Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 6: Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT)

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Σειρές Fourier Σημάτων Διακριτού Χρόνου
- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT)
  - Ευθύς και Αντίστροφος DTFT
  - Πρακτική Χρησιμότητα DTFT
  - Χρήσιμα Ζεύγη DTFT
- Ιδιότητες DTFT
  - Περιοδικότητα
  - Συμμετρία και Συζυγία
  - Γραμμικότητα
  - Αντιστροφή στο Χρόνο
  - Μετατόπιση στο Χρόνο
  - Μετατόπιση στη Συχνότητα
  - Διαφόριση στη Συχνότητα
  - Θεώρημα Συνέλιξης
  - Περιοδική Συνέλιξη
  - Συσχέτιση
  - Θεώρημα Parseval

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Αντίστροφος DTFT
- Σχέση DTFT με άλλους Μετασχηματισμούς
    - Με τον μετασχηματισμό Fourier
    - Με τον μετασχηματισμό Z
- Μετατροπή ρυθμού δειγματοληψίας
    - Υποδειγματοληψία
    - Υπερδειγματοληψία
    - Μετατροπή ρυθμού δειγματοληψίας κατά ρητό συντελεστή

Σειρές Fourier
Σημάτων Διακριτού Χρόνου

Σειρές Fourier Σημάτων Διακριτού Χρόνου

Ένα περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ με περίοδο N και θεμελιώδη συχνότητα $\omega_0 = 2\pi/N$, αναλύεται σε **εκθετική σειρά Fourier** με τη σχέση:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

όπου οι συντελεστές $X[k]$ της εκθετικής σειράς Fourier υπολογίζονται από τη σχέση:

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

Σειρές Fourier Σημάτων Διακριτού Χρόνου

Αν η είσοδος ενός ΓΑΚΜ συστήματος είναι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα $x[n] = Ae^{jn\omega_0}, -\infty < n < +\infty$, συχνότητας ω_0, τότε η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη συνέλιξη:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\ Ae^{j\omega_0(n-k)} = Ae^{jn\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} = H\left(e^{j\omega_0}\right) x[n]$$

όπου $H\left(e^{j\omega_0}\right)$ είναι η τιμή της απόκρισης συχνότητας του συστήματος στη συχνότητα ω_0.

Αν η είσοδος του συστήματος είναι ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{j\omega_0 n}$ τότε η έξοδος του συστήματος θα είναι:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{j\omega_0 n}\, H\left(e^{j\omega_0}\right)$$

Επομένως, η ανάλυση ενός περιοδικού σήματος σε μορφή εκθετικής σειράς Fourier, μας δίνει τη δυνατότητα εύκολου υπολογισμού της εξόδου ΓΑΚΜ συστημάτων διακριτού χρόνου.

Παρατηρήσεις (1/2)

- Η ανάλυση ενός πραγματικού περιοδικού ΣΔΧ σε σειρές Fourier μας επιτρέπει να γράψουμε το σήμα αυτό ως ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών διακριτού χρόνου ή ισοδύναμα ως άθροισμα ημιτόνων που βρίσκονται σε συζυγή ζεύγη.
- Το ανάπτυγμα σειράς Fourier ενός περιοδικού ΣΔΧ **συγκλίνει πάντα**, καθώς αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος όρων σύμφωνα με τον ορισμό του.
- Επειδή οι διακριτές σειρές Fourier συγκλίνουν πάντα, δεν εμφανίζεται το φαινόμενο Gibbs.
- Τόσο η ακολουθία του σήματος $x[n]$ όσο και των συντελεστών $X[k]$ είναι **περιοδικές ακολουθίες** με την ίδια περίοδο N.
- Ένα **μη-περιοδικό** σήμα (συνεχούς ή διακριτού χρόνου) έχει **συνεχές φάσμα**.
- Ένα **περιοδικό σήμα** (συνεχούς ή διακριτού χρόνου) έχει **διακριτό φάσμα**.

Παρατηρήσεις (2/2)

- Το γεγονός ότι μπορούμε να περιγράφουμε ένα περιοδικό σήμα (συνεχούς ή διακριτού χρόνου) και το φάσμα του σε διακριτή μορφή, έχει μεγάλη πρακτική αξία, επειδή μπορεί εύκολα να υλοποιηθεί σε υπολογιστή.
- Τα διανύσματα βάσης $e^{-j(2\pi/N)kn}$ και $e^{j(2\pi/N)kn}$ είναι περιοδικά με περίοδο N και είναι **ορθοκανονικά** σε μια περίοδο, δηλαδή ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\left[e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}\right]^{*} = \begin{cases}1 & m=k\\ 0 & m\neq k\end{cases}$$

- Ο όρος ορθοκανονικά σημαίνει ότι τα διανύσματα βάσης $e^{-j(2\pi/N)kn}$ και $e^{j(2\pi/N)mn}$ είναι **ορθογώνια** όταν $m \neq k$, δηλαδή το άθροισμά τους σε μία περίοδο είναι μηδέν. Επίσης είναι και **κανονικά** δηλαδή για $m = k$ το ίδιο άθροισμα είναι ένα.
- Ομοίως, ορθοκανονικά είναι και τα διανύσματα $\cos(2\pi/N)n$ και $\sin(2\pi/N)n$.

Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Διακριτού Χρόνου (DTFT)

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (Discrete Time Fourier Transform – DTFT) εφαρμόζεται επί **διακριτών σημάτων** και παράγει την (συνήθως μιγαδική) αναπαράστασή τους στο **πεδίο της συχνότητας** (frequency domain).

- Αν $x[n]$ ένα διακριτό σήμα, τότε ο **ευθύς DTFT** ορίζεται από τη σχέση:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}, \qquad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

- Η ψηφιακή (κυκλική) συχνότητα ω (rad) είναι μία συνεχής μεταβλητή που προκύπτει από τη σχέση $\boldsymbol{\omega = \Omega T_s}$, όπου Ω (rad/sec) είναι η αναλογική (κυκλική) συχνότητα.

- Για να υπολογίζεται ο DTFT πρέπει το άθροισμα να **συγκλίνει** κατά απόλυτη τιμή, δηλαδή:

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\, e^{-jn\omega}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| = S < \infty$$

- Σε επόμενη ενότητα θα δείξουμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε τον DTFT σημάτων που δεν είναι απόλυτα αθροίσιμα, δηλαδή δεν ικανοποιούν την παραπάνω σχέση.

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Η συνάρτηση $X(e^{j\omega})$ είναι γενικά **μιγαδική**.
- **Καρτεσιανή μορφή**:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$X_R(e^{j\omega})$ και $X_I(e^{j\omega})$ είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος του DTFT.

- **Πολική μορφή** :

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi_x(\omega)}$$

  - Πλάτος (μέτρο):

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}$$

  - Φάση:

$$\varphi_X(\omega) = tan^{-1}\left[\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}\right]$$

- Οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων ονομάζονται **φάσμα πλάτους** (magnitude spectrum) και **φάσμα φάσης** (phase spectrum),

Φασματικές Συμμετρίες του DTFT

Αν το σήμα $x[n]$ είναι πραγματικό τότε τα φάσματά του έχουν τις ίδιες ιδιότητες **φασματικής συμμετρίας** με αυτές των φασμάτων σημάτων συνεχούς χρόνου, δηλαδή:

- Το πλάτος $|X(e^{j\omega})|$ και το πραγματικό μέρος $Re\{X(e^{j\omega})\}$ είναι άρτιες συναρτήσεις της συχνότητας ω,
- Η φάση $\measuredangle X(e^{j\omega})$ και το φανταστικό μέρος $Im\{X(e^{j\omega})\}$ είναι περιττές συναρτήσεις της συχνότητας ω,

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|X\left(-e^{j\omega}\right)\right|$$

$$Re\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\} = Re\{X(-e^{j\omega})\}$$

$$\measuredangle X\left(e^{j\omega}\right) = -\measuredangle X\left(-e^{j\omega}\right)$$

$$Im\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\} = -Im\{X(-e^{j\omega})\}$$

- Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) είναι **περιοδική συνάρτηση**. Η περιοδικότητα του DTFT οφείλεται στο γεγονός ότι τα διακριτού χρόνου μιγαδικά εκθετικά σήματα όταν διαφέρουν στη συχνότητα κατά πολλαπλάσια του 2π, είναι μεταξύ τους ταυτόσημα.

Αντίστροφος DTFT

- Ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου** (IDTFT) παράγει την ακολουθία $x[n]$ όταν είναι γνωστή η συνάρτηση $X\left(e^{j\omega}\right)$, από τη σχέση:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{jn\omega}\, d\omega$$

- Ο αντίστροφος DTFT μπορεί να θεωρηθεί ως η ανάλυση του σήματος $x[n]$ σε έναν γραμμικό συνδυασμό όλων των μιγαδικών εκθετικών όρων που έχουν συχνότητες στο διάστημα $-\pi < \omega < +\pi$.

- **Συμβολισμοί DTFT** (ευθύ και αντίστροφου):
  - $X\left(e^{j\omega}\right) = DTFT\{[x[n]\}$
  - $x[n] = DTFT^{-1}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$
  - $x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X\left(e^{j\omega}\right)$

Πρακτική χρησιμότητα του DTFT

- Μετατρέπει την υπολογιστικά δύσκολη πράξη της συνέλιξης, στην υπολογιστικά απλή πράξη του πολλαπλασιασμού.
- Χρησιμοποιείται για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές (ΓΕΔΣΣ).
- Ο DTFT της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ ενός ΓΑΚΜ συστήματος, δίνει την απόκριση συχνότητας $H\left(e^{j\omega}\right)$ του συστήματος.

Άσκηση 1

Να βρεθεί ο DTFT του σήματος διακριτού χρόνου $x[n] = \{1, -\hat{1}, 0, 4, 2\}$

Απάντηση: Από τον ορισμό του DTFT έχουμε:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jn\omega}$$

$$= 1e^{-j(-1)\omega} + (-1)e^{-j0\omega} + 0e^{-j1\omega} + 4e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega}$$

$$= 1e^{j\omega} + (-1)1 + 0 + 4e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega}$$

$$= e^{j\omega} - 1 + 4e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega}$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί ο DTFT των σημάτων διακριτού χρόνου:

(α) $x[n] = \delta[n]$ (β) $x[n] = \delta[n - n_0]$

<u>Απάντηση</u>: (α) Υπολογίζουμε τον DTFT από τον ορισμό του:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \Delta\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]\, e^{-jn\omega} = \delta[0]e^{0} = 1$$

- Η μοναδιαία κρουστική $\delta[n]$ έχει DTFT με μοναδιαίο πλάτος και μηδενική φάση για όλες τις συχνότητες. Δηλαδή η ακολουθία $\delta[n]$ περιέχει ισόποσα όλες τις (άπειρες) συχνότητες στο διάστημα $-\pi < \omega < \pi$.

(β) Ομοίως με την περίπτωση (α) έχουμε:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]\, e^{-jn\omega} = \delta[n_0]e^{-jn_0\omega} = e^{-jn_0\omega}$$

- Στην περίπτωση αυτή ο DTFT έχει μοναδιαίο πλάτος (όπως και πριν), αλλά η φάση του είναι πλέον μη-μηδενική και ανάλογη της συχνότητας για όλες τις (άπειρες) συχνότητες στο διάστημα $-\pi < \omega < \pi$.

