



Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 09: Ψηφιακά Φίλτρα FIR

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

- **Εισαγωγή στα Ψηφιακά Φίλτρα**
 - Έλεγχος απολαβής (κέρδους) φίλτρου
 - Φίλτρα ελάχιστης, μέγιστης, μικτής και γραμμικής φάσης
 - Ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων
 - Προδιαγραφές πραγματικών ψηφιακών φίλτρων
 - Στάδια υλοποίησης ψηφιακών φίλτρων
- **Φίλτρα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR)**
 - Περιγραφή FIR φίλτρων στα πεδία χρόνου και συχνότητας
 - FIR Φίλτρο σαν Γραμμή Καθυστέρησης
 - Τύποι FIR Φίλτρων Γραμμικής Φάσης

Περιεχόμενα Διάλεξης

- **Μέθοδοι Σχεδίασης FIR Φίλτρων**
 - Μέθοδος Παραθύρων
 - Μέθοδος Δειγματοληψίας στη Συχνότητα
 - Μέθοδος Βέλτιστης Σχεδίασης (Ισοκυματική Μέθοδος)
- **Μελέτη Ακολουθιών Παραθύρων**
 - Ορθογώνιο Παράθυρο
 - Τριγωνικό Παράθυρο (Bartlett)
 - Παράθυρο Hanning
 - Παράθυρο Hamming
 - Παράθυρο Blackman
 - Παράθυρο Kaiser

Εισαγωγή στα Ψηφιακά Φίλτρα

- Έλεγχος απολαβής (κέρδους) φίλτρου
- Φίλτρα ελάχιστης, μέγιστης, μικτής και γραμμικής φάσης
- Ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων
- Προδιαγραφές πραγματικών ψηφιακών φίλτρων

Εισαγωγή στα Ψηφιακά Φίλτρα

- Αν στην είσοδο ενός ΓΑΚΜ συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n]$ εφαρμοστεί μία μιγαδική εκθετική ακολουθία $x[n] = A e^{jn\omega_0}$, $-\infty < n < +\infty$, ψηφιακής συχνότητας ω_0 , τότε η έξοδος υπολογίζεται από τη συνέλιξη:

$$y[n] = A e^{jn\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k}$$

- Η μιγαδική συνάρτηση $H(e^{j\omega})$ ονομάζεται **απόκριση συχνότητας** και υπολογίζεται από τον DTFT της κρουστικής απόκρισης:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

- Η έξοδος $y[n]$ γράφεται $y[n] = A e^{jn\omega_0} H(e^{j\omega_0}) = x[n]H(e^{j\omega_0})$. Επομένως αν η είσοδος είναι μια μιγαδική ακολουθία συχνότητας έξοδος ω_0 , τότε η έξοδος είναι επίσης μια μιγαδική ακολουθία ίδιας συχνότητας έξοδος ω_0 πολλαπλασιασμένη επί τη συνάρτηση $H(e^{j\omega_0})$.

Εισαγωγή στα Ψηφιακά Φίλτρα

- Η απόκριση συχνότητας γράφεται σε πολική μορφή (μέτρο, φάση) ως:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi_H(\omega)}$$

- Τα διαγράμματά τους (συνήθως εκφρασμένα σε dB) είναι τα **φάσματα πλάτους** (μέτρου) και **φάσης**, αντίστοιχα
- Αν η κρουστική απόκριση είναι **πραγματική ακολουθία** τότε το πραγματικό μέρος και το πλάτος της απόκρισης συχνότητας του φίλτρου, εμφανίζουν **άρτια συμμετρία**:

$$H_R(e^{j\omega}) = H_R(e^{-j\omega}) \text{ και } |H_R(e^{j\omega})| = |H_R(e^{-j\omega})|$$

- Το φανταστικό μέρος, η φάση και η καθυστέρηση ομάδας εμφανίζουν **περιττή συμμετρία**:

$$H_I(e^{j\omega}) = -H_I(e^{-j\omega}), \varphi_H(\omega) = -\varphi_H(-\omega) \text{ και } \tau_H(\omega) = -\tau_H(-\omega)$$

- Ένα ψηφιακό φίλτρο για να είναι **πρακτικά υλοποιήσιμο** πρέπει να είναι **ευσταθές** και προφανώς **αιτιατό**.
- Τα πρακτικά ψηφιακά φίλτρα είναι επίσης επιθυμητό να είναι **γραμμικά και αμετάβλητα κατά τη μετατόπιση (ΓΑΚΜ)**.

Έλεγχος Απολαβής (Κέρδους) Φίλτρου

- Αν $|H(e^{j\omega_0})| > 1$ τότε το φίλτρο προκαλεί **ενίσχυση** του σήματος εισόδου.
- Αν $|H(e^{j\omega_0})| < 1$, τότε συμβαίνει **εξασθένιση** του σήματος εισόδου.
- Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **φιλτράρισμα** του σήματος εισόδου και μπορεί να οδηγήσει στην παραγωγή μίας εξόδου με επιθυμητά φασματικά χαρακτηριστικά.
- **Ερώτημα:** Με ποιόν τρόπο σχεδιασμού του ψηφιακού φίλτρου μπορεί να προσδιοριστεί κατάλληλα το πλάτος της απόκρισης συχνότητας σε δεδομένη συχνότητα ω_0 ώστε να προκύπτει είτε ενίσχυση είτε εξασθένιση του σήματος εισόδου στη συχνότητα αυτή;
- Η απόκριση συχνότητας του φίλτρου μπορεί να γραφεί:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{m=0}^M b[m]e^{-jm\omega}}{\sum_{k=0}^N a[k]e^{-jk\omega}} = b[0] e^{j(N-M)\omega} \frac{\prod_{m=1}^M (e^{j\omega} - z_m)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - p_k)}$$

όπου z_m είναι τα **μηδενικά** (zeros) και p_k είναι οι **πόλοι** (poles) της απόκρισης συχνότητας.

Έλεγχος Απολαβής (Κέρδους) Φίλτρου

- Η απόκριση μέτρου μπορεί να εκφραστεί ως το πηλίκο του αθροίσματος των αποστάσεων των μηδενικών από τον μοναδιαίο κύκλο προς το άθροισμα των αποστάσεων των πόλων από τον μοναδιαίο κύκλο, για κάθε τιμή της ψηφιακής συχνότητας .
- Λαμβάνοντας υπόψη ότι ένα αιτιατό ΓΑΚΜ σύστημα είναι ευσταθές όταν και μόνο όταν όλοι οι πόλοι του βρίσκονται μέσα στον μοναδιαίο κύκλο, προκύπτει ότι για μία συγκεκριμένη συχνότητα ω_0 :
 - Αν είναι επιθυμητή η **ενίσχυση** του σήματος εισόδου, τότε τοποθετούμε έναν **πόλο** πολύ κοντά στον μοναδιαίο κύκλο (εντός αυτού) σε γωνία ίση με τη συχνότητα ω_0 .
 - Αν είναι επιθυμητή η **εξασθένιση** του σήματος εισόδου, τότε τοποθετούμε ένα **μηδενικό** πολύ κοντά στον μοναδιαίο κύκλο σε γωνία ίση με τη συχνότητα ω_0 .
- Σε κάθε περίπτωση, επιβάλλεται **όλοι οι πόλοι** του φίλτρου να βρίσκονται **μέσα** στον μοναδιαίο κύκλο, ώστε το φίλτρο να παραμένει ευσταθές.

Φίλτρα Ελάχιστης και Μέγιστης Φάσης

Η θέση των μηδενικών του φίλτρου επηρεάζει τη φάση της απόκρισης συχνότητας. Συγκεκριμένα, το σύστημα είναι:

- **Ελάχιστης φάσης** όταν όλα τα μηδενικά βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.
- **Μέγιστης φάσης** όταν όλα τα μηδενικά βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου.
- **Μικτής φάσης** όταν ορισμένα μηδενικά βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου και τα υπόλοιπα εκτός αυτού.

Π.χ. το φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{(z - 0.2)(z + 0.4)}{(z + 0.5)(z - 0.7)}$$

είναι ελάχιστης φάσης, επειδή οι θέσεις των μηδενικών $z_1 = 0.2$ και $z_2 = -0.4$ βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Φίλτρα Γραμμικής Φάσης

- Τα ψηφιακά φίλτρα έχουν **γραμμική φάση**, όταν η απόκριση συχνότητας μπορεί να γραφεί ως:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{-ja\omega}, \quad a \in R$$

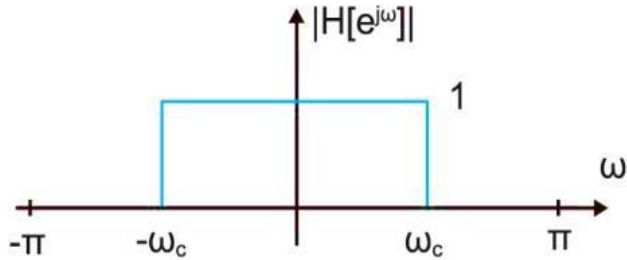
όπου $A(e^{j\omega})$ είναι μία πραγματική συνάρτηση της συχνότητας ω .

- Για τη φάση της απόκρισης συχνότητας $H(e^{j\omega})$ ισχύει:

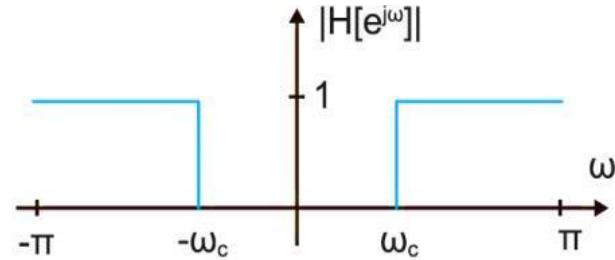
$$\varphi_H(\omega) = \begin{cases} -a\omega & \text{όταν } A(e^{j\omega}) \geq 0 \\ -a\omega + \pi & \text{όταν } A(e^{j\omega}) < 0 \end{cases}$$

- Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για την επίτευξη **γραμμικής φάσης** είναι η **συμμετρία** των συντελεστών της κρουστικής απόκρισης.
- Στα φίλτρα γραμμικής φάσης η καθυστέρηση ομάδας είναι **σταθερή**. Άρα όλες οι συχνότητες του σήματος εισόδου υφίστανται την **ίδια καθυστέρηση** κατά τη διέλευσή τους από το ψηφιακό φίλτρο και έτσι δεν αλλοιώνεται η δομή του σήματος.
- Η γραμμική φάση είναι ένα σημαντικό **εγγενές χαρακτηριστικό** στα FIR φίλτρα.

