τέλος, οι συντελεστές C_2 υπολογίζονται από την αναδρομική σχέση (11) για $m = 2,1,0$ και είναι:

- $m = 2$: $C_2 = b_2 = -0.4$
- $m = 1$: $C_1 = b_1 + C_2\ a_2[1] = 0.5 + (-0.4)\ 1 = 0.1$
- $m = 0$: $C_0 = b_0 + C_1\ a_1[1] + C_2\ a_2[2] = 0.25 + 0.1\ (-0.1) + (-0.4)1 = -0.16$

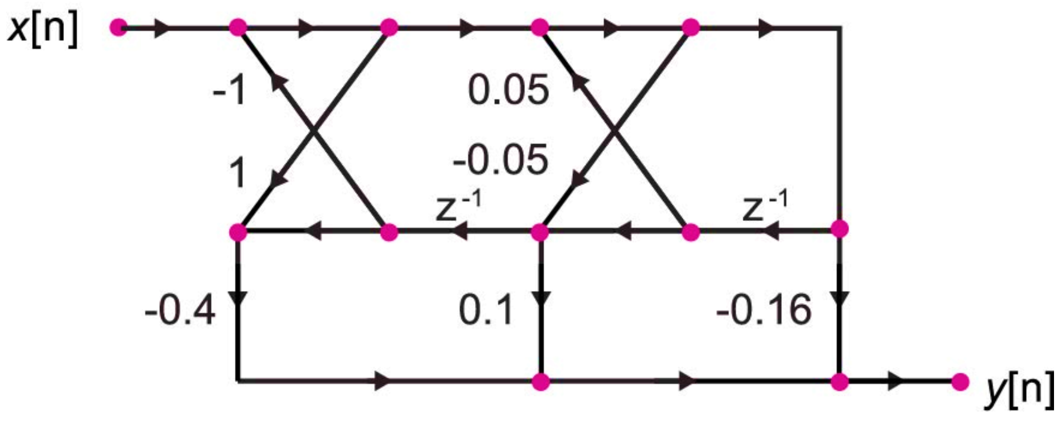
Επομένως:

$$C_0 = -0.16,\ C_1 = 0.1,\ C_2 = -0.4$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)



(α)



(β)

Φίλτρο IIR: (α) Ευθεία μορφή, (β) Μορφή πλέγματος