Άσκηση 3

Να βρεθεί ο DTFT του σήματος διακριτού χρόνου $x[n] = \alpha^n\, u[n], \qquad |\alpha| < 1$

Απάντηση: Ο DTFT είναι:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n\, u[n]\, e^{-jn\omega}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha\, e^{-j\omega}\right)^n$$

Επειδή $|\alpha| < 1$, το άθροισμα συγκλίνει, άρα ο DTFT είναι:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{e^{-j\omega}(e^{j\omega} - a)} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a} = \frac{1}{1 - a\cos\omega + ja\sin\omega}$$

Το μέτρο (πλάτος) του μετασχηματισμού είναι:

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\omega}}$$

και η φάση:

$$\varphi_X(\omega) = tan^{-1}\left(\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-a\sin\omega}{1 - \alpha\cos\omega}\right) = -tan^{-1}\left(\frac{a\sin\omega}{1 - \alpha\cos\omega}\right)$$

όπου $X_R(e^{j\omega})$ και $X_I(e^{j\omega})$ είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος του DTFT.

Άσκηση 4

Να βρεθεί ο DTFT του σήματος διακριτού χρόνου $x[n] = -\alpha^n\, u[-n-1]$, $|\alpha| > 1$

Απάντηση: Ο DTFT είναι:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jn\omega} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n\, u[-n-1]\, e^{-jn\omega}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n e^{-jn\omega} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha^{-1}\, e^{j\omega}\right)^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha^{-1}\, e^{j\omega}\right)^n$$

Επειδή $|\alpha| > 1$, το άθροισμα συγκλίνει, άρα ο DTFT είναι:

$$X(e^{j\omega}) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} e^{-j\omega}} = \frac{\alpha^{-1} e^{j\omega}}{1 - a^{-1} e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - a\, e^{-j\omega}}$$

Το μέτρο (πλάτος) του μετασχηματισμού είναι:

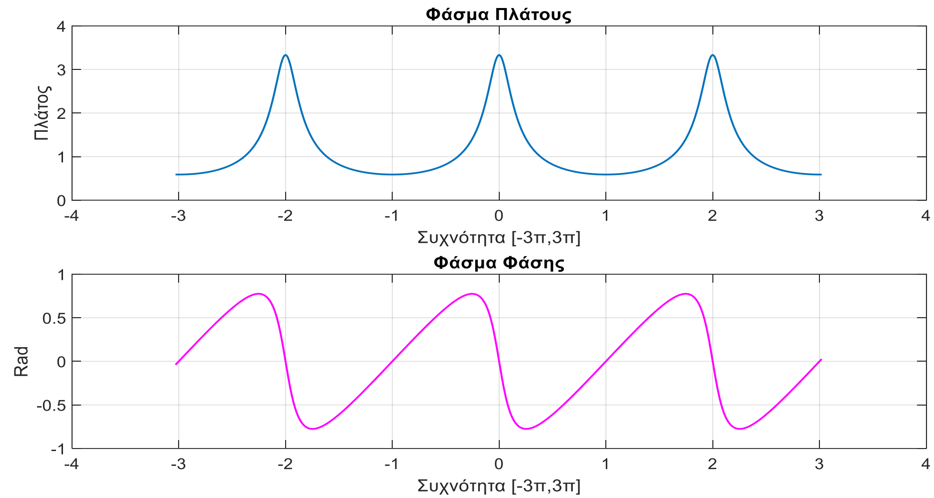
$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos\omega}}$$

και η φάση:

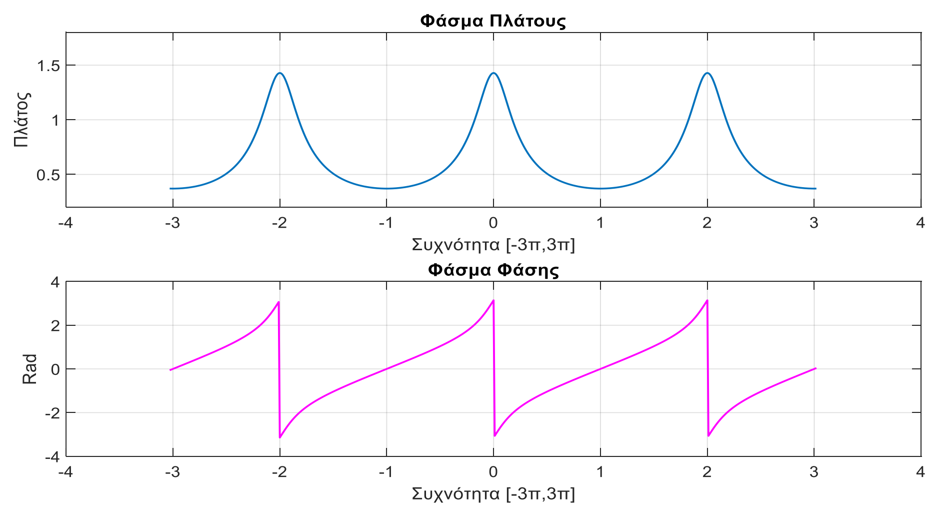
$$\varphi_X(\omega) = -tan^{-1}\left(\frac{a \sin\omega}{1 - \alpha \cos \omega}\right)$$

Η λύση είναι ίδια με την άσκηση 2, με μοναδική διαφορά την τιμή του συντελεστή (α).

Φάσματα ασκήσεων 3 και 4



Φάσματα πλάτους και φάσης του σήματος $x[n] = 0.7^n u[n]$



Φάσματα πλάτους και φάσης του σήματος $x[n] = 1.7^n u[n]$

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί ο DTFT της ακολουθίας $x[n] = A(u[n] - u[n-N])$.

Απάντηση: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του DTFT έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{N-1} A\, e^{-jn\omega} = A\sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\omega} = A\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j\omega}\right)^n = \frac{A\left(1 - e^{-j\omega N}\right)}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{Ae^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} = \frac{Ae^{-j\omega N/2}\ 2j\ sin(\omega N/2)}{e^{-j\omega/2}\ 2j\ sin(\omega/2)} = Ae^{-j\omega(N-1)/2}\,\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

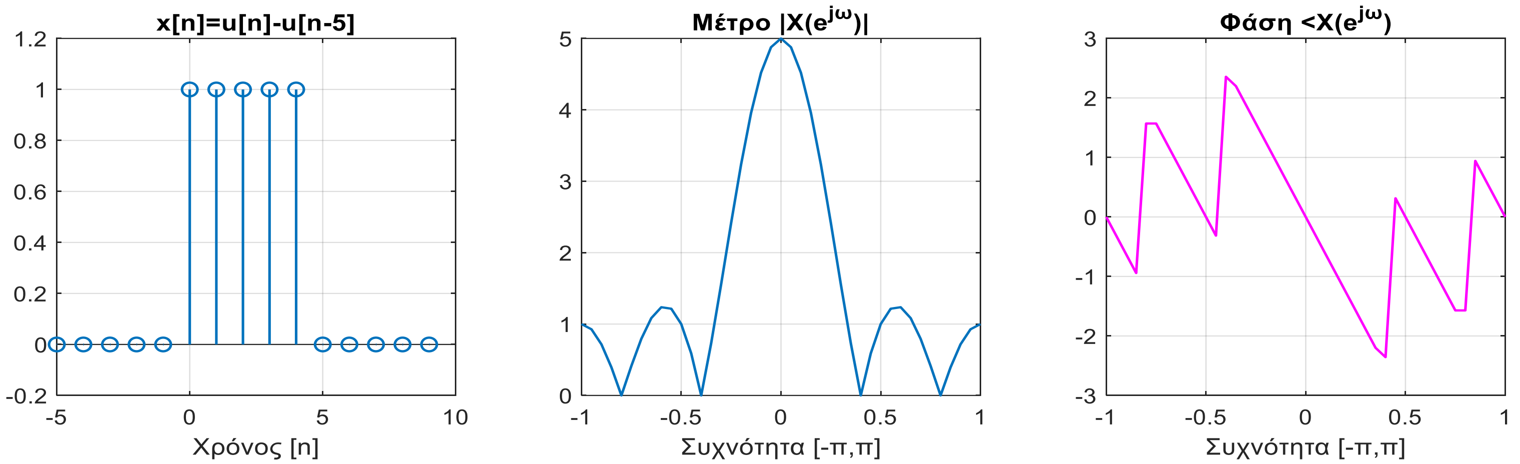
Το μέτρο του DTFT είναι:

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = |A|\left|\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right| \qquad (1)$$

και η φάση είναι:

$$\varphi_X(\omega) = -\frac{\omega(N-1)}{2} \qquad (2)$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)



(α) Σήμα $x[n] = u[n] - u[n-5]$, (β) Φάσμα πλάτους, (γ) Φάσμα φάσης, σε μία περίοδο

Για το μέτρο του DTFT ισχύουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Επειδή ο αριθμητής και ο παρονομαστής της σχέσης (1) είναι περιττές συναρτήσεις, προκύπτει ότι το μέτρο του DTFT είναι άρτια συνάρτηση, όπως αναμενόταν.
- Με τον κανόνα de l'Hospital βρίσκουμε ότι για τη συχνότητα $\omega = 0$ το μέτρο λαμβάνει τη μέγιστη τιμή η οποία είναι $\left|X\left(e^{j0}\right)\right| = A$.
- Τα σημεία μηδενισμού του μέτρου είναι αυτά που ικανοποιούν τη σχέση $\sin(\omega N/2) = 0$, άρα το μέτρο μηδενίζεται στις συχνότητες $\omega = 2k\pi/N$.
- Το μέτρο του DTFT είναι συνάρτηση:
  - Περιοδική με περίοδο 2π, όταν το N είναι περιττό.
  - Μη-περιοδική όταν το N είναι άρτιο.

Άσκηση 6

Να βρεθεί ο I-DTFT της συνάρτησης $X(e^{j\omega})$ ορθογώνιας μορφής, που δίνεται από:

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < B \\ 0, & B < |\omega| < \pi \end{cases}, \text{όπου } B = \pi/2$$

Απάντηση: Ο αντίστροφος DTFT σύμφωνα με τον ορισμό είναι:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{jn\omega}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^{B} 1\, e^{jn\omega}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn} \left[e^{jn\omega}\right]_{-B}^{B}$$

$$= \frac{1}{2\pi jn} \left(e^{jnB} - e^{-jnB}\right) = \frac{\sin(Bn)}{\pi n}, \qquad n \neq 0$$