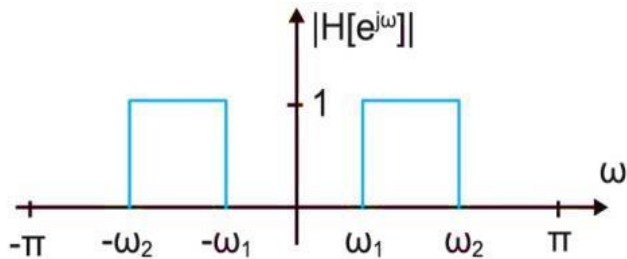
Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων



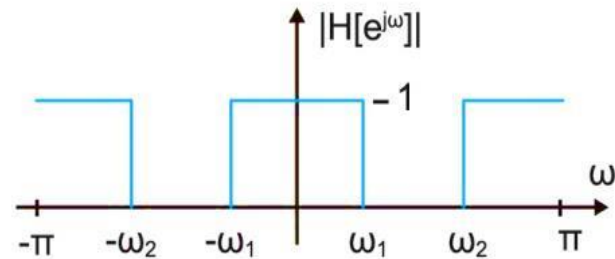
(α) Ιδανικό Χαμηλοπερατό Φίλτρο (*Low-Pass*).



(β) Ιδανικό Υψηλοπερατό Φίλτρο (*High-Pass*).



(γ) Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο (*Band-Pass*).



(δ) Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο (*Band-Stop*).

- **Ζώνη διέλευσης** (pass zone): η περιοχή συχνοτήτων στην οποία $|H(e^{j\omega})| = 1$.
- **Ζώνη αποκοπής** (stop zone): η περιοχή συχνοτήτων στην οποία $|H(e^{j\omega})| = 0$.
- **Συχνότητες αποκοπής** (cut-off frequencies): οι οριακές συχνότητες που σημειώνουν τα άκρα της ζώνης διέλευσης και αποκοπής.

Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

- Ιδανικό Βαθυπερατό Φίλτρο (Low Pass Filter, LPF):

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

- Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο (High Pass Filter, HPF):

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & \omega_c < |\omega| < \pi \\ 0, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \end{cases}$$

- Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο (Band Pass Filter, BPF):

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 \\ 0, & 0 < |\omega| < \omega_1 \text{ και } \omega_2 < |\omega| < \pi \end{cases}$$

- Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο (Band Stop Filter, BSF):

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & 0 < |\omega| < \omega_1 \text{ και } \omega_2 < |\omega| < \pi \\ 0, & \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 \end{cases}$$

- Προσοχή! Τα ιδανικά φίλτρα [FIR, IIR] είναι μη-αιτιατά, άρα μη-υλοποιήσιμα.

Άσκηση 1

Έστω $h[n]$ η κρουστική απόκριση ενός ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής ω_c . Ποιος τύπος ιδανικού φίλτρου έχει κρουστική απόκριση $g[n] = (-1)^n h[n]$;

Απάντηση: Η απόκριση συχνότητας $G(e^{j\omega})$ είναι:

$$\begin{aligned} G(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h[n]e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-jn(\omega-\pi)} \\ &= H(e^{j(\omega-\pi)}) \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση $G(e^{j\omega})$ σχηματίζεται μετατοπίζοντας την $H(e^{j\omega})$ στη συχνότητα κατά π .

Έτσι, αν η ζώνη διέλευσης του ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου είναι $|\omega| \leq |\omega_c|$, τότε η ζώνη διέλευσης του φίλτρου με απόκριση συχνότητας $G(e^{j\omega})$ θα είναι $\pi - \omega_c < |\omega| \leq \pi$.

Επομένως, το φίλτρο με κρουστική απόκριση $g(n)$ είναι ένα ιδανικό υψιπερατό φίλτρο.

Προδιαγραφές Πραγματικών Ψηφιακών Φίλτρων

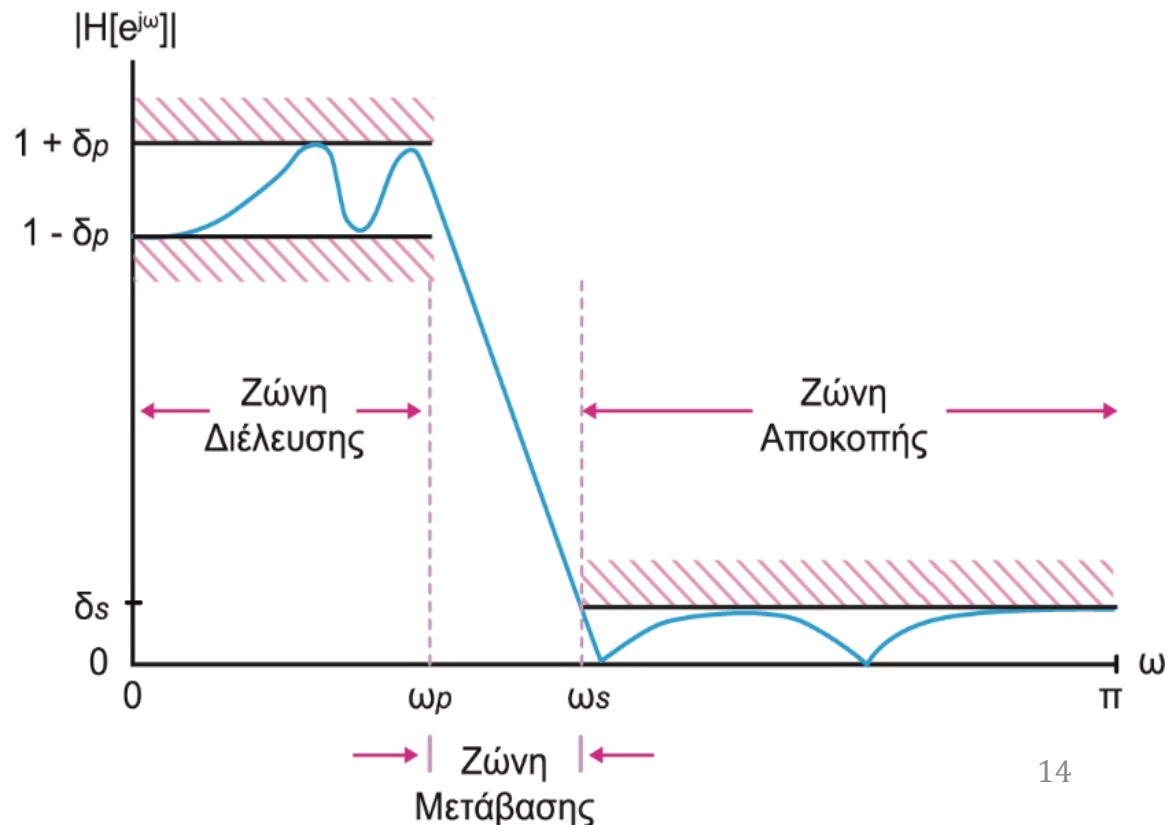
Αποδεχόμενοι αποκλίσεις από την ιδανική απόκριση, φτιάχνουμε **πραγματικά φίλτρα**.

Για παράδειγμα για τον σχεδιασμό πραγματικού βαθυπερατό φίλτρου θέτουμε:

- $1 - \delta_p < |H(e^{-j\omega})| \leq 1 + \delta_p$ $0 \leq |\omega| < \omega_p$ (ζώνη διέλευσης)
- $|H(e^{-j\omega})| \leq \delta_s$ $\omega_s \leq |\omega| < \pi$ (ζώνη αποκοπής)

Απόλυτες προδιαγραφές:

- ω_p : συχνότητα αποκοπής στη ζώνη διέλευσης
- ω_s : συχνότητα αποκοπής στη ζώνη αποκοπής
- δ_p : απόκλιση στη ζώνη διέλευσης
- δ_s : απόκλιση στη ζώνη αποκοπής
- $[\omega_p, \omega_s]$: ζώνη μετάβασης



Προδιαγραφές Πραγματικών Ψηφιακών Φίλτρων

Σχετικές προδιαγραφές:

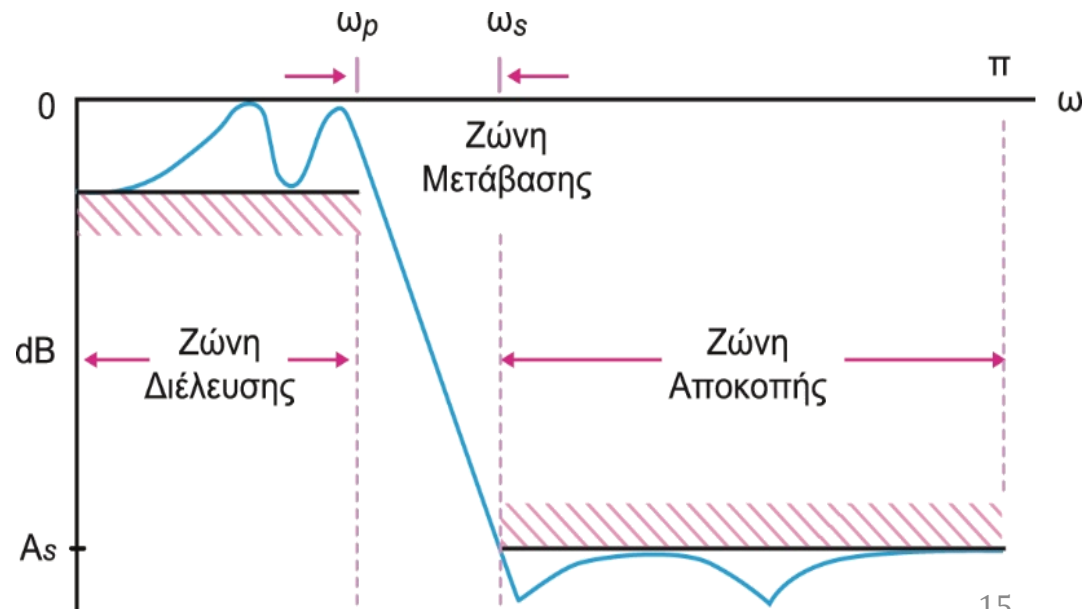
- R_p : κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης (passband ripple):

$$R_p = -20 \log_{10} \left(\frac{1 - \delta_p}{1 + \delta_p} \right) \text{ (dB)}$$

- A_s : εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής (stopband attenuation):

$$A_s = -20 \log_{10} \left(\frac{\delta_s}{1 + \delta_p} \right) \text{ (dB)}$$

- N : τάξη φίλτρου, είναι το μέγιστο αποδεκτό πλήθος συντελεστών $h[n]$.