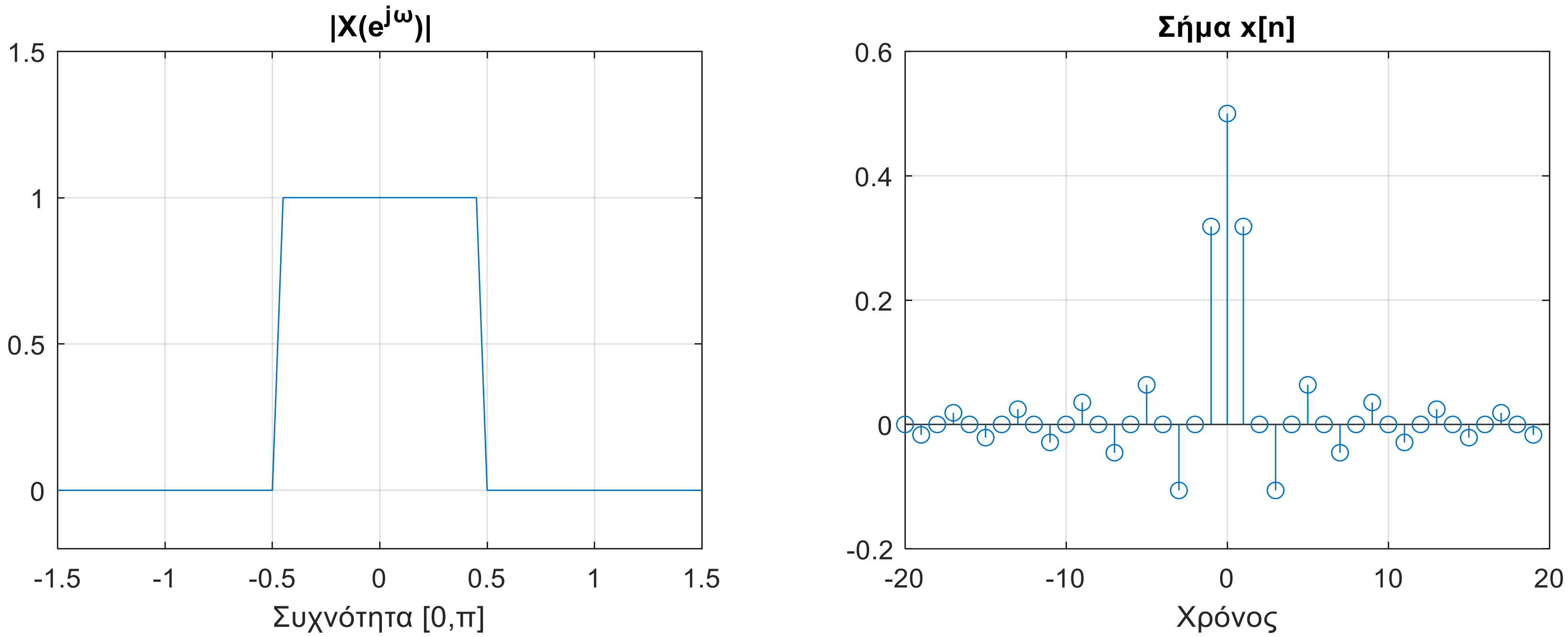
Για $n = 0$ η τιμή $x[0]$ υπολογίζεται από τον κανόνα de L'Hospital και είναι:

$$x[0] = \lim_{n \to 0} \frac{B\cos(Bn)}{\pi} = \frac{B}{\pi} = 0.5$$

Επομένως, η ακολουθία $x[n]$ είναι:

$$x[n] = \begin{cases} 0.5, & n = 0 \\ \dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}, & n \neq 0 \end{cases}$$

Άσκηση 6 (συνέχεια)



(α) Φάσμα πλάτους ορθογώνιας μορφής στην κανονικοποιημένη συχνότητα $[-\pi, \pi]$

(β) Γραφική παράσταση ακολουθίας $x[n] = \sin(\pi n/2)/\pi n$

Άσκηση 6 (συνέχεια)

- Παρατηρούμε ο αντίστροφος DTFT ενός **ορθογώνιου** φάσματος παράγει μία **μη-αιτιατή** ακολουθία. Η μέγιστη τιμή της ακολουθίας είναι $B = 0.5$ και τα σημεία μηδενισμού της είναι τα $n = k\pi/B = 2k$.
- Αν η ορθογώνια συνάρτηση $X(e^{j\omega})$ αντιστοιχεί στο φάσμα ενός ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου που θέλουμε να κατασκευάσουμε, τότε η χρονική ακολουθία αντιστοιχεί στην κρουστική απόκριση $h[n]$ του φίλτρου. Σύμφωνα με την παραπάνω επίλυση η κρουστική απόκριση είναι μια ακολουθία **άπειρης διάρκειας και μη-αιτιατή**. Άρα το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο **δεν είναι πραγματοποιήσιμο**.
- Σε επόμενη διάλεξη θα δούμε μια προσεγγιστική μέθοδο δημιουργίας της κρουστικής απόκρισης ενός πρακτικού φίλτρου, σύμφωνα με την οποία:
(α) περιορίζουμε (αυθαίρετα) το άπειρο μήκος της κρουστικής απόκρισης συμμετρικά του μηδενός, και
(β) μετατοπίζουμε το απομένον τμήμα της ακολουθίας κατά μία ποσότητα χρονικής ολίσθησης έτσι ώστε να αρθεί η μη-αιτιότητα της κρουστικής απόκρισης.
Η λύση αυτή οδηγεί στη δημιουργία ενός πρακτικού φίλτρου το οποίο είναι προσεγγιστικό του ιδανικού.

Μετασχηματισμός DTFT Περιοδικών Σημάτων

DTFT Περιοδικών Σημάτων Διακριτού Χρόνου

Τα περιοδικά ΣΔΧ δεν τείνουν στο μηδέν όταν $n \to \infty$, οπότε δεν είναι αθροίσιμα κατά απόλυτη τιμή και ο DTFT δεν μπορεί να υπολογιστεί από τον ορισμό του. Υπολογίζουμε τον DTFT των περιοδικών ΣΔΧ αν επιτρέψουμε (στον υπολογισμό του) την ύπαρξη κρουστικών συναρτήσεων με πλάτη ίσα με τους συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier.

Στην άσκηση 1 είδαμε ότι το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier του συρμού $\delta_N[n]$ είναι:

$$\delta_N[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \Delta[k]\, e^{jk\omega_0 n}$$

όπου $\Delta[k] = 1/\mathrm{N}$.

Επειδή $F\left\{e^{j\omega_0 n}\right\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$, ο DTFT του περιοδικού σήματος $\delta_N[n]$ είναι:

$$\Delta\left(e^{j\omega}\right) = F\{\delta_N[n]\} = F\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \Delta[k]\, e^{jk\omega_0 n}\right\} = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Από ένα περιοδικό σήμα $x[n]$ αποκόπτουμε μία περίοδό του $x[n, N]$, για την οποία ο DTFT είναι $X_N\left(e^{j\omega}\right)$. Το περιοδικό σήμα μπορεί να παραχθεί από τη σχέση:

$$x[n] = x[n, N] * \delta_N[n]$$

DTFT Περιοδικών Σημάτων Διακριτού Χρόνου

- Εφαρμόζοντας DTFT στην παραπάνω σχέση λαμβάνουμε:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_N(e^{jk\omega_0})\, \delta(\omega - k\omega_0)$$

- Με βάση τα παραπάνω, ο DTFT ενός περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου μπορεί να προκύψει από τον πολλαπλασιασμό του DTFT της μιας περιόδου $x[n, N]$ με τον DTFT της περιοδικής ακολουθίας $\delta_N[n]$.
- Με άλλα λόγια ο DTFT του περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου προκύπτει από δειγματοληψία με περίοδο δειγματοληψίας ω_0 του DTFT της μιας περιόδου.

Άσκηση 7

Να αποδειχθεί ότι ο DTFT του σήματος $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, όπου $\omega \in (-\pi, \pi]$, δίνεται από τη σχέση $x[n] = e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m),\ \ m \in Z$

<u>Απάντηση</u>: Επειδή το σήμα δεν είναι απολύτως αθροίσιμο ο DTFT δεν μπορεί να υπολογιστεί από τον ορισμό του. Για το λόγο αυτό θα εργαστούμε αντίστροφα, δηλαδή θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο DTFT. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m)$$

είναι ένα άπειρο άθροισμα κρουστικών συναρτήσεων που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $2\pi m$ επάνω στον άξονα συχνοτήτων. Με άλλα λόγια ο DTFT του $e^{j\omega_0 n}$ περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στις συχνότητες $\omega_0 \pm 2\pi m$.

Ο **αντίστροφος DTFT** υπολογίζεται στην περιοχή συχνοτήτων $(-\pi, \pi]$ από τη σχέση:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m) \right\} e^{j\omega n}\, d\omega$$

Στην περιοχή όμως $(-\pi, \pi]$ υπάρχει μόνο η συνάρτηση $\delta(\omega - \omega_0)$, οπότε το ολοκλήρωμα είναι:

$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0)\, e^{j\omega n}\, d\omega = e^{j\omega n}\Big|_{\omega=\omega_0} = e^{j\omega_0 n}$$

Χρήσιμα ζεύγη DTFT

Σήμα, $x[n]$	Μετασχηματισμός DTFT, $X(e^{j\omega})$
$\delta[n]$	$1, \quad -\infty < \omega < \infty$
$\delta[n-n_0]$	$e^{-jn_0\omega}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{jn_0\omega}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\alpha^n u[n], \qquad \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$-\alpha^n u[n-1], \qquad \lvert a\rvert > 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$[n+1]\alpha^n u[n], \qquad \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
$u[n]-u[n-n_0]$	$\dfrac{sin(\omega n_0/2)}{sin(\omega/2)} e^{-j(n_0-1)/2}$

Χρήσιμα ζεύγη DTFT

Σήμα, $x[n]$	Μετασχηματισμός DTFT, $X(e^{j\omega})$
$cos[n\omega_0]$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)$
$sin[n\omega_0]$	$\frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) - \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)$
$a^n\, cos(n\omega_0)\, u[n]$	$\frac{1 - a\, e^{-j\omega} \cos\omega_0}{1 - 2a\, e^{-j\omega} \cos\omega_0 + a^2 e^{-2j\omega}}$
$a^n\, sin(n\omega_0)\, u[n]$	$\frac{a\, e^{-j\omega} \sin\omega_0}{1 - 2a\, e^{-j\omega} \cos\omega_0 + a^2 e^{-2j\omega}}$

Ιδιότητες DTFT

- Περιοδικότητα
- Συμμετρία και Συζυγία
- Γραμμικότητα
- Αντιστροφή στο Χρόνο
- Μετατόπιση στο Χρόνο
- Μετατόπιση στη Συχνότητα
- Διαφόριση στη Συχνότητα
- Θεώρημα Συνέλιξης
- Περιοδική Συνέλιξη
- Συσχέτιση
- Θεώρημα Parseval

Περιοδικότητα

- Ο DTFT είναι μία περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j(\omega+2k\pi)}\right)$$

- Η περιοδικότητα είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι τα διακριτού χρόνου μιγαδικά εκθετικά σήματα όταν διαφέρουν στη συχνότητα κατά πολλαπλάσια του 2π, είναι μεταξύ τους ταυτόσημα.

- Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει για τον μετασχηματισμό Fourier των σημάτων συνεχούς χρόνου.

- <u>Εφαρμογή</u>: Με βάση την ιδιότητα της περιοδικότητας προκύπτει ότι για την ανάλυση του DTFT χρειαζόμαστε **μία μόνο περίοδο** της συνάρτησης $X\left(e^{j\omega}\right)$, π.χ. $[0,2\pi]$ ή $[-\pi,\pi]$, και όχι όλο το διάστημα $-\infty < \omega < \infty$. Αυτό εξοικονομεί πλήθος υπολογισμών.

Γραμμικότητα

- Ο DTFT είναι γραμμικός, δηλαδή ο DTFT ενός γραμμικού συνδυασμού σημάτων είναι ίσος με το άθροισμα των DTFT των επιμέρους συνιστωσών του γραμμικού συνδυασμού.

- Αν οι επιμέρους μετασχηματισμοί DTFT είναι:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{DTFT} X_1(e^{j\omega})$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{DTFT} X_2(e^{j\omega})$$

τότε ο μετασχηματισμός DTFT του γραμμικού συνδυασμού $a_1x_1[n] + \alpha_2x_2[n]$ θα είναι:

$$\alpha x_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{DTFT} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

- Από την ιδιότητα αυτή προκύπτει ότι ο DTFT είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, κατάλληλος για τη μελέτη γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου.