Φίλτρα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης

Finite Impulse Response
(FIR) Filters

Περιγραφή FIR φίλτρων στο πεδίο του χρόνου

- Περιγράφονται στο πεδίο του χρόνου από την κρουστική απόκριση:

$$h[n] = \sum_{m=0}^{M-1} b[m]\delta[n - m]$$

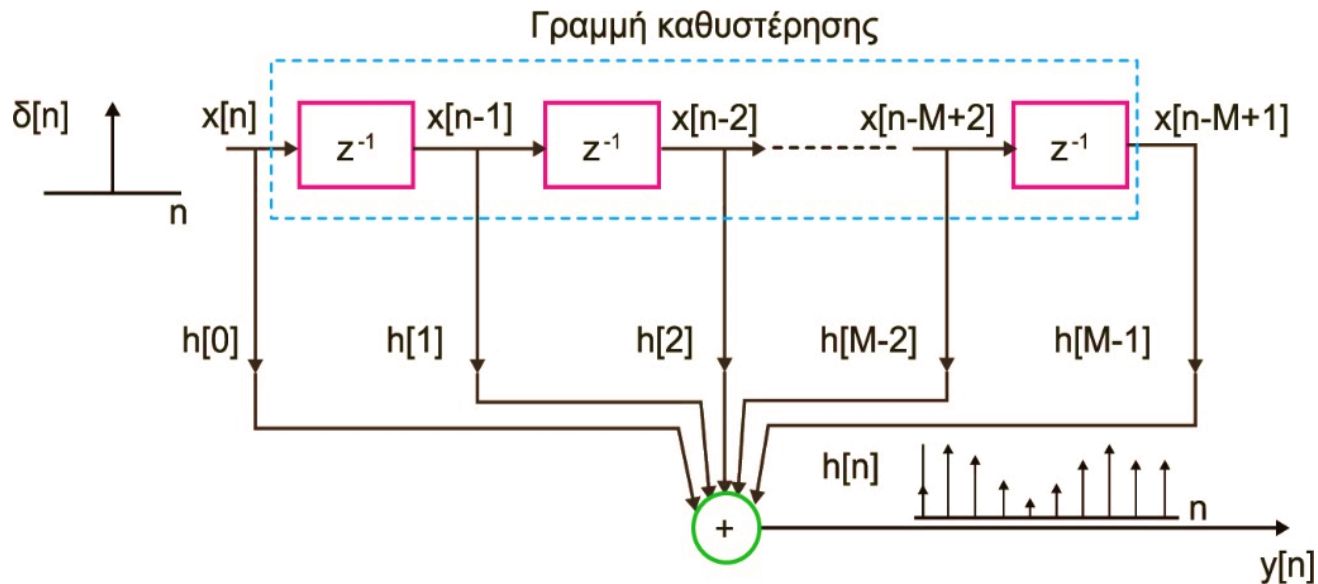
- Και από τη ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M-1} b[m]x[n - m] = \sum_{m=0}^{M-1} h[m]x[n - m]$$

- Η **τάξη** του φίλτρου είναι ίση με το μήκος **M** της κρουστικής απόκρισης.
- Το πλήθος των δειγμάτων εισόδου που πρέπει να αποθηκεύονται για τον υπολογισμό ενός δείγματος εξόδου καθορίζει την **τάξη** του φίλτρου.
- Για κάθε ένα δείγμα εξόδου απαιτούνται **M** πολλαπλασιασμοί και **$M + 1$** προσθέσεις.

FIR φίλτρο σαν «γραμμή καθυστέρησης»

- Θεωρούμε ένα FIR φίλτρο σαν μία **γραμμή καθυστέρησης** (delay line), στην οποία ολισθαίνουν τα δείγματα του σήματος εισόδου $x[n]$ και από τους συντελεστές $h[n]$ που πολλαπλασιάζονται με καθυστερήσεις $x[n - m]$.
- Τα αποτελέσματα των πολλαπλασιασμών προστίθενται για να δώσουν την τελική έξοδο του φίλτρου $y[n]$.
- Π.χ. φίλτρο 10^{ης} τάξης θα αποθηκεύσει δέκα εισερχόμενα δείγματα που προηγούνται του τρέχοντος δείγματος. Όλα τα ένδεκα δείγματα θα επηρεάσουν το δείγμα εξόδου του FIR φίλτρου.



Περιγραφή FIR φίλτρων στο πεδίο της συχνότητας

- Συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} b_m z^{-m}$$

- Απόκριση συχνότητας:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{M-1} h[m] e^{-j\omega m}$$

- Πλεονεκτήματα FIR φίλτρων:

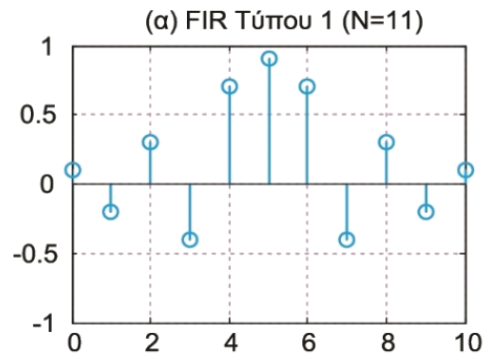
- Πάντα ευσταθή, ακόμα και μετά την αποκοπή δεκαδικών ψηφίων των συντελεστών τους.
- Πάντα γραμμικής φάσης.
- Απλά στη σχεδίαση, υλοποιούνται με απλούς υπολογισμούς.
- Βρίσκουν πολλές πρακτικές εφαρμογές

- Μειονεκτήματα των FIR φίλτρων :

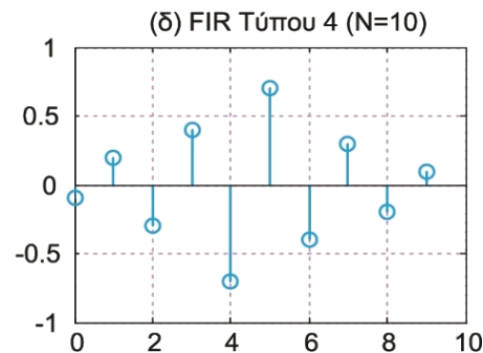
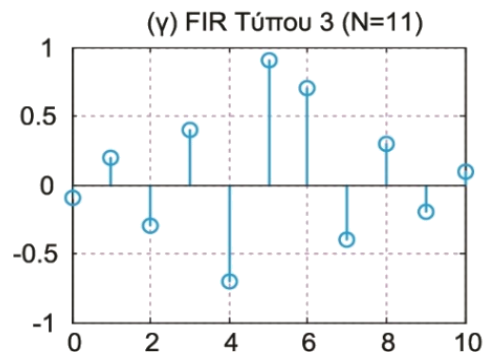
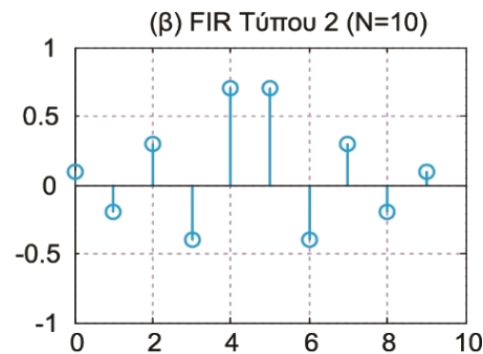
- Υλοποιούνται με περισσότερους υπολογισμούς, επομένως χρειάζονται περισσότερους υπολογιστικούς πόρους.
- Ορισμένες αποκρίσεις, δεν είναι δυνατό να εφαρμοστούν με φίλτρα FIR.

Τύποι FIR Φίλτρων Γραμμικής Φάσης

Τύπος 1: Τάξη N περιττή και η $h[n]$ συμμετρική ως προς το σημείο $(N - 1)/2$.



Τύπος 2: Τάξη N άρτια και $h[n]$ συμμετρική ως προς κεντρικό σημείο που δεν συμπίπτει με κάποια τιμή της $h[n]$.



Τύπος 3: Τάξη N περιττή και $h[n]$ αντισυμμετρική ως προς το σημείο $(N - 1)/2$.

Τύπος 4: Τάξη N άρτια και $h[n]$ αντισυμμετρική ως προς κεντρικό σημείο που δεν συμπίπτει με κάποια τιμή της $h[n]$.

Αποκρίσεις Συχνότητας FIR Φίλτρων

Τύπος 1: Τάξη N περιττή και η $h[n]$ είναι συμμετρική ως προς το σημείο $(N - 1)/2$:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} \sum_{k=1}^{(N+1)/2} c[k] \cos(\omega(k - 1/2))$$
$$c[k] = 2h\left[\frac{N+1}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2}$$

Τύπος 2: Τάξη N άρτια και η $h[n]$ είναι συμμετρική ως προς κεντρικό σημείο που δεν συμπίπτει με κάποια τιμή της $h[n]$:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} \sum_{k=0}^{N/2} c[k] \cos(\omega k)$$
$$c[k] = 2h[N/2 - k], \quad k = 1, 2, \dots, N/2$$
$$c[0] = h[N/2]$$

Αποκρίσεις Συχνότητας FIR Φίλτρων

Τύπος 3: Τάξη N περιττή και η $h[n]$ είναι αντισυμμετρική ως προς το σημείο $(N - 1)/2$:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} \sum_{k=1}^{(N+1)/2} c[k] \sin(\omega(k - 1/2))$$
$$c[k] = 2h \left[\frac{N+1}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2}$$

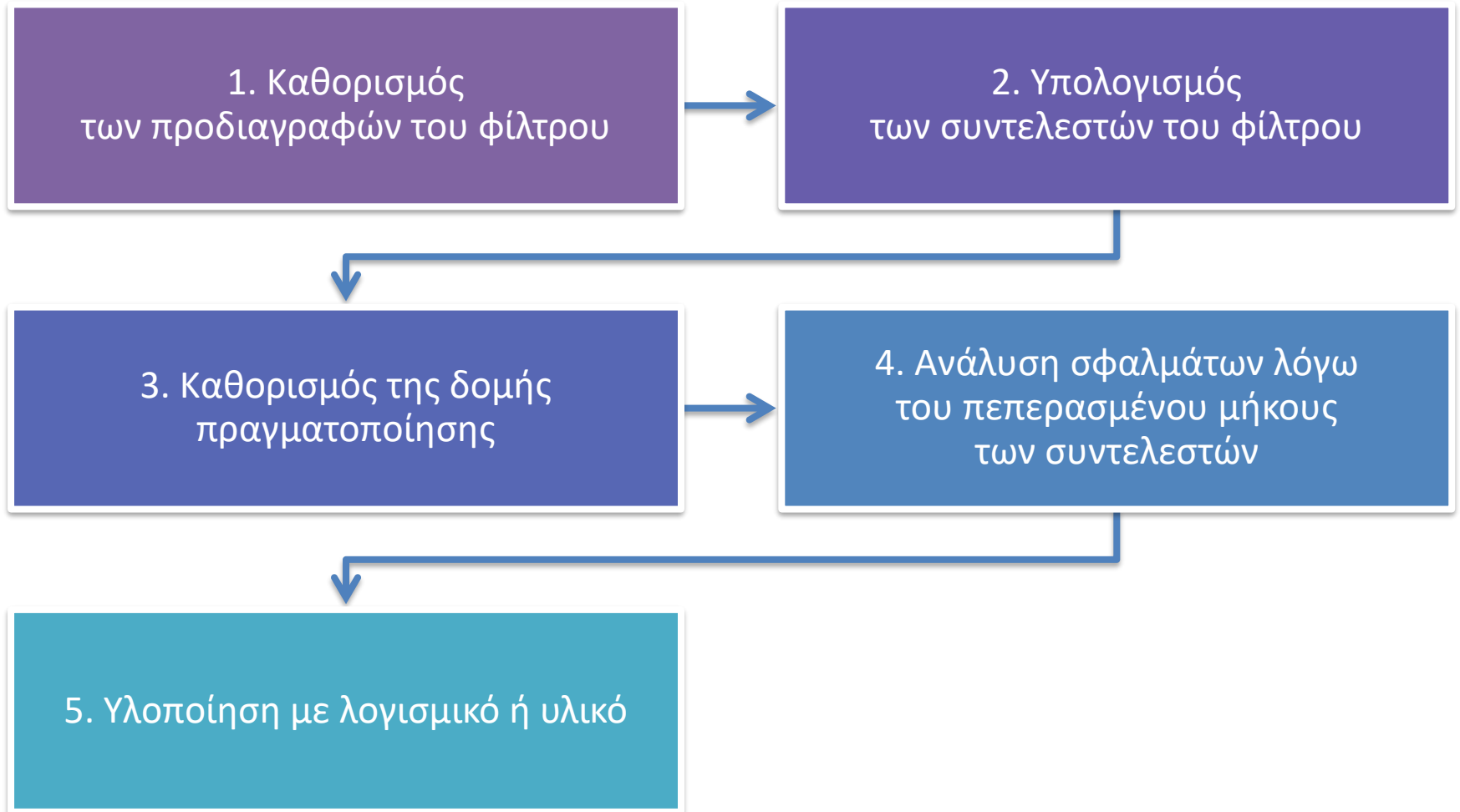
Τύπος 4: Τάξη N άρτια και η $h[n]$ είναι αντισυμμετρική ως προς κεντρικό σημείο που δεν συμπίπτει με κάποια τιμή της $h[n]$:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} \sum_{k=0}^{N/2} c[k] \sin(\omega k)$$
$$c[k] = 2h \left[\frac{N}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

Μέθοδοι Σχεδίασης FIR Φίλτρων

- Μέθοδος Παραθύρων
- Μέθοδος Δειγματοληψίας Συχνότητας
- Βέλτιστη Μέθοδος (Ισοκυματικό Φίλτρο)

Στάδια Υλοποίησης Ψηφιακών Φίλτρων



Μέθοδοι Σχεδίασης FIR Φίλτρων

- Σχεδιασμός φίλτρου = υπολογισμός των συντελεστών $h[n]$ ώστε το φίλτρο να πληροί τις επιθυμητές προδιαγραφές μέτρου και φάσης.
- Μέθοδοι σχεδιασμού FIR φίλτρων :
 - **Μέθοδος παραθύρων** (windows method) - Λόγω της απλότητας και της αποτελεσματικότητάς της, είναι η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη.
 - **Μέθοδος δειγματοληψίας στη συχνότητα** (frequency sampling method) - Εύκολη στην κατανόηση και στη χρήση, αλλά παράγει φίλτρα με χαμηλή εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής.
 - **Μέθοδος βέλτιστης σχεδίασης** (optimal method) - Δίνει την καλύτερη δυνατή απόκριση συχνότητας για συγκεκριμένο πλήθος συντελεστών.
- Όλες οι μέθοδοι μπορούν να παράξουν FIR φίλτρα γραμμικής φάσης.
- Ο υπολογισμός της **τάξης του φίλτρου** προκύπτει από επαναληπτική διαδικασία. Αν η ζώνη μετάβασης του σχεδιασμένου φίλτρου είναι:
 - ευρύτερη από ότι χρειάζεται, τότε **αυξάνεται** η τάξη του φίλτρου.
 - στενότερη από την απαιτούμενη, τότε **μειώνεται** η τάξη του φίλτρου ώστε να εξοικονομηθούν πόροι υλικού ή/και λογισμικού.

Μέθοδος Παραθύρων

Σχεδίαση Φίλτρων FIR Γραμμικής Φάσης με χρήση Παραθύρων

- Έστω ο σχεδιασμός ενός ιδανικού **βαθυπερατού (LPF)** FIR φίλτρου με απόκριση συχνότητας:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\alpha\omega}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- Η κρουστική απόκριση $h_d[n]$ του ιδανικού LPF φίλτρου είναι:

$$h_d[n] = F^{-1}\{H_d(e^{j\omega})\} = \dots = \frac{\sin[\omega_c(n-a)]}{\pi(n-a)}$$

- Περιορίζουμε την γενικά άπειρου μήκους απόκριση $h_d[n]$ με ένα παράθυρο $w[n]$:

$$h[n] = h_d[n] w[n]$$

- Το παράθυρο πρέπει να είναι συμμετρικό (δηλ. $w[n] = w[N-n]$), για να έχουμε γραμμική φάση.
- Μετατοπίζουμε χρονικά την $h[n]$ κατά $n_0 = (N-1)/2$ δείγματα, ώστε το φίλτρο να γίνει αιτιατό.
- Η απόκριση συχνότητας του φίλτρου είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

Κοινά χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις Παραθύρου

- Ορθογώνιο :

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Hamming:

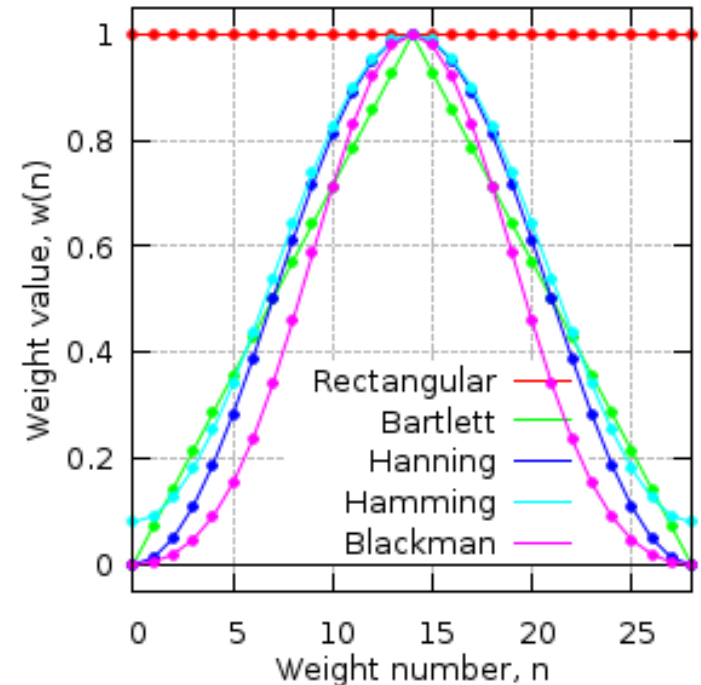
$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Hanning:

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Blackman:

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right), & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



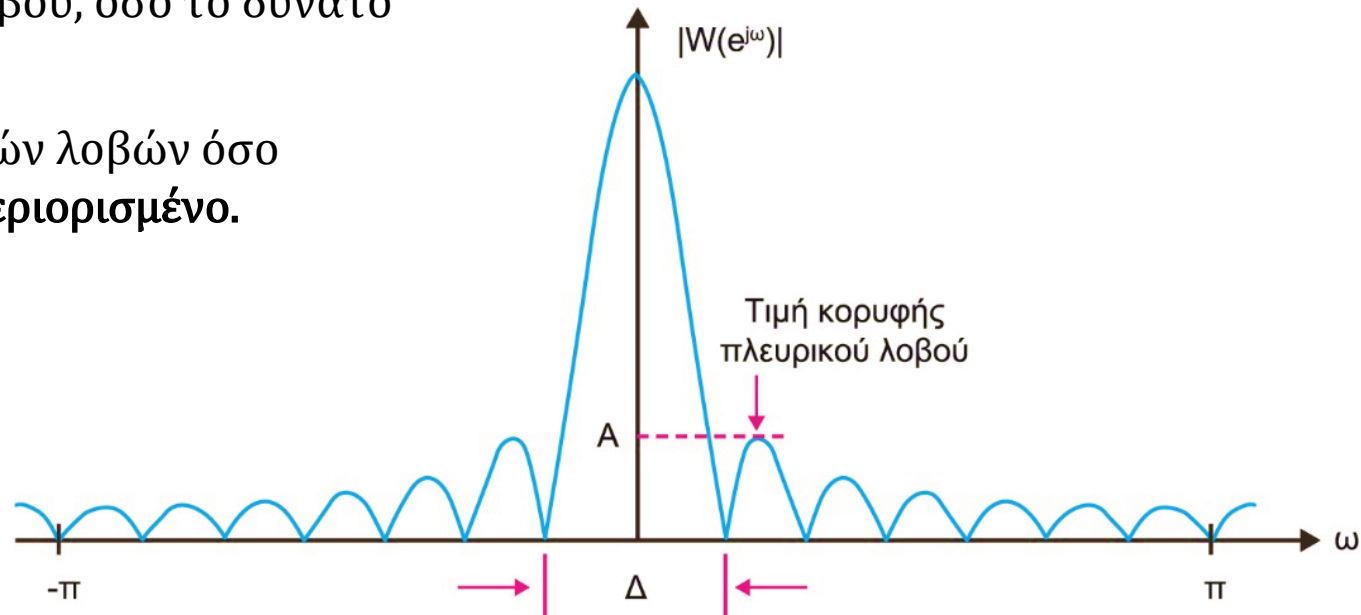
Επιπτώσεις του παραθύρου στα χαρακτηριστικά του φίλτρου

- Το εύρος (Δ) κύριου λοβού της $W(e^{j\omega})$ καθορίζει το εύρος της ζώνης μετάβασης (επιλεκτικότητα φίλτρου, selectivity) στην απόκριση συχνότητας $H_d(e^{j\omega})$.
- Το πλάτος κορυφής (A) του πλευρικού λοβού της $W(e^{j\omega})$ καθορίζει την κυμάτωση (ripple) στην απόκριση συχνότητας $H_d(e^{j\omega})$.