Άσκηση 8

Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $x[n] = \cos(\omega_0 n)$

<u>Απάντηση</u>: Γνωρίζουμε ότι:

$$e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m),$$

Θέτοντας $\omega = -\omega_0$ έχουμε:

$$e^{-j\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi m),$$

Από τη σχέση Euler ισχύει:

$$x[n] = \cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}\left\{e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0}\right\}$$

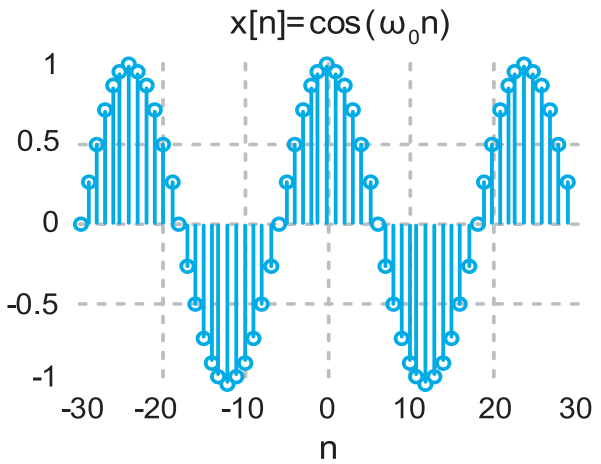
Επειδή ο DTFT είναι γραμμικός, έχουμε:

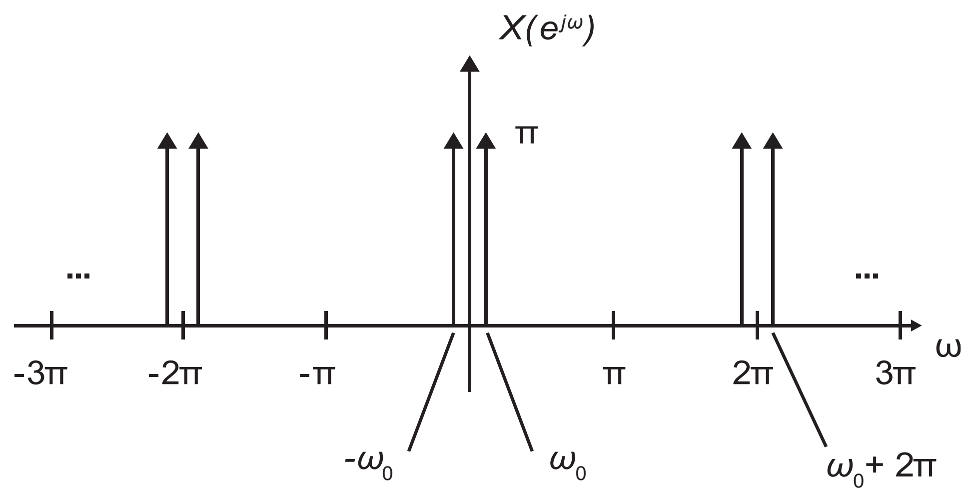
$$X\left(e^{j\omega}\right) = F\left\{\frac{1}{2}\left\{e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0}\right\}\right\} = \frac{1}{2}F\left\{e^{jn\omega_0}\right\} + \frac{1}{2}F\left\{e^{-jn\omega_0}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m) + \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi m)$$

$$= \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m) + \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi m)\right\}$$

Άσκηση 8 (συνέχεια)





(α) $x[n] = \cos(\omega_0 n)$ (β) $X\left(e^{j\omega}\right) = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty}\{\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m) + \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi m)\}$

Αν περιορίσουμε τη λύση στο διάστημα συχνοτήτων [-π,π), η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Εργαζόμενοι ανάλογα για το ημίτονο λαμβάνουμε:

$$sin(\omega_0 n) = \frac{1}{2}j\{e^{jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}\} \longleftrightarrow \pi j \sum_{m=-\infty}^{\infty}\{\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m) - \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi m)\}$$

Συμμετρία και Συζυγία

- Για ένα πραγματικό σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$, η συνάρτηση $X\left(e^{j\omega}\right)$ είναι συζυγής - συμμετρική, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση:

$$X\left(e^{-j\omega}\right) = X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

- Η σχέση αυτή ονομάζεται **ερμιτιανή συμμετρία** και ισοδυναμεί με τις παρακάτω εκφράσεις:
  - $X_R\left(e^{-j\omega}\right) = X_R\left(e^{j\omega}\right)$ Το πραγματικό μέρος έχει άρτια συμμετρία
  - $X_I\left(e^{-j\omega}\right) = -X_I\left(e^{j\omega}\right)$ Το φανταστικό μέρος έχει περιττή συμμετρία
  - $\left|X\left(e^{-j\omega}\right)\right| = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ Το μέτρο έχει άρτια συμμετρία
  - $\measuredangle X\left(e^{-j\omega}\right) = -\measuredangle X\left(e^{j\omega}\right)$ Η φάση έχει περιττή συμμετρία
- <u>Εφαρμογή</u>: Με βάση την ιδιότητα της συμμετρίας προκύπτει ότι για τη σχεδίαση της συνάρτησης $X(e^{j\omega})$ χρειαζόμαστε **μισή μόνο περίοδο**, συνήθως επιλέγουμε $\boldsymbol{\omega} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$.

Συμμετρία και Συζυγία

Σήμα, $x[n]$	Μετασχηματισμός DTFT, $X(e^{j\omega})$
Πραγματικό και άρτιο	Πραγματικός και άρτιος
Πραγματικό και περιττό	Φανταστικός και περιττός
Φανταστικό και άρτιο	Φανταστικός και άρτιος
Φανταστικό και περιττό	Πραγματικός και περιττός

Αντιστροφή & Μετατόπιση στο Χρόνο

- **Ανάκλαση** στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε **ανάκλαση** και στο πεδίο της συχνότητας. Συγκεκριμένα, αν ο DTFT ενός σήματος $x[n]$ είναι $X(e^{j\omega})$, τότε:

$$x[-n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{-j\omega})$$

- **Μετατόπιση** στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε **ολίσθηση φάσης** στο πεδίο της συχνότητας, ενώ το φάσμα πλάτους (μέτρο) παραμένει το **ίδιο**. Συγκεκριμένα, αν ο DTFT ενός σήματος $x[n]$ είναι $X(e^{j\omega})$, τότε:

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{DTFT} e^{-jn_0\omega} X(e^{j\omega})$$

- Από την ιδιότητα γίνεται φανερό ότι το περιεχόμενο των συχνοτήτων ενός σήματος εξαρτάται μόνο από τη μορφή του και όχι από τη θέση του.

Άσκηση 9

Να υπολογιστεί ο DTFT των σημάτων και να σχεδιαστούν τα φάσματα πλάτους και φάσης:

(α) $x_1[n] = u[n+2] - u[n-2]$ (β) $x_2[n] = x_1[n-2]$

Απάντηση: (α) Το δοθέν σήμα μπορεί να γραφεί:

$$x_1[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\delta[n] \xleftrightarrow{DTFT} \Delta\left(e^{j\omega}\right) = 1$$

Με βάση την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο προκύπτει ότι:

$$\delta[n-n_0] \xleftrightarrow{DTFT} e^{-jn_0\omega}\Delta\left(e^{j\omega}\right)$$

Επομένως για τις χρονικά μετατοπισμένες εκδοχές της $\delta[n]$, έχουμε:

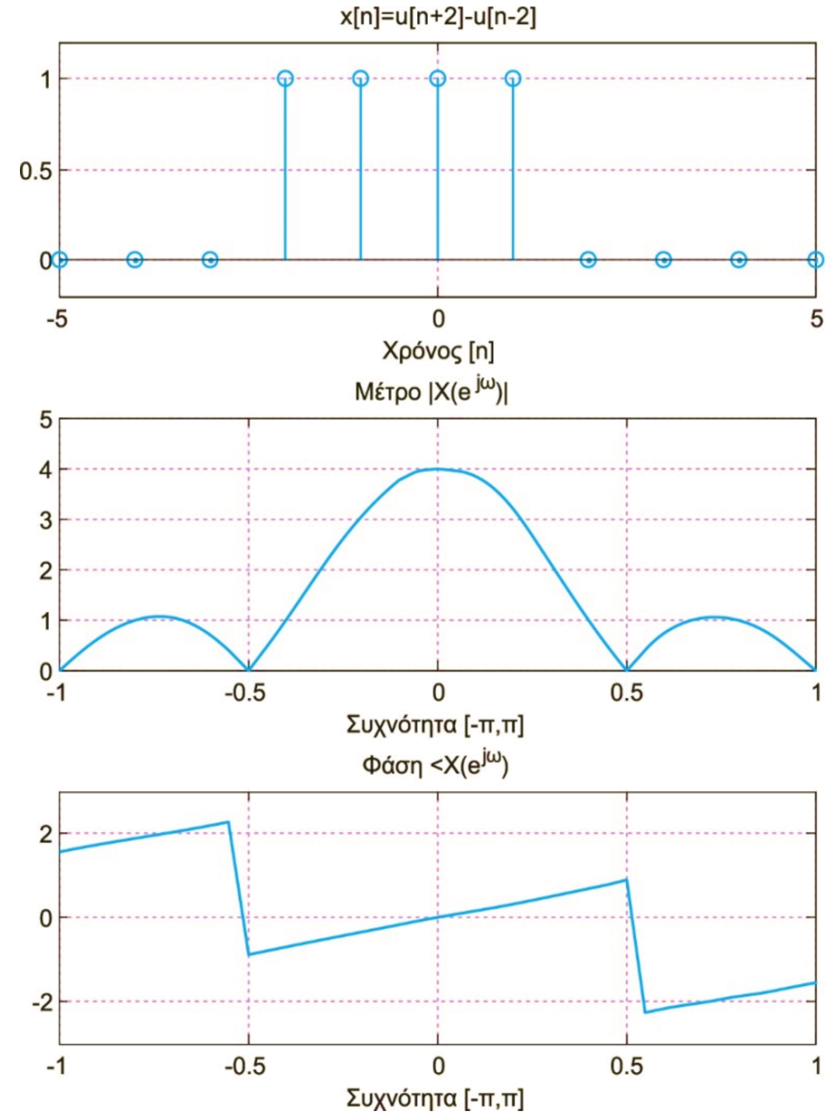
$$\delta[n+2] \xleftrightarrow{DTFT} e^{j2\omega} \qquad \delta[n+1] \xleftrightarrow{DTFT} e^{j\omega} \qquad \delta[n-1] \xleftrightarrow{DTFT} e^{-j\omega}$$

Με βάση την ιδιότητα της γραμμικότητας του DTFT προκύπτει:

$$X_1\left(e^{j\omega}\right) = e^{j2\omega} + e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}$$

Άσκηση 9 (συνέχεια)

- Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις του $x_1[n]$ και μίας πλήρους περιόδου στο διάστημα συχνοτήτων $[-\pi, \pi]$ των φασμάτων πλάτους και φάσης της συνάρτησης $X_1(e^{j\omega})$.
- Παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή του φάσματος ισούται με το πλήθος των παλμών (στο παράδειγμά μας είναι 4).
- Επίσης, το πλήθος των κυματώσεων του φάσματος σε μία περίοδο εξαρτάται από το πλήθος των παλμών που συγκροτούν το σήμα $x_1[n]$.



Άσκηση 9 (συνέχεια)

(β) Το δοθέν σήμα μπορεί να γραφεί: $x_2[n] = x_1[n-2] = u[n] - u[n-4]$.