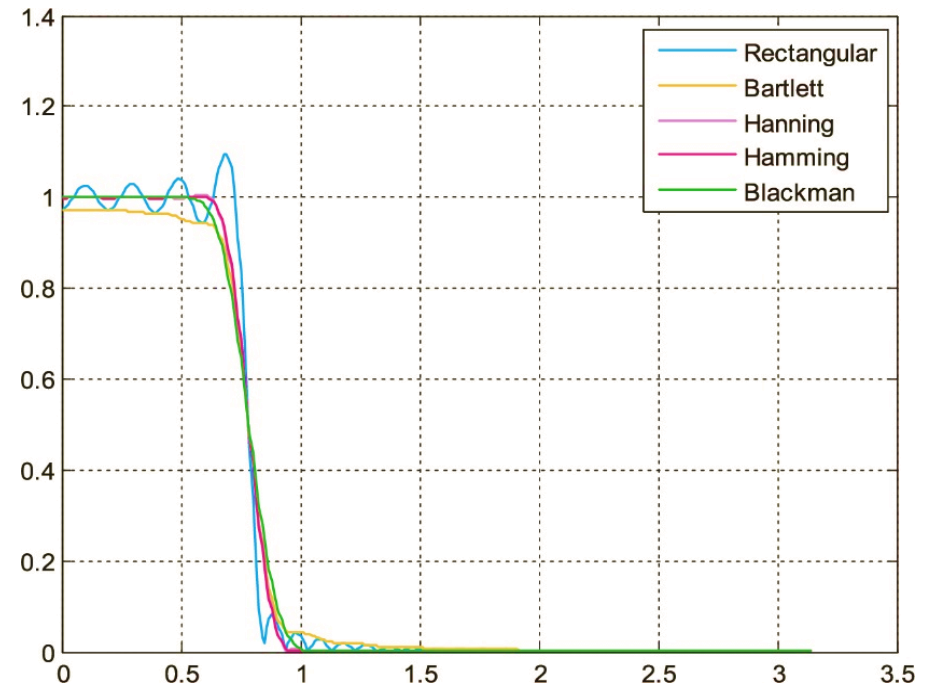
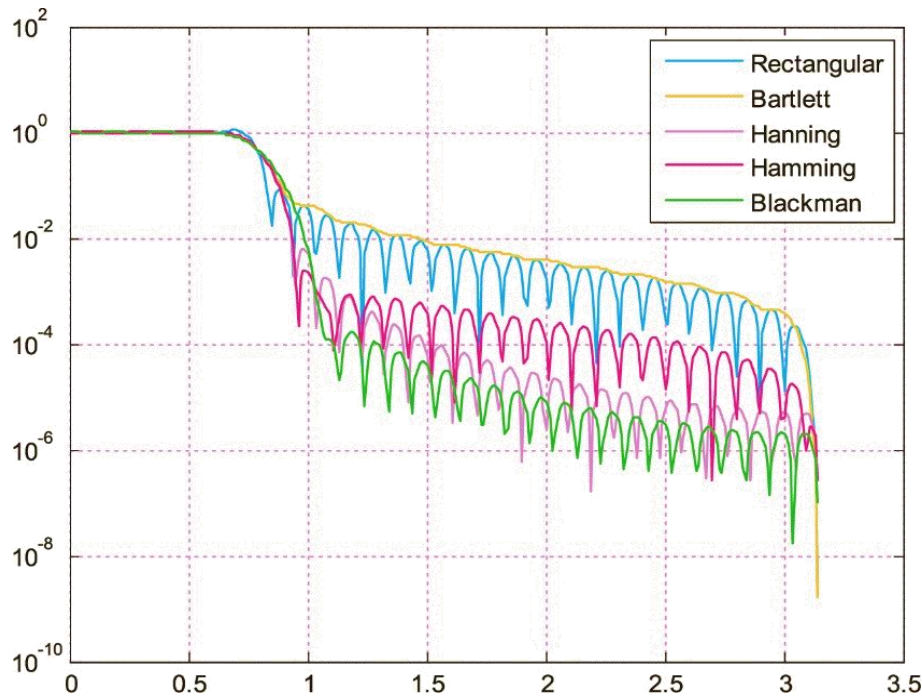
Ιδανικό παράθυρο είναι αυτό που εξασφαλίζει:

- Εύρος κύριου λοβού, όσο το δυνατό **πιο στενό**.
- Πλάτος πλευρικών λοβών όσο το δυνατό **πιο περιορισμένο**.

DTFT τυπικής
συνάρτησης
παραθύρου



Απόκριση συχνότητας κοινά χρησιμοποιούμενων συναρτήσεων παραθύρου



Απόκριση συχνότητας παραθύρων: (α) σε γραμμική, (β) σε ημιλογαριθμική κλίμακα

Σύγκριση χαρακτηριστικών παραθύρων

Τύπος Παραθύρου	Κανονικοποιημένο εύρος κύριου λοβού Δ (N=20)	Ζώνη Μετάβασης (N=20)	Ελάχιστη εξασθένιση ζώνης αποκοπής παραθύρου	Ελάχιστη εξασθένιση ζώνης αποκοπής φίλτρου
Ορθογώνιο	0.1π	0.041π	13 dB	21 dB
Bartlett	0.2π	0.11π	26 dB	26 dB
Hanning	0.21π	0.12π	31 dB	44 dB
Hamming	0.23π	0.14π	41 dB	53 dB
Blackman	0.32π	0.2π	58 dB	75 dB

Σύγκριση χαρακτηριστικών παραθύρων

- **Ορθογώνιο παράθυρο:** πολύ χαμηλή εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής (13 dB). Δεν προτιμάται για τη σχεδίαση FIR φίλτρων.
- Ομοίως και το **τριγωνικό**. Ωστόσο, όταν δεν απαιτούνται υψηλές εξασθενήσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί, διότι παρέχει έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού των συντελεστών του.
- **Hanning:** έχει εντονότερη εξασθένιση από το τριγωνικό, ενώ για τις ίδιες απαιτήσεις εξασθένισης έχει στενότερη περιοχή μετάβασης, το οποίο θεωρείται πλεονέκτημά του.
- **Hamming:** εξασφαλίζει ελάχιστη εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής 53 dB, η οποία είναι επαρκής για τις περισσότερες εφαρμογές. Η ζώνη μετάβασης είναι κάπως μεγαλύτερη από του Hanning. Πολύ δημοφιλές.
- **Blackman:** μαζί με τα παράθυρα Kaiser και Hamming είναι τα πιο δημοφιλή παράθυρα. Η υψηλή εξασθένιση του σχεδιαζόμενου φίλτρου (~75 dB), κάνει αυτό το παράθυρο κατάλληλο για σχεδόν όλες τις εφαρμογές.
- Σε όλες τις περιπτώσεις η **αύξηση της τάξης** του φίλτρου **μειώνει το εύρος της ζώνης μετάβασης**, αλλά **δεν επηρεάζει την εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής**.

Μέθοδος Δειγματοληψίας στη Συχνότητα

Μέθοδος Δειγματοληψίας στη Συχνότητα

- Η επιθυμητή απόκριση συχνότητας $H_d(e^{j\omega})$ του ιδανικού φίλτρου υπόκειται σε δειγματοληψία σε N ισαπέχουσες συχνότητες στην περιοχή συχνοτήτων $[0, 2\pi]$, δηλαδή:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

και παράγεται η ακολουθία $H[k]$:

$$H[k] = H_d(e^{j2\pi k/N}), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

- Η ακολουθία $H[k]$ συνιστά έναν μετασχηματισμό DFT N -σημείων, από την οποία μπορεί να προκύψει η κρουστική απόκριση του προσεγγιστικού φίλτρου.
- Η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ του προσεγγιστικού φίλτρου προκύπτει με παρεμβολή στα δείγματα της $H[k]$ και είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - e^{-j\omega} e^{j2\pi k/N}}$$

- Η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου είναι:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - z^{-1} e^{j2\pi k/N}}$$

Μέθοδος Δειγματοληψίας στη Συχνότητα

- Αν είναι επιθυμητό το φίλτρο να διαθέτει γραμμική φάση, τότε η ακολουθία $H[k]$ πρέπει να έχει συζυγή συμμετρία:

- N: περιττό: $H[k] = H^*[N - k], k = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$

- N: άρτιο: $H[k] = H^*[N - k], H\left[\frac{N}{2}\right] = 0, k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$

- Η προσεγγιστική κρουστική απόκριση $h[n]$ του FIR φίλτρου τάξης $N - 1$ προκύπτει με αντίστροφο μετ. Fourier:

$$h[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j2\pi nk/N}, \quad 0 \leq n < N - 1$$

- Η κρουστική απόκριση $h[n]$ για N άρτιο, (για $n = 0, 1, \dots, N - 1$) είναι:

$$h[n] = \frac{H[0]}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} 2 (-1)^k H[k] \cos\left[\frac{\pi k(1 + 2n)}{N}\right]$$

- Για N περιττό αντικαθιστούμε το άνω όριο του αθροίσματος με $(N - 1)/2$.
- Η προσεγγιστική κρουστική απόκριση $h[n]$ συνδέεται με την ιδανική κρουστική απόκριση $h_d[n]$:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_d[n + kN], \quad 0 \leq n < N - 1$$

Μέθοδος Δειγματοληψίας στη Συχνότητα

- Η παραπάνω διαδικασία έχει τα ακόλουθα αποτελέσματα:
 - Στις συχνότητες για τις οποίες λαμβάνονται τα δείγματα της $H_d(e^{j\omega})$, η διαφορά μεταξύ των $H_d(e^{j\omega})$ και $H(e^{j\omega})$ είναι **μηδενική**, επομένως στις συγκεκριμένες συχνότητες το σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου είναι **μηδενικό**.
 - Στις υπόλοιπες συχνότητες το **σφάλμα προσέγγισης** εξαρτάται από το **σχήμα** της $H_d(e^{j\omega})$ και γίνεται μεγαλύτερο όταν η $H_d(e^{j\omega})$ έχει έντονες μεταβολές.
 - Το σφάλμα προσέγγισης είναι μεγαλύτερο στα **όρια** μεταξύ των ζωνών διέλευσης και αποκοπής του φίλτρου.
- Η μέθοδος δειγματοληψίας στη συχνότητα **δεν διαθέτει έναν εγγενή μηχανισμό ελέγχου του σφάλματος** στις συχνότητες που παρεμβάλλονται μεταξύ των δειγμάτων.
- Έλεγχος του σφάλματος μπορεί να επιτευχθεί με την προσθήκη ενός ή περισσότερων δειγμάτων στις περιοχές μετάβασης και στην εφαρμογή ενός επαναληπτικού αλγορίθμου που μεγιστοποιεί την εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής ή ελαχιστοποιεί την κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης.

Άσκηση 2

Να σχεδιαστεί ένα βαθυπερατό φίλτρο (LPF) με γραμμική φάση, συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 0.4\pi$ και μήκος $N = 10$ συντελεστές.

Απάντηση: Διαιρούμε την περιοχή συχνοτήτων $[0, 2\pi]$ σε $N=10$ ισομεγέθη τμήματα με βάση τη σχέση $\omega_k = (2\pi/10)k = 0.2\pi k$, $k = 0, 1, \dots, 9$.

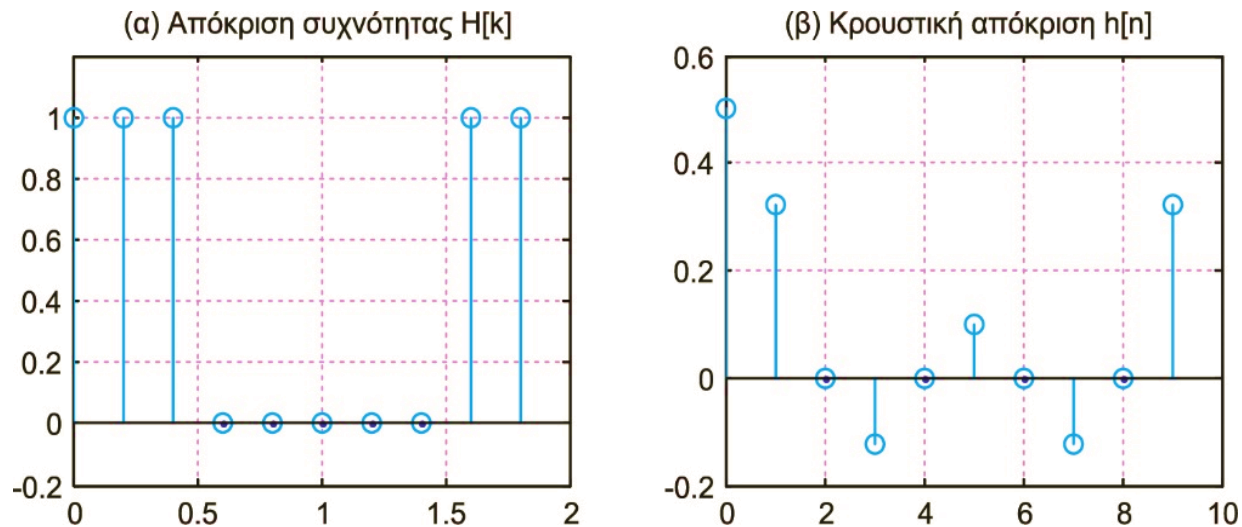
$k = 0,$	$\omega_0 = 0,$	$H[0] = 1$	$k = 5,$	$\omega_5 = \pi,$	$H[5] = 0$
$k = 1,$	$\omega_1 = 0.2\pi,$	$H[1] = 1$	$k = 6,$	$\omega_6 = 1.2\pi,$	$H[6] = 0$
$k = 2,$	$\omega_2 = 0.4\pi,$	$H[2] = 1$	$k = 7,$	$\omega_7 = 1.4\pi,$	$H[7] = 0$
$k = 3,$	$\omega_3 = 0.6\pi,$	$H[3] = 0$	$k = 8,$	$\omega_8 = 1.6\pi,$	$H[8] = 1$
$k = 4,$	$\omega_4 = 0.8\pi,$	$H[4] = 0$	$k = 9,$	$\omega_9 = 1.8\pi,$	$H[9] = 1$

Η κρουστική απόκριση $h[n]$ του προσεγγιστικού φίλτρου για $0 \leq n < 9$ είναι:

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j2\pi nk/N} = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 H[k] e^{j2\pi nk/10} \\ &= \frac{1}{10} (1e^0 + 1e^{j2\pi n/10} + 1e^{j4\pi n/10} + 1e^{j16\pi n/10} + 1e^{j18\pi n/10}) \end{aligned}$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

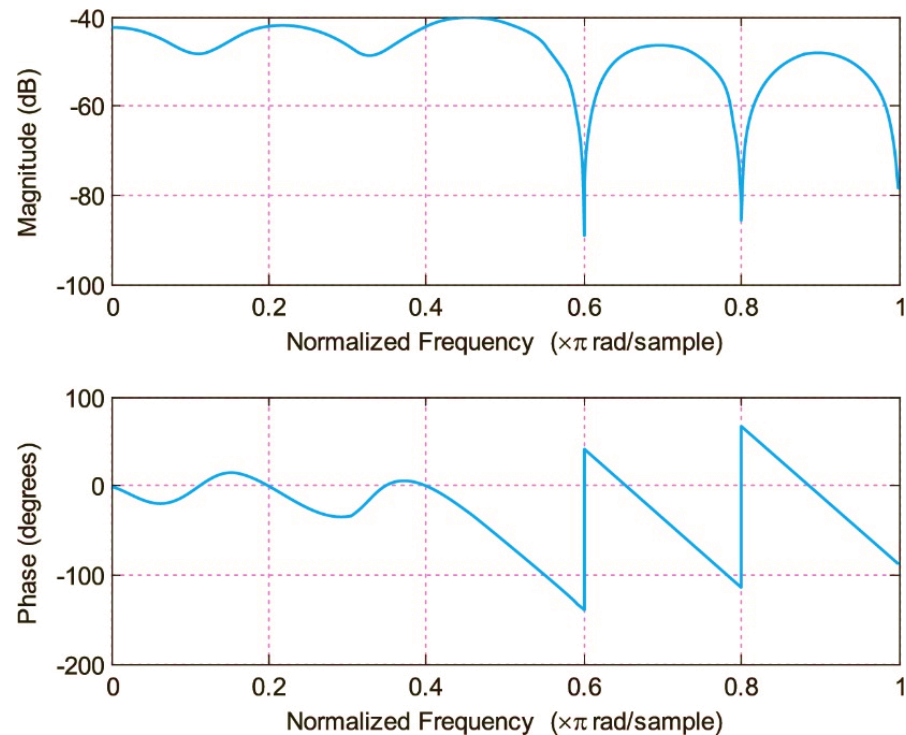
- Με κώδικα Matlab λαμβάνουμε την δειγματοληπτημένη απόκριση συχνότητας και την κρουστική απόκριση του προσεγγιστικού φίλτρου:



- (α) Δειγματοληπτημένη απόκριση συχνότητας (διάστημα $[0, 2\pi]$)
(β) Κρουστική απόκριση προσεγγιστικού φίλτρου

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Με κώδικα Matlab λαμβάνουμε την απόκριση συχνότητας του προσεγγιστικού φίλτρου FIR



- Διαπιστώνουμε φτωχή απόδοση της σχεδίασης, καθώς εμφανίζεται σημαντική κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης ενώ η εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής είναι μόλις ~ 10 dB.
- Βελτιώνουμε την απόδοση της μεθόδου αυξάνοντας την τάξη του φίλτρου. Ωστόσο και για μεγάλες τιμές της τάξης εξακολουθεί να παραμένει κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης και μικρή εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής.
- Μια βελτίωση της μεθόδου βασίζεται στην προσθήκη δειγμάτων στη ζώνη μετάβασης.

Μέθοδος Άριστης Σχεδίασης (Ισοκυματική Μέθοδος)

Μέθοδος Άριστης Σχεδίασης (Ισοκυματική)

- Οι μέθοδοι παραθύρων και δειγματοληψίας συχνότητας **δεν παράγουν βέλτιστα φίλτρα**, επειδή:
 - Δεν προσφέρουν δυνατότητα ελέγχου της κυμάτωσης στη ζώνη διέλευσης και στη ζώνη αποκοπής.
 - Παρουσιάζουν ασάφεια στον καθορισμό των συχνοτήτων αποκοπής των ζωνών διέλευσης και αποκοπής.
 - Παρουσιάζουν αδυναμία για την ομοιόμορφη κατανομή του σφάλματος μεταξύ της ιδανικής και της προσεγγιστικής απόκρισης συχνότητας σε όλες τις ζώνες συχνοτήτων.
- Για να ελεγχθεί η κυμάτωση, υπερκτιμούνται οι προδιαγραφές του φίλτρου, ωστόσο η κυμάτωση εξακολουθεί να είναι **ανομοιόμορφη** στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής.
- Η απαίτηση για **σταθερή και ελεγχόμενη κυμάτωση** στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής οδηγεί στον ορισμό του **ισοκυματικού φίλτρου** (equiripple filter).
- Το ισοκυματικό φίλτρο θεωρείται το βέλτιστο FIR φίλτρο, επειδή επιτυγχάνει τις καλύτερες δυνατές προδιαγραφές στην απόκριση συχνότητας με το μικρότερο πλήθος συντελεστών.

Μέθοδος Άριστης Σχεδίασης (Ισοκυματική)

- Η απόκριση συχνότητας ενός FIR φίλτρου γραμμικής φάσης γράφεται:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega}$$

- Αν το φίλτρο είναι τύπου 1, η απόκριση πλάτους γράφεται ως πολυώνυμο Chebyshev, τάξης L του $\cos\omega$:

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos(k\omega) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) (\cos\omega)^k$$

- Αν $A_d(e^{j\omega})$ και $A(e^{j\omega})$ είναι οι αποκρίσεις πλάτους του ιδανικού και του προσεγγιστικού φίλτρου, ορίζουμε το μεταξύ τους σφάλμα:

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})[A_d(e^{j\omega}) - A(e^{j\omega})]$$

- $W(e^{j\omega})$ μία θετική συνάρτηση στάθμισης, την οποία μπορούμε να ορίσουμε κατάλληλα ώστε να ελέγξουμε την κυμάτωση είτε στη ζώνη διέλευσης είτε στη ζώνη αποκοπής.
- **Αλγόριθμος Parks–McClellan:** επιλογή των κατάλληλων συντελεστών $a(k)$ του φίλτρου ώστε να ελαχιστοποιηθεί η μέγιστη απόλυτη τιμή του σφάλματος $E(e^{j\omega})$ κατά μήκος ενός συνόλου συχνοτήτων (ακροτάτων) στη ζώνη διέλευσης και στη ζώνη αποκοπής, αλλά όχι στη ζώνη μετάβασης (περιοχή αδιαφορίας).
- Μαθηματική διατύπωση:

$$\min_{\alpha[k]} \left| \max_{\omega \in S} |E(e^{j\omega})| \right| \text{ όπου } S \triangleq [0, \omega_p] \cup [\omega_s, \pi]$$

Αλγόριθμος Parks–McClellan

1. Επιλέγουμε ένα αρχικό σύνολο $L + 2$ ακρότατων συχνοτήτων (extrema).
2. Υπολογίζουμε το μέγιστο σταθμισμένο σφάλμα (ε) λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_0) & \dots & \cos(L\omega_0) & 1/W(e^{j\omega_0}) \\ 1 & \cos(\omega_1) & \dots & \cos(L\omega_1) & -1/W(e^{j\omega_1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega_L) & \dots & \cos(L\omega_L) & (-1)^L/W(e^{j\omega_L}) \\ 1 & \cos(\omega_{L+1}) & \dots & \cos(L\omega_{L+1}) & (-1)^{L+1}/W(e^{j\omega_{L+1}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha[0] \\ \alpha[1] \\ \vdots \\ \alpha[L] \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d(e^{j\omega_0}) \\ A_d(e^{j\omega_1}) \\ \vdots \\ A_d(e^{j\omega_L}) \\ A_d(e^{j\omega_{L+1}}) \end{bmatrix}$$