Με βάση την ιδιότητα μετατόπισης του DTFT στο χρόνο, ο DTFT του $x_2[n]$ είναι:

$$
\begin{aligned}
&X_2\left(e^{j\omega}\right) \\
&= e^{-j2\omega} X_1\left(e^{j\omega}\right) \\
&= e^{-j2\omega}\left[e^{j2\omega} + e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}\right] \\
&= 1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} + e^{-3j\omega} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

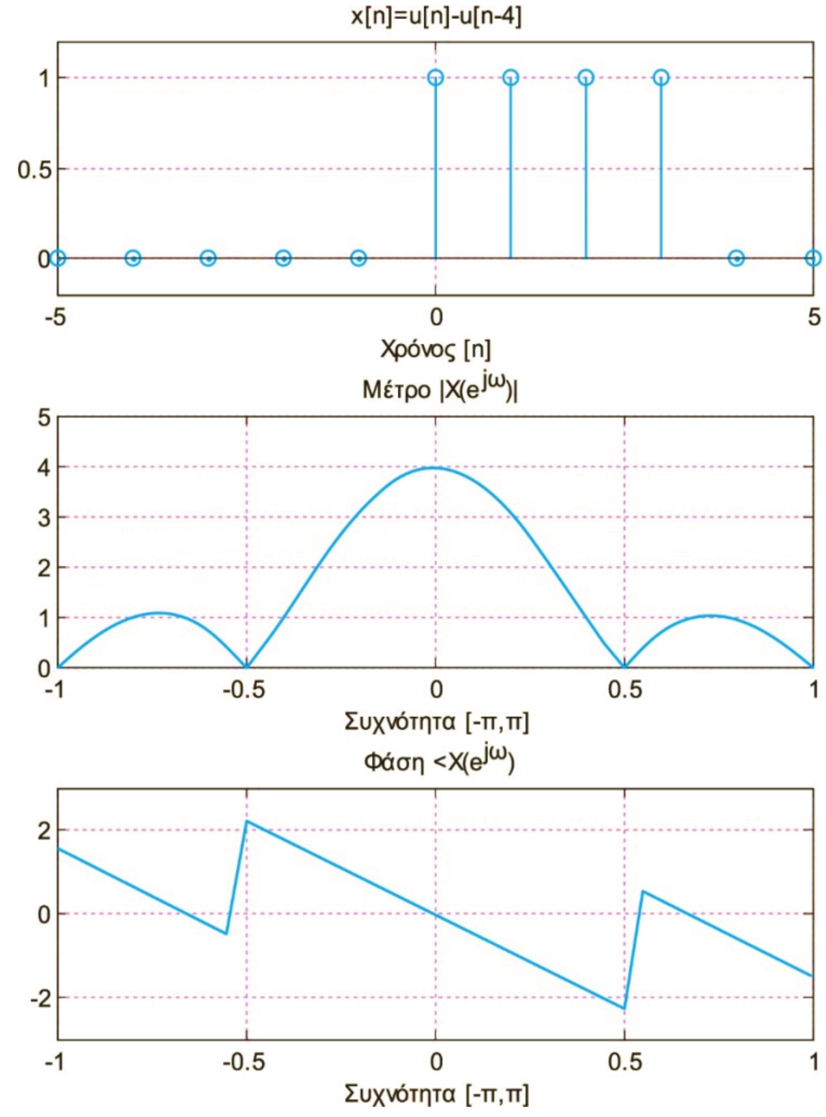
Σε ότι αφορά το πλάτος και τη φάση της συνάρτησης $X_2\left(e^{j\omega}\right)$ ισχύει:

$$\left|X_2\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|X_1\left(e^{j\omega}\right)\right| \quad \text{και} \quad \measuredangle X_2\left(e^{j\omega}\right) = \measuredangle X_1\left(e^{j\omega}\right) + 2\omega$$

Άσκηση 9 (συνέχεια)

- Από το διπλανό σχήμα, παρατηρούμε ότι το φάσμα πλάτους του χρονικά μετατοπισμένου σήματος $x_2[n]$ παραμένει ίδιο με αυτό του αρχικού σήματος $x_1[n]$, ενώ το φάσμα φάσης είναι μετατοπισμένο κατά 2ω.

- <u>Σημείωση</u>: Ο σχεδιασμός των φασμάτων έγινε στην περιοχή συχνοτήτων $[-\pi, \pi)$.



Μετατόπιση & Διαφόριση στη Συχνότητα

- Πολλαπλασιασμός ενός σήματος διακριτού χρόνου με έναν μιγαδικό εκθετικό όρο $e^{jn_0\omega}$ προκαλεί **μετατόπιση** (ολίσθηση) του φάσματος $X(e^{j\omega})$ στο πεδίο της συχνότητας κατά ω_0. Συγκεκριμένα, αν ο DTFT ενός σήματος $x[n]$ είναι $X(e^{j\omega})$, τότε:

$$e^{jn_0\omega}x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

- Αν ο DTFT ενός σήματος $x[n]$ είναι $X(e^{j\omega})$, τότε για την **παράγωγο** του φάσματος ισχύει η σχέση:

$$-jnx[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

Άσκηση 10

Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $y[n] = x[n]\cos[n\omega_0]$, όταν ο DTFT του $x[n]$ είναι γνωστός.

Απάντηση: Με βάση τη σχέση Euler, το συνημίτονο γράφεται:

$$\cos[n\omega_0] = \frac{1}{2}\left\{e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0}\right\}$$

Επομένως, το σήμα $y[n]$ είναι:

$$y[n] = x[n]\cos[n\omega_0] = x[n]\frac{1}{2}\left\{e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{jn\omega_0}x[n] + \frac{1}{2}e^{-jn\omega_0}x[n]$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα μετατόπισης στη συχνότητα του DTFT, έχουμε:

$$x[n]\cos[n\omega_0] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right) + \frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega+\omega_0)}\right)$$

Αλλαγή Κλίμακας Χρόνου – Παραγώγιση στη Συχνότητα

1. Πολλαπλασιασμός της μεταβλητής χρόνου n με έναν ρητό αριθμό k αντιστοιχεί σε διαίρεση της μεταβλητής συχνότητας με τον ίδιο αριθμό k, δηλαδή αν $x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$, τότε:

$$x[kn] \xleftrightarrow{DTFT} X\left(e^{j\omega/k}\right)$$

2. Αν $x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$, τότε:

$$nx[n] \xleftrightarrow{DTFT} j\,\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

$$(-jn)^k x[n] \xleftrightarrow{DTFT} j\,\frac{d^k X(e^{j\omega})}{d\omega^k}$$

Θεώρημα Συνέλιξης

- Αν οι DTFT των ακολουθιών $x[n]$ και $h[n]$ είναι $X(e^{j\omega})$ και $H(e^{j\omega})$, τότε για τη **συνέλιξη** των δύο ακολουθιών ισχύει:

$$h[n] * x[n] \xleftrightarrow{DTFT} H(e^{j\omega})\, X(e^{j\omega})$$

- Η ιδιότητα αυτή απλοποιεί την ανάλυση των συστημάτων διακριτού χρόνου, καθώς μετατρέπει την υπολογιστικά δύσκολη πράξη της συνέλιξης στην υπολογιστικά απλή πράξη του πολλαπλασιασμού.

- Ο υπολογισμός στο πεδίο χρόνου της εξόδου του ΓΑΚΜ συστήματος δίνεται από τη συνέλιξη:

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

με χρήση της ιδιότητας συνέλιξης, ο DTFT της εξόδου είναι:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\, X(e^{j\omega})$$

- Γράφοντας την παραπάνω σχέση σε πλάτος και φάση προκύπτει:

$$\left|Y(e^{j\omega})\right| = \left|H(e^{j\omega})\right| \left|X(e^{j\omega})\right|$$

$$\measuredangle Y(e^{j\omega}) = \measuredangle H(e^{j\omega}) + \measuredangle X(e^{j\omega})$$

Άσκηση 11

Να υπολογιστεί η έξοδος $y[n]$ ενός ΓΑΚΜ συστήματος διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση $h[n] = 0.2^n u[n]$ όταν η είσοδος είναι $x[n] = 0.5^n\, u[n]$.

Απάντηση: Υπολογίζουμε τον DTFT των ακολουθιών $h[n]$ και $x[n]$. Είναι:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1-0.2\,e^{-j\omega}} \quad \text{και} \quad X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1-0.5\,e^{-j\omega}}$$

Η έξοδος προκύπτει από τη συνέλιξη $y[n] = h[n] * x[n]$. Με χρήση της ιδιότητας της συνέλιξης του DTFT έχουμε:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1-0.2\,e^{-j\omega}} \frac{1}{1-0.5\,e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{1}{(1-0.2e^{-j\omega})(1-0.5e^{-j\omega})}$$

Για να αποκτήσουμε την ακολουθία $y[n]$ από τη συνάρτηση $Y\left(e^{j\omega}\right)$ θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τον αντίστροφο DTFT της $Y\left(e^{j\omega}\right)$.

Άσκηση 11 (συνέχεια)

Αναλύουμε την $Y\left(e^{j\omega}\right)$ σε άθροισμα μερικών κλασμάτων:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{(1-0.2e^{-j\omega})(1-0.5e^{-j\omega})} = \frac{C_1}{1-0.2e^{-j\omega}} + \frac{C_2}{1-0.5e^{-j\omega}} \qquad (1)$$

όπου οι συντελεστές C_1 και C_2 είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν. Εκτελούμε τις πράξεις στο δεξιό μέλος της σχέσης (1) και λαμβάνουμε:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{C_1 - 0.5C_1e^{-j\omega} + C_2 - 0.2C_2e^{-j\omega}}{(1-0.2e^{-j\omega})(1-0.5e^{-j\omega})} \qquad (2)$$

Εξισώνοντας τους αριθμητές του αριστερού μέλους της σχέσης (1) και της σχέσης (2), έχουμε:

$$1 = C_1 - 0.5C_1e^{-j\omega} + C_2 - 0.2C_2e^{-j\omega} = (C_1+C_2) - (0.5C_1 + 0.2C_2)e^{-j\omega}$$

Άσκηση 11 (συνέχεια)

Υπολογίζουμε τις σταθερές C_1 και C_2 λύνοντας το σύστημα:

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$0.5C_1 + 0.2C_2 = 0$$

Το αποτέλεσμα είναι:

$$C_1 = -2/3 \text{ και } C_2 = 5/3$$

οπότε η σχέση (1) γράφεται:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{-2/3}{1 - 0.2e^{-j\omega}} + \frac{5/3}{1 - 0.5e^{-j\omega}} \qquad (1)$$

Επομένως με βάση τον πίνακα χρήσιμων ζευγών DTFT, ο αντίστροφος DTFT είναι:

$$y[n] = -\frac{2}{3}(0.2)^n u[n] + \frac{5}{3}(0.5)^n u[n] = \left[-\frac{2}{3}(0.2)^n + \frac{5}{3}(0.5)^n\right] u[n]$$

Πολλαπλασιασμός Σημάτων – Περιοδική Συνέλιξη

1. Αν οι DTFT των ακολουθιών $x[n]$ και $y[n]$ είναι $X(e^{j\omega})$ και $Y(e^{j\omega})$ αντίστοιχα, τότε ο DTFT του γινομένου των σημάτων $x[n]$ και $y[n]$ είναι:

$$x[n]\, y[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi}\; X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})$$

2. Ο DTFT του γινομένου δύο περιοδικών ακολουθιών $x[n]$ και $y[n]$ με ίδια περίοδο N, είναι η περιοδική συνέλιξη των επιμέρους DTFT $X(e^{j\omega})$ και $Y(e^{j\omega})$ των σημάτων.

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})\, Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = X(e^{j\omega}) \circledast Y(e^{j\omega})$$

Δυϊσμός σε Χρόνο και Συχνότητα

Η ιδιότητα δυϊσμό του μετασχηματισμού Fourier μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνότητας για τα σήματα συνεχούς χρόνου, ισχύει και για τον DTFT.

Είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον υπολογισμό του DTFT σε σήματα που δεν είναι απολύτως αθροίσιμα.