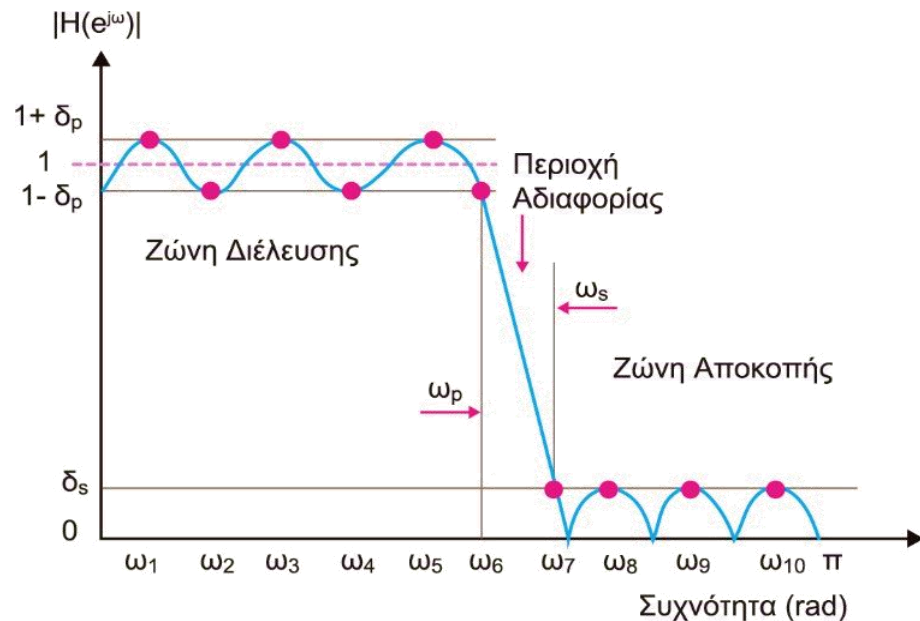
3. Εκτιμούμε τη συνάρτηση σφάλματος $E(e^{j\omega})$ σε όλο το σύνολο συχνοτήτων S , με παρεμβολή Lagrange στις ακρότατες συχνότητες.
4. Βρίσκουμε τα $L + 2$ τοπικά μέγιστα της συνάρτησης $E(e^{j\omega})$ για όλο το σύνολο S και κατόπιν υπολογίζουμε το μέγιστο σταθμισμένο σφάλμα $\max_{\omega \in S} |E(e^{j\omega})|$.
5. Αν το θεώρημα εναλλαγής ικανοποιείται, δηλαδή $\max_{\omega \in S} |E(e^{j\omega})| < \varepsilon$, τότε η επίλυση ολοκληρώθηκε και από το τρέχον σύνολο ακρότατων συχνοτήτων βρίσκουμε τους συντελεστές $h[n]$ του φίλτρου με αντίστροφο DTFT στη συνάρτηση $H(e^{j\omega})$.
6. Αν το θεώρημα εναλλαγής δεν ικανοποιείται, δηλαδή $\max_{\omega \in S} |E(e^{j\omega})| > \varepsilon$, τότε προσθέτουμε νέες συχνότητες στα σημεία που η συνάρτηση $E(e^{j\omega})$ έχει τοπικά μέγιστα και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία από το βήμα 2.

Μέθοδος Άριστης Σχεδίασης (Ισοκυματική)

- Ο αλγόριθμος κρατά σταθερές τις ποσότητες N , ω_p και ω_s με σκοπό να ελέγχει τα όρια των ζωνών και επιτρέπει τη μεταβολή των δ_p και δ_s .
- Ο σχεδιαστής μπορεί να γνωρίζει εκ των προτέρων το πλήθος των συντελεστών που απαιτούνται.

Με τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης **Park - McClellan**:

- Υποθέτουμε ότι τα ακρότατα συχνοτήτων (extrema) είναι ομοιόμορφα τοποθετημένα στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής.
- Εκτελούμε πολυωνυμική παρεμβολή και επαναπροσδιορίζουμε τις θέσεις των τοπικών ακρότατων.
- Μετακινούμε τα ακρότατα σε νέες θέσεις και επαναλαμβάνουμε μέχρι τα ακρότατα να σταματήσουν να μετακινούνται.



Προσδιορισμός τάξης φίλτρου

- Ο προσδιορισμός της κατάλληλης τάξης N του FIR φίλτρου είναι το αρχικό βήμα για τον σχεδιασμό του φίλτρου.
- Για FIR φίλτρα γραμμικής φάσης έχουν προταθεί διάφοροι εμπειρικοί τύποι. Ο απλούστερος είναι ο τύπος Kaiser:

$$N = \frac{-20 \log_{10}(\sqrt{\delta_p \delta_s}) - 13}{2.285 (\omega_s - \omega_p)} - 1$$

- Στη βιβλιογραφία αναφέρονται και άλλοι προσεγγιστικοί τύποι υπολογισμού της τάξης.
- Κατά την έναρξη του αλγόριθμου Parks - McClellan δίνεται μία αρχική τιμή στην τάξη του φίλτρου, η οποία στη συνέχεια ενδέχεται να αλλάξει καθώς η τάξη συνδέεται αντιστρόφως ανάλογα με το μέγιστο σταθμισμένο σφάλμα.

Μελέτη Ακολουθιών Παραθύρων

- Ορθογώνιο Παράθυρο
- Τριγωνικό Παράθυρο (Bartlett)
- Παράθυρο Hanning
- Παράθυρο Hamming
- Παράθυρο Blackman
- Παράθυρο Kaiser

Διαδικασία «παραθύρωσης» σήματος

- Στην ενότητα αυτή θα διερευνηθεί αν η χρήση παραθύρου για τον τεμαχισμό του σήματος σε επιμέρους τμήματα επιδρά στο φασματικό περιεχόμενο του σήματος.
- **Παραθύρωση:** $x_w[n] = x[n] w[n]$, όπου $x[n]$ σήμα διακριτού χρόνου, $w[n]$ παράθυρο και $x_w[n]$ το «παραθυρωμένο» τμήμα του σήματος.
- Ο DTFT του σήματος $x_w[n]$ είναι: $X_w(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$, όπου $X_w(e^{j\theta})$ και $W(e^{j\theta})$ είναι οι DTFT των σημάτων $x_w[n]$ και $w[n]$, αντίστοιχα.
- **Φασματική Διάχυση:** Η «παραθύρωση» προκαλεί τη **διεύρυνση** του φάσματος του αρχικού σήματος κατά το ενεργό εύρος ζώνης του φάσματος της ακολουθίας παραθύρου.
- Όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος της ακολουθίας παραθύρου, τόσο μικρότερο είναι το ενεργό εύρος ζώνης του και επομένως τόσο μικρότερη είναι και η φασματική διάχυση.
- Άρα για τη μείωση της φασματικής διάχυσης απαιτείται η αύξηση του μήκους της ακολουθίας παραθύρου.

Ορθογώνιο Παράθυρο

- Ορθογώνιο παράθυρο (rectangular, boxcar) μήκους N σημείων

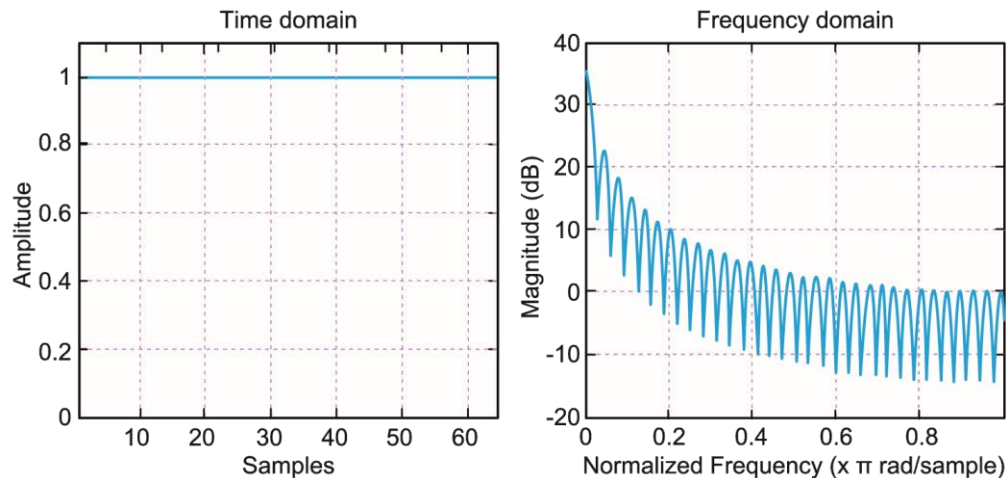
$$w[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- DTFT:

$$W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left[\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right]$$

- Απόκριση πλάτους:

$$W_r(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$



Ορθογώνιο παράθυρο και φάσμα πλάτους (απολαβή, dB) ($N = 64$)

Ορθογώνιο Παράθυρο

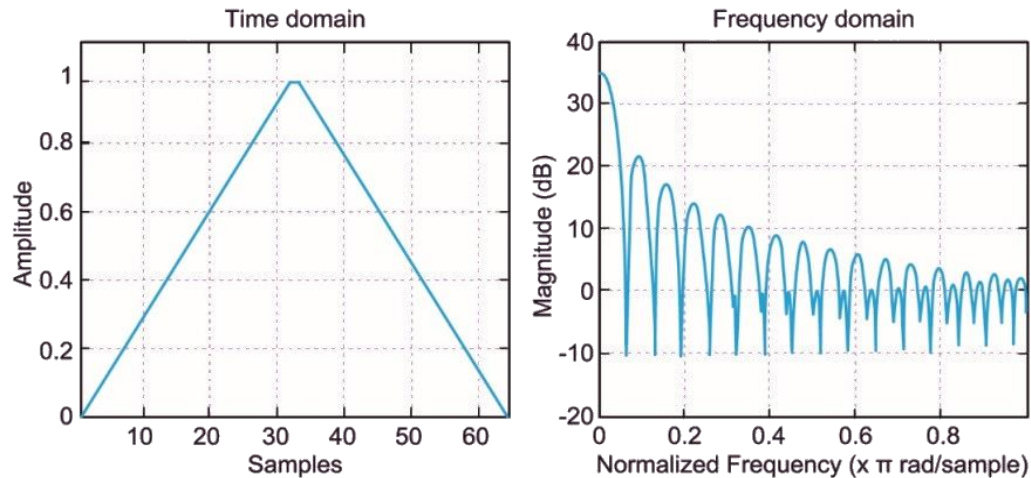
- Η απόκριση πλάτους $W_r(\omega)$ έχει έναν κεντρικό λοβό και πολλούς πλευρικούς, που οφείλονται στον όρο $\sin(\omega N/2) / \sin(\omega/2)$.
- Εύρος ζώνης συχνοτήτων κεντρικού λοβού = $4\pi/N$ - Πλάτος = N .
- Το πλάτος του πρώτου πλευρικού λοβού είναι $\sim 2N/3\pi$ (μικρότερο κατά 13,3 dB από το πλάτος κύριου λοβού). Οι υπόλοιποι πλευρικοί λοβοί εξασθενούν με ρυθμό ανάλογο του $1/\omega$ (6 dB/οκτάβα).
- Οι πλευρικοί λοβοί προκαλούν κυματώσεις στο φάσμα του παραθύρου, δηλαδή **διαρροή ενέργειας** (energy leakage) από τον κεντρικό στους πλευρικούς λοβούς. Αυτό προκαλεί την εμφάνιση συχνοτήτων που δεν υπήρχαν στο αρχικό σήμα (αλλοίωση).
- Η διαρροή εξαρτάται από τη σχέση πλάτους μεταξύ του κεντρικού και των πλευρικών λοβών. Όσο μεγαλύτερη είναι αυτή η σχέση, τόσο μικρότερη είναι η διαρροή ενέργειας.
- Για μειωθεί η διαρροή ενέργειας απαιτείται να αυξηθεί ο βαθμός εξασθένισης του πλάτους των πλευρικών λοβών. Η απαίτηση αυτή όμως έρχεται σε αντίθεση με την απαίτηση για τη μείωση της φασματικής διάχυσης.
- Όταν η διάρκεια του παραθύρου τείνει στο άπειρο, το πλάτος των πλευρικών λοβών τείνει στο μηδέν και το φάσμα του παραθύρου τείνει στην κρουστική συνάρτηση $\delta(\omega)$. Επομένως, δεν υπάρχει καμία φασματική επίδραση στο σήμα (ιδανικό παράθυρο). Όμως το παράθυρο αυτό δεν έχει καμία πρακτική χρησιμότητα, καθώς δεν τεμαχίζει το σήμα σε τμήματα.