Ισχύουν τα ζεύγη εξισώσεων:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, e^{-j\omega k}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{-j\omega_k n} \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, X[k]\, \delta(\omega + \omega_k)$$

Άσκηση 12

Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $x[n] = \cos(\omega_0 n)$ με χρήση της ιδιότητας του δυϊσμού.

<u>Απάντηση</u>: Από την άσκηση 8 γνωρίζουμε ότι ο DTFT του $\cos(\omega_0 n)$ στο διάστημα $[-\pi, \pi)$, είναι:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi\{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\}$$

Θα επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα με την ιδιότητα δυϊσμού.

Από τη σχέση Euler έχουμε $x[n] = \cos(\omega_0 n) = 0.5\left\{e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0}\right\}$.

Επειδή $e^{jn\omega_0} \longleftrightarrow \delta(\omega - \omega_0)$ από τη σχέση:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{-j\omega_k n} \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, X[k]\, \delta(\omega + \omega_k)$$

προκύπτει:

$$\cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}\left\{e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0}\right\} \longleftrightarrow \pi\{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\}$$

Συσχέτιση

Αν οι DTFT των ακολουθιών $x[n]$ και $y[n]$ είναι $X(e^{j\omega})$ και $Y(e^{j\omega})$, αντίστοιχα, τότε για τη συσχέτιση $R_{xy}[n]$ των δύο ακολουθιών που ορίζεται από τη σχέση:

$$R_{xy}[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, y[n-k]$$

ισχύει:

$$R_{xy}[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})\, Y(e^{-j\omega})$$

Θεώρημα Parseval

- Η ενέργεια ενός σήματος διακριτού χρόνου $x[n]$ μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

- Ο DTFT διατηρεί τη συνολική ενέργεια κατά τη μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας, γι’ αυτό ονομάζεται και θεώρημα διατήρησης της ενέργειας.

- Ο όρος $\left|X(e^{j\omega})\right|^2$ ονομάζεται **φασματική πυκνότητα ενέργειας** (energy–density spectrum) και εκφράζει την ενέργεια του σήματος ανά μονάδα συχνότητας.

- Αν το σήμα $x[n]$ είναι πραγματικό, η σχέση γράφεται:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{0}^{\pi} \frac{\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}{\pi} d\omega$$

Άσκηση 13

Να υπολογιστεί η ενέργεια της ακολουθίας $x[n] = 0.5^n u[n]$ από το φάσμα της.

Απάντηση: Ο DTFT της ακολουθίας $x[n] = 0.5^n u[n]$ είναι:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.5\, e^{-j\omega}}$$

Το πλάτος της είναι:

$$\left|X(e^{j\omega})\right|^2 = X(e^{j\omega})\, X^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}} \frac{1}{1 - 0.5e^{j\omega}} = \frac{1}{1.25 - \cos\omega}$$

Επειδή η ακολουθία είναι πραγματική, η ενέργεια δίνεται από τη σχέση Parseval:

$$E_x = \int_0^{\pi} \frac{\left|X(e^{j\omega})\right|^2}{\pi} d\omega = \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi(1.25 - cos\omega)} d\omega = \cdots = \frac{4}{3}$$

Αντίστροφος DTFT

Άσκηση 14

Να βρεθεί στο σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ με DTFT τη συνάρτηση:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + 0.2\, e^{-j\omega} - 0.35\, e^{-2j\omega}}$$

<u>Απάντηση</u>: Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή της συνάρτησης $X(e^{j\omega})$ και έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + 0.2\, e^{-j\omega} - 0.35\, e^{-2j\omega}} = \frac{1}{(1 - 0.5e^{-j\omega})}\frac{1}{(1 + 0.7e^{-j\omega})}$$
$$= \frac{A}{(1 - 0.5e^{-j\omega})} + \frac{B}{(1 + 0.7e^{-j\omega})}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές A και B από τις σχέσεις:

$$A = \frac{1}{(1 - 0.5e^{-j\omega})}\frac{1}{(1 + 0.7e^{-j\omega})}(1 - 0.5e^{-j\omega})\bigg|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{5}{12}$$

$$B = \frac{1}{(1 - 0.5e^{-j\omega})}\frac{1}{(1 + 0.7e^{-j\omega})}(1 + 0.7e^{-j\omega})\bigg|_{e^{-j\omega}=-10/7} = \frac{12}{7}$$

Άσκηση 14 (συνέχεια)

Οπότε η συνάρτηση γράφεται:

$$X(e^{j\omega}) = \left(\frac{5}{12}\right)\frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}} + \left(\frac{12}{7}\right)\frac{1}{1 + 0.7e^{-j\omega}}$$

Με χρήση του Πίνακα 10.1 βρίσκουμε τον αντίστροφο DTFT:

$$x[n] = \left[\frac{5}{12}(0.5)^{-n} + \frac{12}{7}(-0.7)^{-n}\right]u[n]$$

Σχέση DTFT με άλλους Μετασχηματισμούς

- Με τον μετασχηματισμό Fourier
- Με τον μετασχηματισμό Z

Σχέση DTFT με μετασχηματισμό Fourier

- Ένα ΣΔΧ $x[n]$ που έχει προκύψει από δειγματοληψία ενός ΣΣΧ $x(t)$ με περίοδο δειγματοληψίας T_s, δηλ. $x[n] = x(nT_s) = x(t)|_{t=nT_s}$ έχει DTFT:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jn\omega}$$

- Ο μετ. Fourier συνεχούς χρόνου $X_s(\Omega)$ της ακολουθίας $x[n]$ υπολογίζεται για $\omega = \Omega T_s$

$$X_s(\Omega) = X_s\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\Omega T_s} = X_s\left(e^{j\Omega T_s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jn\Omega T_s}$$

- Από την ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο $\delta(t - nT_s) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-jn\Omega T_s}$ του μετ. Fourier, βρίσκεται ο αντίστροφος μετ. Fourier της συνάρτησης $X_s(\Omega)$. Είναι:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, \delta(t - nT_s)$$

- Επομένως, ο DTFT του $x[n]$ ταυτίζεται με τον μετ. Fourier συνεχούς χρόνου $X_s(\Omega)$ του δειγματοληπτημένου σήματος $x_s(t)$, καθώς ισχύει:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, \delta(t - nT_s) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_s(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jn\Omega T_s}$$

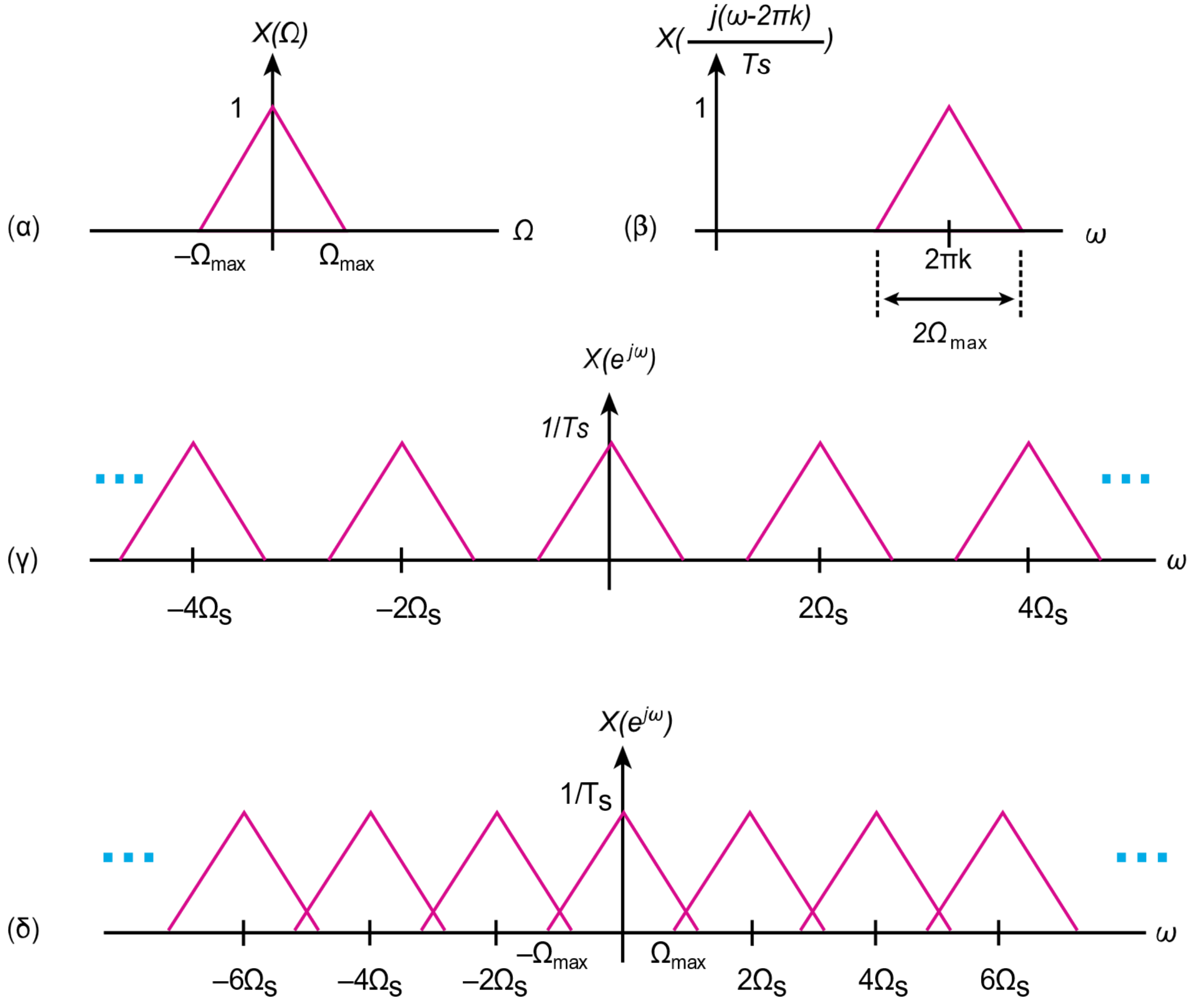
Σχέση DTFT με μετασχηματισμό Fourier

(α) Φάσμα σήματος $x(t)$,

(β) Ένας από τους όρους του φάσματος $X_s(\Omega)$ του δειγματοληπτημένου σήματος $x_s(t)$,

(γ) Περιοδικό φάσμα $X(e^{j\omega})$ ακολουθίας $x[n]$ για $f_s > 2f_{max}$

(δ) Περιοδικό φάσμα $X(e^{j\omega})$ ακολουθίας $x[n]$ για $f_s < 2f_{max}$



Σχέση DTFT με μετασχηματισμό Fourier

- Μεταξύ του DTFT μίας ακολουθίας $x[n] = x(nT_s) = x(t)|_{t=nT_s}$, η οποία έχει προκύψει από δειγματοληψία (περίοδος δειγματοληψίας T_s) ενός σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$, ισχύει η σχέση:

$$X_s\left(e^{j\Omega T_s}\right) = X_s\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\Omega T_s} = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{\omega}{T_s} - \frac{2\pi k}{T_s}\right)$$

Επομένως, το φάσμα της ακολουθίας $x[n]$ αποτελείται από περιοδικές επαναλήψεις με περίοδο $2\pi/T_s$ του φάσματος του σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$, με πλάτος πολλαπλασιασμένο επί $1/T_s$.

- Για να είναι εφικτή η ανακατασκευή του σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$ από την ακολουθία $x[n]$, πρέπει οι περιοδικές επαναλήψεις του φάσματος $X\left(e^{j\omega}\right)$ να μην επικαλύπτονται. Η προϋπόθεση αυτή ικανοποιείται όταν:

$$\Omega_{max} T_s < \pi \;\Rightarrow\; 2\pi f_{max}(1/f_s) < \pi \;\Rightarrow\; f_s > 2 f_{max}$$

η οποία είναι η γνωστή ως **συνθήκη ή κριτήριο Nyquist**.