Τριγωνικό Παράθυρο

- Τριγωνικό παράθυρο:

$$w[n] = 1 - \frac{2 \left| n - \frac{N-1}{2} \right|}{N-1}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- Η διαφορά μεταξύ του πλάτους του κεντρικού και του πρώτου πλευρικού λοβού είναι -26.5 dB, το εύρος ζώνης του κεντρικού λοβού είναι -26.5 dB, το εύρος ζώνης του κεντρικού λοβού είναι $8\pi/N$ και ο ρυθμός εξασθένισης των πλευρικών λοβών είναι 12 dB.



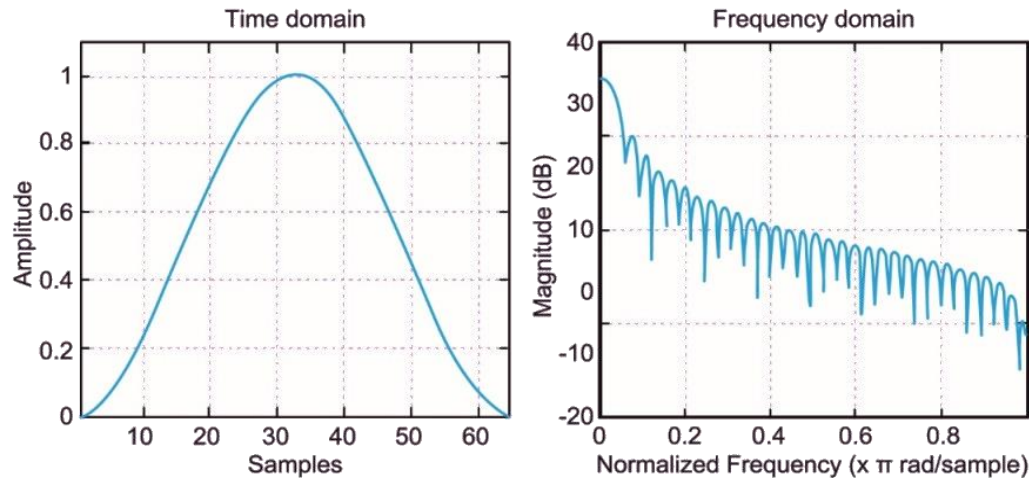
Τριγωνικό παράθυρο και φάσμα πλάτους ($N = 64$)

Παράθυρο Hanning

- Παράθυρο Hanning:

$$w[n] = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right], \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- Η διαφορά μεταξύ του πλάτους του κεντρικού και του πρώτου πλευρικού λοβού είναι -31.5 dB, το εύρος ζώνης του κεντρικού λοβού είναι $8\pi/N$ και ο ρυθμός εξασθένισης των πλευρικών λοβών είναι 18 dB/οκτάβα.



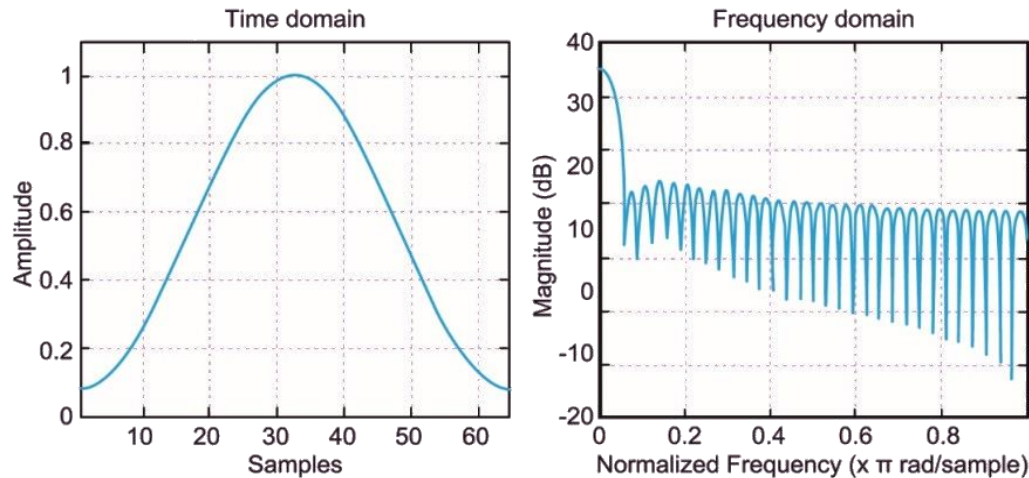
Παράθυρο Hanning και φάσμα πλάτους ($N = 64$)

Παράθυρο Hamming

- Παράθυρο Hamming:

$$w[n] = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- Η διαφορά μεταξύ του πλάτους του κεντρικού και του πρώτου πλευρικού λοβού είναι -42.7 dB, το εύρος ζώνης του κεντρικού λοβού είναι $8\pi/N$ και ο ρυθμός εξασθένισης των πλευρικών λοβών είναι 6 dB/οκτάβα.



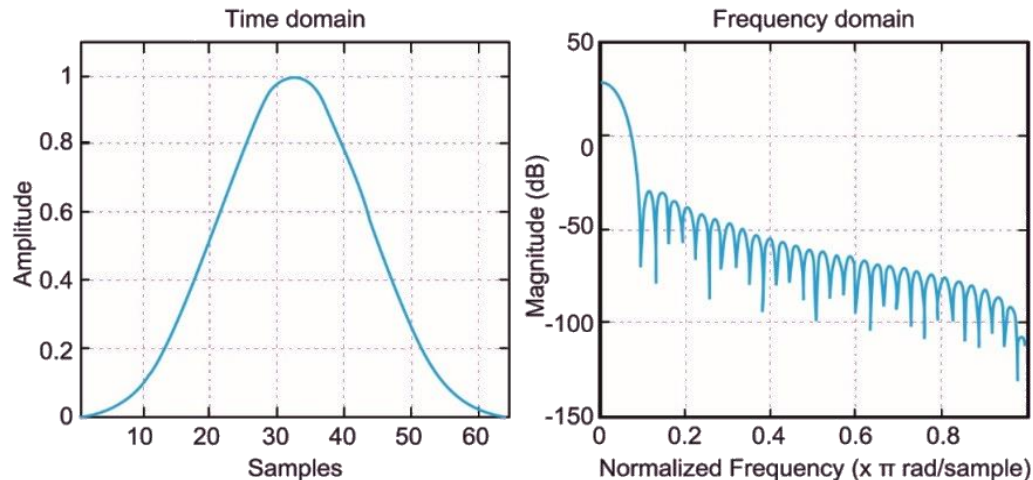
Παράθυρο Hamming και φάσμα πλάτους ($N = 64$)

Παράθυρο Blackman

- Παράθυρο Blackman:

$$w[n] = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- Η διαφορά μεταξύ του πλάτους του κεντρικού και του πρώτου πλευρικού λοβού είναι -58.1 dB, το εύρος ζώνης του κεντρικού λοβού είναι $12\pi/N$ και ο ρυθμός εξασθένισης των πλευρικών λοβών είναι 18 dB/οκτάβα.



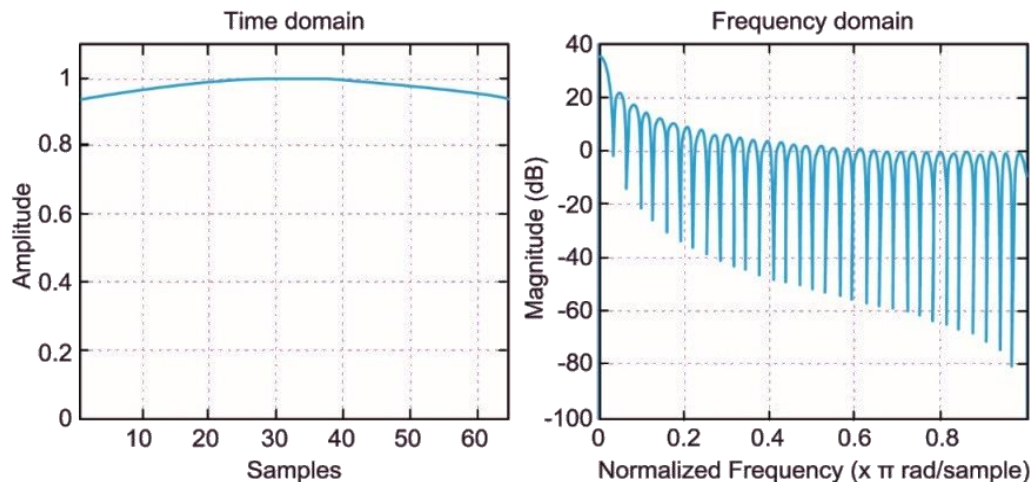
Παράθυρο Blackman και φάσμα πλάτους ($N = 64$)

Παράθυρο Kaiser

- Παράθυρο Kaiser:

$$w[n] = \frac{I_0 \left[\beta \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2N}{N-1}\right)^2} \right]}{I_0(\beta)}, \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

- $I_0(\beta)$ τροποποιημένη συνάρτηση Bessel μηδενικού βαθμού
- β παράμετρος που εξαρτάται από το N και επιλέγεται ώστε να επιτυγχάνονται διάφορα πλάτη της ζώνης μετάβασης και σχεδόν άριστη εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής.
- Για $\beta = 0$ το παράθυρο Kaiser μετατρέπεται σε ορθογώνιο παράθυρο.
- Η διαφορά μεταξύ του πλάτους του κεντρικού και του πρώτου πλευρικού λοβού: 25 dB,



Σύνοψη Χαρακτηριστικών Παραθύρων

Ακολουθία Παραθύρου	Εύρος κύριου λοβού	Ρυθμός εξασθένισης πλευρικών λοβών (dB)	Πλάτος μέγιστου πλευρικού λοβού (dB)
Ορθογώνιο	$4\pi/N$	-6	-13.3
Bartlett	$8\pi/N$	-12	-26.5
Hanning	$8\pi/N$	-18	-31.5
Hamming	$8\pi/N$	-6	-42.7
Blackman	$12\pi/N$	-18	-58.1