Σχέση DTFT με μετασχηματισμό Z

- Γνωρίζουμε ότι ο DTFT προκύπτει από τον μετασχηματισμό Z υπολογισμένο επάνω στον μοναδιαίο κύκλο, εφόσον αυτός βρίσκεται εντός της περιοχής σύγκλισης, δηλαδή θέτοντας $z = e^{j\omega}$:

$$DTFT\{x[n]\} = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

- Επομένως, ο DTFT μπορεί να θεωρηθεί ως υποπερίπτωση του μετασχηματισμού Z για $|z| = 1$.

- Ωστόσο υπάρχουν σήματα διακριτού χρόνου για τα οποία δεν είναι εφικτός ο υπολογισμός του DTFT από τον Z, επειδή ο δεύτερος δεν συγκλίνει.

Σχέση DTFT με τη διακριτή σειρά Fourier

Για ένα περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου με περίοδο και θεμελιώδη συχνότητα $\omega_0 = 2\pi/N$, οι συντελεστές $X[k]$ της εκθετικής σειράς Fourier υπολογίζονται από τη σχέση:

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega_0 kn}$$

και το σήμα αναλύεται σε εκθετική σειρά Fourier ως εξής: $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\omega_0 kn}$

Υπολογίζοντας τον DTFT για το παραπάνω σήμα, έχουμε:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = F\{x[n]\} = F\left\{\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\omega_0 kn}\right\} = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, F\left\{e^{j\omega_0 kn}\right\} = 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, \delta(\omega - k\omega_0)$$

Για το ίδιο σήμα (περίοδος N και θεμελιώδης συχνότητα $\omega_0 = 2\pi/N$), ο DTFT είναι:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_N\left(e^{jk\omega_0}\right) \delta(\omega - k\omega_0)$$

Από τις προηγούμενες δύο σχέσεις, προκύπτει:

$$X[k] = \frac{1}{N} X_N\left(e^{jk\omega_0}\right)\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

Άρα οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier ταυτίζονται με τους συντελεστές του διακριτού φάσματος του DTFT για περιοδικά σήματα σε ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας.

Μετατροπή Ρυθμού Δειγματοληψίας

- Υποδειγματοληψία
- Υπερδειγματοληψία
- Μετατροπή ρυθμού δειγματοληψίας κατά ρητό συντελεστή

Υποδειγματοληψία

- Αποδεικνύεται ότι ο μετασχηματισμός DTFT του υποδειγματοληπτημένου σήματος $x_d[n] = x[nM\,]$, $(M > 1)$, είναι:

$$X_d\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{M} X\left(e^{j\omega/M}\right)$$

- Η συρρίκνωση του σήματος στο χρόνο κατά έναν παράγοντα M προκαλεί επέκταση του φάσματος κατά τον ίδιο παράγοντα.

- Προσοχή: Στην υποδειγματοληψία ενός σήματος ΔΧ με έναν συντελεστή Μ, για να μην προκύψει επικάλυψη των συχνοτήτων, πρέπει το σήμα να είναι φασματικά **περιορισμένο** μέχρι τη συχνότητα π/M.

- Αν ισχύει η προϋπόθεση, τότε το φάσμα του υποδειγματοληπτημένου σήματος είναι μία εκτεταμένη εκδοχή του φάσματος του αρχικού σήματος.

- Αν δεν ισχύει η προϋπόθεση, τότε πριν την υποδειγματοληψία πρέπει να φιλτράρουμε το σήμα με ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \pi/M$ (κέρδος φίλτρου M).

Άσκηση 14

Ένας διακριτός παλμός δίνεται από τη σχέση $x[n] = u[n+2] - u[n-2]$. Στον παλμό εφαρμόζεται υποδειγματοληψία με $M = 2$ και προκύπτει η ακολουθία $x_d[n]$. Να βρεθούν οι DTFT των ακολουθιών $x[n]$ και $x_d[n]$.

<u>Απάντηση</u>: Η ακολουθία $x[n]$ γράφεται:

$$x[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]$$

και έχει μετασχηματισμό Ζ:

$$X(z) = z^2 + z^1 + z^0 + z^{-1} = z^2 + z + 1 + z^{-1}$$

με περιοχή σύγκλισης ολόκληρο το πεδίο Ζ. Επειδή ο μοναδιαίος κύκλος περιλαμβάνεται στην περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Ζ, ο DTFT είναι:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{j2\omega} + e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}$$

$$= e^{j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{3\omega}{2}} + e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{3\omega}{2}}\right) = e^{j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{3\omega}{2}} + e^{-j\frac{3\omega}{2}} + e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)$$

$$= 2e^{j\frac{\omega}{2}}\left[\cos\left(\frac{3\omega}{2}\right) + \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]$$

Άσκηση 14 (συνέχεια)

Η υποδειγματοληπτημένη ακολουθία δίνεται από τη σχέση:

$$x_d[n] = x[2n] = u[2n+2] - u[2n-2] = u[n+1] - u[n-1] \Rightarrow x_d[n] = \delta[n+1] + \delta[n]$$

και έχει μετασχηματισμό Z:

$$X(z) = z^1 + z^0 = z + 1$$

με περιοχή σύγκλισης ολόκληρο το πεδίο Z. Επειδή ο μοναδιαίος κύκλος περιλαμβάνεται στην περιοχή σύγκλισης, ο DTFT είναι:

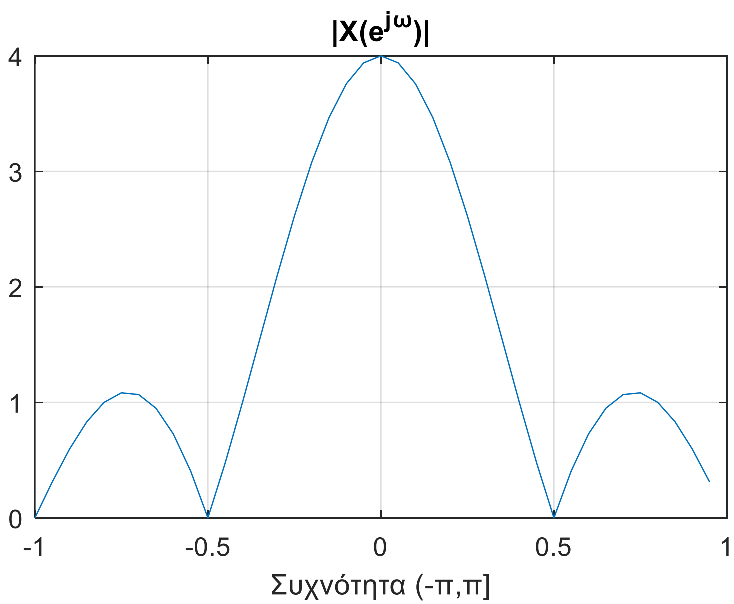
$$X_d\left(e^{j\omega}\right) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{j\omega} + 1 = e^{j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}\right) = 2e^{j\frac{\omega}{2}}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

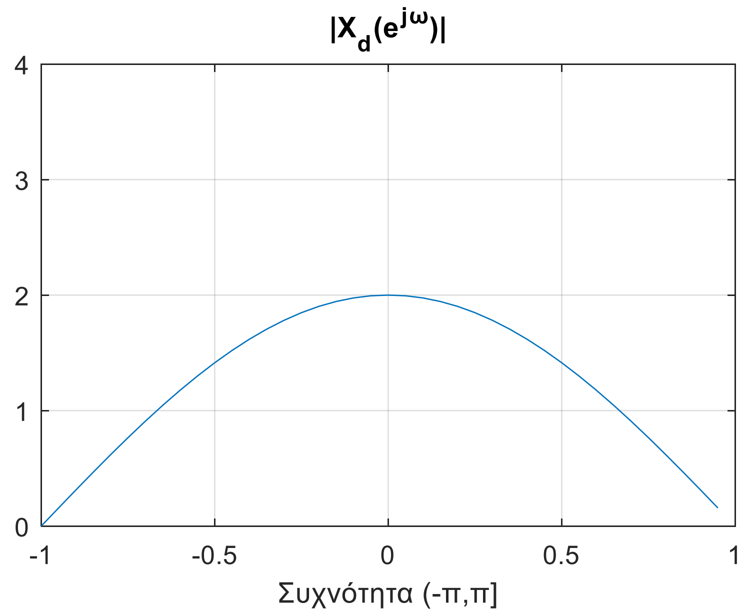
Συγκρίνοντας τους DTFT παρατηρούμε ότι δεν ικανοποιούν τη σχέση (10.63), δηλαδή:

$$X_d\left(e^{j\omega}\right) \neq \frac{1}{2} X\left(e^{j\omega/2}\right)$$

Άσκηση 14 (συνέχεια)

Η ίδια παρατήρηση προκύπτει και από τη σύγκριση των επόμενων φασμάτων. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι το φαινόμενο αναδίπλωσης (αλλοίωσης) συχνοτήτων (aliasing-effect), επειδή όπως προκύπτει από το σχήμα το αρχικό σήμα δεν είναι πεπερασμένου εύρους ζώνης και ως εκ τούτου η μέγιστη συχνότητά του υπερβαίνει τη συχνότητα $\pi/2$. Επομένως, κατά την υποδειγματοληψία που πραγματοποιήσαμε, παραβιάστηκε το κριτήριο Nyquist.





(α) Φάσμα πλάτους της ακολουθίας $x[n] = u[n+2] - u[n-2]$
(β) Φάσμα πλάτους της ακολουθίας $x_d[n] = u[n+1] - u[n-1]$

Υπερδειγματοληψία

- Στην **υπερδειγματοληψία** (upsampling), το νέο σήμα $x_u[n]$ σχηματίζεται παρεμβάλλοντας πλήθος $N-1$ μηδενικών τιμών ανάμεσα σε δύο διαδοχικά δείγματα του $x[n]$:

$$x_u[n] = \begin{cases} x[n/N], & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

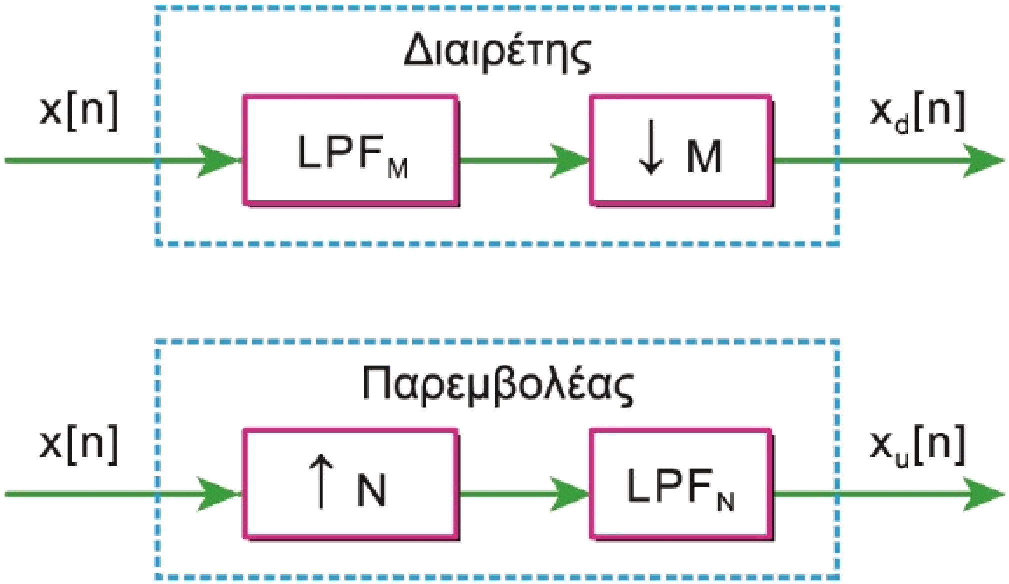
- Αν $X(e^{j\omega})$ είναι ο DTFT του σήματος $x[n]$, τότε ο DTFT του υποδειγματοληπτημένου σήματος $x_u[n]$, είναι:

$$X_u(e^{j\omega}) = \sum_{n=0,\pm N,\dots} x[n/N]\, e^{-jn\omega} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, e^{-jNm\omega} = X(e^{j\omega N})$$

- Η έκταση του σήματος στο χρόνο κατά έναν παράγοντα N, προκαλεί συρρίκνωση του φάσματος κατά τον ίδιο παράγοντα.

- Η υπερδειγματοληψία δεν οδηγεί σε παραβίαση του κριτηρίου Nyquist. Όμως μετά τον πολλαπλασιασμό συχνότητας πρέπει να απομακρυνθούν τα είδωλα της $X(e^{j\omega})$ εκτός αυτών που βρίσκονται σε ακέραια πολλαπλάσια του 2π. Αυτό γίνεται με το φιλτράρισμα του υπερδειγματοληπτημένου σήματος $x_u[n]$ με ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \pi/N$ και κέρδος N.

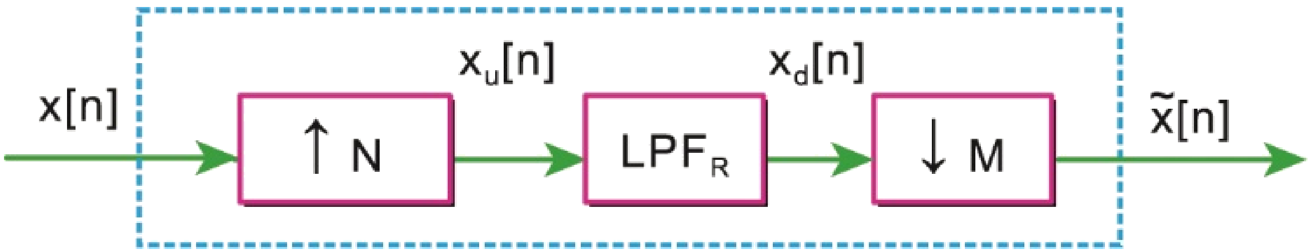
Διαιρέτης και Παρεμβολέας



- **Διαιρέτης** (decimator): η σε σειρά σύνδεση του διαιρέτη συχνότητας με το βαθυπερατό φίλτρο.
- **Παρεμβολέας** (interpolator): η σε σειρά σύνδεση του πολλαπλασιαστή συχνότητας με το βαθυπερατό φίλτρο.

Μετατροπή ρυθμού δειγματοληψίας κατά ρητό συντελεστή

- Για τη μετατροπή του ρυθμού δειγματοληψίας κατά ένα ρητό συντελεστή $R = N/M$, συνδέουμε σε σειρά έναν διαιρέτη (decimator), ο οποίος μειώνει τον ρυθμό δειγματοληψίας κατά έναν συντελεστή M, με έναν παρεμβολέα (interpolator), ο οποίος αυξάνει το ρυθμό δειγματοληψίας κατά έναν συντελεστή N.



Μετατροπέας ρητού ρυθμού δειγματοληψίας

Άσκηση 15

Η αποθήκευση ψηφιακού ήχου σε δίσκο CD χρησιμοποιεί $f_s = 44.1\ kHz$ ενώ σε μαγνητική ταινία (DAT) χρησιμοποιεί $f_s = 48\ kHz$. Να βρεθεί το φίλτρο στον μετατροπέα ρητού ρυθμού δειγματοληψίας ώστε να είναι δυνατή η απευθείας μεταφορά ψηφιοποιημένης μουσικής από CD σε DAT.

Απάντηση: Αναλύουμε τους ρυθμούς δειγματοληψίας σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και έχουμε: $f_{sDAT} = 2^7 3\ 5^3$ και $f_{sCD} = 2^2 3^2 5^2 7^2$.

$$R = \frac{M}{N} = \frac{2^7 3\ 5^3}{2^2\ 3^2\ 5^2\ 7^2} = \frac{2^5\ 5}{3\ 7^2} = \frac{160}{147}$$

Για μετατροπή ρυθμού δειγματοληψίας από 44.1 kHz σε 48 kHz, απαιτείται πολ/σμός συχνότητας με M=160 και κατόπιν διαίρεση συχνότητας με N=147.

Το βαθυπερατό φίλτρο μεταξύ του πολλαπλασιαστή και του διαιρέτη συχνότητας έχει συχνότητα αποκοπής:

$$\omega_c = \min\left\{\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{N}\right\} = \min\left\{\frac{\pi}{160}, \frac{\pi}{147}\right\} = \frac{\pi}{160}$$

και κέρδος $R = 160$.

Άσκηση 16

Δειγματοληπτούμε το αναλογικό σήμα $x_\alpha(t) = 1 + \cos(15\pi t)$ με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 0{,}1\ sec$ και το περνάμε από ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 2{,}5\ Hz$. Ποιο είναι το σήμα που παράγεται στην έξοδο του φίλτρου;

<u>Απάντηση</u>: Το αναλογικό σήμα περιέχει μια συνιστώσα συνεχούς με μηδενική συχνότητα και μία συνημιτονοειδή συνιστώσα με συχνότητα $2\pi F = 15\pi \Rightarrow$ $F = 7{,}5\ Hz$, η οποία είναι και η μέγιστη συχνότητα (F_{max}) του αναλογικού σήματος.

Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 1/T_s = 1/0{,}1\ sec\ = 10\ Hz$. Επειδή ισχύει $f_s = 7{,}5 < 10 = 2F_{max}$, προκύπτει ότι δεν ικανοποιείται το κριτήριο Nyquist, άρα θα εμφανιστεί αναδίπλωση συχνοτήτων για όσες συχνότητες είναι εκτός της φασματικής περιοχής που ορίζεται με βάση με τη συχνότητα δειγματοληψίας, δηλαδή της φασματικής περιοχής $[-f_s/2, f_s/2] = [-5Hz, 5Hz]$.

Επομένως, η συχνότητα $F = F_{max} = 7{,}5\ Hz$ του σήματος θα αναδιπλωθεί και θα εμφανίσει την ψευδεπίγραφη συχνότητα $F' = F - kf_s = 7{,}5 - k10 = 7{,}5 - 1x10 = -\ 2{,}5\ Hz$. Άρα, η συνημιτονοειδής συνιστώσα $\cos(15\pi t)$ συχνότητας 7,5 Hz του αναλογικού σήματος, όταν δειγματοληπτηθεί θα φαίνεται σαν ένα συνημίτονο συχνότητας 2,5 Hz.

Η συνιστώσα συνεχούς (DC component) δεν επηρεάζεται από τη δειγματοληψία.

Άσκηση 16 (συνέχεια)

Με βάση τα παραπάνω, το σήμα διακριτού χρόνου που προκύπτει από τη δειγματοληψία είναι:

$$x_s[n] = x_a(t)\Big|_{t=nTs=n/10} = 1 + \cos\left(\frac{15\pi}{10}n\right)$$

$$= 1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2}n\right) = 1 + \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)n = 1 + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

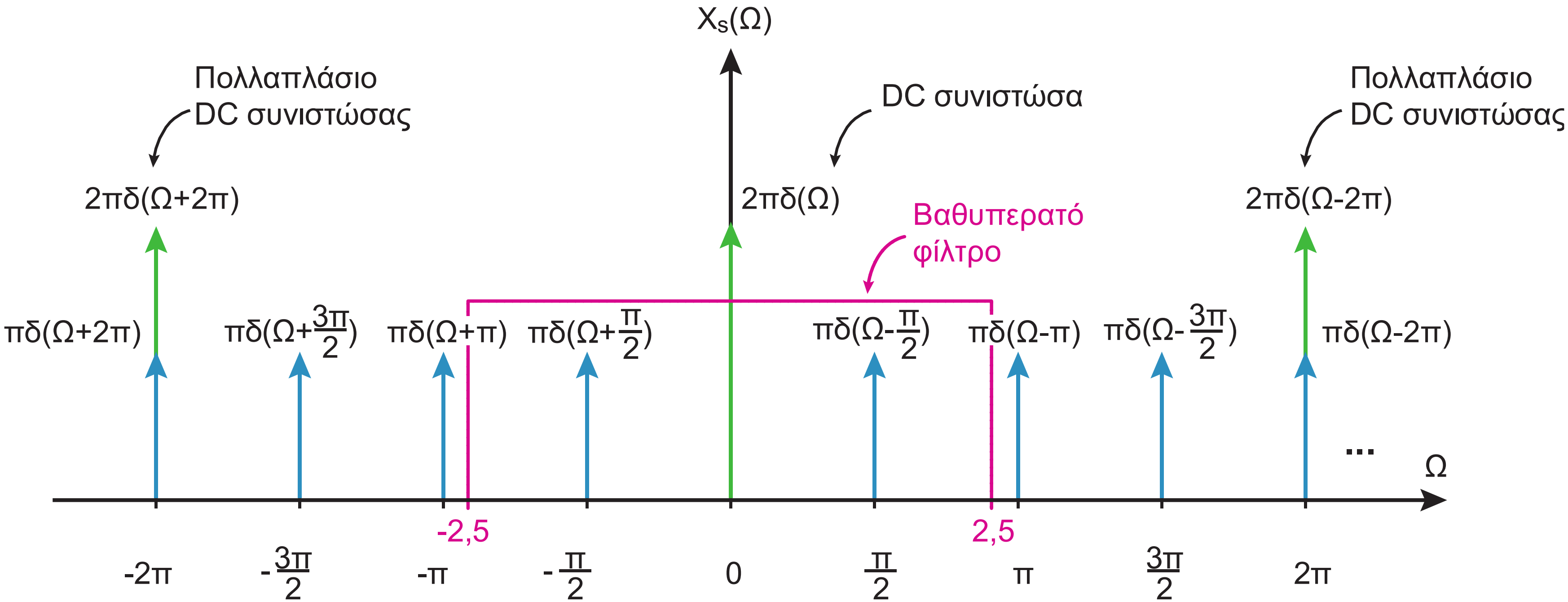
Για να υπολογίσουμε το σήμα στην έξοδο του βαθυπερατού φίλτρου, πρέπει να αποκτήσουμε τη φασματική μορφή του σήματος διακριτού χρόνου. Ο DTFT του δειγματοληπτημένου σήματος $x_s[n]$ είναι:

$$X_s(\Omega) = X_s\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\Omega T_s} = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\Omega - k\Omega_s\right)$$

$$= \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\Omega_s) + \pi\left[\delta\left(\Omega - k\Omega_s - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\Omega - k\Omega_s + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

όπου $\Omega_s = 2\pi/T_s$.

Άσκηση 16 (συνέχεια)



Φάσμα σήματος διακριτού χρόνου και φάσμα του βαθυπερατού φίλτρου.

Άσκηση 16 (συνέχεια)

Οι μοναδικές συνιστώσες του φάσματος του σήματος που εξέρχονται από το βαθυπερατό φίλτρο είναι οι:

$$\hat{X}_s(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega) + \pi\left[\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου βρίσκουμε ότι το αναλογικό σήμα που παράγεται στην έξοδο του βαθυπερατού φίλτρου είναι:

$$\hat{x}_s(t) = 1 + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$